



Universidade de Vigo

Trabajo Fin de Máster

Asignación de costes en un problema de transporte: revisión y estudio comparativo

Paula Soto Rodríguez

Máster en Técnicas Estadísticas

Curso 2023-2024

Propuesta de Trabajo Fin de Máster

Título en galego: Asignación de costes nun problema de transporte: revisión e estudo comparativo.
Título en español: Asignación de costes en un problema de transporte: revisión y estudio comparativo.
English title: Cost allocation for transport problems: revision and comparative study.
Modalidad: Modalidad A.
Autora: Paula Soto Rodríguez, Universidad de Santiago de Compostela.
Directora: Balbina Virginia Casas Méndez, Universidad de Santiago de Compostela.
Breve resumen del trabajo: <p>Una cuestión interesante que surge en el ámbito del transporte es cómo asignar el peaje recolectado por los usuarios de una autopista a cada una de las empresas de transporte encargadas de su gestión y mantenimiento, y que están ubicadas a lo largo de la carretera. En este trabajo se hace uso de la teoría de juegos para resolver este problema. Para ello, se estudian las soluciones más representativas de la teoría de juegos clásica, así como otras más recientes en la literatura. Finalmente, se comparan los resultados ofrecidos por diferentes métodos sobre dos casos reales.</p>

Doña Balbina Virginia Casas Méndez, profesora titular de la Universidad de Santiago de Compostela, informa que el Trabajo Fin de Máster titulado

Asignación de costes en un problema de transporte: revisión y estudio comparativo

fue realizado bajo su dirección por doña Paula Soto Rodríguez para el Máster en Técnicas Estadísticas. Estimando que el trabajo está terminado, da su conformidad para su presentación y defensa ante un tribunal.

En Santiago de Compostela, a 3 de junio de 2024.

CASAS MENDEZ Firmado digitalmente
BALBINA por CASAS MENDEZ
VIRGINIA - BALBINA VIRGINIA -
09367287P Fecha: 2024.06.03
09367287P 08:04:24 +02'00'

La directora:
Doña Balbina Virginia Casas Méndez



La autora:
Doña Paula Soto Rodríguez

Declaración responsable. Para dar cumplimiento a la Ley 3/2022, de 24 de febrero, de convivencia universitaria, referente al plagio en el Trabajo Fin de Máster (Artículo 11, [Disposición 2978 del BOE núm. 48 de 2022](#)), **el/la autor/a declara** que el Trabajo Fin de Máster presentado es un documento original en el que se han tenido en cuenta las siguientes consideraciones relativas al uso de material de apoyo desarrollado por otros/as autores/as:

- Todas las fuentes usadas para la elaboración de este trabajo han sido citadas convenientemente (libros, artículos, apuntes de profesorado, páginas web, programas,...)
- Cualquier contenido copiado o traducido textualmente se ha puesto entre comillas, citando su procedencia.
- Se ha hecho constar explícitamente cuando un capítulo, sección, demostración,... sea una adaptación casi literal de alguna fuente existente.

Y, acepta que, si se demostrara lo contrario, se le apliquen las medidas disciplinarias que correspondan.

Agradecimientos

Me gustaría agradecer, en primer lugar, a mi tutora, Balbina Casas Méndez. Gracias por las detalladas revisiones de mi trabajo durante todo este año, por sus consejos y por estar siempre pendiente y disponible cuando me hizo falta. Agradezco mucho cómo me ha guiado a lo largo de todo este proceso, en el cual he aprendido enormemente. Ha sido un verdadero placer tenerla como tutora. Además, quiero expresar mi más profunda gratitud a mis padres, por apoyarme en cada decisión que he tomado en mi vida, por querer siempre lo mejor para mí y, sobre todo, por su amor. Sois mi luz en los momentos de oscuridad, mi guía en las tinieblas y la mano que me levanta cuando me caigo. En definitiva, lo sois todo para mí. Os quiero infinito. Siempre juntos.

