UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

Universidade de Vigo

Estructuras Jerárquicas y Juegos Cooperativos con Utilidad Transferible

Autor

Matías Schuster Puga

11 de Enero de 2013

Directoras

M. Gloria Fiestras Janeiro

Estela Sánchez Rodríguez

Resumen

Uno de los problemas centrales de la teoría de juegos cooperativos se refiere a la cuestión de cómo repartir el valor generado conjuntamente por el grupo de jugadores teniendo en cuenta la estructura coalicional. En el modelo TU clásico, cualquier subconjunto de jugadores es libre para formar una coalición. Sin embargo, hay ocasiones en las que la cooperación entre jugadores puede estar restringida a una serie de limitaciones, y ciertas coaliciones pueden tener preferencia sobre otras.

En el presente trabajo se analiza un tipo especial de juegos, aquellos cuya cooperación está determinada por una estructura de prioridad. En el modelo propuesto, se asume que existe una jerarquía entre determinadas coaliciones. Además, se propone y se caracteriza una regla de reparto que se corresponde con el valor de Shapley aplicado al juego jerárquico que se define. En la parte práctica de este documento se aplica este valor jerárquico a conocidos juegos tales como el de bancarrota o aeropuerto.

Palabras clave: Juegos Cooperativos con Utilidad Transferible, Valor de Shapley, Estructuras Jerárquicas, Contribuciones Marginales, Juego de Bancarrota, Juego del Aeropuerto, Juego de las Caras.

Agradecimientos

Este trabajo no podría haberse realizado sin los conocimientos adquiridos en el presente Máster, habiéndome aportado muchas de sus asignaturas las nociones necesarias para llevar a cabo este proyecto.

La realización del presente trabajo final de Máster es fruto de las orientaciones, sugerencias y estímulos de las profesoras María Estela Sánchez Rodríguez y María Gloria Fiestras Janeiro, quienes me han conducido durante estos meses, mostrando en cada momento una inmejorable disposición ante las dudas que durante la realización del mismo me surgieron, aportando valiosas observaciones que en todo momento guiaron y marcaron esta investigación. También me gustaría agradecer a Ignacio García Jurado por mostrarme en primera instancia lo interesante que puede llegar a ser la Teoría de Juegos. Agradecer al grupo SIDOR por la financiación recibida para la realización de este proyecto a través de un contrato de investigación.

Y, por supuesto a mi padre, a mis hermanos, a mi novia y a mis amig@s que siempre me han ayudado y animado a seguir trabajando incluso en los momentos más duros.

Vigo, 2013

Matías Schuster

Índice general

Índice de figuras

Índice de Tablas

Introducción

La teoría de juegos es un área de la matemática aplicada que utiliza modelos para estudiar situaciones en las que existen conflictos entre varios agentes. El objetivo es estudiar las estrategias óptimas así como prever el comportamiento de los individuos en las distintas situaciones. En otras palabras, se estudia la elección de la conducta óptima cuando los costes y los beneficios de cada opción no están fijados de antemano, sino que dependen de las elecciones de otros individuos.

Una de las dificultades con la que nos podemos encontrar al analizar un problema complejo es la de discernir quiénes son los jugadores, las estrategias y, también, los pagos asociados a cada combinación de estrategias dada. Para la teoría de juegos es fundamental la teoría de la utilidad, que permite que las personas muestren sus preferencias, y en consecuencia, tomen decisiones racionales. Una de las suposiciones básicas en las que se apoya la teoría de juegos es aquella en la que se considera que los jugadores son racionales y se comportan racionalmente.

La teoría de juegos analiza las situaciones desde dos perspectivas distintas: aquellas en las que los jugadores no disponen de mecanismos para tomar acuerdos vinculantes, también llamados juegos no cooperativos, y aquellas situaciones en las que los jugadores sí disponen de estos mecanismos, los conocidos como juegos cooperativos. La posibilidad de la cooperación permite a los agentes coordinar sus estrategias para conseguir la mayor utilidad posible. El hecho de que los agentes cooperen depende de las habilidades y de las relaciones entre ellos. Es habitual encontrar situaciones conflictivas en las que los agentes además de coordinarse para maximizar la utilidad total, forman coaliciones o grupos. Estos juegos son conocidos como juegos cooperativos en forma característica o juegos coalicionales.

Desarrollada en sus comienzos como una herramienta para entender el comportamiento de la economía, la teoría de juegos se usa actualmente en muchos campos, como en la biología, sociología, psicología y filosofía. Experimentó un crecimiento sustancial y se formalizó por primera vez a partir del libro *The Theory of games and economic behavior* del matemático John von Neumann y el economista Oskar Morgenstern, en 1944, debido sobre todo a su aplicación a la estrategia militar.

El uso y aplicación de la teoría de juegos ha crecido y sigue creciendo enormemente. La importancia de la teoría de juegos se ha puesto de manifiesto a partir de 1994 con la concesión del premio nobel de economía a reconocidos teóricos de juegos. El último de ellos, el conseguido por Alvin Roth y Lloyd Shapley en 2012 por su trabajo en la teoría de las asignaciones estables y el diseño de mercado.

Estructura de los capítulos

Se ha dividido este trabajo en 4 capítulos. En el Capítulo 1 se realiza una introducción a la teoría de juegos cooperativos con utilidad transferible, además de presentarse algunas definiciones básicas del modelo y varios ejemplos ilustrativos. Hablaremos de algunos tipos de solución y definimos algunos de los juegos más conocidos.

En la parte central del proyecto, el Capítulo 2, se analiza un tipo especial de juegos, aquellos cuya cooperación está determinada por una estructura concreta. Se introduce como regla de reparto un valor que se corresponde con el valor de Shapley aplicado al juego jerárquico que se define.

En el Capítulo 3 de este documento se aplica este valor jerárquico a conocidos juegos tales como el de bancarrota o aeropuerto.

En el Capítulo 4 y último, se describen las funciones que se han añadido al paquete TUGlabExtended que se emplean en el Capítulo 3.

Capítulo 1

Preliminares

En este apartado se presentarán los conceptos necesarios para la comprensión del modelo introducido en el Capítulo 2. Se realizará un primer análisis de los juegos en forma característica, también llamados juegos coalicionales o con utilidad transferible (modelo TU). Después de exponer el modelo TU se introducen las definiciones de los juegos superaditivos, monótonos, convexos y de unanimidad. Posteriormente se exponen conceptos de solución como el núcleo, el conjunto de Weber, el valor de Owen y el valor de Shapley. Estos conceptos serán ilustrados a través de una serie de ejemplos sencillos que facilitarán su comprensión.

1.1. El modelo TU

En muchas situaciones de la vida cotidiana nos percatamos de la necesidad de cooperar. Es fácil encontrar ejemplos sencillos de cooperación, ya sea entre países, entre políticos, entre estudiantes, etc. La cooperación puede producir o bien un aumento de las ganancias o bien una reducción de los costes, pero nunca está exenta de conflictos y dificultades. Cualquier acuerdo cooperativo plantea un problema clave: cómo distribuir el beneficio de la cooperación entre los agentes involucrados. El modelo TU nos permite representar y analizar estas situaciones.

1.1.1. Clasificación y definiciones básicas

Como se ha mencionado con anterioridad, una primera clasificación de la teoría de juegos es aquella que divide a los juegos en dos clases. Por un lado los juegos cooperativos, que son aquellos en los que los jugadores pueden comunicarse, negociar y llegar a acuerdos vinculantes entre ellos. Por el otro, aquellos en los que los jugadores no pueden llegar a acuerdos, son denominados juegos no cooperativos. Dentro de los juegos cooperativos encontramos los juegos TU o NTU en función de si su utilidad es transferible o no. Si se supone que la utilidad que una coalición puede garantizarse se puede repartir de cualquier forma entre sus miembros, es decir, el bien es infinitamente divisible, estaremos ante un juego TU. Sin embargo, si existen restricciones que condicionan los pagos estaremos ante un juego NTU. En este documento nos centraremos en los juegos TU.

Definición 1.1 *Un juego cooperativo con utilidad transferible, es decir, un juego TU, es un par* (N, v) *siendo* $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ *un conjunto finito y* v *una función*

$$v : 2^N \to \mathbb{R}$$

donde los elementos de N *se denominan jugadores,* 2^N *denota los subconjuntos de* N *y son las coaliciones, y* v *es la función característica.*

El número de jugadores de la coalición $S \subset N$ se denotará por $|S|$. Con el fin de simplificar la notación, en lugar de escribir $v(\{1, 2, 4\})$ para referirnos al valor asignado por la función característica v a la coalición $S = \{1, 2, 4\}$ lo denotaremos por $v(1, 2, 4)$. A lo largo de este trabajo expresaremos frecuentemente el juego (N, v) como un vector fila. Por ejemplo, para un juego (N, v) con $N = \{1, 2, 3\}$ la función característica aparecerá representada de la siguiente manera

$$v = [v(1), v(2), v(3), v(12), v(13), v(23), v(123)].$$

Denotaremos por G^n al conjunto de todos los juegos TU de n jugadores.

Son interesantes aquellos juegos en los que el beneficio de la unión de dos coaliciones es igual o superior a la suma de los beneficios individuales. En términos de coste, serán interesantes aquellos juegos en los que la unión de dos coaliciones proporcione un coste menor o igual que la suma de los costes individuales.

Definición 1.2 *Sea* (N, v) *un juego TU.*

- *Diremos que* (N, v) *es superaditivo si*

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T), \text{ para todo } S, T \in 2^N, \ S \cap T = \emptyset. \tag{1.1}$$

- *Diremos que* (N, v) *es aditivo si*

$$v(S \cup T) = v(S) + v(T), \text{ para todo } S, T \in 2^N, \ S \cap T = \emptyset. \tag{1.2}$$

Si un juego es superaditivo, los jugadores tienen incentivos para formar la gran coalición, es decir, la coalición de los N jugadores.

Ejemplo 1.3 *Veamos si el siguiente juego* (N, v) *es superaditivo. La función característica de dicho juego con* $N = \{1, 2, 3\}$ *es*

$$v(1) = 0, \quad v(2) = 0, \quad v(3) = 2, \quad v(1, 2) = 1, \quad v(1, 3) = 1,$$
$$v(2, 3) = 2, \quad v(1, 2, 3) = 3.$$

Se observa que el juego no es superaditivo debido a que $v(1, 3) \ngeq v(1) + v(3)$*, y por tanto el jugador* 3 *no tiene incentivos para formar la coalición con el jugador 1.*

A continuación presentamos el concepto de juegos estratégicamente equivalentes ya que será importante a la hora de preservar importantes conceptos de solución.

Definición 1.4 *Un juego* (N, v) *es estratégicamente equivalente a otro juego* (N, w) *si existen* $k > 0$ *y un juego aditivo* (N, a) *tales que*

$$w(S) = kv(S) + \sum_{i \in S} a_i, \text{ para todo } S \in 2^N.$$

Se observa que ser estratégicamente equivalente es una relación de equivalencia en G^n y, por tanto, genera una partición del conjunto de juegos en clases de equivalencia.

Un juego es monótono siempre que el agregar jugadores a una coalición dada no implique una disminución de la utilidad.

Definición 1.5 *Un juego* (N, v) *es monótono si* $v(S) \leq v(T)$ *para todas las coaliciones* $S, T \in 2^N$ *tales que* $S \subset T$*.*

Se comprueba fácilmente que si un juego es monótono entonces $v(S) \geq 0$ para toda $S \in 2^N$, y $v(S \cup \{i\}) - v(S) \geq 0$ para todo $i \in N$ y $S \subseteq N \setminus \{i\}$.

Se definen a continuación los juegos convexos, una de las clases más importantes.

Definición 1.6 *Un juego (N, v) es convexo si*

$$v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T) \text{ para todo par de coaliciones } S, T \in 2^N, \tag{1.3}$$

o equivalentemente

$$v(T \cup i) - v(T) \geq v(S \cup i) - v(S) \text{ para cualquier } S \subset T \subseteq N \setminus i. \tag{1.4}$$

Intuitivamente la Definición 1.6 nos dice que, si una coalición S está contenida en otra coalición T, el juego es convexo si la contribución de un jugador i a T es mayor que a S. Es decir, un juego es convexo si la aportación de un jugador a una coalición no decrece al incorporar más jugadores a esa coalición. Se debe notar que si un juego es convexo entonces también será superaditivo. Pongamos un par de ejemplos para ilustrar el concepto de convexidad y su relación con la superaditividad.

Ejemplo 1.7 *Supongamos que la función característica de un juego (N, v) con $N = \{1, 2, 3\}$ viene dada por*

$$v(1) = 0, \quad v(2) = 0, \quad v(3) = 0, \quad v(1,2) = 1, \quad v(1,3) = 1,$$
$$v(2,3) = 5, \quad v(1,2,3) = 5.$$

Se puede observar que el juego es superaditivo, pero no es convexo ya que $v(1,2,3) + v(2) \ngeq v(2,3) + v(1,2)$.

Veamos otro ejemplo.

Ejemplo 1.8 *Si se tiene un juego (N, v) con $N = \{1, 2, 3\}$ y función característica la siguiente*

$$v(1) = 0, \quad v(2) = 0, \quad v(3) = 0, \quad v(1,2) = 2, \quad v(1,3) = 2,$$
$$v(2,3) = 2, \quad v(1,2,3) = 6.$$

El juego es convexo y, por consiguiente, también será superaditivo.

A continuación se definen los juegos de unanimidad que constituyen una base del espacio vectorial de los juegos TU con conjunto de jugadores N.

Definición 1.9 *Se define el juego de unanimidad de la coalición $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$, como aquel juego (N, u_S) cuya función característica viene dada por*

$$u_S(T) = \begin{cases} 1 & \textit{si } S \subseteq T \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

El conjunto de los juegos de unanimidad constituyen una base en G^n, es decir, que todo juego coalicional (N, v) se puede descomponer de forma única como combinación lineal de los juegos de unanimidad, es decir,

$$v = \sum_{S \subseteq N} \alpha_S u_S, \;\; \alpha_S \in \mathbb{R}, \;\; S \subseteq N, \;\; S \neq \emptyset. \tag{1.5}$$

El objetivo lógico de los juegos cooperativos con utilidad transferible es que se forme la gran coalición N y que los jugadores se repartan entre ellos el beneficio de la cooperación. La pregunta que surge a continuación es la de cómo dividir las ganancias entre los jugadores y analizar que propiedades caracterizan el reparto propuesto.

Definición 1.10 *Un reparto es un vector $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, donde cada componente x_i indica la cantidad asignada a i. La suma de las cantidades asignadas a los miembros de una coalición $S \subseteq N$ se denotará por $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$.*

Se seleccionarán aquellos repartos que cumplan los siguientes criterios mínimos:

1. Racionalidad individual: cada jugador recibe, como mínimo, la utilidad que puede garantizarse por sí mismo.

2. Eficiencia: un reparto es eficiente si se distribuye totalmente la utilidad generada por la cooperación.

Todos los repartos que cumplan estas dos propiedades se conocen con el nombre de imputaciones.

Definición 1.11 *Sea (N, v) un juego TU.*

- *Se define el conjunto de preimputaciones del juego (N, v) como el conjunto de todos los repartos eficientes.*

$$I^*(N, v) = \{x = (x_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in N} x_i = v(N)\}. \tag{1.6}$$

- *El conjunto de imputaciones de un juego* (N, v) *está formado por los repartos eficientes que verifiquen además la propiedad de racionalidad individual*

$$I(N, v) = \{x = (x_i)_{i \in N} \in I^*(N, v) : x_i \geq v(\{i\}), \text{ para todo } i \in N\}. \tag{1.7}$$

Claramente el conjunto de imputaciones $I(N, v)$ puede ser vacío, puede tener un único reparto ó mas de un reparto. Se llama solución de un juego TU a un subconjunto de repartos. Por ejemplo, el conjunto de preimputaciones y el conjunto de imputaciones son casos particulares de solución. Cuando una solución es siempre unitaria hablamos de solución puntual o regla de reparto. En otro caso, se trata de una solución tipo conjunto. A continuación veremos una serie de soluciones que se pueden utilizar para repartir el beneficio de la cooperación entre los jugadores. En concreto, examinaremos el núcleo, el conjunto de Weber y el valor de Shapley.

1.1.2. Conceptos de solución tipo conjunto

Las soluciones tipo conjunto establecen criterios para descartar ciertos vectores de pagos del conjunto de imputaciones. Las soluciones tipo conjunto pueden seleccionar uno, un número finito, un número infinito o incluso ningún vector de reparto. Definiremos dos soluciones tipo conjunto, el núcleo y el conjunto de Weber.

El núcleo

El núcleo fue introducido por Gillies (Gillies, 1953). Si el núcleo es vacío indica que el juego es inestable, esto es, cualquiera que haya sido el reparto elegido, habrá una coalición que reciba menos de lo que puede garantizarse por sí misma. Será interesante analizar aquellos juegos que tienen núcleo no vacío.

Definición 1.12 *El núcleo de un juego* (N, v) *es el conjunto*

$$Core(N, v) = \{x \in I(N, v) : \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \text{ para todo } S \subset N, \ S \neq \emptyset\}. \tag{1.8}$$

Las asignaciones elegidas de esta forma son estables, ya que ninguna coalición tendrá incentivos para desviarse y obtener un reparto mejor de lo que le asegura el núcleo. Veamos un ejemplo para ilustrar el concepto de núcleo.

Ejemplo 1.13 *Considérese el juego (N, v) con $N = \{1, 2, 3\}$ y función característica la siguiente*

$$v(1) = 0, \quad v(2) = 0, \quad v(3) = 0, \quad v(1,2) = 15, \quad v(1,3) = 5,$$
$$v(2,3) = 5, \quad v(1,2,3) = 20.$$

El núcleo del juego vendrá dado por el siguiente subconjunto de imputaciones:

$$Core(N, v) = \{x \in I(N, v) : x_1 + x_2 \geq 15,\ x_1 + x_3 \geq 5,\ x_2 + x_3 \geq 5\}.$$

En la Figura 1.1 se muestra el núcleo de este juego.

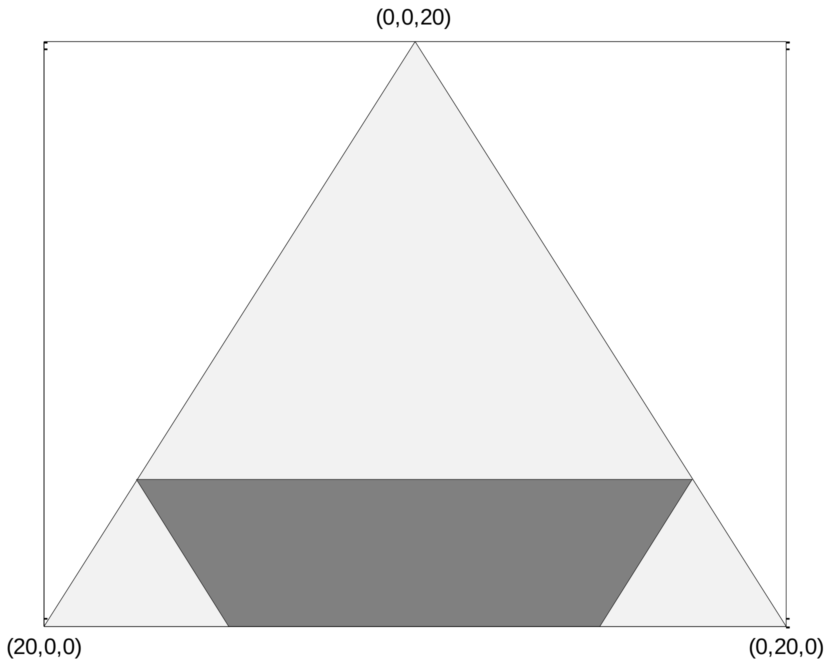

Figura 1.1: Núcleo del juego (en gris oscuro).

A continuación definimos los juegos de las caras introducidos en González-Díaz y Sánchez–Rodríguez (2008) que se utilizarán en el Capítulo 2.

Definición 1.14 *Sea (N, v) un juego cuyo núcleo no es vacío y sea $T \subset N$. El juego de la cara T, (N, v_{F_T}), se define para cada $S \subseteq N$ como*

$$v_{F_T}(S) = v((S \cap T) \cup (N \setminus T)) - v(N \setminus T) + v(S \cap (N \setminus T)). \tag{1.9}$$

Si un juego es convexo, en el juego de la cara (N, v_{F_T}) el valor de la coalición T, que coincide con $v(N) - v(N \setminus T)$, es su máximo pago en el núcleo, y el valor de la coalición $N \setminus T$ es su mínimo pago en el núcleo, $v(N \setminus T)$. Así pues, cuando el juego es convexo, cada cara del núcleo es a su vez el núcleo de un juego de una cara. A continuación ilustramos la construcción de los juegos de las caras a través de un ejemplo.

Ejemplo 1.15 *Consideremos un juego TU (N, v) con $N = \{1, 2, 3\}$,*

$$\mathcal{Z} = \begin{pmatrix} v(123) - v(23), v(2), v(3), v(123) - v(23) + v(2), v(123) - v(23) + v(3), v(23), v(123) \\ v(1), v(123) - v(13), v(3), v(123) - v(13) + v(1), v(13), v(123) - v(13) + v(3), v(123) \\ v(1), v(2), v(123) - v(12), v(12), v(123) - v(12) + v(1), v(123) - v(12) + v(2), v(123) \\ v(13) - v(3), v(23) - v(3), v(3), v(123) - v(3), v(13), v(23), v(123) \\ v(12) - v(2), v(2), v(23) - v(2), v(12), v(123) - v(2), v(23), v(123) \\ v(1), v(12) - v(1), v(13) - v(1), v(12), v(13), v(123) - v(1), v(123) \end{pmatrix}$$

En cada fila de la matriz $\mathcal{Z}$ aparece la función característica correspondiente al juego de la cara para una coalición $T \subset N$. Por ejemplo, para la coalición $T = \{2\}$, la función característica v_{F_T} se corresponde con la segunda fila. Si aplicamos estas expresiones al juego (N, v) con función característica

$$v(1) = 0, \quad v(2) = 0, \quad v(3) = 0, \quad v(1,2) = 2, \quad v(1,3) = 4,$$
$$v(2,3) = 4, \quad v(1,2,3) = 23.$$

Los juegos de las caras son

$$\begin{pmatrix} 19, & 0, & 0, & 19, & 19, & 4, & 23 \\ 0, & 19, & 0, & 19, & 4, & 19, & 23 \\ 0, & 0, & 21, & 2, & 21, & 21, & 23 \\ 4, & 4, & 0, & 23, & 4, & 4, & 23 \\ 2, & 0, & 4, & 2, & 23, & 4, & 23 \\ 0, & 2, & 4, & 2, & 4, & 23, & 23 \end{pmatrix}$$

Cada fila de la matriz es un juego de la cara. Por ejemplo, el juego de la cara para la coalición $T = \{1, 2\}$ será

$$v_T = [4,\ 4,\ 0,\ 23,\ 4,\ 4,\ 23].$$

El conjunto de Weber

Para introducir el conjunto de Weber (Weber, 1988) se necesita definir previamente un tipo especial de asignaciones eficientes, llamadas contribuciones marginales, que de ser estables, son puntos extremos del núcleo. El conjunto de permutaciones de un conjunto finito de N se denota por $\Pi(N)$, es decir, $\Pi(N) = \{\sigma : N \to N \text{ tal que } \sigma \text{ es biyectiva}\}$.

Definición 1.16 *Sea $(N, v) \in G^n$ y $\sigma \in \Pi(N)$. Se define el vector de contribuciones marginales asociado al orden $\sigma, m^\sigma(N, v) = (m_i^\sigma(v))_{i\in N} \in \mathbb{R}^n$, como*

$$m_i^\sigma(v) = v(P_\sigma(i) \cup \{i\}) - v(P_\sigma(i)) \tag{1.10}$$

donde $P_\sigma(i) = \{j \in N : \sigma(j) < \sigma(i)\}$, es decir, es el conjunto de jugadores que preceden al jugador i en el orden σ.

Para cada orden de la gran coalición se calcula la contribución de cada jugador a los predecesores de acuerdo al orden elegido. Estas contribuciones definen el vector marginal asociado al orden dado. El conjunto de Weber se corresponde con la envoltura convexa de los $n!$ vectores de contribuciones marginales.

Definición 1.17 *Sea $(N, v) \in G^n$.*

$$\mathcal{W}(N, v) = conv\{m^\sigma(v) : \sigma \in \pi(N)\} = \{\sum_{j=1}^{n!} \alpha_j m^\sigma(v) : \alpha_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n!, \sum_{j=1}^{n!} \alpha_j = 1\}.$$

El conjunto de Weber presenta las siguientes características: no es vacío, es cerrado, es acotado, es convexo y contiene al núcleo. Para la clase de los juegos convexos, el conjunto de Weber coincide con el núcleo.

1.1.3. Conceptos de solución puntuales

En este apartado se estudian conceptos de solución que determinan un único reparto. La primera solución puntual que mostramos es el valor de Shapley. El valor de Shapley quizás sea el concepto de solución puntual más utilizado para juegos cooperativos.

El valor de Shapley

Definición 1.18 *El valor de Shapley (Shapley, 1953) de un juego* $(N, v) \in G^n$ *es un vector* $Sh(N, v) = (Sh_1(N, v), ..., Sh_n(N, v))$ *cuyas componentes se obtienen mediante la siguiente expresión*

$$Sh_i(N, v) = \frac{1}{n!} \sum_{S \subseteq N : i \in S}^{\infty} (s-1)!(n-s)!(v(S) - v(S \setminus \{i\}) \quad si \quad i \in N. \tag{1.11}$$

El valor de Shapley se puede obtener utilizando los órdenes de los jugadores y los vectores de contribuciones marginales. El valor de Shapley es la media aritmética de los vectores de contribuciones marginales. Por tanto, si el juego es convexo, el valor de Shapley está en el núcleo.

Ejemplo 1.19 *Supongamos que tres personas disponen de distintas partes de un ajedrez que completo, cuesta 30 Euros. El jugador* 1 *dispone de todas las piezas salvo 4, el jugador* 2 *posee el tablero y el jugador* 3 *tiene las 4 piezas que le faltan al jugador* 1*. Una forma de modelar esta situación es mediante un juego* (N, v) *con* $N = \{1, 2, 3\}$*, y función característica dada por*

$$v(1) = 0, \quad v(2) = 10, \quad v(3) = 0, \quad v(1,2) = 10, \quad v(1,3) = 20,$$
$$v(2,3) = 10, \quad v(1,2,3) = 30.$$

Supongamos que los 3 jugadores deciden cooperar para poder vender el ajedrez completo, y así poder llevarse $v(N)$*. La cuestión a continuación es saber como dividir ese* $v(N)$ *entre los 3 jugadores. En la Tabla 1.1 se muestran los vectores de contribuciones marginales del juego.*

El reparto obtenido a través del valor de Shapley estipula que los 3 jugadores deben llevarse la misma cantidad, 10 Euros:

$$Sh(N, v) = (\tfrac{60}{6}, \tfrac{60}{6}, \tfrac{60}{6}).$$

A continuación se enuncian unas propiedades que caracterizan el valor de Shapley. Sea G^n la familia de todos los juegos TU de n jugadores y $\varphi : G^n \to \mathbb{R}^n$ una regla de reparto, es decir, una aplicación que a cada juego le asocia un vector n-dimensional.

Definición 1.20 *Sea* φ *una regla de reparto definida en el conjunto* G^n*.*

	Jugadores		
Orden	**1**	**2**	**3**
123	0	10	20
132	0	10	20
213	0	10	20
231	20	10	0
312	20	10	0
321	20	10	0
Contribuciones	**60**	**60**	**60**

Tabla 1.1: Vectores de contribuciones marginales para el juego (N, v).

- *La regla de reparto* φ *es eficiente si para todo* $(N, v) \in G^n$,

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(N, v) = v(N). \tag{1.12}$$

- *La regla de reparto* φ *satisface la propiedad de jugador nulo si para todo* $(N, v) \in G^n$ *e* i *jugador nulo,*

$$\varphi_i(N, v) = 0.$$

Dado un juego $(N, v) \in G^n$ *e* $i \in N$*, se dice que* i *es un jugador nulo si y solo si*

$$v(S \cup i) - v(S) = 0, \quad \textit{para cualquier} \quad S \subseteq N \setminus i.$$

- *La regla de reparto* φ *satisface la propiedad de simetría si para todo* $(N, v) \in G^n$ *y para todo par i,j de jugadores simétricos,*

$$\varphi_i(N, v) = \varphi_j(N, v).$$

Dado un juego $(N, v) \in G^n$ *e* $i, j \in N$*, se dice que* i *y* j *son jugadores simétricos si*

$$v(S \cup i) = v(S \cup j), \quad \textit{para cualquier} \quad S \subseteq N \setminus \{i, j\}.$$

- *La regla de reparto* φ *cumple la propiedad de aditividad si para todo* (N, v),$(N, w) \in G^n$ *se verifica que*

$$\varphi(N, v + w) = \varphi(N, v) + \varphi(N, w).$$

Tras la presentación formal de algunas de las principales propiedades de una regla de reparto, se explica el significado de las mismas.

La propiedad de eficiencia indica que la suma de las asignaciones que reciben todos los jugadores debe coincidir con el valor de gran coalición.

La propiedad de jugador nulo establece que si un jugador no realiza aportación a ninguna coalición entonces no debe recibir asignación.

La propiedad de simetría indica que si dos jugadores son intercambiables en el juego, deben recibir el mismo pago.

La propiedad de aditividad establece que el pago que reciben los jugadores en un juego es igual a la suma de los pagos que recibirían si el juego se descompone en suma de dos.

Teorema 1.21 *Existe un único valor en G^n que satisface las propiedades de eficiencia, jugador nulo, simetría y aditividad, y es el valor de Shapley.*

Es decir, si φ es una regla de reparto en G^n que verifica los axiomas de eficiencia, jugador nulo, simetría y aditividad, entonces $\varphi = Sh$.

1.1.4. Juegos TU con uniones a priori

En algunas situaciones los agentes están agrupados por diversas razones, ideológicas, geográficas, etc, de modo que esta agrupación modifica la cooperación. Owen (Owen, 1977) planteó un modelo que representa esta situación.

Definición 1.22 *Sea $(N, v) \in G^n$ y $P = \{P_1, ..., P_m\}$ una partición de N*[1]*. La terna (N, v, P) se llama juego con uniones a priori.*

Denotaremos por G^n_P al conjunto de juegos con sistema de uniones a priori con n jugadores. Una regla de reparto φ en G^n_P es una aplicacion $\varphi : G^n_P \to \mathbb{R}^n$ que a cada $(N, v, P) \in G^n_P$ le asigna un vector de $\mathbb{R}^n$.

Owen define un reparto de $v(N)$ que tiene en cuenta el sistema de uniones a priori. Se trata del valor coalicional o valor de Owen.

[1] Una familia de coaliciones $P = \{P_1, ..., P_m\}$ es una partición de N si y solo si $\bigcup_{j=1}^{m} P_j = N$,$P_j \cap P_k = \emptyset$ si $j \neq k$.

El valor de Owen

Definición 1.23 *Sea (N, v, P) un juego con un sistema de uniones a priori P. El valor de Owen, o valor coalicional de (N, v, P), se define para cada $i \in N$ como*

$$\psi_i(N, v, P) = \sum_{S \subset M : j \notin S} \sum_{K \subset P_j : i \notin K} \frac{k!(p_j - k - 1)!s!(m - s - 1)!}{p_j!m!} (v(Q \cup K \cup \{i\}) - v(Q \cup K))$$

siendo $Q = \bigcup_{k \in S} P_k$ para cada $S \subset M$, j el único índice para el que $i \in P_j$ y $p_j = |P_j|$.

Se definen a continuación nuevos axiomas de una regla de reparto con el propósito de dar una caracterización del valor de Owen.

Definición 1.24 *Sea $(N, v, P) \in G_P^n$ y φ una regla de reparto en G_P^n.*

- *La regla de reparto φ verifica la propiedad de eficiencia si*

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(N, v, P) = v(N).$$

- *La regla φ verifica la propiedad de simetría en cada unión si para todo $(N, v, P) \in G_P^n$, $i, j \in P_k$, tal que $v(S \cup i) = v(S \cup j)$ para cualquier $S \subseteq N \backslash \{i, j\}$,*

$$\varphi_i(N, v, P) = \varphi_j(N, v, P).$$

- *La regla φ satisface la propiedad de simetría en el cociente si para todo $(N, v, P) \in G_P^n$ y $P_k, P_l \in P$ tales que $v_P(S \cup k) = v_P(S \cup l)$ para $S \subseteq M \backslash \{k, l\}$,*

$$\sum_{i \in P_k} \varphi_i(N, v, P) = \sum_{i \in P_l} \varphi_i(N, v, P).$$

  Dado un juego $(N, v) \in G^n$ y P un sistema de coaliciones a priori. Se define el juego cociente, (M, v_P), como aquel juego TU con conjunto de jugadores $M = \{1, ..., m\}$ y función característica

$$v_P(S) = v(\bigcup_{j \in S} P_j), \text{ para todo } S \subseteq M.$$

- *La regla φ verifica la propiedad de jugador nulo si para todo $(N, v, P) \in G_P^n$ e i jugador nulo,*

$$\varphi_i(N, v, P) = 0.$$

- *La regla φ satisface la propiedad de aditividad si para todo (N, v, P), $(N, w, P) \in G_P^n$ se verifica que*

$$\varphi(N, v + w, P) = \varphi(N, v, P) + \varphi(N, w, P).$$

Teorema 1.25 *Existe un único valor φ en G_P^n que satisface las propiedades de eficiencia, jugador nulo, simetría en cada unión, simetría en el cociente y aditividad, y es el valor coalicional o valor de Owen, es decir, $\varphi = \psi$.*

Ejemplo 1.26 *Si en el Ejemplo 1.19 se considera el sistema de uniones $P = \{\{1, 3\}, \{2\}\}$ es decir, que los jugadores 1 y 3 se coaligan, los vectores de contribuciones marginales pasarían a ser los introducidos en la Tabla 1.2.*

	Jugadores		
Orden	**1**	**2**	**3**
132	0	10	20
213	0	10	20
231	20	10	0
312	20	10	0
	40	**40**	**40**

Tabla 1.2: Vectores de contribuciones marginales del juego $(N, v, \{\{1, 3\}, \{2\}\})$.

Así, el valor de Owen es:

$$\psi = (\tfrac{40}{4}, \tfrac{40}{4}, \tfrac{40}{4}).$$

Vemos como para este caso el valor de Owen y el valor de Shapley coinciden, pero esto no tiene porque ser así.

1.2. Algunos ejemplos clásicos

En este apartado se presentan algunas clases de juegos asociados a problemas concretos con el fin de asentar los principios básicos para la mejor comprensión de los ejemplos del Capítulo 3 de este trabajo.

El juego de Bancarrota

Una quiebra o bancarrota es una situación jurídica en la que una empresa o institución no puede hacer frente a los pagos que debe realizar porque éstos son superiores a sus recursos económicos disponibles. Es una situación de insolvencia generalizada y permanente. Esta situación crítica que conlleva muchos problemas, entre ellos adquiere gran relevancia la cuestión de cómo dividir el valor neto de la empresa entre sus acreedores. Nos encontramos ante una situación en la que hay un problema de distribución, hay que satisfacer las demandas de los acreedores disponiendo de una cantidad insuficiente. Un modo de abordar este problema es representar el problema de bancarrota mediante un juego cooperativo, que se denomina Juego de Bancarrota.

Definición 1.27 *Un problema de Bancarrota es aquel en el que la propiedad o estado E de la empresa en quiebra debe ser dividido entre n agentes o acreedores. Las demandas de los acreedores vienen dadas por el vector* $d = (d_1, d_2, d_3, ..., d_n)$. *Un par* (E, d) *es un problema de bancarrota cuando* $0 < E \leq d_1 + d_2 + ... + d_n$ *, es decir, cuando el estado E que se va a dividir es insuficiente para satisfacer las demandas de todos los acreedores.*

O´Neill (1982) y, posteriormente, Aumann y Maschler (1985) reformularon esta situación utilizando un juego TU.

Definición 1.28 *Se define el juego cooperativo* (N, v) *asociado al problema de bancarrota* (E, d) *como aquel juego con conjunto de jugadores* $N = \{1, ..., n\}$ *y función característica*

$$v(S) = max\{0, E - \sum_{i \in N \setminus S} d_i\}, S \subseteq N. \tag{1.13}$$

Mediante esta expresión se obtiene el juego pesimista, ya que se asocia a cada coalición lo que queda del estado una vez satisfechas completamente las demandas de los acreedores ajenos a la coalición.

Dado que los juegos de bancarrota son convexos, el valor de Shapley pertenece al núcleo del juego. Los juegos de bancarrota han suscitado una gran atención desde su introducción, tanto por su aplicación a casos reales como a nivel académico.

El juego del Aeropuerto

Supongamos que tenemos aviones de m tamaños diferentes que operan en un mismo aeropuerto. Sea N el conjunto de todas las operaciones de aterrizaje y despegue que realizan esos aviones. Ponemos, entonces, escribir $N = \cup_{j=1}^{m} N_j$ donde N_j es el conjunto de operaciones de los aviones de tamaño j, para $j = \{1, \ldots, m\}$ y siendo $N_j \cap N_k = \emptyset$ si $j \neq k$. Suponemos que los aviones de tipo 1 necesitan un tamaño de pista más pequeño que los de tipo 2; éstos necesitan un tamaño de pista más pequeño que los de tipo 3, y así sucesivamente. Si denotamos por c_j el coste de construcción de la pista necesaria para las operaciones de aviones tipo j, con $j = \{1, \ldots, m\}$, entonces $c = \{c_1 < c_2 < \ldots < c_m\}$. El objetivo es distribuir el coste de una pista que pueda ser utilizada por todos los tipos de aviones. Este problema así definido se conoce como problema del aeropuerto y lo representamos por (N, c). Littlechild y Owen (1973) representaron esta situación mediante un juego TU.

Definición 1.29 *Sea (N, c) un problema del aeropuerto. El juego TU del aeropuerto (N, v) está definido por*

$$v(S) = -\max\{c_j \ : \ S \cap N_j \neq \emptyset, \ 1 \leq j \leq m\}, \quad \textit{para cada} \quad S \subseteq N.$$

Para facilitar la exposición, en nuestro trabajo, vamos a considerar directamente el juego de coste asociado al problema del aeropuerto.

Definición 1.30 *Si (N, c) es un problema del aeropuerto, entonces el juego de coste del aeropuerto está definido por (N, C) donde*

$$C(S) = \max\{c_j \ : \ S \cap N_j \neq \emptyset, \ 1 \leq j \leq m\}, \quad \textit{para cada} \quad S \subseteq N.$$

De acuerdo con esto el coste que tiene que asumir un grupo de operaciones de aterrizaje y despegue es el correspondiente a la construcción de la pista de mayor tamaño que emplean.

Littlechild y Owen (1973) propusieron utilizar el valor de Shapley del juego TU asociado a un problema del aeropuerto o equivalentemente al juego de coste asociado presentado en la Definición 1.30 y obtuvieron una expresión sencilla para su cálculo. Aquí escribiremos su expresión para el caso en que $m = n$.

Proposición 1.31 *Sea (N, c) un problema del aeropuerto con $c = \{c_1 < c_2 < c_3 < ... < c_n\}$.*

El valor de Shapley para el juego de coste del aeropuerto es

$$\begin{aligned}
Sh_1(N,C) &= \tfrac{c_1}{n} \\
Sh_2(N,C) &= \tfrac{c_1}{n} + \tfrac{c_2-c_1}{n-1} \\
Sh_3(N,C) &= \tfrac{c_1}{n} + \tfrac{c_2-c_1}{n-1} + \tfrac{c_3-c_2}{n-2} \\
&\vdots \\
Sh_n(N,C) &= \tfrac{c_1}{n} + \tfrac{c_2-c_1}{n-1} + \tfrac{c_3-c_2}{n-2} + \ldots + \tfrac{c_n-c_{n-1}}{1}.
\end{aligned}$$

Capítulo 2

Un modelo cooperativo con estructuras jerárquicas

En este capítulo estudiaremos en detalle el modelo cooperativo que planteamos para analizar situaciones cooperativas con estructuras jerárquicas. En este modelo, además de disponer de una función característica que representa las ganancias ó pérdidas de las distintas coaliciones, existe una jerarquía entre determinadas coaliciones. Podemos suponer, por ejemplo, que la coalición $\{1,2\}$ debe tener cierta prioridad sobre la coalición $\{3,4,\ldots,n\}$, o bien que la coalición $\{1,2\}$ tiene prioridad sobre la $\{3,4\}$ y ésta a su vez sobre la coalición $\{5,\ldots,n\}$.