Índice general

Resumen	XI
Prefacio	XIII
1. Preliminares	1
1.1. Teoría de juegos cooperativos	1
1.2. Juegos de comunicación	18
1.2.1. Solución AT para grafos lineales	29
1.3. Juegos con estructura de permiso	30
1.3.1. Juegos de enlaces	38
2. Problema de asignación de peajes en una autopista	41
2.1. Problemas relacionados	41
2.1.1. Problema del río contaminado	41
2.1.2. Problema del peaje en una autopista	44
2.2. Problema de asignación de peajes en una autopista	47
2.2.1. Modelo y métodos	47
2.2.2. Caracterizaciones de los métodos	50
2.2.3. Juegos asociados a los métodos	54
3. Aplicación práctica a datos reales	63
3.1. Método SES: autopista española	63
3.1.1. Análisis exploratorio para la autopista española	64
3.1.2. Formulación del problema y soluciones	66
3.2. Métodos ExES y EnES: autopista australiana	77
3.2.1. Juego de asignación de salidas	78
3.2.2. Juego de asignación de entradas	82
3.3. Red de autopistas en Irlanda.	85
4. Conclusiones y trabajo futuro	89
A. Tablas sobre datos de tráfico	93
B. Código de R	101
Bibliografía	109

Resumen

Resumen en español

El objetivo de la presente memoria es el análisis de un nuevo problema procedente del ámbito del transporte, formulado por [Wu et al. \(2024\)](#), desde el punto de vista de la teoría de juegos: encontrar el mejor modo de asignar el peaje recolectado por los usuarios de una autopista a los diferentes segmentos en los que se divide, donde las secciones pueden estar operadas por diferentes compañías o ser unidades de un mismo operador. Con este fin, se introduce el marco teórico con las nociones necesarias para abordar el problema de la referencia principal, y que incluyen tanto los conceptos de solución más importantes en la teoría de juegos clásica, como la presentación de dos juegos con unas características especiales, donde las posibilidades de cooperación entre los jugadores son limitadas. Además, se explican los tres métodos propuestos en [Wu et al. \(2024\)](#), se enuncian sus propiedades acompañándolas de interpretaciones intuitivas, y se formulan los juegos asociados. Finalmente, se ilustra la teoría expuesta sobre un par de ejemplos reales, relativos a una autopista española y otra australiana, donde se comparan e interpretan los resultados obtenidos mediante distintas soluciones para decidir cuál es el reparto de peaje más adecuado en cada caso.

English abstract

The aim of this project is to analyse a new problem within the transportation domain, formulated by [Wu et al. \(2024\)](#), from a game theoretic perspective: finding the best way to allocate the toll collected from motorway users among the various segments into which it is divided. These sections can be operated by different companies or be units of the same operator. To this end, the theoretical framework is introduced with the necessary notions to address the problem of the main reference. These include both the most important solution concepts in classical game theory, as well as the presentation of two games with special features, where the possibilities of cooperation between players are limited. In addition, the three methods proposed in [Wu et al. \(2024\)](#) are explained, their properties are stated accompanied by intuitive interpretations, and the associated games are formulated. Finally, the theory is illustrated by means of two real-life examples, pertaining to a Spanish and an Australian motorway. The outcomes derived from various solutions are compared and interpreted to decide which is the most appropriate toll distribution in each case.

Prefacio

Una cuestión interesante que surge en el ámbito del transporte es cómo asignar el peaje recolectado por los usuarios de una autopista a cada una de las empresas de transporte o autoridades municipales encargadas de su gestión y mantenimiento, y que están ubicadas a lo largo de la carretera. Este trabajo de fin de máster está dedicado al análisis y resolución de este problema mediante el uso de la teoría de juegos. Pero, ¿qué es (exactamente) la teoría de juegos?

La teoría de juegos es el nombre dado a la metodología que usa herramientas matemáticas para modelizar y analizar situaciones basadas en la toma de decisiones interactivas. Es decir, situaciones que involucran a varios agentes que toman decisiones (llamados jugadores) con diferentes objetivos, en los que la decisión de cada cual afecta al resultado final de todos los decisores. Esta interacción distingue la teoría de juegos de la teoría de decisión clásica, enfocada esencialmente en un único decisor. Basándose en la hipótesis de que los jugadores se comportan de modo racional, la teoría de juegos trata de predecir su comportamiento y a veces también proporciona sugerencias relativas a las formas en las que pueden alcanzar sus objetivos.