Como veremos más adelante, el modelo que construimos está especialmente diseñado para la clase de los juegos convexos, dado que nuestro modelo recoge la prioridad de una coalición sobre otra en el sentido de que al formar la gran coalición N, la coalición que tiene prioridad, S, se incorpora después de la coalición $N\backslash S$. Planteamos los resultados lo más generales posibles e incidimos en la importancia en algunas clases de juegos concretos. En la última parte de este trabajo se dan aplicaciones concretas en problemas de bancarrota y en otros contextos.

2.1. Introducción

Dado un juego con utilidad transferible (N,v), existen dos preguntas de especial importancia que deben ser resueltas. La primera: ¿Qué coalición o coaliciones se deben formar?, y la segunda: ¿Cómo se deben repartir los beneficios de la cooperación entre los miembros de una coalición? Von Neumann y Morgenstern se dieron cuenta que la segunda pregunta es muy importante puesto que puede condicionar la respuesta de la primera.

Supongamos que la coalición T y $N\backslash T$ deciden actuar de manera independiente. Así, parece natural definir el juego:

$$v_T^D(S) = v(S \cap T) + v(S \cap (N \setminus T)) \text{ para cada } S \subseteq N.$$

Obsérvese que ésta es la definición de un juego descomponible a través de la partición $(T, N\backslash T)$ (Shapley, 1971). En ese juego la utilidad a repartir es $v_T^D(N) = v(T) + v(N\backslash T)$. Como el valor de Shapley satisface la propiedad de aditividad, los jugadores de T obtienen el valor de Shapley del juego (T, v_T) y los jugadores de $N\backslash T$, el valor de Shapley del juego $(N\backslash T, v_{N\backslash T})$, siendo $v_T(S) = v(S\cap T)$ para $S \subseteq T$ y $v_{N\backslash T}(S) = v(S\cap(N\backslash T))$ para $S \subseteq N\backslash T$.

Si el juego (N, v) es superaditivo, parece natural la formación de la gran coalición, es decir, los jugadores tienen incentivos para repartir $v(N)$ en vez de $v(T)+v(N\backslash T)$. Los juegos de las caras, definidos en González-Díaz y Sánchez-Rodríguez (2008), recogen la formación de la gran coalición, pero dando prioridad o privilegios a algunas coaliciones. Para $T \subset N$, el juego (N, v_{F_T}) se define como:

$$v_{F_T}(S) = v((S \cap T) \cup (N \setminus T)) - v(N \setminus T) + v(S \cap (N \setminus T)), \text{ para } S \subseteq N. \tag{2.1}$$

Es importante notar que $v_{F_T}(N) = v(N)$. Además, si el juego (N, v) es superaditivo, entonces, para $S \subseteq N$, $v_{F_T}(S) \geq v_T^D(S)$.

2.2. Estructuras jerárquicas. Preliminares.

En la literatura existen modelos que tienen en cuenta relaciones de precedencia o prioridad entre agentes o estructuras de permiso. En primer lugar vamos a describir el modelo conjuntivo propuesto en Gilles et al (1992). Una estructura de permiso está dada por una aplicación $H : N \longrightarrow 2^N$ tal que $i \notin H(i)$, para cada $i \in N$. Cada agente $j \in H(i)$ se dice que es un subordinado directo del agente i en H. El conjunto de agentes

$$H^{-1}(i) = \{j \in N \;:\; i \in H(j)\}$$

es el conjunto de los superiores directos de i. Sea H una estructura de permiso y $S \subseteq N$. El conjunto de todos lo subordinados directos de los miembros de S, $\cup_{i\in S} H(i)$, se denota por $H(S)$. Se dice que una coalición S es conjuntivamente autónoma si $S \cap H(N \setminus S) = \emptyset$. Es decir, la coalición S no contiene ningún agente que sea un subordinado directo de algún agente de $N \setminus S$. La coalición S contiene a todos sus superiores y, en consecuencia, puede operar. La parte conjuntivamente autónoma de S está dada por

$$\gamma_H(S) = \{i \in S \ : \ H^{-1}(i) \subseteq S\}.$$

La coalición $\gamma_H(S)$ es, claramente, la subcoalición de S maximal que es conjuntivamente autónoma. Si una coalición S es conjuntivamente autónoma, entonces $\gamma_H(S) = S$.

Se ilustran estos conceptos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1 *Sea $N = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Supongamos que la estructura de permiso está descrita por el siguiente grafo orientado.*

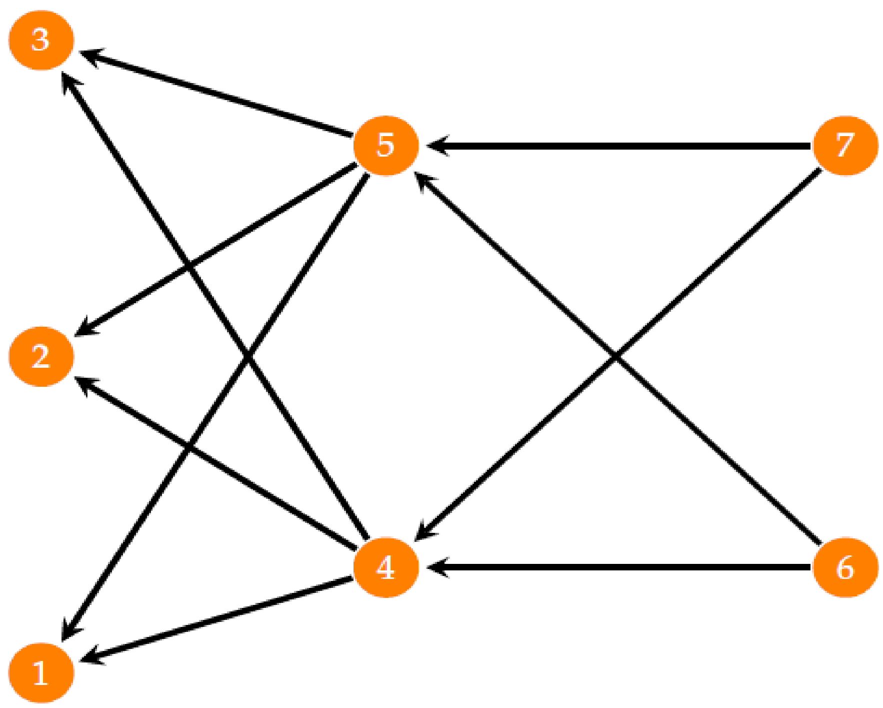

Figura 2.1: Estructura de permiso H.

Entonces, $H(7) = \{4,5\}$ y $H(3) = \emptyset$. La familia de coaliciones conjuntivamente autónomas está dada por

$$\emptyset, \{6\}, \{7\}, \{6,7\}, \{5,6,7\}, \{4,6,7\}, \{4,5,6,7\}, \{3,4,5,6,7\}, \{2,4,5,6,7\},$$
$$\{1,4,5,6,7\}, \{1,2,4,5,6,7\}, \{1,3,4,5,6,7\}, \{2,3,4,5,6,7\}, N.$$

Para la coalición $S = \{4\}$, su parte conjuntivamente autónoma es $\gamma_H(S) = \emptyset$; para la coalición $S = \{2, 5, 6, 7\}$, su parte conjuntivamente autónoma $\gamma_H(S) = \{5, 6, 7\}$ y, por tanto, S no es conjuntivamente autónoma.

Un juego TU con estructura de permiso está dado por (N, v, H) con (N, v) un juego TU y H una estructura de permiso sobre N. La restricción conjuntiva de (N, v, H) es el juego TU (N, v_c) con

$$v_c(S) = v(\gamma_H(S)), \quad \text{para cualquier } S \subseteq N.$$

A continuación se utiliza la estructura de permiso del Ejemplo 2.1 para ilustrar como se obtiene la función característica v_c.

Ejemplo 2.2 *Si se considera un juego TU (N, v), la estructura de permiso H del Ejemplo 2.1 y la coalición $S = \{2, 5, 6, 7\}$, entonces*

$$v_c(S) = v(\{5, 6, 7\}).$$

Si la coalición S es conjuntivamente autónoma, entonces $v_c(S) = v(S)$.

Gilles and Owen (1999) propusieron otra aproximación: la aproximación disyuntiva. Supongamos que la estructura de permiso H es acíclica[1]. Para esta estructura de permiso H se define el conjunto

$$B_H = \{i \in N \ : \ H^{-1}(i) \neq \emptyset\}$$

como el conjunto de agentes que no tienen superiores directos. Estos agentes reciben el nombre de agentes ejecutivos. Puesto que H es acícicla, entonces $B_H \neq \emptyset$. Se dice que una coalición es disyuntivamente autónoma en la estructura jerárquica acíclica H si para cada $i \in S \setminus B_H$ se tiene que $H^{-1}(i) \cap S \neq \emptyset$. Es decir, cada agente no ejecutivo que está en S tiene al menos un superior directo en S. Entonces, para cada agente en $S \setminus B_H$ hay una subcoalición $\{j_1, \ldots .j_k\} \subseteq S$ tal que $j_1 \in B_H$, $j_k = i$, y $j_{r+1} \in H(j_r)$ para $r = 1, \ldots m - 1$. Se denota por χ_H la familia de coaliciones disyuntivamente autónomas. La parte disyuntivamente autónoma de la coalición S está dada por

$$\delta_H(S) = \cup\{T \in \chi_H \ : T \subseteq S\}.$$

[1]Una estructura de permiso es acíclica si no existe ninguna secuencia de agentes $i_1, \ldots, i_k \in N$ tales que $i_{r+1} \in H(i_r)$ para cualquier $r \in \{1, \ldots, k-1\}$ e $i_1 = i_k$.

La parte disyuntivamente autónoma de la coalición S es la subcoalición de S maximal que es disyuntivamente autónoma. Si una coalición S es disyuntivamente autónoma, entonces $\delta_H(S) = S$. La familia de coaliciones χ_H tiene una estructura más complicada que la familia de coaliciones conjuntivamente autónomas. Obsérvese que cualquier coalición conjuntivamente autónoma también es disyuntivamente autónoma. En el Ejemplo 2.3 se ilustran las diferencias entre ambas familias de coaliciones.

Ejemplo 2.3 *Se considera la estructura de permiso dada en la Figura 2.1. En esta estructura $B_H = \{6,7\}$. En primer lugar se presentan algunas coaliciones disyuntivamente autónomas según H. Por ejemplo, la coalición $\{5,6\}$ es disyuntivamente autónoma, con lo que $\delta_H(\{5,6\}) = \{5,6\}$, pero no es conjuntivamente autónoma. La coalición $\{3,6\}$ no es disyuntivamente autónoma y $\delta_H(\{3,6\}) = \{6\}$.*

Dado un juego TU con estructura de permiso (N, v, H), la restricción disyuntiva es el juego TU (N, v_d) con

$$v_d(S) = v(\delta_H(S)), \qquad \text{for all } S \subset N.$$

A continuación se ilustra la definición de este juego utilizando la estructura de permiso definida por el grafo de la Figura 2.1.

Ejemplo 2.4 *Si se considera un juego TU (N, v), la estructura de permiso H del Ejemplo 2.1 y la coalición $S = \{3,6,7\}$, entonces*

$$v_d(S) = v(\{6,7\}).$$

2.3. El modelo TU con estructuras jerárquicas.

A continuación pasamos a analizar el método que utilizaremos en este trabajo. Comenzamos formalizando el modelo jerárquico cuando existe una estructura jerárquica entre dos coaliciones complementarias. Sea $P = \{P_1, P_2\}$ una partición del conjunto con N jugadores ($N = P_1 \cup P_2, P_1 \cap P_2 = \emptyset$). Se denota por $P_> = \{P_1 > P_2\}$ a una estructura de prioridades entre las coaliciones P_1 y P_2, con $P_1 > P_2$, es decir, para cada $i \in P_1$ y $j \in P_2$, i tiene prioridad sobre j.

Este modelo asume que en la formación de la gran coalición los jugadores de P_1 tienen el poder de decisión sobre si se va a formar la gran coalición, una vez que los jugadores de P_2 están dispuestos a cooperar.

A continuación formalizamos nuestro modelo jerárquico general. Considérese $N = \{1, \ldots, n\}$ un conjunto finito de jugadores y sea $P = \{P_1, \ldots, P_{m+1}\}$ una partición de N, con $m<n-1$, la estructura de prioridad dada por $P_> = \{P_1 > P_2 > \ldots > P_m > P_{m+1}\}$. Esta estructura jerárquica implica que los jugadores de P_1 tienen prioridad sobre los agentes de $N \setminus P_1$, los agentes de P_2 tienen prioridad sobre los jugadores de $N \setminus (P_1 \cup P_2)$, y así sucesivamente.

Un juego cooperativo con estructura jerárquica viene definido a través de la terna $(N, v, P_>)$ siendo (N, v) un juego con utilidad transferible y $P_>$ una estructura de prioridad. A la terna $(N, v, P_>)$ se le denominará de aquí en adelante estructura jerárquica. A la familia de juegos con conjunto de jugadores N y estructura de prioridad P se le denomina $G^n_{P_>}$. A continuación se define el juego jerárquico para una estructura de prioridad con únicamente dos elementos.

Definición 2.5 *El juego jerárquico $(N, v_{P_>})$ asociado a la estructura jerárquica $(N, v, P_>)$, siendo $P_> = \{P_1 > N \setminus P_1\}$, se define para cada $S \subseteq N$,*

$$v_{P_>}(S) = v_{F_{P_1}}(S), \tag{2.2}$$

donde $(N, v_{F_{P_1}})$ es el juego de la cara de la coalición P_1 dada por la Ecuación 2.1.

La función característica $v_{P_>}$ se denotará, a veces, por v_1. A continuación mostramos algunos ejemplos de juegos jerárquicos.

Ejemplo 2.6 *Consideremos el juego (N, v) con $N = \{1, 2, 3\}$ y función característica la siguiente*

$$v(1) = 0, \quad v(2) = 0, \quad v(3) = 0, \quad v(1,2) = 0.5, \quad v(1,3) = 0.5, \quad v(2,3) = 0.5, \quad v(1,2,3) = 1.$$

En la Tabla 2.1 se muestra el juego jerárquico asociado a estructuras de prioridad de la forma $\{P_1>N\setminus P_1\}$, para cada posible $P_1 \subseteq N$.

Nótese que en esta estructura cada agente de P_1 tiene prioridad sobre cada agente de $N\setminus P_1$. Si la estructura de prioridad es $\{(123)\}$, se tiene el juego (N, v).

$P_>$	$v_{P_>}$
(1)>(23)	[0.5,0,0,0.5,0.5,0.5,1]
(2)>(13)	[0,0.5,0,0.5,0.5,0.5,1]
(3)>(12)	[0,0,0.5,0.5,0.5,0.5,1]
(12)>(3)	[0.5,0.5,0,1,0.5,0.5,1]
(13)>(2)	[0.5,0,0.5,0.5,1,0.5,1]
(23)>(1)	[0,0.5,0.5,0.5,0.5,1,1]
(123)	[0,0,0,0.5,0.5,0.5,1]

Tabla 2.1: Juegos jerárquicos con estructura jerárquica $(N, v, \{P_1 > N \backslash P_1\})$.

Ejemplo 2.7 *Consideremos a continuación el conocido juego del guante, donde el primer jugador posee un guante izquierdo y cada uno de los otros dos posee un guante derecho. Así, $N = L \cup R$ donde $L = \{1\}$ y $R = \{2, 3\}$. La función característica es la siguiente*

$$w(1) = 0, \quad w(2) = 0, \quad w(3) = 0, \quad w(1,2) = 1, \quad w(1,3) = 1, \quad w(2,3) = 0, \quad w(1,2,3) = 1.$$

Al igual que en el ejemplo anterior, en este solo se han considerado estructuras de prioridad de la forma $\{P_1 > N \backslash P_1\}$, para cada posible $P_1 \subseteq N$. La Tabla 2.2 muestra el juego jerárquico asociado a cada estructura $\{P_1 > N \backslash P_1\}$.

$P_>$	$w_{P_>}$
(1)>(23)	[1,0,0,1,1,0,1]
(2)>(13)	[0,0,0,0,1,0,1]
(3)>(12)	[0,0,0,1,0,0,1]
(12)>(3)	[1,0,0,1,1,0,1]
(13)>(2)	[1,0,0,1,1,0,1]
(23)>(1)	[0,1,1,1,1,1,1]
(123)	[0,0,0,1,1,0,1]

Tabla 2.2: Juegos jerárquicos con estructura jerárquica $(N, w, \{P_1 > N \backslash P_1\})$.

Se observa como el juego de las caras para la estructura $\{(1, 2, 3)\}$ es el juego del guante original.

Comentario 2.8 *A continuación mostramos un ejemplo en el que el juego original es superaditivo, y sin embargo, el juego asociado a alguna de sus estructuras jerárquicas no lo es. Dicho ejemplo sirve también para mostrar que el juego original puede no ser equilibrado y sin embargo, algunos juegos jerárquicos si lo son.*

Ejemplo 2.9 *Sea un juego* (N, v) *con* $N = \{1, 2, 3\}$ *y función característica* $\bar{v}$ *dada por*

$$\bar{v}(1) = 0, \quad \bar{v}(2) = 0, \quad \bar{v}(3) = 0, \quad \bar{v}(1,2) = 5, \quad \bar{v}(1,3) = 6, \quad \bar{v}(2,3) = 7, \quad \bar{v}(1,2,3) = 8.$$

Por la definición de superaditividad introducida por la Ecuación 1.1, se observa fácilmente que el juego es superaditivo. La Tabla 2.3 muestra cada uno de los juegos jerárquicos obtenidos al considerar estructuras de prioridad $\{P_1 > N \setminus P_1\}$ *para cualquier* $P_1 \subseteq N$.

$P_>$	$\bar{v}_{P_>}$
(1)>(23)	[1,0,0,1,1,7,8]
(2)>(13)	[0,2,0,2,6,2,8]
(3)>(12)	[0,0,3,5,3,3,8]
(12)>(3)	[6,7,0,8,6,7,8]
(13)>(2)	[5,0,7,5,8,7,8]
(23)>(1)	[0,5,6,5,6,8,8]
(123)	[0,0,0,5,6,7,8]

Tabla 2.3: Juegos jerárquicos con estructura jerárquica $(N, \bar{v}, \{P_1 > N \backslash P_1\})$.

Se puede observar como los juegos asociados a las estructuras de prioridad $\{(12) > (3)\}$, $\{(13) > (2)\}$, $\{(23) > (1)\}$ *no son superaditivos. Por ejemplo, el juego asociado a la estructura* $\{(13) > (2)\}$ *no es superaditivo ya que,* $v(1,3) \ngeq v(1) + v(3)$.
El juego $(N, \bar{v})$ *no es equilibrado, sin embargo, los juegos jerárquicos asociados a* $(N, \bar{v}, \{(1) > (23)\})$, $(N, \bar{v}, \{(2) > (13)\})$ *y* $(N, \bar{v}, \{(3) > (12)\})$ *son equilibrados.*

Se puede extender la definición de juego jerárquico planteada en la Definición 2.5 para el caso en que la estructura de prioridad tenga más de dos elementos.

Definición 2.10 *El juego jerárquico* $(N, v_{P_>})$ *asociado a la estructura jerárquica* $(N, v, P_>)$, *siendo* $P_> = \{P_1 > P_2 > \ldots > P_m > P_{m+1}\}$, *se define para cada* $S \subseteq N$,

$$v_{P_>}(S) = ((v_{F_{P_1}})_{F_{P_2}})_{\ldots})_{F_{P_m}}(S). \tag{2.3}$$

En este caso $v_{P_>}$, a veces se denotará por $v_{1\ldots m}$. Como se puede observar este juego se puede obtener en distintos pasos: primero se crea el juego en el que la estructura de prioridad es $\{P_1 > N \backslash P_1\}$, es decir el juego (N, v_1); a continuación sobre esta estructura de prioridad se determina otra estructura de prioridad en $N \backslash P_1$, y así sucesivamente.

A continuación mostramos un ejemplo de juego jerárquico de 4 jugadores con una estructura jerárquica con más de dos elementos.

Ejemplo 2.11 *Consideremos el juego* (N, v) *con* $N = \{1, 2, 3, 4\}$ *y función característica la siguiente*

$$v(1) = 0 \quad v(2) = 0 \quad v(3) = 0 \quad v(4) = 0 \quad v(1,2) = 2 \quad v(1,3) = 2$$
$$v(1,4) = 2 \quad v(2,3) = 3 \quad v(2,4) = 3 \quad v(3,4) = 4$$
$$v(1,2,3) = 6 \quad v(1,2,4) = 6 \quad v(1,3,4) = 6$$
$$v(2,3,4) = 7 \quad v(1,2,3,4) = 10$$

En la Tabla 2.4 se muestran algunas estructuras de prioridad de la forma $P_1 > P_2 > P_3$ *y los correspondientes juegos jerárquicos.*

$P_>$	$v_{P_>}$
(1)>(2)> (34)	[3,3,0,0,6,3,3,3,3,4,6,6,7,7,10]
(1)>(3)> (24)	[3,0,4,0,3,7,3,4,3,4,7,6,7,7,10]
(1)>(4)> (23)	[3,0,0,4,3,3,7,3,4,4,6,7,7,7,10]
(1)>(23)>(4)	[3,3,4,0,6,7,3,7,3,4,10,6,7,7,10]
(1)>(24)>(3)	[3,3,0,4,6,3,7,3,7,4,6,10,7,7,10]
(1)>(34)>(2)	[3,0,3,3,3,6,6,3,3,7,6,6,10,7,10]

Tabla 2.4: Juegos jerárquicos con estructura jerárquica $(N, v, \{P_1 > P_2 > P_3\})$.

El siguiente resultado proporciona una forma de escribir la función característica del juego jerárquico $(N, v_{P_>})$ en relación a la función característica del juego inicial (N, v).

Teorema 2.12 *Sea* $(N, v, P_>)$ *una estructura jerárquica,* $(N, v_{1\ldots m})$ *el juego jerárquico asociado y* $S \subseteq N$. *Se verifica que*

$$v_{1\ldots m}(S) = \sum_{j=1}^{m+1} [v((S \cap P_j) \cup (\cup_{l=j+1}^{m+1} P_l)) - v(\cup_{l=j+1}^{m+1} P_l)]. \tag{2.4}$$

Demostración: Probamos este resultado usando el método de inducción sobre m. Dada una partición $\{P_1, \ldots, P_{m+1}\}$.

- Para $m = 1$, la estructura de prioridad viene dada por $\{P_1 > P_2\}$ con $P_2 = N \setminus P_1$. Por la Definición 2.1, se tiene que el juego v_1 es

$$\begin{aligned} v_1(S) &= v((S \cap P_1) \cup (N \setminus P_1)) - v(N \setminus P_1) + v(S \cap (N \setminus P_1)) \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{2} [v((S \cap P_j) \cup (\cup_{l=j+1}^{2} P_l)) - v(\cup_{l=j+1}^{2} P_l)]. \end{aligned} \tag{2.5}$$

- Asumimos que el resultado es correcto para $r = 2, \ldots, m-1$. Por la Definición 2.3,

$$v_{1\ldots m}(S) = v_{1\ldots m-1}((S \cap P_m) \cup (N \setminus P_m)) - v_{1\ldots m-1}(N \setminus P_m) + v_{1\ldots m-1}(S \cap (N \setminus P_m)). \tag{2.6}$$

Evaluamos cada término en la Expresión 2.6 usando la hipótesis de inducción. Sea la estructura de prioridad $\{P'_1 > \ldots > P'_{m-1} > N \setminus (\cup_{l=1}^{m-1} P_l)\}$ con $P'_l = P_l$, para cada $l = 1, \ldots, m-1$, y $P'_m = N \setminus (\cup_{l=1}^{m-1} P_l) = P_m \cup P_{m+1}$. Se observa que $(N \setminus P_m) \cap P'_j = P'_j$ si $j = 1, \ldots, m-1$, y $(N \setminus P_m) \cap P'_m = N \setminus (\cup_{j=1}^{m} P_j) = P_{m+1}$. Aplicando la hipótesis de inducción, se tiene:

1. Para cualquier $S \subseteq N$,

$$\begin{aligned} v_{1\ldots m-1}((S \cap P_m) \cup (N \setminus P_m)) &= \textstyle\sum_{j=1}^{m-1} [v(\cup_{l=j}^{m} P'_l) - v(\cup_{l=j+1}^{m} P'_l)] + \\ &\quad + v((S \cap P_m) \cup (N \setminus \cup_{l=1}^{m} P_j)). \end{aligned} \tag{2.7}$$

En particular, si $S = N \setminus P_m$ obtenemos

$$\begin{aligned} v_{1\ldots m-1}(N \setminus P_m) &= \textstyle\sum_{j=1}^{m-1} [v(\cup_{l=j}^{m} P'_l) - v(\cup_{l=j+1}^{m} P'_l)] + \\ &\quad + v(N \setminus \cup_{l=1}^{m} P_j). \end{aligned} \tag{2.8}$$

2. Para cualquier $S \subseteq N$,

$$\begin{aligned} v_{1\ldots m-1}(S \cap (N \setminus P_m)) &= \textstyle\sum_{j=1}^{m-1} [v((S \cap P'_j) \cup (\cup_{l=j+1}^{m} P'_l)) - v(\cup_{l=j+1}^{m} P'_l)] + \\ &\quad + v(S \cap P_{m+1}). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Teniendo en cuenta que $P_{m+1} = N \setminus (\cup_{j=1}^{m} P_j)$, $P'_m = P_m \cup P_{m+1}$ y reemplazando las Expresiones 2.7, 2.8, y 2.9 en la Expresión 2.6, se obtiene

$$v_{1\ldots m}(S) = \textstyle\sum_{j=1}^{m+1} [v((S \cap P_j) \cup (\cup_{l=j+1}^{m+1} P_l)) - v(\cup_{l=j+1}^{m+1} P_l)].$$

y queda probado el resultado. ∎

A continuación mostramos que si original es convexo el juego jerárquico asociado también es convexo. Dicho resultado se puede probar utilizando que si el juego original es convexo el juego de la cara es convexo (González-Díaz y Sánchez-Rodríguez, 2008). Teniendo en cuenta que el juego jerárquico es aplicar un número finito de veces el juego de la cara, se obtiene la convexidad del juego jerárquico. En todo caso, damos una demostración alternativa utilizando la descomposición del Teorema 2.12.

Teorema 2.13 *Sea $(N, v, P_>)$ una estructura jerárquica tal que (N, v) es un juego convexo. Entonces, el juego jerárquico asociado $(N, v_{1\dots m})$ también es un juego convexo.*

Demostración: Sea $(N, v, P_>) \in G^n_{P_>}$ una estructura jerárquica tal que (N, v) es un juego convexo. Sea $i \in N \cap P_r$ para algún $r \in \{1, \dots m+1\}$ y sean $S \subset T \subseteq N \setminus i$. Tenemos que probar que

$$v_{1\dots m}(T \cup i) - v_{1\dots m}(T) \geq v_{1\dots m}(S \cup i) - v_{1\dots m}(S).$$

Teniendo en cuenta la descomposición de la función característica recogida en el Teorema 2.12, entonces

$$v_{1\dots m}(T \cup i) - v_{1\dots m}(T) \;=\; \textstyle\sum_{j=1}^{m+1}[v(((T \cup i) \cap P_j) \cup (\cup_{l=j+1}^{m+1} P_l)) - v((T \cap P_j) \cup (\cup_{l=j+1}^{m+1} P_l))].$$

Además, si $j = r$,

$$((T \cup i) \cap P_j) \cup (\cup_{l=j+1}^{m+1} P_l) = (T \cap P_j) \cup i \cup (\cup_{l=j+1}^{m+1} P_l),$$

y si $j \neq r$,

$$((T \cup i) \cap P_j) \cup (\cup_{l=j+1}^{m+1} P_l) = (T \cap P_j) \cup (\cup_{l=j+1}^{m+1} P_l).$$

Por tanto,

$$v_{1\dots m}(T \cup i) - v_{1\dots m}(T) \;=\; v(((T \cap P_j) \cup i) \cup (\cup_{l=j+1}^{m+1} P_l)) - v((T \cap P_j) \cup (\cup_{l=j+1}^{m+1} P_l)).$$

Teniendo en cuenta que el juego (N, v) es convexo, se tiene

$$\begin{gathered} v(((T \cap P_j) \cup i) \cup (\cup_{l=j+1}^{m+1} P_l)) - v((T \cap P_j) \cup (\cup_{l=j+1}^{m+1} P_l)) \geq \\ v(((S \cap P_j) \cup i) \cup (\cup_{l=j+1}^{m+1} P_l)) - v((S \cap P_j) \cup (\cup_{l=j+1}^{m+1} P_l)). \end{gathered}$$

Por tanto,

$$v_{1\ldots m}(T \cup i) - v_{1\ldots m}(T) \geq v_{1\ldots m}(S \cup i) - v_{1\ldots m}(S)$$

y queda probado el resultado. ■

El modelo planteado en esta sección es diferente a la restricción conjuntiva y a la restricción disyuntiva que se han introducido en la Sección 2.2. Sea (N, v, P) una estructura jerárquica. Se puede definir una estructura de permiso H_P de la siguiente forma: para cada $i \in N$,

$$H_P(i) = P_{j-1}, \quad \text{si } i \in P_j \quad \text{y} \quad j > 1,$$
$$H_P(i) = \emptyset, \quad \text{si } i \in P_1.$$

Utilizando el Ejemplo 2.1 se ilustra la diferencia entre el juego jerárquico y la aproximación conjuntiva y disyuntiva correspondiente a H_P.

Ejemplo 2.14 *Sea $N = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ y $P = \{P_1 > P_2 > P_3\}$ con $P_1 = \{1,2,3\}$, $P_2 = \{4,5\}$, y $P_3 = \{6,7\}$. Sea (N, v, P) una estructura jerárquica. La estructura de permiso H_P es la que está representada en la Figura 2.1. Si $S = \{2,5,6,7\}$, entonces*

$$v_c(S) = v(\{5,6,7\}),$$
$$v_d(S) = v(2,5,6,7) \quad y$$
$$v_{123}(S) = v(\{5,6,7\}) + v(\{2,4,5,6,7\}) - v(\{4,5,6,7\}).$$

Así pues, en general estos juegos son diferentes.

2.4. Un valor para juegos con estructuras jerárquicas.

En esta sección se propone un reparto para estructuras jerárquicas. Una regla de reparto jerárquica φ es una aplicación $\varphi : G^n_{P_>} \to \mathbb{R}^n$ que a cada estructura jerárquica $(N, v, P_>)$ le asigna un vector en $\mathbb{R}^n$.

Definición 2.15 *El valor jerárquico de Shapley, $\mathcal{H}$, es aquella regla jerárquica que asigna a cada $(N, v, P_>)$ el valor de Shapley asociado al juego jerárquico $(N, v_{P_>})$, es decir,*

$$\mathcal{H}(N, v, P_>) = Sh(N, v_{P_>}). \tag{2.10}$$

Calculemos este valor para los juegos del Ejemplo 2.6 y del Ejemplo 2.7 del apartado anterior.

Ejemplo 2.16 *Se considera el juego (N, v) con $N = \{1, 2, 3\}$ y función característica dada en el Ejemplo 2.6. La Tabla 2.5 muestra la estructura de prioridad $\{P_1 > N \setminus P_1\}$ para cualquier $P_1 \subseteq N$ y el valor jerárquico de Shapley de la estructura jerárquica $(N, v, \{P_1 > N \setminus P_1\})$ para cada $P_1 \subseteq N$.*

$P_>$	$\mathcal{H}$
(1)>(23)	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$
(2)>(13)	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$
(3)>(12)	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$
(12)>(3)	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$
(13)>(2)	$(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$
(23)>(1)	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
(123)	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

Tabla 2.5: Valores jerárquicos de Shapley.

Como el juego (N, v) es convexo y simétrico, cada jugador en el juego (N, v) obtiene $\frac{v(N)}{n}$ según el valor de Shapley. Sin embargo, al considerar estructuras jerárquicas desaparece, en general, el carácter simétrico de los jugadores. El valor jerárquico de Shapley, $\mathcal{H}$, tiene en cuenta esta información adicional. Por ejemplo, si la estructura de prioridad es $P_> = \{(2) > (13))\}$, el valor jerárquico de Shapley otorga mayor asignación al jugador 2 que a los jugadores 1 y 3.
Dada la estructura jerárquica $(N, v, \{(12) > (3)\})$, son los jugadores 1 y 2 quienes tienen prioridad sobre el jugador 3. El valor jerárquico de Shapley repartirá $v(N)$ a partes iguales entre los agentes 1 y 2, ya que el tercer jugador es nulo en el juego jerárquico asociado.
En la Figura 2.2 se muestra el núcleo de este juego.
Los puntos resaltados representan el valor jerárquico de Shapley asociado a las distintas estructuras jerárquicas consideradas.

Ejemplo 2.17 *Consideremos ahora el juego del guante, donde la función característica w viene dada en el Ejemplo 2.7 del apartado anterior. La Tabla 2.6 muestra la estructura de prioridad $\{P_1 > N \setminus P_1\}$ para cualquier $P_1 \subseteq N$ y el valor jerárquico de Shapley de la estructura jerárquica $(N, w, \{P_1 > N \setminus P_1\})$ para cada $P_1 \subseteq N$.*

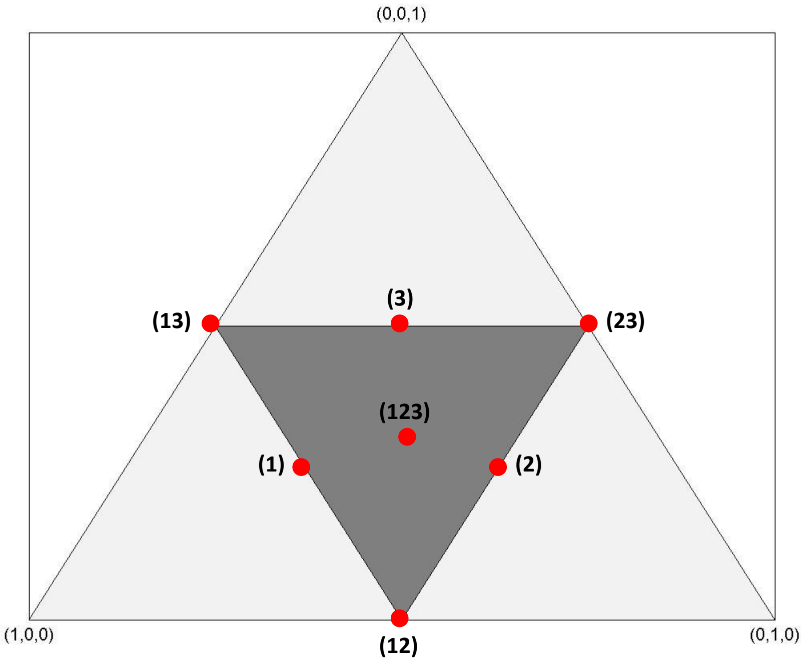

Figura 2.2: Núcleo del juego (N, v) (en gris oscuro) y valores jerárquicos de Shapley (en rojo).

$P_{>}$	$\mathcal{H}$
(1)>(23)	(1,0,0)
(2)>(13)	$(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$
(3)>(12)	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$
(12)>(3)	(1,0,0)
(13)>(2)	(1,0,0)
(23)>(1)	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
(123)	$(\frac{4}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$

Tabla 2.6: Valores jerárquicos de Shapley.

El juego (N, w) no es convexo y solo los jugadores 2 y 3 son simétricos. Es por ello que el segundo y tercer jugador reciben lo mismo en el juego (N, w) según el valor de Shapley. En las estructuras jerárquicas $(N, w, \{(1, 2)>(3)\})$ y $(N, w, \{(1, 3)>(2)\})$ el valor jerárquico de Shapley otorga toda la utilidad al jugador que tiene el guante izquierdo (jugador 1). El resultado más interesante se obtiene en la estructura jerárquica $(N, w, \{(2, 3)>(1)\})$, donde *el valor jerárquico de Shapley reparte la utilidad total a partes iguales entre los jugadores 2 y 3 pese a que el jugador 1 tiene el guante izquierdo.*

Cabe destacar también el valor obtenido en la estructura jerárquica $(N, w, \{(2)>(13)\})$ *ya que el jugador* 2 *obtiene utilidad cero pese a tener prioridad sobre los otros jugadores. Esto se debe a que los jugadores* 1 *y* 3 *ya han repartido* $w(13) = w(N) = 1$ *con lo que el jugador* 2 *no recibe nada. Análogamente para la estructura jerárquica* $(N, w, \{(3)>(12)\})$*, donde los jugadores* 1 *y* 2 *se reparten* $w(1, 2) = w(N) = 1$*.*

En la figura 2.3 se muestra el núcleo de este juego con los valores jerárquicos de Shapley.

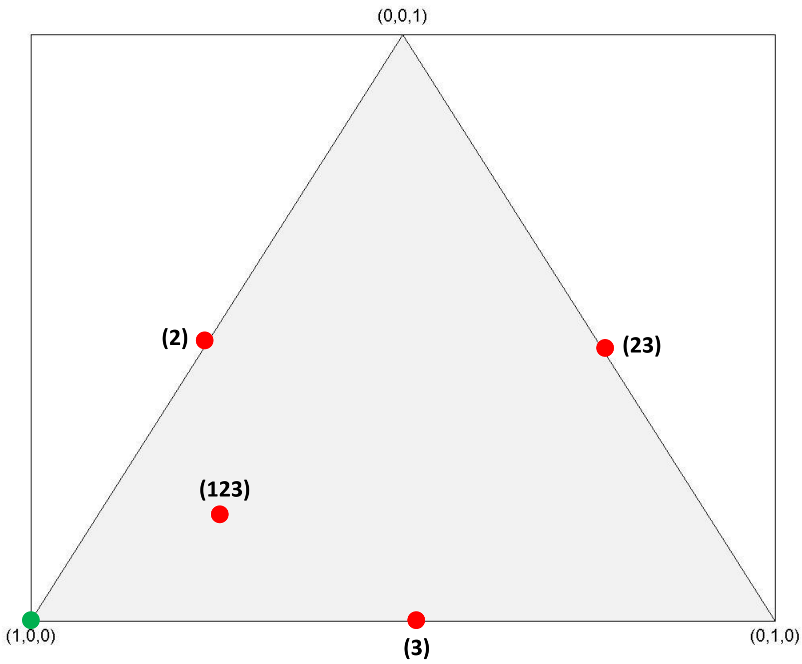

Figura 2.3: Núcleo del juego (N, w) (en verde) y valores jerárquicos de Shapley (en rojo).

Los puntos resaltados en rojo representan el valor jerárquico de Shapley asociado a las distintas jerarquías consideradas. El valor jerárquico de Shapley para las estructuras jerárquicas que faltan, es decir, $(N, w, \{(1)>(2, 3)\})$*,*$(N, w, \{(1, 2)>(3)\})$ *y* $(N, w, \{(1, 3)>(2)\})$*, coinciden con la única imputación del núcleo (representado en verde). El valor de Shapley del juego original* (N, w) *coincide con el valor jerárquico de Shapley de la estructura jerárquica* $(N, w, \{(1, 2, 3)\})$*.*

El siguiente teorema prueba que los vectores de contribuciones marginales del juego jerárquico asociado a la estructura jerárquica $(N, v, P_>)$ con $P_> = \{T > N \backslash T\}$ pueden ser obtenidos considerando únicamente los órdenes en los que los jugadores que tienen prioridad se agrupan de manera coalicional al final de la coalición $N \backslash T$.

Lema 2.18 *Sea $(N, v) \in G^n$ y $T \subseteq N$. Sea $\sigma = (\sigma_{N \backslash T}, \sigma_T)$ y $\bar{\sigma} \in \Pi(N)$ tal que induce los órdenes σ_T en T y $\sigma_{N\backslash T}$ en $N \setminus T$, respectivamente. Entonces,*

1. *$m^\sigma(N, v_{F_T}) = m^\sigma(N, v)$.*
2. *$m^\sigma(N, v_{F_T}) = m^{\bar{\sigma}}(N, v_{F_T})$.*

   Además, si (N, v) es convexo, se tiene

3. *(N, v_{F_T}) es convexo.*
4. *$m^{\bar{\sigma}}(N, v) \in F_T$ sí y solo si $m^\sigma(N, v) = m^{\bar{\sigma}}(N, v)$. Por lo tanto, $F_T = conv\{m^\sigma(N, v) : \sigma = (\sigma_{N\backslash T}, \sigma_T)\}$.*

Demostración: La demostración es exactamente la misma que la que aparece en González-Díaz y Sánchez-Rodríguez (2008) dado que no utiliza el carácter equilibrado de los juegos. La mostramos con detalle a continuación. Como $(N, v_{F_\emptyset}) = (N, v_{F_N}) = (N, v)$, el resultado es trivial para $T = \emptyset$ y $T = N$. Así, sea $\emptyset \neq T \subsetneq N$.