En función de si hay un objetivo común para todos los jugadores o de si cada uno de ellos persigue su propia meta, se distinguen dos tipos de modelos dentro de la teoría de juegos: cooperativos y no cooperativos. En estos últimos, se supone que todas las posibles acciones de los agentes están completamente detalladas en la descripción formal del juego y se trata de analizar *cómo* debe actuar cada uno de estos agentes dentro de las reglas del juego. En cambio, el modelo de teoría de juegos cooperativos supone que los agentes pueden establecer acuerdos vinculantes a través de mecanismos complejos que no están completamente precisados en la descripción del juego. En este contexto, lo que se busca es proponer repartos aceptables por todos de los beneficios que el colectivo de agentes puede generar como consecuencia de la colaboración entre sus miembros.

La primera formulación matemática de la teoría de juegos vino dada de la mano de John von Neumann y Oskar Morgenstern en el libro *The Theory of Games and Economic Behavior*, publicado en 1944. Ciertas limitaciones en este marco formal provocaron que, inicialmente, la teoría solo fuese aplicable bajo ciertas condiciones. No obstante, en las últimas décadas, a medida que la teoría se fue desarrollando y refinando, han surgido multitud de aplicaciones en campos tan diversos como la economía (análisis de mercados, repartos de costes o beneficios, asignación de tarifas, problemas de bancarrota, asignación de recursos, repartos de cuotas), redes (Internet, red de telefonía móvil, redes sociales), ciencias políticas (el estudio de las posibles formas en las que los partidos políticos pueden cooperar para formar una coalición, índices de poder para medir la influencia de cada partido, métodos de votación), biología (evolución de las especies), psicología (modelos de comportamiento) o en informática (problemas de enrutamiento y congestión).

La aplicación en la que está centrada este trabajo es el transporte. Como se puede ver en [Fiestras-Janeiro et al. \(2011\)](#), la teoría de juegos cooperativos se ha aplicado con gran éxito en este ámbito, donde los problemas que aparecen más frecuentemente están relacionados con la distribución o asignación de costes. Por ejemplo, para decidir cual es el mejor modo de distribuir el coste de un sistema

de transporte entre sus usuarios, analizar cuán justos son los precios de los billetes en el transporte público o bien para diseñar un sistema de tarifas justo que permita sufragar los costes de determinadas infraestructuras. En relación a esto último, la teoría de juegos cooperativos ha demostrado ser muy útil en diversos estudios aplicados a problemas de tarificación de autopistas, donde se trata de determinar qué peaje se debe asignar a cada vehículo o cada clase de vehículo para cubrir los gastos de construcción y mantenimiento de la carretera. En estos estudios se hace uso de diversas soluciones de teoría de juegos para resolver problemas de asignación de costes cuyos agentes son los tipos de vehículos (motos, camiones, etc.). La filosofía de los métodos clásicos para resolver el problema se enmarcan bajo dos enfoques: los métodos de asignación proporcional (que determinan las tarifas a cada tipo de vehículo en función de varias medidas sobre su uso de la carretera, como puede ser el peso del vehículo o la distancia recorrida) y los métodos incrementales (los cuales asignan los costes en función de las modificaciones que habría que hacer en la carretera como resultado de la acomodación de los vehículos más pesados). [Villarreal-Cavazo and García-Díaz \(1985\)](#) desarrollaron dos nuevos métodos, conocidos como el enfoque incremental modificado y el método generalizado, que tratan de suplir las deficiencias de los planteamientos clásicos. Por otro lado, [Castaño-Pardo and García-Díaz \(1995\)](#), propusieron una variación del problema de asignación de costes en una autopista al considerar cada vehículo individual como un jugador, en vez de considerar las clases enteras en las que se pueden dividir los vehículos como agentes. En este juego, donde hay un gran número de jugadores, las decisiones de un jugador por sí solo son irrelevantes para el resultado final del juego. Una aplicación para el diseño de las tarifas en las autopistas de España se puede encontrar en [Kuipers et al. \(2013\)](#). En este estudio, la autopista se divide en un conjunto ordenado de secciones (donde cada sección está delimitada por las entradas y salidas de la autopista) y cada sección tiene asociado un coste fijo. En este caso, los jugadores son los usuarios de la autopista. Por último, destacamos el trabajo de [Gómez-Rodríguez et al. \(2024\)](#), que plantea cómo asignar los costes de una autopista a sus usuarios, considerando que distintos tipos de vehículos pueden negociar entre sí para conseguir una reducción de las tarifas.