1. Sea $\sigma = (\sigma_{N\backslash T}, \sigma_T)$. Demostramos que para cada $i \in N, m_i^\sigma(N, v) = m_i^\sigma(N, v_{F_T})$. Supongamos que $i \in N \setminus T$. Como $P_\sigma(i) \subset P_\sigma(i) \cup i \subseteq N \setminus T$, entonces

   $$v(P_\sigma(i) \cup i) = v_{F_T}(P_\sigma(i) \cup i) \quad \text{y} \quad v(P_\sigma(i)) = v_{F_T}(P_\sigma(i)).$$

   Supongamos que $i \in T$. En este caso, $N \setminus T \subseteq P_\sigma(i)$ y es fácil de comprobar que, de nuevo, $v_{F_T}(P_\sigma(i) \cup i) = v(P_\sigma(i) \cup i)$ y $v_{F_T}(P_\sigma(i)) = v(P_\sigma(i))$.

2. Si $\bar{\sigma} = (\sigma_{N\backslash T}, \sigma_T)$ el resultado es trivial. Sea $\bar{\sigma} \neq (\sigma_{N\backslash T}, \sigma_T)$. Así, $\bar{\sigma}$ se puede escribir como $(\sigma_{R_1}, \sigma_{T_1}, \sigma_{R_2}, \sigma_{T_2}, ..., \sigma_{R_p}, \sigma_{T_q})$, donde $(T_1, ..., Tq) \subset T, (R_1, ..., R_p) \subset N \setminus T$, y T_1 y R_2 son no vacíos. Sea $\sigma^* := (\sigma_{R_1}, \sigma_{R_2}, \sigma_{T_1}, \sigma_{T_2}, ..., \sigma_{R_p}, \sigma_{T_q})$, es decir, R_2 y T_1 se han intercambiado. Mostramos que $m^{\bar{\sigma}}(N, v_{F_T}) = m^{\sigma^*}(N, v_{F_T})$. Una vez que se ha demostrado esto último, se obtiene, tras un número finito de cambios que $m^{\bar{\sigma}}(N, v_{F_T}) =$

$m^\sigma(N, v_{F_T})$. Claramente, los vectores marginales asociados con $\bar{\sigma}$ y σ^* solo pueden diferir para los jugadores T_1 ó R_2. Distinguimos dos casos. *Caso 1*: $i \in T_1$. Se observa que $P_{\bar{\sigma}}(i) = R_1 \cup P_{\sigma_{T_1}}(i)$ y $P_{\sigma^*}(i) = R_1 \cup R_2 \cup P_{\sigma_{T_1}}(i)$. Por la definición de v_{F_T}

$$\begin{aligned} v_{F_T}(P_{\bar{\sigma}}(i) \cup i) - v_{F_T}(P_{\bar{\sigma}}(i)) &= v(P_{\sigma_{T_1}}(i) \cup (N \setminus T) \cup i) - v(P_{\sigma_{T_1}}(i) \cup (N \setminus T)) \\ &= v_{F_T}(P_{\bar{\sigma}}(i) \cup i) - v_{F_T}(P_{\bar{\sigma}}(i)) \end{aligned}$$

Caso 2: $i \in R_2$. Claramente, $P_{\bar{\sigma}}(i) = R_1 \cup T_1 \cup P_{\sigma_{R_2}}(i)$ y $P_{\sigma^*}(i) = R_1 \cup P_{\sigma_{R_2}}(i)$. Por la definición de v_{F_T},

$$\begin{aligned} v_{F_T}(P_{\bar{\sigma}}(i) \cup i) - v_{F_T}(P_{\bar{\sigma}}(i)) &= v(R_1 \cup P_{\sigma_{R_2}}(i) \cup i) - v(R_1 \cup P_{\sigma_{R_2}}(i)) \\ &= v_{F_T}(P_{\sigma^*}(i) \cup i) - v_{F_T}(P_{\sigma^*}(i)). \end{aligned}$$

3. Se muestra que, para cada $R \subseteq S \subseteq N \setminus i, v_{F_T}(R \cup i) - v_{F_T}(R) \leq v_{F_T}(S \cup i) - v_{F_T}(S)$. Supongamos que $i \in N \setminus T$. Como

$$v_{F_T}(S \cup i) - v_{F_T}(S) = v((S \cup i) \cap (N \setminus T)) - v(S \cap (N \setminus T)),$$

se tiene,

$$v_{F_T}(R \cup i) - v_{F_T}(R) = v((R \cup i) \cap (N \setminus T)) - v(R \cap (N \setminus T)),$$

y, además, teniendo en cuenta que (N, v) es convexo, la desigualdad deseada se mantiene. Supongamos ahora que $i \in T$. Como,

$$v_{F_T}(S \cup i) - v_{F_T}(S) = v((S \cap T) \cup (N \setminus T) \cup i) - v((S \cap T) \cup (N \setminus T)),$$

se tiene

$$v_{F_T}(R \cup i) - v_{F_T}(R) = v((R \cap T) \cup (N \setminus T) \cup i) - v((R \cap T) \cup (N \setminus T)),$$

y, además, como (N, v) es convexo, la desigualdad deseada se mantiene.

4. Como v es convexo, $m^\sigma(N, v) \in F_T$ y la necesidad es trivial. Se demuestra la suficiencia. Como $m^{\bar{\sigma}}(N, v) \in F_T$, entonces $\sum_{i \in T} m_i^{\bar{\sigma}} = v(N) - v(N \setminus T) = \sum_{i \in T} m_i^\sigma$. Por convexidad, cada $i \in T$, $m_i^{\bar{\sigma}}(N, v) \leq m_i^\sigma(N, v)$ y, como $\sum_{i \in T} m_i^{\bar{\sigma}} = \sum_{i \in T} m_i^\sigma$, se tiene que, para cada $i \in T$, $m_i^{\bar{\sigma}}(N, v) = m_i^\sigma(N, v)$. De forma análoga, para cada $i \in N \setminus T$, $m_i^{\bar{\sigma}}(N, v) = m_i^\sigma(N, v)$.

■

El siguiente resultado extiende el lema anterior.

Lema 2.19 *Sea* $(N, v, P_>)$ *una estructura jerárquica con* $P_> = \{P_1 > P_2 > ... > P_{m+1}\}$*. Sea* $\sigma = (\sigma_{P_{m+1}}, \ldots, \sigma_{P_1}) \in \Pi(N)$ *y sea* $\bar{\sigma} \in \Pi(N)$ *tal que induce los órdenes* $\sigma_{P_1}, \sigma_{P_2}, ..., \sigma_{P_{m+1}}$ *en* P_1*,* P_2*, ... ,*P_{m+1}*, respectivamente. Entonces,*

1. $m^\sigma(N, v_{1\ldots m}) = m^\sigma(N, v)$.

2. $m^\sigma(N, v_{1\ldots m}) = m^{\bar{\sigma}}(N, v_{1\ldots m})$.

Demostración: Se procede por inducción en m. Si $m = 1$ se aplica directamente el Lema 2.18. Supongamos que es cierto para $r \leq m - 1$ y se prueba para m. Nótese que

$$v_{1\ldots m} = (v_{1\ldots m-1})_{F_{P_m}}.$$

1. Sea $\sigma = (\sigma_{P_{m+1}}, \ldots, \sigma_{P_1})$. Aplicando la hipótesis de inducción $m^\sigma(N, v_{1\ldots m-1}) = m^\sigma(N, v)$. Además, $m^\sigma(N, v_{1\ldots m}) = m^\sigma(N, (v_{1\ldots m-1})_{F_{P_m}}) = m^\sigma(N, v_{1\ldots m-1}) = m^\sigma(N, v)$ como consecuencia de aplicar primero la definición del propio juego $v_{1\ldots m}$, luego el lema previo y, por último, la hipótesis de inducción.

2. Sea $\bar{\sigma} \in \Pi(N)$ tal que induce los órdenes $\sigma_{P_1}, \ldots, \sigma_{P_{m+1}}$, en $P_1, \ldots, P_{m+1}$, respectivamente. Aplicando la hipótesis de inducción, se tiene que $m^\sigma(N, v_{1,\ldots,m-1}) = m^{\bar{\sigma}}(N, v_{1,\ldots,m-1})$, donde $\bar{\sigma} = (\sigma_{P_{m+1} \cup P_m}, \ldots, \sigma_{P_1})$. Teniendo en cuenta la definición de $(N, v_{1\ldots m})$ y el Lema 2.18,
$$m^\sigma(N, v_{1\ldots m}) = m^\sigma(N, (v_{1\ldots m-1})_{F_{P_m}}) = m^{\bar{\sigma}}(N, (v_{1\ldots m-1})_{F_{P_m}}),$$
siendo $\bar{\sigma} = (\sigma_{P_{m+1}}, \sigma_{P_m}, \ldots, \sigma_{P_1}) = m^{\bar{\sigma}}(N, v_{1\ldots m})$.

■

Como consecuencia del anterior resultado, en el caso de que la relación de preferencia entre las coaliciones sea del tipo $\{1 > 2 > ... > n\}$, obtenemos que todos los vectores de contribuciones marginales del juego jerárquico confluyen en el vector de contribuciones marginales correspondiente al orden $\sigma = (n, n - 1, \ldots, 1)$, tal y como cabría esperar.

Los siguientes lemas extienden nuevamente resultados obtenidos en González-Díaz y Sánchez-Rodríguez (2008). Primeramente mostramos que el conjunto de Weber puede ser obtenido como envoltura convexa de determinados juegos jerárquicos, a continuación probamos que el valor de Shapley de un juego TU se puede obtener a través del valor jerárquico de Shapley. Este resultado, engloba el conocido teorema que expresa el valor de Shapley como la media de los vectores de contribuciones marginales.

El último punto del lema refina considerablemente, ya en la subclase de los juegos convexos, el resultado de que el núcleo del juego puede ser obtenido como combinación lineal convexa de los núcleos de los juegos de las caras.

Teorema 2.20 *Sea* $(N, v) \in G^n$. *Consideremos* $t \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

1. $\mathcal{W}(N, v) = conv\{\mathcal{W}(N, v_{F_T}) \ : \ T \subset N, |T| = t\}$.
2. $Sh(N, v) = \sum\limits_{T \subset N, |T|=t} \frac{\mathcal{H}(N, v, \{T > N \setminus T\})}{\binom{n}{t}}$.
3. *Si* (N, v) *es convexo, entonces* $Core(N, v) = conv\{Core(N, v_{F_T})\} : \ T \subset N, |T| = t\}$.

Demostración: Consideremos $t = 1, \ldots, n$.

1. La primera parte es consecuencia del Lema 2.18 ya que cubrimos todos los órdenes $\sigma \in \Pi(N)$. Por tanto,

   $\mathcal{W}(N, v) = conv\{m^\sigma(N, v)\} = conv\{\mathcal{W}(N, v_{F_T}) \ : \ T \subset N, |T| = t\}$.

2. El valor de Shapley del juego (N, v) puede escribirse como

$$\begin{aligned} Sh(N, v) &= \sum_{\sigma \in \Pi(N)} \frac{m^\sigma(N,v)}{n!} = \sum_{T \subset N, |T|=t} \sum_{\sigma=(\sigma_{N \setminus T}, \sigma_T)} \frac{m^\sigma(N,v)}{n!} \\ &= \sum_{T \subset N, |T|=t} \sum_{\sigma=(\sigma_{N \setminus T}, \sigma_T)} \frac{m^\sigma(N, v_{F_T})}{n!}. \end{aligned}$$

   Ahora, debido a que $Sh(N, v_{F_T}) = \sum\limits_{\sigma=(\sigma_{N \setminus T}, \sigma_T)} \frac{m^\sigma(N, v_{F_T})}{t!(n-t)!}$, obtenemos el resultado deseado.

3. Teniendo en cuenta que si el juego (N, v) es convexo, los juegos de las caras son convexos, obtemos que $\mathcal{W}(N, v_{F_T}) = Core(N, v_{F_T})$, para cualquier $T \subset N$ con $|T| = t$. Ahora, aplicando el primer punto de este teorema, obtenemos el resultado probado.

■

El siguiente teorema extiende el resultado anterior con estructuras jerárquicas arbitrarias. Antes sólo establecíamos una preferencia entre una coalición y su complementaria, ahora permitimos una relación de prioridad entre los elementos de una partición del conjunto de jugadores. El teorema muestra que, una vez que decidimos cuántos agentes entran en cada elemento de la estructura jerárquica podemos reconstruir el conjunto de Weber a través de determinados juegos jerárquicos. De igual forma ocurre con el valor de Shapley. Por último mostramos que, en la clase de los juegos convexos, podemos reconstruir el núcleo del juego a través del núcleo de determinados juegos jerárquicos.

Teorema 2.21 *Sea* $(N, v) \in G^n$. *Consideremos* $P_1, ..., P_{m+1}$ *números positivos tales que* $\sum_{i=1}^{m+1} p_i = n$. *Se denota por* $\mathcal{P}^{P_1,...,P_{m+1}}$ *el conjunto de estructuras de prioridad* $P_> = \{P_1 > \ldots > P_{m+1}\}$ *tales que* $|P_j| = p_j$, *para cada* $j \in \{1, \ldots, m+1\}$.

1. $\mathcal{W}(N, v) = conv\{\mathcal{W}(N, v_{P_>}) \ : \ P_> \in \mathcal{P}^{p_1,...,p_{m+1}}\}$.

2. $Sh(N, v) = \sum\limits_{P_> \in \mathcal{P}^{p_1,...,p_{m+1}}} \frac{\mathcal{H}(N,v,P_>)}{PR_n^{p_1,...,p_{m+1}}}$, *donde* $PR_n^{p_1,...,p_{m+1}}$ *es el número de permutaciones con repetición de* n *elementos tomados en grupos de tamaño* $p_1, \ldots, p_{m+1}$.

3. *Si* (N, v) *es convexo, entonces* $Core(N, v) = conv\{Core(N, v_{P_>})\} \ : \ P_> \in \mathcal{P}^{p_1,...,p_{m+1}}\}$.

Demostración: Sea $(N, v) \in G^n$.

1. Aplicando el Lema 2.19 para cada estructura de prioridad $P_> = \{P_1 > \ldots > P_{m+1}\} \in \mathcal{P}^{p_1,...,p_{m+1}}$ se obtienen todos los vectores de contribuciones marginales del juego (N, v) a través de los vestores de contribuciones marginales del juego $(N, v_{P_>})$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(N, v) &= conv\{m^\sigma(N, v\}\} = conv\{m^\sigma(N, v_{1...m}) \ : \ P_> \in \mathcal{P}^{p_1,...,p_{m+1}}\} \\ &= conv\{\mathcal{W}(N, v_{P_>}) \ : \ P_> \in \mathcal{P}^{p_1,...,p_{m+1}}\} \end{aligned}$$

2. Teniendo en cuenta la definición del valor de Shapley y el Lema 2.19

$$\begin{aligned} Sh(N, v) &= \sum_{\sigma \in \Pi(N)} \frac{m^\sigma(N, v_{1,...,n})}{n!} = \sum_{P_> \in \mathcal{P}^{p_1,...,p_{m+1}}} \sum_{\sigma = (\sigma_{P_{m+1}},...,\sigma_{P_1})} \frac{m^\sigma(N, v_{1,...,n})}{n!} \\ &= \sum_{P_> \in \mathcal{P}^{P_1,...,P_{m+1}}} \sum_{\sigma = (\sigma_{P_{m+1}},...,\sigma_{P_1})} \frac{m^\sigma(N, v_{P_>})}{n!} \end{aligned}$$

Ahora, debido a que $Sh(N, v_{P_>}) = \sum\limits_{\sigma = (\sigma_{p_{m+1}},...,\sigma_{p_1})} \frac{m^\sigma(N, v_{P_>})}{PR_n^{p_1,...,p_{m+1}}}$, obtenemos el resultado deseado.

3. Simplemente se utiliza el hecho de que si el juego (N, v) es convexo, el juego $(N, v_{P>})$ también lo es (véase Lema 2.19. Por tanto, $\mathcal{W}(N, v_{P_>}) = Core(N, v_{P_>})$, aplicando el primer punto de este teorema se obtiene el resultado.

■

2.5. Relaciones con el valor de Owen

En este apartado mostramos la relación entre nuestro valor jerárquico de Shapley y el valor de Owen.

Teorema 2.22 *Sea* $(N,v) \in G^n$, $P = \{P_1, \ldots, P_{m+1}\}$ *una partición de* N, $M = \{1, \ldots, m+1\}$, $j \in M$, *y* $i \in P_j$. *Para* $\tau \in \Pi(M)$ *y* $P_>^\tau = \{P_{\tau^{-1}(1)} > \ldots > P_{\tau^{-1}(m+1)}\}$. *Entonces,*

$$\psi_i(N,v,P) = \sum_{r=0}^{m} \frac{r!(m-r)!}{(m+1)!} \sum_{\tau \in \Pi(M), \tau(j)=m+1-r} \mathcal{H}_i(N,v,P_>^\sigma) \tag{2.11}$$

con $r = |R|$.

Demostración: Notar que

$$\psi_i(N,v,P) = \sum_{R \subset M \setminus j} \sum_{S \subset P_j \setminus i} \frac{r!(m-r)!}{(m+1)!} \frac{s!(p_j-1-s)!}{p_j!} [v(S \cup i \cup (\cup_{l \in R} P_l)) - v(S \cup (\cup_{l \in R} P_l))]. \tag{2.12}$$

Para cada $R \subset M \setminus j$, se define $\Pi^R(M)$ como el conjunto de permutaciones que asigna la posición $m+1-r$ a la unión P_j y $P_j > P_l$ con $l \in R$, es decir,

$$\Pi^R(M) = \{\tau \in \Pi(M) \text{ con } \tau(j) = m+1-r \text{ y } \tau(l) > m+1-r, \text{ para cada } l \in R\}.$$

Se observa claramente que, para cada $R \subset M \setminus j$, existen $\frac{r!(m-r)!}{(m+1)!}$ permutaciones en $\Pi^R(M)$. Además, como para cada $\tau_1, \tau_2 \in \Pi^R(M)$ se tiene

$$\mathcal{H}_i(N,v,P_>^{\tau_1}) = \mathcal{H}_i(N,v,P_>^{\tau_2}).$$

Entonces,

$$\sum_{\tau \in \Pi^R(M)} \sum_{S \subset P_j \setminus i} \tfrac{s!(p_j-1-s)!}{p_j!} [v(S \cup i \cup (\cup_{l=m-r+2}^{m+1} P_{\tau^{-1}(l)})) - v(S \cup (\cup_{l=m-r+2}^{m+1} P_{\tau^{-1}(l)}))] = \tfrac{r!(m-r)!}{(m+1)!} \mathcal{H}_i(N,v,P_>^{\bar\tau}),$$

con $\bar\tau \in \Pi^R(M)$. Como para cada $r = 0, ...m$, tenemos

$$\{\tau \in \Pi(M) \ : \ \tau(j) = m+1-r\} = \cup_{R \subset M \setminus j, |R|=r} \Pi^R(M),$$

reordenando los términos en la Expresión 2.12 se obtiene la Expresión 2.11. ■

A continuación se muestra a través de un ejemplo la relación entre el valor jerárquico de Shapley y el valor de Owen.

Ejemplo 2.23 *Se considera el juego (N, v) con $N = \{1, 2, 3\}$ y función característica dada en el Ejemplo 2.6. La Tabla 2.7 muestra el juego jerárquico asociado a la estructura jerárquica $(N, v, \{P_1 > N \setminus P_1\})$ para cualquier $P_1 \subseteq N$, el valor jerárquico de Shapley y el valor de Owen asociado.*

P	$P_>$	$\mathcal{H}$	ψ
$(1),(23)$	$(1) > (23)$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$	$(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8})$
	$(23) > (1)$	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	
$(2),(13)$	$(2) > (13)$	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$	$(\frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8})$
	$(13) > (2)$	$(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$	
$(3),(12)$	$(3) > (12)$	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$	$(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4})$
	$(12) > (3)$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$	

Tabla 2.7: Relación entre el valor jerárquico de Shapley y el valor de Owen.

A continuación se promedia los valores jerárquicos de Shapley obtenidos para cada partición,

- *Para la partición* $\{(1),(23)\}$,

$$\frac{1}{2} \times (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}) + \frac{1}{2} \times (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}).$$

- *Para la partición* $\{(2),(13)\}$,

$$\frac{1}{2} \times (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}) + \frac{1}{2} \times (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) = (\frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}).$$

- *Para la partición* $\{(3),(12)\}$,

$$\frac{1}{2} \times (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} \times (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) = (\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}).$$

Se observa que si se promedian los valores obtenidos para el valor jerárquico de Shapley en cada una de las particiones, se obtiene el valor de Owen.

2.6. Una caracterización del valor jerárquico

La caracterización axiomática de soluciones es una parte de la teoría de juegos que continuamente proporciona nuevas visiones que permiten comparar las distintas soluciones de un juego coalicional. Se trata de desgranar la regla de reparto dada en propiedades básicas, de tal forma que se obtengan resultados de existencia y unicidad de solución. Otra parte de la caracterización axiomática consiste en demostrar que ninguna propiedad de una regla sobra, en el sentido de que si se eliminase de la caracterización se perdería la unicidad.
A continuación se presentan algunas propiedades de una regla de reparto con el fin de presentar una caracterización del valor jerárquico de Shapley.

Definición 2.24 *Sea $(N, v, P_>) \in G^n_{P_>}$ y φ una regla de reparto en $G^n_{P_>}$.*

- La regla φ verifica la propiedad de eficiencia si para todo $(N, v, P_>) \in G^n_{P_>}$, se tiene
$$\sum_{i \in N} \varphi_i(N, v, P_>) = v(N).$$
- La regla φ satisface la propiedad de simetría dentro del grupo si para todo $(N, v, P_>) \in G^n_{P_>}$, $i, k \in P_r$, tales i,k son jugadores simétricos en (N, v), se tiene
$$\varphi_i(N, v, P_>) = \varphi_k(N, v, P_>).$$
- La regla φ verifica la propiedad de jugador nulo si para todo $(N, v, P_>) \in G^n_{P_>}$ e $i \in N$ jugador nulo, se tiene
$$\varphi_i(N, v, P_>) = 0.$$
- La regla φ verifica la propiedad de eficiencia marginal si para todo $(N, v, P_>) \in G^n_{P_>}$, se tiene
$$\sum_{i \in P_j} \varphi_i(N, v, P_>) = v(N \setminus \cup_{l=1}^{j-1} P_l) - v(N \setminus \cup_{l=1}^{j} P_l) = v(\cup_{l=j}^{m+1} P_l) - v(\cup_{l=j+1}^{m+1} P_l),$$
para cada $j = 1, \ldots, m + 1$. Observése que la propiedad de eficiencia marginal implica la propiedad de eficiencia.

- La regla φ cumple la propiedad de aditividad si para todo $(N, v^1, P_>)$,$(N, v^2, P_>) \in G^n_{P_>}$, se tiene

$$\varphi(N, v^1 + v^2, P_>) = \varphi(N, v^1, P_>) + \varphi(N, v^2, P_>).$$

Comentario 2.25 *Veamos con un ejemplo sencillo como la propiedad de eficiencia marginal implica la propiedad de eficiencia.*

Ejemplo 2.26 *Sea un juego $(N, v, P_>)$ con $N = \{1, 2, 3, 4\}$ y estructura de prioridad dada por $P_> = \{(1) > (23) > (4)\}$, el valor jerárquico de Shapley, $\mathcal{H}$, distribuye $v(N)$ de la siguiente forma*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}_1(N, v, P_>) = v(N) - v(234)\\
&\mathcal{H}_2(N, v, P_>) + \mathcal{H}_3(N, v, P_>) = v(234) - v(4)\\
&\mathcal{H}_4(N, v, P_>) = v(4)
\end{aligned}$$

Teorema 2.27 *El valor jerárquico de Shapley, $\mathcal{H}$, definido en $G^n_{P_>}$ verifica eficiencia, simetría dentro del grupo, jugador nulo, eficiencia marginal y aditividad.*

Demostración: Sea $(N, v, P_>) \in G^n_{P_>}$. El valor jerárquico de Shapley está definido como

$$\mathcal{H}_i(N, v, P_>) = Sh_i(N, v_{P_>}) \text{ para cada } i \in N.$$

Por tanto,

$$\sum_{i\in N} \mathcal{H}_i(N, v, P_>) = \sum_{i\in N} Sh_i(N, v_{P_>}) = v_{P_>}(N) = v(N). \tag{2.13}$$

En consecuencia, $\mathcal{H}$ verifica la propiedad de eficiencia.

Sean $i, k \in P_r$ con $P_r \in P_>$ tales que $v(S \cup i) = v(S \cup k)$ para cualquier $S \subset N \setminus \{i, k\}$. Se demuestra que

$$v_{P_>}(S \cup i) = v_{P_>}(S \cup k).$$

Teniendo en cuenta la descomposición de la función característica $v_{P_>}$ obtenida en el Teorema 2.12 y que, para cualquier $S \subset N \setminus \{i, k\}$, se verifica

- si $j \neq r$, entonces

$$\begin{aligned}
((S \cup i) \cap P_j) \cup (\cup_{l=j+1}^{m+1} P_l) &= (S \cap P_j) \cup (i \cap P_j) \cup (\cup_{l=j+1}^{m+1} P_l) = (S \cap P_j) \cup (\cup_{l=j+1}^{m+1} P_l)\\
&= ((S \cup k) \cap P_j) \cup (\cup_{l=j+1}^{m+1} P_l),
\end{aligned}$$

ya que i,$k \in P_r$ y $P_r \cap P_j = \emptyset$. Por tanto,

$$v(((S\cup i)\cap P_j)\cup(\cup_{l=j+1}^{m+1}P_l)) = v((S\cap P_j)\cup(\cup_{l=j+1}^{m+1}P_l)) = v(((S\cup k)\cap P_j)\cup(\cup_{l=j+1}^{m+1}P_l)).$$

- si $j = r$, entonces

$$((S \cup i) \cap P_j) \cup (\cup_{l=j+1}^{m+1}P_l) = (S \cap P_j) \cup i \cup (\cup_{l=j+1}^{m+1}P_l),$$
$$((S \cup k) \cap P_j) \cup (\cup_{l=j+1}^{m+1}P_l)) = ((S \cap P_j) \cup k \cup (\cup_{l=j+1}^{m+1}P_l).$$

  Por tanto,

$$v(((S \cup i) \cap P_j) \cup (\cup_{l=j+1}^{m+1}P_l) = v((S \cap P_j) \cup i) \cup (\cup_{l=j+1}^{m+1}P_l)) =$$
$$v(((S \cap P_j) \cup k \cup (\cup_{l=j+1}^{m+1}P_l)) = v(((S \cup k) \cap P_j) \cup (\cup_{l=j+1}^{m+1}P_l)).$$

  ya que los jugadores i,k son simétricos en (N, v).

Así pues, los jugadores $i, k \in N$ son jugadores simétricos en el juego TU $(N, v_{P_>})$. Puesto que el valor de Shapley, en la clase de juegos TU, verifica la propiedad de simetría, se cumple que

$$\mathcal{H}_i(N, v, P_>) = Sh_i(N, v_{P_>}) = Sh_k(N, v_{P_>}) = \mathcal{H}_k(N, v, P_>)).$$

$\mathcal{H}$ cumple la propiedad de simetría dentro del grupo.
Sea $i \in P_r$, con $P_r \in P_>$, un jugador nulo en (N, v). Utilizando la descomposición de la función característica $v_{P_>}$ obtenida en el Teorema 2.12, para cualquier $S \subseteq N \setminus i$, se cumple que

- si $j \neq r$,

$$v(((S \cup i) \cap P_j) \cup (\cup_{l=j+1}^{m+1}P_l)) = v((S \cap P_j) \cup (\cup_{l=j+1}^{m+1}P_l)).$$

- si $j = r$,

$$v(((S \cup i) \cap P_j) \cup (\cup_{l=j+1}^{m+1}P_l)) = v((S \cap P_j) \cup i \cup (\cup_{l=j+1}^{m+1}P_l)) = v((S \cap P_j) \cup (\cup_{l=j+1}^{m+1}P_l)).$$

  ya que el jugador i es un jugador nulo en (N, v).

Por tanto,

$$v_{P_>}(S \cup i) = v_{P_>}(S),$$

para cualquier $S \subseteq N \setminus i$, es decir, el jugador i es un jugador nulo en el juego $(N, v_{P_>})$. Puesto que el valor de Shapley, en la clase de juegos TU, verifica la propiedad de jugador nulo, se cumple que

$$\mathcal{H}_i(N, v, P_>) = Sh_i(N, v_{P_>}) = 0.$$

$\mathcal{H}$ cumple la propiedad de jugador nulo.

Sea $(N, v, P_>) \in G^n_{P_>}$. Teniendo en cuenta la descomposición de la función característica $v_{P_>}$ obtenida en el Teorema 2.12, se verifica que

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i \in P_j} \mathcal{H}_i(N, v, P_>) &= \textstyle\sum_{i \in P_j} Sh_i(N, v_{P_>}) \\ &= v(\cup_{l=j}^{m+1} P_l) - v(\cup_{l=j+1}^{m+1} P_l) = v(N \setminus \cup_{l=1}^{j-1} P_l) - v(N \setminus \cup_{l=1}^{j} P_l). \end{aligned}$$

Por tanto, $\mathcal{H}$ cumple la propiedad de eficiencia marginal.

Sean $(N, v^1, P_>)$, $(N, v^2, P_>) \in G^n_{P_>}$. Teniendo en cuenta la descomposición de la función característica $v^1_{P_>}$ y $v^2_{P_>}$ obtenidas a partir del Teorema 2.12, para cada $S \subset N$, resulta

$$(v^1 + v^2)_{P_>}(S) = v^1_{P_>}(S) + v^2_{P_>}(S).$$

Por tanto, puesto que el valor de Shapley, en la clase de juegos TU, verifica la propiedad de aditividad, se cumple

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_i(N, v^1 + v^2, P_>) &= Sh_i(N, (v^1 + v^2)_{P_>}) = Sh_i(N, v^1_{P_>}) + Sh_i(N, v^2_{P_>}) \\ &= \mathcal{H}_i(N, v^1, P_>) + \mathcal{H}_i(N, v^2, P_>) \end{aligned}$$

para cualquier $i \in N$. Queda probado que $\mathcal{H}$ verifica la propiedad de aditividad. ■

Teorema 2.28 *Existe un único valor φ definido en $G^n_{P_>}$ que cumple las propiedades de simetría dentro del grupo, jugador nulo, eficiencia marginal y aditividad, y es el valor jerárquico de Shapley, $\mathcal{H}$.*

Demostración: Del Teorema 2.27 se sabe que el valor jerárquico de Shapley verifica las propiedades de simetría dentro del grupo, jugador nulo, eficiencia marginal y aditividad. A continuación demostramos la unicidad del valor.

Sea P una estructura de prioridades sobre el conjunto finito N y φ un valor definido en $G^n_{P_>}$ que verifica las propiedades de simetría dentro del grupo, jugador nulo, eficiencia marginal y aditividad. Sea $(N, v, P_>) \in G^n_{P_>}$. Se prueba que $\varphi_i(N, v, P_>) = \mathcal{H}_i(N, v, P_>)$, para cualquier $i \in N$. Teniendo en cuenta que

$$v(S) = \sum_{T \subseteq N} \alpha_T u_T(S), \quad \text{para cualquier} \quad S \subseteq N,$$

se procede por inducción en el número de coeficientes α_T no nulos. Sea I el número de coeficientes α_T no nulos.

1. Caso $I = 0$. En este caso $v(S) = 0$ para cualquier $S \subseteq N$ y cada $i \in N$ es un jugador nulo. Puesto que φ verifica la propiedad de jugador nulo, entonces

$$\varphi_i(N, v, P_>) = 0 = \mathcal{H}_i(N, v, P_>).$$

2. Caso $I = 1$. En este caso $v(S) = \alpha_T u_T(S)$, para alguna coalición $T \subseteq N$. Cualquier $i \notin T$ es un jugador nulo en (N, v). Puesto que φ verifica la propiedad de jugador nulo, entonces $\varphi_i(N, v, P_>) = 0 = \mathcal{H}_i(N, v, P_>)$. Sea $j_T = \min\{l \in \{1, \ldots, m+1\} \ : \ T \cap P_l \neq \emptyset\}$. Por tanto, $T \subseteq \cup_{l=j_T}^{m+1} P_l$. Puesto que φ cumple la propiedad de eficiencia marginal y jugador nulo, se verifica que

$$\sum_{i \in P_{j_T}} \varphi_i(N, v, P_>) = v(N \setminus \cup_{l=1}^{j_T - 1} P_l) - v(N \setminus \cup_{l=1}^{j_T} P_l) = \alpha_T = \sum_{i \in P_{j_T} \cap T} \varphi_i(N, v, P_>)$$

y, además, para cualquier $r \neq j_T$, se verifica

$$\sum_{i \in P_r} \varphi_i(N, v, P_>) = v(N \setminus \cup_{l=1}^{r-1} P_l) - v(N \setminus \cup_{l=1}^{r} P_l) = 0 = \sum_{i \in P_r \cap T} \varphi_i(N, v, P_>).$$

Teniendo en cuenta que para cualquier $j = 1, \ldots, m+1$, dos jugadores $i, k \in T \cap P_j$ son simétricos en el juego (N, v), entonces

- si $j = j_T$, se tiene

$$\alpha_T = \sum_{i \in P_{j_T} \cap T} \varphi_i(N, v, P_>) = |P_{j_T} \cap T| \varphi_i(N, v, P_>)$$

  con $i \in P_{j_T} \cap T$. En consecuencia,

$$\varphi_i(N, v, P_>) = \frac{\alpha_T}{|P_{j_T} \cap T|} = \mathcal{H}_i(N, v, P_>).$$

- si $j \neq j_T$, se tiene

$$0 = \sum_{i \in P_j \cap T} \varphi_i(N, v, P_>) = |P_j \cap T| \varphi_i(N, v, P_>)$$

con $i \in P_j \cap T$. En consecuencia,

$$\varphi_i(N, v, P_>) = 0 = \mathcal{H}_i(N, v, P_>).$$

3. Supongamos que el resultado es cierto para el caso en el haya I coeficientes α_T no nulos. A continuación se prueba que también es cierto para el caso en que haya $I + 1$. Supongamos que

$$v(S) = \sum_{h=1}^{I+1} \alpha_{T^h} u_{T^h}(S), \quad \text{para cualquier} \quad S \subseteq N.$$

Sea $T = \cap_{h=1}^{I+1} T^h$. Distinguimos dos casos.

- Si $i \in N \setminus T$ se define el juego (N, w) como

$$w(S) = \sum_{h: i \in T^h} \alpha_{T^h} u_{T^h}(S), \quad \text{para cualquier} \quad S \subseteq N. \tag{2.14}$$

Consideremos la estructura jerárquica $(N, w, P_>)$. Para este caso el número de sumandos en la Expresión 2.14 es a lo sumo I. Aplicando la hipótesis de inducción, se tiene que

$$\varphi_i(N, w, P_>) = \mathcal{H}_i(N, w, P_>).$$

Considérese el juego $(N, v - w)$, donde la función característica está dada por

$$(v - w)(S) = v(S) - w(S) = \sum_{h: i \notin T^h} \alpha_{T^h} u_{T^h}(S).$$

Además,

$$(v - w)(S \cup i) - (v - w)(S) = \sum_{h: i \notin T^h} \alpha_{T^h}(u_{T^h}(S \cup i) - u_{T^h}(S)) = 0,$$

ya que $i \notin T^h$, lo que implica que $u_{T^h}(S \cup i) = u_{T^h}(S)$. Por tanto, i es un jugador nulo en el juego $(N, v - w)$. Teniendo en cuenta que φ y $\mathcal{H}$ verifican la propiedad de jugador nulo, resulta

$$\varphi_i(N, v - w, P_>) = 0 = \mathcal{H}_i(N, v - w, P_>).$$

Obsérvese que $v = w + v - w$ y utilizando que φ y $\mathcal{H}$ verifican la propiedad de aditividad, entonces

$$\varphi_i(N, v, P_>) = \varphi_i(N, w, P_>) + \varphi_i(N, v - w, P_>) = \mathcal{H}_i(N, w, P_>) + 0 = \mathcal{H}_i(N, v, P_>).$$

- Ahora se considera el caso en el que $i \in T$. Nótese que si $i, k, \in P_j \cap T$ para algún $j \in \{1, \ldots, m+1\}$, entonces

$$v(S \cup i) = 0 = v(S \cup k), \quad \text{para cualquier } S \subseteq N \setminus \{i, k\}.$$

Esto implica que los jugadores i y k son simétricos en el juego (N, v). Puesto que el valor φ y el valor $\mathcal{H}$ verifican la propiedad de simetría dentro de cada grupo resulta que

$$\varphi_i(N, v, P_>) = \varphi_k(N, v, P_>), \quad \text{y} \quad \mathcal{H}_i(N, v, P_>) = \mathcal{H}_k(N, v, P_>).$$

Por tanto, sea $P_j \in P_>$ tal que $i \in P_j$, entonces,

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{k \in P_j} \varphi_k(N, v, P_>) &= \textstyle\sum_{k \in P_j \cap T} \varphi_k(N, v, P_>) + \sum_{k \in P_j \setminus T} \varphi_k(N, v, P_>) \\
&= |P_j \cap T| \varphi_i(N, v, P_>) + \textstyle\sum_{k \in P_j \setminus T} \varphi_k(N, v, P_>), \quad \text{y} \\
\textstyle\sum_{k \in P_j} \mathcal{H}_k(N, v, P_>) &= \textstyle\sum_{k \in P_j \cap T} \mathcal{H}_k(N, v, P_>) + \sum_{k \in P_j \setminus T} \mathcal{H}_k(N, v, P_>) \\
&= |P_j \cap T| \mathcal{H}_i(N, v, P_>) + \textstyle\sum_{k \in P_j \setminus T} \mathcal{H}_k(N, v, P_>).
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que el valor φ y el valor $\mathcal{H}$ verifican la propiedad de eficiencia marginal y que $\varphi_k(N, v, P_>) = \mathcal{H}_k(N, v, P_>)$ para cualquier $k \in P_j \setminus T$, resulta que

$$|P_j \cap T| \varphi_i(N, v, P_>) = |P_j \cap T| \mathcal{H}_i(N, v, P_>)$$

y por tanto, $\varphi_i(N, v, P_>) = \mathcal{H}_i(N, v, P_>)$.

■

A continuación aplicamos el modelo propuesto al problema clásico de bancarrota.

2.7. El juego de Bancarrota con estructuras jerárquicas

Es de interés conocer si los juegos jerárquicos asociados a los juegos de bancarrota son nuevos juegos de bancarrota.

En Estévez-Fernández et al (2012) se aplica el modelo de estructuras jerárquicas al problema de bancarrota para el caso de estructuras de la forma $\{T, N \setminus T\}$. A continuación se presenta el resultado y su demostración.

Proposición 2.29 *Sea (N, E, d) un problema de bancarrota, sea (N, v) el juego TU asociado, y $T \subseteq N$. El juego de la cara para la coalición T es estrategicamente equivalente a un juego de bancarrota en el sentido en que $v_{F_T} = \tilde{v} + a$, donde*

1. *$a_i = 0$, para cada $i \in N$, y $\tilde{v}$ es el juego de bancarrota asociado al problema de bancarrota $(N, E, \tilde{d})$ donde $\tilde{d}_i = d_i$, para cada $i \in T$, y $\tilde{d}_i = 0$, para cada $i \in N \setminus T$ si $\sum\limits_{i \in T} d_i \geq E$.*

2. *$a_i = d_i$, para cada $i \in T$, y $a_i = 0$, para cada $i \in N \setminus T$, y $\tilde{v}$ es el juego de bancarrota asociado al problema de bancarrota $(N, E - \sum\limits_{i \in T} d_i, \tilde{d})$ con $\tilde{d} = d - a$ if $\sum_{i \in T} d_i < E$.*

Demostración: Sea $T \subseteq N$. El juego de la cara (N, v_{F_T}) asociado al juego de bancarrota (N, v) está definido, para cada $S \subseteq N$, como

$$\begin{aligned} v_{F_T}(S) &= v\big((S \cap T) \cup (N \setminus T)\big) - v\big(N \setminus T\big) + v\big(S \cap (N \setminus T)\big) \\ &= \max\{0, E - \sum_{j \in T \setminus S} d_j\} - \max\{0, E - \sum_{j \in T} d_j\} + \max\{0, E - \sum_{j \in (N \setminus S) \cup (S \cap T)} d_j\}. \end{aligned}$$

1. $\sum\limits_{i \in T} d_i \geq E$. En este caso, se sabe que $E - \sum\limits_{j \in (N \setminus S) \cup (S \cap T)} d_j \leq 0$ ya que $(N \setminus S) \cup (S \cap T) = T \cup (N \setminus (S \cup T))$. Por tanto, $v(N \setminus T) = v(S \cap (N \setminus T)) = 0$ y

$$v_{F_T}(S) = \max\{0, E - \sum_{j \in T \setminus S} d_j\}.$$

Así pues,

$$v_{F_T}(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } S \subseteq N \setminus T \\ \max\{0, E - \sum\limits_{j \in T \setminus S} d_j\} & \text{si } S \cap T \neq \emptyset \end{cases}$$

El juego de bancarrota v_{F_T} está asociado al problema de bancarrota $(N, E, \tilde{d})$, donde $\tilde{d}_i = d_i$, para cada $i \in T$, y $\tilde{d}_i = 0$, para cada $i \in N \setminus T$.

2. $\sum\limits_{i \in T} d_i < E$. Se tiene,

$$\begin{aligned} v_{F_T}(S) &= v((S \cap T) \cup (N \setminus T)) - v(N \setminus T) + v(S \cap (N \setminus T)) \\ &= E - \sum_{j \in T \setminus S} d_j - E + \sum_{j \in T} d_j + \max\{0, E - \sum_{j \in (N \setminus S) \cup (S \cap T)} d_j\} \\ &= \sum_{j \in T \cap S} d_j + \max\{0, E - \sum_{j \in T} d_j - \sum_{j \in N \setminus (S \cup T)} d_j\}. \end{aligned}$$

Se observa que $\max\{0, E - \sum\limits_{j \in T} d_j - \sum\limits_{j \in N \setminus (S \cup T)} d_j\}$ es el juego de bancarrota asociado al problema de bancarrota $(N, \tilde{E}, \tilde{d})$, donde $\tilde{E} = E - \sum\limits_{i \in T} d_i$, y $\tilde{d}_i = 0$, para cada $i \in T$, y $\tilde{d}_i = d_i$, para cada $i \in N \setminus T$.

■

Aunque no formalicemos explícitamente la proposición anterior a estructuras de prioridad con más de dos elementos, dicho resultado se obtiene como consecuencia de aplicar un número finito de veces la Proposición 2.29.

2.8. El juego del Aeropuerto con estructuras jerárquicas

En este apartado se aplica el modelo de estructuras jerárquicas al problema del aeropuerto para el caso de estructuras de la forma $\{T, N \setminus T\}$. A continuación se presenta el resultado y su demostración.

Proposición 2.30 *Sea un problema del aeropuerto (N, c). Sea $T \subset N$, $T \neq \emptyset$.*

1. *Si $\max_{j \in T} c_j > \max_{j \in N \setminus T} c_j$, el juego de la cara T, (N, C_{F_T}), puede escribirse como*

$$C_{F_T}(S) = C_1(S \cap T) + C_2(S \cap (N \setminus T)), \tag{2.15}$$

siendo (P_1, C_1) y (P_2, C_2) los dos juegos del aeropuerto asociados respectivamente, a los problemas del aeropuerto (P_1, c_1) y (P_2, c_2) definidos por

$$\begin{array}{lll} P_1 = T, & c_j^1 = \max\{0, c_j - \max_{j \in N \setminus T} c_j\}, & \textit{para todo } j \in T \\ P_2 = N \setminus T, & c_j^2 = c_j, & \textit{para todo } j \in N \setminus T. \end{array}$$

2. *Si $\max_{j \in T} c_j \leq \max_{j \in N \setminus T} c_j$, el juego de la cara T, (N, C_{F_T}), puede escribirse como*

$$C_{F_T}(S) = C_2(S \cap (N \setminus T)). \tag{2.16}$$

siendo (P_2, C_2) el juego del aeropuerto asociado al problema (P_2, c_2) definido por

$$P_2 = N \setminus T, \quad c_j^2 = c_j, \quad \textit{para todo } j \in N \setminus T.$$

Demostración: Sea (N, c) un problema del aeropuerto y (N, C) el juego de coste asociado. Sea $T \subset N$, $T \neq \emptyset$. se tiene que para $S \subseteq N$, el juego de las cara T es

$$\begin{aligned} C_{F_T}(S) &= C((S \cap T) \cup (N \setminus T)) - C(N \setminus T) + C(S \cup (N \setminus T)) \\ &= C^1_{F_T}(S \cap T) + C^2_{F_T}(S \cap (N \setminus T)), \end{aligned} \tag{2.17}$$

donde $C^1_{F_T}(S \cap T) = C((S \cap T) \cup (N \setminus T)) - C(N \setminus T)$ y $C^2_{F_T}(S \cap (N \setminus T)) = C(S \cap (N \setminus T))$. A continuación desarrollaremos cada uno de estos dos sumandos por separado. Utilizando la Definición 1.30 del juego de coste del aeropuerto (N, C) se obtiene

$$C^1_{F_T}(S \cap T) = \max_{j \in (S \cap T) \cup (N \setminus T)} c_j - \max_{j \in N \setminus T} c_j.$$

Obsérvese que si $\max\limits_{j \in S \cap T} c_j \leq \max\limits_{j \in N \setminus T} c_j$, entonces $C^1_{F_T}(S \cap T) = 0$, para cualquier $S \subseteq N$. En caso contrario, si $\max\limits_{j \in T} c_j > \max\limits_{j \in N \setminus T} c_j$, entonces

$$C^1_{F_T}(S \cap T) = \max_{j \in S \cap T} c_j - \max_{j \in N \setminus T} c_j = \max\{c_j - \max_{j \in N \setminus T} c_j, j \in S \cap T\}. \tag{2.18}$$

Por tanto, el juego $(T, C^1_{F_T})$ es el juego asociado a un problema del aeropuerto (T, c^1) siendo $c^1_j = \max\{0, c_j - \max\limits_{j \in N \setminus T} c_j\}$, si $j \in T$.
Por otro lado el segundo sumando de la Fórmula 2.17 está dado por

$$C^2_{F_T}(S \cap (N \setminus T)) = c(S \cap (N \setminus T)).$$

Utilizando de nuevo la definición del juego del aeropuerto (N, C) resulta

$$C^2_{F_T}(S \cap (N \setminus T)) = \max_{j \in S \cap (N \setminus T)} c_j.$$

Y por tanto el juego del aeropuerto para este caso se define como

$$C^2_{F_T}(S) = \max_{j \in S} c_j.$$

Obsérvese que $(N \setminus T, C^2_{F_T})$ es un juego asociado a un problema del aeropuerto (N, c^2) donde $c^2_j = c_j$ si $j \in N \setminus T$. ■

En un trabajo futuro caracterizaremos el juego jerárquico asociado a un problema del aeropuerto cuando la estructura de prioridad tiene más de dos elementos.

A continuación, se ilustra mediante un ejemplo la relación entre el juego de las caras y el juego del aeropuerto establecido en la proposición 2.30.

Ejemplo 2.31 *Supongamos que los costes asociados a cuatro jugadores en un juego del aeropuerto son los siguientes:*

$$c = (c_1,\, c_2,\, c_3,\, c_4) \text{ donde } c_1 < c_2 < c_3 < c_4.$$

La función característica de este juego (N, C) *con* $N = \{1, 2, 3, 4\}$ *será*

$$C(1) = c_1 \quad C(2) = c_2 \quad C(3) = c_3 \quad C(4) = c_4 \quad C(1,2) = c_2 \quad C(1,3) = c_3$$
$$C(1,4) = c_4 \quad C(2,3) = c_3 \quad C(2,4) = c_4 \quad C(3,4) = c_4 \quad C(1,2,3) = c_3 \quad C(1,2,4) = c_4$$
$$C(1,3,4) = c_4 \quad C(2,3,4) = c_4 \quad C(1,2,3,4) = c_4.$$

Se puede observar como el coste asociado a cada coalición es el coste del mayor jugador que pertenece a la coalición. Por ejemplo, el coste para la coalición $(1, 2, 3)$ *será el coste asociado al jugador 3, es decir* c_3. *Supongamos que al juego* (N, C) *se le añade la estructura de prioridad* $P_> = \{(2, 4) > (1, 3)\}$. *La función característica del juego* $(N, C, P_>)$ *viene dada por*

$$C_{P_>} = [c_1,\ 0,\ c_3,\ c_4 - c_3,\ c_1,\ c_3,\ c_4 - c_3 + c_1,\ c_3,\ c_4 - c_3,\ c_4,\ c_3,\ c_4 - c_3 + c_1,\ c_4,\ c_4,\ c_4]$$

Por tanto, $(P_1, C_1) = \{\{2, 4\}, (0, c_4 - c_3)\}$ *y* $(P_2, C_2) = \{\{1, 3\}, (c_1, c_3)\}$. *A continuación se calcula el reparto del coste a través del valor jerárquico de Shapley*

$$\mathcal{H}(N, C, P_>) = (\frac{c_1}{2}, 0, c_3 - \frac{c_1}{2}, c_4 - c_3).$$

Si calculamos el valor de Shapley del juego (N, C) *original*

$$Sh(N, C) = [\frac{c_1}{4}, \frac{c_1}{4} + \frac{c_2 - c_1}{3}, \frac{c_1}{4} + \frac{c_2 - c_1}{3} + \frac{c_3 - c_2}{2}, \frac{c_1}{4} + \frac{c_2 - c_1}{3} + \frac{c_3 - c_2}{2} + c_4 - c_3].$$

Obsérvese que los jugadores 2 y 4 salen beneficiados con la estructura de prioridad dada por $P_> = \{(2, 4) > (1, 3)\}$, *mientras que los jugadores 1 y 3 salen perjudicados.*
Además Observamos que la eficiencia marginal implica que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1(N, C, P_>) + \mathcal{H}_3(N, C, P_>) &= c_3 \\ \mathcal{H}_2(N, C, P_>) + \mathcal{H}_4(N, C, P_>) &= c_4 - c_3. \end{aligned}$$

Capítulo 3

Aplicación a casos prácticos

En este apartado se presentan algunos problemas en el que se han introducido limitaciones en la cooperación a través de estructuras jerárquicas. Como método de reparto se utilizará el valor jerárquico de Shapley definido en el Capítulo 2.

3.1. Problema de Bancarrota con prioridades

En este apartado se analiza el caso en el que algunos agentes de una empresa en quiebra tienen prioridad o preferencia de cobro sobre otros agentes. A continuación compararemos el reparto que propone el valor de Shapley definido para distintas estructuras jerárquicas sobre un mismo ejemplo.

Supuesto 1

Una multinacional que se dedica a la fabricación de productos lácteos es declarada en quiebra por un tribunal español por una deuda de 392 millones de euros. Poco antes del escándalo la empresa disponía de 230 millones de euros en activos mientras que sus deudas llegaban a los 260 millones de euros. La empresa se vio obligada a solicitar dos créditos que situaron su deuda en torno a los 392 millones. Supongamos que los 392 millones de euros de deuda que tiene la empresa proviene de los acreedores recogidos en la Tabla 3.1:

Así pues, podemos expresar el problema anterior como un juego de bancarrota en el que el estado a repartir, E, es igual a 230 millones de euros y las demandas de los 8 acreedores vienen dadas por un vector, d, tal que $d = (10, 10, 15, 15, 180, 80, 40, 42)$.

n	Naturaleza de la demanda	Demanda
1	Hacienda Pública	10
2	Salarios (a 30 días)	10
3	Salarios (más de 30 días)	15
4	Seguridad Social	15
5	Banco "X"	180
6	Seguros	80
7	Proveedor "Z"	40
8	Proveedor "M"	42

Tabla 3.1: Acreedores y sus demandas (en millones de Euros).

A partir de ahora nos centraremos en distribuir la totalidad del estado entre los acreedores considerando diferentes relaciones de prioridad entre los agentes. Como tenemos muchos jugadores, utilizaremos la herramienta TUGlabExtended de Matlab.

Caso A

En este caso se supone que los acreedores pertenecen a una misma categoría, esto es, no existe prioridad en el cobro de unos sobre otros. Este caso es más teórico que práctico, puesto que en la legislación actual española la administración pública tiene preferencia de cobro respecto de los bancos. Para poder aplicar el valor de Shapley primero se obtiene la función característica del juego pesimista. De este modo, si calculamos el juego pesimista (N, v) para este caso y posteriormente aplicamos la regla de reparto dada por el valor de Shapley obtenemos:

$$Sh(N, v) = (5.6 \ , \ 5.6 \ , \ 8.35 \ , \ 8.35 \ , \ 113.68 \ , \ 42.61 \ , \ 22.37 \ , \ 23.4).$$

En cuanto al reparto observamos que el jugador que más se lleva es aquel cuya demanda es mayor. También se observa el principio de simetría, aquellos jugadores con demandas iguales reciben lo mismo.

En la Figura 3.1 se muestra una comparativa entre las demandas de cada acreedor y el montante recibido para cada uno mediante el valor de Shapley.

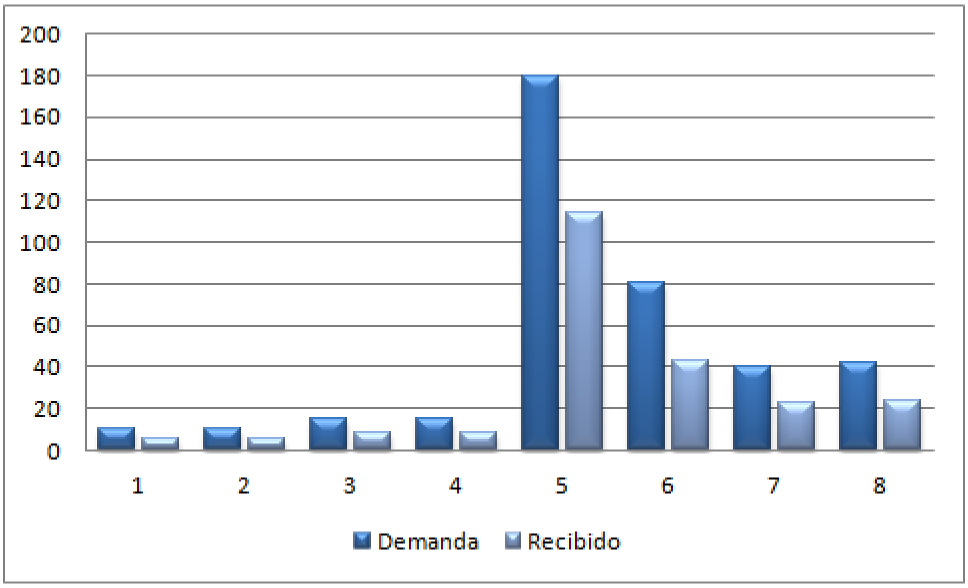

Figura 3.1: Comparativa entre demandas y reparto asignado (en millones).

A continuación mostramos los comandos y pasos a seguir para obtener estos resultados mediante el programa informático Matlab:

Introducimos los datos del ejercicio:

$>> n = 8; E = 230; d =$[10,10,15,15,180,80,40,42];

Calculamos la función característica del juego de bancarrota pesimista:

$>> Pesimist = bankruptcyE(n, E, d);$

Aplicamos la regla de reparto del valor de Shapley:

$>> Sh = shapleyE(Pesimist)$

Se obtiene el siguiente reparto:

Sh= [5.6071 , 5.6071 , 8.3571 , 8.3571 , 113.6786 , 42.6071 , 22.3690 , 23.4167]

Para poder replicar estos resultados se necesita tener instalado el paquete TUGlab Extended.

Caso B

En este segundo caso se considera la siguiente estructura de prioridad

$$P_{>} = \{\{1,2,3,4\} > \{5,6,7,8\}\}$$

Esta estructura de prioridad recoge la preferencia o prioridad de los acreedores $1, 2, 3$ y 4 sobre los restantes en el cobro de la deuda. Hay que destacar que dentro de cada grupo la prioridad es la misma. Utilizando la estructura jerárquica $(N, v, P_{>})$, el reparto asignado por el valor jerárquico de Shapley es

$$\mathcal{H}(N, v, P_{>}) = (10, 10, 15, 15, 99, 40, 20, 21).$$

A diferencia del Caso A, en esta ocasión los 4 primeros agentes, al tener preferencia sobre los demás, se llevarán la totalidad de sus demandas ya que su demanda total no supera el valor del estado. Mientras tanto, los demás acreedores se repartirán la cuantía restante en función de la cantidad que demandan. A continuación mostramos los comandos necesarios para obtener este resultado.

Introducimos los datos del ejercicio:

$>> n = 8; E = 230; d = [10, 10, 15, 15, 180, 80, 40, 42];$

Calculamos la función característica del juego de bancarrota pesimista:

$>> v = bankruptcyE(n, E, d);$

Observamos qué número natural está asociado a la coalición 1,2,3,4 en orden binario:

$>> characteristicfunction$

$>$ Number of players: 8

Vemos que el numero natural asociado a dicha coalición es el 15. Calculamos el juego de las caras para esa coalición:

$>> F = facesgamesIE(v)$

$>$ Coalition Number: 15

Calculamos el valor de shapley para la función característica obtenida a través del juego de las caras:

$>> shapleyE(F)$

Y se obtiene el siguiente reparto:

$\mathcal{H} = [10, 10, 15, 15, 99, 40, 20, 21]$

Caso C

En este tercer caso se propone la siguiente estructura

$$P_{>} = \{\{1,2,3,4\} < \{5,6,7,8\}\}$$

Esta estructura de prioridad refleja la preferencia o prioridad de los acreedores 5,6,7 y 8 sobre los demás. No hay prioridad entre los agentes de un mismo grupo. Utilizando la estructura jerárquica $(N, v, P_{>})$ se obtiene que el reparto asignado por el valor jerárquico de Shapley es

$$\mathcal{H}(N, v, P_{>}) = (0 \ , \ 0 \ , \ 0 \ , \ 0 \ , \ 135.00 \ , \ 45.67 \ , \ 24.00 \ , \ 25.33).$$

Los resultados obtenidos muestran como primero se tratan de satisfacer las demandas de los agentes $5, 6, 7$ y 8, pero sus demandas superan el estado, E, y es por ello que los primeros cuatro agentes no reciben nada. Este reparto favorece en gran medida al jugador 5, puesto que es el reparto que hasta el momento le ofrece una cifra mayor. Sin duda los jugadores más perjudicados son los 4 primeros acreedores que no reciben nada. A continuación mostramos los comandos y pasos necesarios para obtener este resultado.

Introducimos los datos del ejercicio:

>> $n = 8; E = 230;$ d=[10,10,15,15,180,80,40,42];

Calculamos la función característica del juego de bancarrota pesimista:

>> $v = bankruptcyE(n, E, d);$

Observamos qué número natural está asociado a la coalición 5,6,7,8 en orden binario:

>> $characteristicfunction$

> Number of Players: 8

Vemos que el numero natural asociado a dicha coalición es el 240. Calculamos el juego de las caras para esa coalición:

>> $F = facesgamesIE(v)$

> Coalition Number: 240

Calculamos el valor de shapley para la función característica obtenida a través del juego de las caras:

>> $shapleyE(F)$

Y se obtiene el siguiente reparto:

$\mathcal{H} = [0, 0, 0, 0, 135{,}00, 45{,}67, 24{,}00, 25{,}33]$

Caso D

En este último caso utilizaremos la estructura de prioridad definida en el artículo 176 bis de la ley concursal española 22/2003. La ley recoge un complejo orden de preferencia en el cobro de la deuda, que suele empezar siempre a favor de hacienda, la Seguridad Social y los ayuntamientos y sigue a favor de los acreedores hipotecarios (principalmente bancos), de los transportistas de los bienes transportados, de los constructores sobre lo construido y de los aseguradores de los bienes asegurados.
Una especial protección tienen los trabajadores, que gozan de preferencia frente a cualquier acreedor, en cuanto al cobro de los salarios correspondientes a los últimos 30 días de trabajo. En base a esta información, la ley propone la siguiente estructura jerárquica para nuestro ejercicio:

$$P_{>} = \{\{2\} > \{1\} > \{4\} > \{5\} > \{6\} > \{3, 7, 8\}\}$$

Esta estructura jerárquica refleja la prioridad de los salarios de los trabajadores (del último mes) respecto de las restantes demandas. Realizando operaciones similares a las del apartado anterior, se obtiene que el valor de Shapley jerárquico reparte el estado, E de la siguiente forma:

$$\mathcal{H}(N, v, P_{>}) = (10\ ,\ 10\ ,\ 0\ ,\ 15\ ,\ 180\ ,\ 15\ ,\ 0\ ,\ 0).$$

Observamos como con este reparto los jugadores $1, 2, 4$ y 5 reciben la totalidad de las cuantías demandadas. Una vez satisfechas estas demandas, quedan 15 millones de euros que son usados para cubrir parte de la demanda del jugador 6. El estado a repartir, E, se ha agotado y es por ello que los agentes $3, 7$ y 8 no se llevan nada.
De los repartos analizados, este último es el que más beneficia al jugador 5, puesto que le asigna la totalidad de su demanda. En este apartado los jugadores más perjudicados son el $3, 6, 7$ y el 8 por percibir muy poco o nada.
A continuación mostramos los comandos y pasos necesarios para obtener este resultado.

Introducimos los datos del ejercicio:

$>> n = 8; E = 230; d =$[10,10,15,15,180,80,40,42];

Calculamos la función característica del juego pesimista:

$>> v = bankruptcyE(n, E, d);$

Vemos que número natural está asociado a la coalición 2:

$>> characteristicfunction$

$>$ Number of Players: 8

Vemos que el numero natural asociado a dicha coalición en orden binario es el 2. Calculamos el juego de las caras para esa coalición:

$>> F = facesgamesIE(v)$

$>$ Coalition Number: 2

A partir de "F" calculamos el juego de las caras para la coalición 1, cuyo número asociado es el 1:

$>> J = facesgamesIE(F)$

$>$ Coalition Number: 1

A partir de "J" calculamos el juego de las caras para la coalición 4, cuyo número asociado es el 8:

$>> K = facesgamesIE(J)$

$>$ Coalition Number: 8

A partir de "K" calculamos el juego de las caras para la coalición 5 cuyo número asociado es el 16:

$>> L = facesgamesIE(K)$

$>$ Coalition Number: 16

A partir de "L" calculamos el juego de las caras para la coalición 6 cuyo número asociado es el 32:

$>> M = facesgamesIE(L)$

$>$ Coalition Number: 32

A partir de "M" calculamos el juego de las caras para la coalición $3, 7, 8$ cuyo número asociado es el 196:

$>> N = facesgamesIE(M)$

$>$ Coalition Number: 196

Calculamos el valor de shapley para la función característica obtenida a través del juego de las caras "N".

$>> shapleyE(N)$

Se obtiene el siguiente reparto:

$\mathcal{H}$= [10 , 10 , 0 , 15 , 180 , 15 , 0 , 0]

A modo conclusión se ha realizado el Gráfico 3.2 en el que se incluyen las demandas y los repartos obtenidos para cada acreedor en cada uno de los 4 casos analizados.

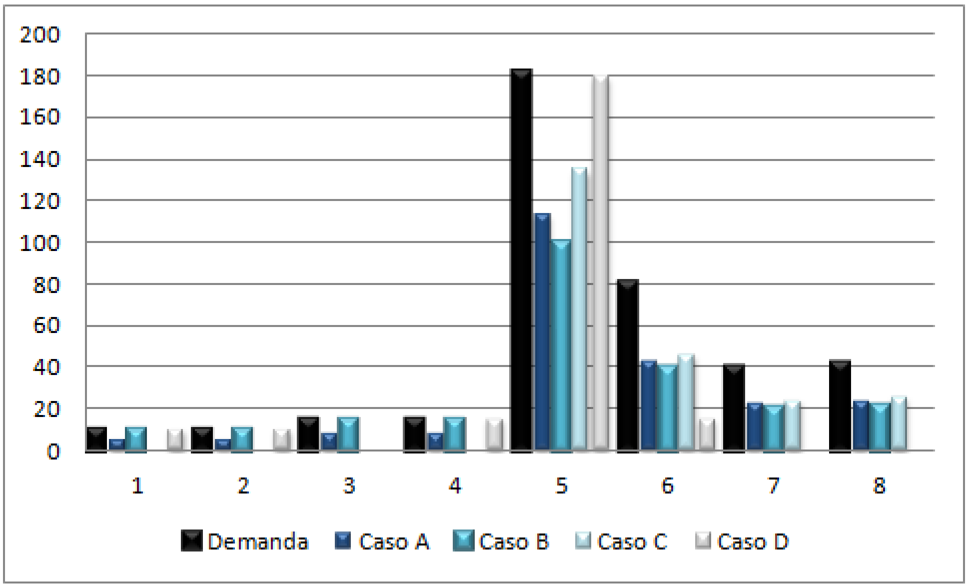

Figura 3.2: Demandas y repartos obtenidos en los distintos casos (millones).

3.2. Problema del Aeropuerto con prioridades

En este apartado se analiza el caso en el que algunos agentes tienen prioridad o preferencia sobre otros agentes. Es decir, al igual que en el juego de bancarrota, tener prioridad significa tener que pagar cero,o en su defecto, lo menos posible.

Supuesto 1

Supongamos que se han construido cinco casas que conforman un pequeño pueblo y que éstas quieren unirse a la red de abastecimiento de agua. En la Figura 3.3 se representa la situación de las casas.

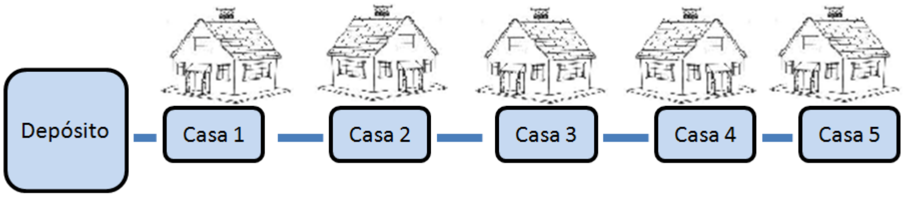

Figura 3.3: Linea de suministro de agua a 5 casas.

Si construimos una red que vaya únicamente a la primera casa las demás no podrán disponer de agua. Por el contrario, si conectamos la red a la última casa las demás también poseerán abastecimiento de agua. Veamos como formular este problema desde la perspectiva de los juegos cooperativos.
Supongamos a continuación que los costes (en miles de Euros) de conectar cada una de las casas al depósito son:

$$c_1 = 20 \quad c_2 = 30 \quad c_3 = 35 \quad c_4 = 45 \quad c_5 = 55.$$

Así, si las 5 casas deciden cooperar y contratar juntas el suministro de agua, el coste total es de 55.000 Euros.

Se puede representar esta situación como un juego del aeropuerto (N, C), donde N indica el número de casas y c es el vector de costes dado anteriormente. La función característica se puede determinar a través del programa informático Matlab. El coste que debe sufragar una coalición S se corresponde con el coste de construir una red que puedan utilizar todas las casas de dicha coalición.

Caso A

Para este apartado supondremos que las casas pertenecen a una misma categoría, esto es, no existen prioridades de pago de unos sobre otros.
Utilizando el valor de Shapley para repartir el coste total, obtenemos (en miles de Euros)

$$Sh(N, C) = (4.0, \quad 6.5, \quad 8.2, \quad 13.2, \quad 23.1).$$

De esta forma la casa 1 pagará 4.000 Euros, la segunda 6.500 Euros, la tercera 8.200 Euros, la cuarta 13.200 Euros y la quinta 23.100 Euros. Observemos que, con respecto al coste individual, el valor de Shapley garantiza un ahorro del 80 % a la casa 1, un 78,3 % a la 2, un 76,6 % a la casa 3, un 70,7 % a la 4 y un 58 % a la casa 5.
A continuación mostramos los comandos y pasos necesarios para obtener este resultado en Matlab:

Introducimos los datos (costes de cada casa):

>> c=[20 , 30 , 35 , 45 , 55];

Calculamos la función característica:

>> $d = airportgameE(c)$

Calculamos el reparto a través del valor de Shapley:

>> $Sh = shapleyE(d)$

Se obtiene:

Sh = [4.0000 , 6.5000 , 8.1667 , 13.1667 , 23.1667]

Caso B

En este caso, a diferencia del anterior, supondremos que las casas 1 y 2 tienen unos ingresos muy elevados mientras que las casas 3, 4 y 5 poseen una renta dentro de la media. Supongamos ahora que queremos obtener un reparto que considere esta situación y que asigne un privilegio especial a las casas 3,4 y 5. Se propone la siguiente estructura de prioridad

$$P_{>} = \{\{3, 4, 5\} > \{1, 2\}\}$$

Utilizando la estructura jerárquica $(N, C, P_{>})$ el valor jerárquico de Shapley asigna el siguiente reparto (en miles de Euros)

$$\mathcal{H}(N, C, P_{>}) = (10.0, \quad 20.0, \quad 1.6, \quad 6.6, \quad 16.6).$$

Como cabía esperar, las casas 1 y 2 serán las que desembolsen una mayor cantidad de dinero debido a que son más fuertes económicamente. Pese a aumentar sus costes considerablemente respecto del Caso A, a los jugadores 1 y 2 les sigue interesando la cooperación puesto que pagan menos que actuando por su propia cuenta. Así pues, el reparto dado por el valor jerárquico de Shapley ha plasmado a la perfección la situación desventajosa de las casas 1 y 2.

A continuación mostramos los comandos y pasos necesarios para obtener este resultado:

Introducimos los datos (costes de cada casa):

>> c=[20 , 30 , 35 , 45 , 55];

Calculamos la función característica:

>> $d = airportgameE(c)$

Vemos que número natural está asociado a la coalición $3, 4, 5$:

>> $characteristicfunction$

> Number of players: 5

Vemos que el número natural asociado a dicha coalición en orden binario es el 28. Calculamos el juego de las caras para esa coalición:

>> $F = facesgamesIE(d)$

> Coalition Number: 28

Calculamos el reparto a través del valor de Shapley:

>> $Sh = shapleyE(F)$

Se obtiene:

$\mathcal{H}$ = [10.0 , 20.0 , 1.6 , 6.6 , 16.6]

Caso C

En este caso consideraremos la situación en la que la construcción de la casa 3 fue anterior a la construcción de las demás. Esto es, la casa 3 ya estaba conectada al depósito cuando se construyeron las casas 1,2,4 y 5. Se puede representar esta situación mediante la estructura de prioridad

$$P_{>} = \{\{1, 2, 4, 5\} > \{3\}\}$$

Utilizando la estructura de prioridad $(N, C, P_{>})$ y el valor jerárquico de Shapley como regla de reparto, se obtiene

$$\mathcal{H}(N, C, P_{>}) = (0, \quad 0, \quad 35, \quad 5, \quad 15).$$

Las casas con menores costes de conexión, es decir, la 1 y la 2, no pagarán nada gracias a que la casa 3 ya estaba conectada al depósito. Las casas 4 y 5 pagarán el coste restante, 20.000 Euros, de forma que es el jugador 5 quien asume gran parte de este desembolso.
Para poder obtener estos resultados es necesario aplicar los siguientes comandos:

Introducimos los datos (costes de cada casa):

$>>$ c=[20 , 30 , 35 , 45 , 55];

Calculamos la función característica:

$>> d = airportgameE(c)$

Vemos que número natural está asociado a la coalición 1,2,4,5:

$>> characteristicfunction$

$>$ Number of players: 5

Vemos que el número natural asociado a dicha coalición en orden binario es el 27. Calculamos el juego de las caras para esa coalición:

$>> F = facesgamesIE(d)$

$>$ Coalition Number: 27

Calculamos el reparto a través del valor de Shapley:

$>> Sh = shapleyE(F)$

Se obtiene:

$\mathcal{H}$ = [0 0 35 5.0 15.0]

Caso D

Aunque no se haya caracterizado la situación general, en este último caso consideraremos una estructura de prioridad del tipo $P_{>} = \{P_1 > P_2 > P_3\}$. Supóngase que la construcción de las 5 casas no fue simultánea. Así, consideraremos la situación en la que la primera casa en ser conectada al depósito fue la casa 3, después se terminaron de construir las casas 1 y 4, y por último se añadieron al depósito las casas 2 y 5. Se puede representar esta situación mediante la estructura de prioridad

$$P_> = \{\{2,5\} > \{1,4\} > \{3\}\}$$

Utilizando la estructura de prioridad $(N, C, P_>)$ y el valor jerárquico de Shapley como regla de reparto, se obtiene

$$\mathcal{H}(N, C, P_>) = (0, \quad 0, \quad 35, \quad 10, \quad 10).$$

Las casas 1 y 2 no asumen ningún coste puesto que se unen a la conexión de la casa 3. Las casas 4 y 5 pagarán los 20.000 Euros restantes de manera equitativa.

Para poder obtener estos resultados es necesario aplicar los siguientes comandos:

Introducimos los datos (costes de cada casa):

>> c=[20 , 30 , 35 , 45 , 55];

Calculamos la función característica:

>> $d = airportgameE(c)$

Vemos que número natural está asociado a la coalición 2,5:

>> $characteristicfunction$

> Number of players: 5

Vemos que el número natural asociado a dicha coalición en orden binario es el 18. Calculamos el juego de las caras para esa coalición:

>> $F = facesgamesIE(d)$

> Coalition Number: 18

A partir de "F" calculamos el juego de las caras para la coalición $1, 4$, cuyo número asociado es el 9:

>> $G = facesgamesIE(F)$

> Coalition Number: 9

Calculamos el reparto a través del valor de Shapley:

>> $Sh = shapleyE(G)$

Se obtiene:

$\mathcal{H}$ = [0 0 35 10 10]

Capítulo 4

Contribución al paquete TUGlabExtended

TUGlabExtended es una colección de funciones de MATLAB, introducidas por David Mirás, diseñadas para servir de apoyo y complemento tanto a los instructores y alumnos en los cursos de teoría de juegos como al investigador en esta materia. TUGlabExtended admite juegos con un número arbitrario de jugadores, y sólo las limitaciones de almacenamiento y velocidad de procesamiento de las máquinas restringen su rango efectivo.
Las funciones de TUGlabExtended pueden ejecutarse con cualquier distribución de MATlab superior a la versión 6 y en cualquier plataforma en la que se encuentre disponible el programa (Unix, PC o Macintosh). En este trabajo se añaden 4 funciones que complementan las 24 funciones creadas en la primera versión de TUGlabExtended.
Todas las funciones se ejecutan directamente desde la ventana de comandos de MATLAB. El nombre de estas funciones terminan todas ellas por la letra mayúscula E. De este modo evitamos cualquier confusión posible a la hora de escoger entre las funciones de TUGlab (para 3 y 4 jugadores) y las de TUGlabExtended. En TUGlabExtended, las funciones se obtienen y deben ser introducidas en orden binario.
Vamos a describir a continuación las 4 funciones que se han creado en este trabajo. Para cada una de ellas incluimos la siguiente información:

1. La sintaxis.

2. Las variables de entrada (INPUT).

3. Las variables de salida(OUTPUT).

4. Un ejemplo.

4.1. Funciones implementadas

FACESGAMESE

Sintaxis: F=facesgamesE(v)

Calcula los juegos de las caras para un juego TU.

INPUT:

La función característica v en orden binario, dada como un vector $2^n - 1$ componentes, siendo n el número de jugadores.

OUTPUT:

$F = facesgamesE(v)$ devuelve una matriz con $2^n - 2$ filas y $2^n - 1$ columnas, cuyas filas representan el juego de las caras para cada coalición (en orden binario). Se omite el juego de la cara para la coalición $\{1, 2, 3\}$ por coincidir con el juego original.

EJEMPLO:

>> v=[0 0 10 0 40 50 90 0 30 10 40 20 80 90 160];

>> $F = facesgamesE(v)$

F =

70	0	70	0	70	50	120	0	70	10	80	20	90	90	160
0	80	80	0	40	80	120	0	30	80	110	20	80	100	160
60	70	140	0	60	70	140	0	60	70	140	20	80	90	160
0	0	10	120	120	120	130	0	30	10	40	120	150	130	160
30	0	30	80	150	80	150	0	30	10	40	80	150	90	160
0	10	10	50	50	130	130	0	30	10	40	50	80	130	160
30	10	40	20	80	90	160	0	30	10	40	20	80	90	160
0	0	10	0	40	50	90	70	70	70	80	70	110	120	160
40	0	40	0	40	50	90	40	110	40	110	40	110	90	160
0	50	50	0	40	50	90	40	40	120	120	40	80	120	160
40	50	90	0	40	50	90	20	80	90	160	20	80	90	160

FACESGAMESIE

Sintaxis: F=facesgamesIE(v)

Calcula el juego de la cara para una determinada coalición.

INPUT:

La función característica v en orden binario, dada como un vector $2^n - 1$ componentes, siendo n el número de jugadores. En "Coalition number" se debe escribir el número de la coalición del que queremos obtener el juego de las caras. Para conocer qué número representa una determinada coalición se tiene la función auxiliar "characteristicfunction" incluída en TUGlabExtended.

OUTPUT:

$F = facesgamesIE(v)$ devuelve el juego de las caras para una determinada coalición en un vector compuesto por $2^n - 1$ columnas en orden binario. Además, la primera salida indica para que coalición se ha obtenido el juego de las caras.

EJEMPLO:

>> v=[0 0 10 0 40 50 90 0 30 10 40 20 80 90 160];

>> $F = facesgamesIE(v)$

>> Coalition number:7

Coalition=

1,2,3

F=

30 10 40 20 80 90 160 0 30 10 40 20 80 90 160

AIRPORTGAMEE

Sintaxis: A=airportgameE(c)

Devuelve la función característica para el problema del aeropuerto.

INPUT:

Los costes ordenados de menor a mayor de cada uno de los agentes, escrita como un vector de n componentes, siendo n el número de jugadores.

OUTPUT:

$A = airportgameE(c)$ calcula la función característica para un juego del aeropuerto. A cada coalición se le asignará el mayor coste del jugador perteneciente a dicha coalición.

EJEMPLO:

>> c=[10 20 30 40 50];

>> $A = airportgameE(c)$

A=

Columns 1 through 20

10 20 20 30 30 30 30 40 40 40 40 40 40 40 40 50 50 50 50 50

Columns 21 through 31

50 50 50 50 50 50 50 50 50 50 50

BANKRUPTCYE

Sintaxis: $[Pesimist, Optimist] = bankruptcyE(n, E, d)$

Devuelve la función característica del juego pesimista y optimista para un problema de bancarrota.

INPUT:

Se debe introducir el número de jugadores, n, la cantidad o estado a repartir, E, y las demandas de los jugadores mediante un vector de n componentes.

OUTPUT:

$[Pesimist, Optimist] = bankruptcyE(n, E, d)$ calcula la función característica del juego pesimista y optimista para un problema de bancarrota a través de un vector de $2^n - 1$ componentes.

EJEMPLO:

\>> n=4; E=200; d=[40 50 60 70];

\>> $[Pesimist, Optimist] = bankruptcyE(n, E, d)$

Pesimist =

[20 30 70 40 80 90 130 50 90 100 140 110 150 160 200]

Optimist =

[40 50 90 60 100 110 150 70 110 120 160 130 170 180 200]

Referencias

Aumann, R. y Maschler, M. (1985). *Game theoretic analysis of a bunkruptcy problem form the Talmud.* Journal of Economic Theory 35: 195–213.

Estévez-Fernández, A., Fiestras-Janeiro,· M. G., Mosquera, M. A. y Sánchez-Rodríguez, E. (2012). *A bankruptcy approach to the core cover.* Mathematical Methods of Operations Research 76: 343–359.

Gillies, D. B. (1953). *Some theorems on n-person games.* PhD thesis, Princeton University.

Gilles, R. P., Owen, G. y van den Brink, R. (1992). *Games with permission structures: the conjunctive approach.* International Journal of Game Theory 20: 277–293.

Gilles, R. P. y Owen, G. (1999). *Cooperative Games and Disjunctive Permission Structures.* Department of Economics, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia.

González-Díaz, J. y Sánchez-Rodríguez, E. (2008). *Cores of convex and strictly convex games.* Games and Economic Behavior 62:100–105.

Littlechild, S. C. y Owen, G. (1973). *A simple expression for the Shapley value in a special case.* Management Science 20: 370–372.

Mirás-Calvo, M. A. y Sánchez-Rodríguez, E. (2008). *Juegos cooperativos con utilidad transferible usando MATLAB: TUGlab.* Universidade de Vigo.

O´Neill, B. (1982). *A problem of rights arbitration from the Talmud.* Mathematical Social Sciences 2, 345-371. [183, 197, 201].

Owen, G. (1977). *Values of games with a priori unions.* in R. Henn and O. Moeschlin (eds), Essays in Mathematical Economics and Game Theory, Springer, Berlin, pp. 76–88.

Shapley, L. (1953). *A value for n-person games.* In: Kuhn HW, Tucker AW (eds)Contribution to the Theory of Games II, vol 28 of Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, pp 307–317.

Shapley, L. (1967). *On balanced sets and cores.* Naval Research Logistics Quarterly 14:453–460.