Para finalizar, mencionamos otras aplicaciones de interés de los juegos cooperativos en problemas de asignación de costes en el área del transporte. Una aplicación clásica es el problema del aeropuerto de [Littlechild and Owen \(1973\)](#). Este problema consiste en dividir los costes de mantenimiento o construcción de una pista de aterrizaje entre las distintas aerolíneas que operan en un aeropuerto. Claramente se puede observar que los aviones pequeños y ligeros necesitan una pista más corta para aterrizar que los aviones grandes. Las aeronaves que utilizan las instalaciones de un aeropuerto tienen que pagar una tasa por cada operación que realizan (despegue o aterrizaje) y, en la mayoría de los casos, esas tasas tienen varios componentes, uno de los cuales está relacionado con el coste de construcción de la pista utilizada. Un problema relacionado es el que proponen [Fraggelli et al. \(2000\)](#), que investigan cómo repartir los costes de construcción y mantenimiento de la red ferroviaria en Italia. En este caso, se distinguen dos tipos de trenes en función de la velocidad que alcanzan: rápidos y lentos. Cada tipo de tren demanda distintos tipos de vía. Los trenes rápidos requieren una vía de alta calidad para circular, mientras que para los trenes lentos es suficiente con usar una vía básica. Los costes de construcción se modelan como un problema del aeropuerto, en el siguiente sentido: ambas categorías de tren usan el nivel más básico de vía (equivalente a la primera sección de la pista de aterrizaje), pero los trenes rápidos necesitan, además, el siguiente nivel de calidad (que correspondería con usar la pista entera). Por su parte, [Estañ et al. \(2021\)](#) exploran cómo dividir el coste fijo (salarios del personal ejecutivo, reparación de instalaciones o impuestos fijos) de una línea de tranvía entre las ciudades ubicadas a lo largo de dicha línea. Este coste es independiente del número de pasajeros y de la longitud de la línea. Además, proponen tres métodos para repartir el coste, cuyas ideas esenciales son: hacerlo de forma uniforme entre las ciudades, dividirlo proporcionalmente al número de usuarios en cada ciudad y asignarlo proporcionalmente al número de segmentos de la línea de tranvía de los que hace uso cada pasajero. Finalmente, [Rosenthal \(2017\)](#) considera un sistema regional de transporte formado por una serie de estaciones conectadas unas con otras mediante una red de enlaces, y se plantea cómo distribuir el coste de dicho sistema entre sus usuarios, donde supone que cada pasajero empleará el camino más corto (i.e, el menor número de enlaces) entre todo par de estaciones en la red del sistema.

Este trabajo se divide en tres capítulos: en el capítulo 1 se exponen las definiciones básicas de la teoría de juegos cooperativos y se introducen dos tipos de juegos con restricciones en la cooperación: los juegos de comunicación y los juegos con estructura de permiso. Para cada uno de ellos se describen los principales conceptos de solución, junto con sus correspondientes axiomatizaciones.

En el capítulo 2 se estudia el problema al que está dedicado este trabajo, introducido en [Wu et al. \(2024\)](#), y que consiste en analizar cómo asignar el peaje recolectado por los usuarios de una autopista lineal a los segmentos en los que se divide la carretera. Se explican brevemente las inspiraciones en las que está basado el problema y se presentan las tres soluciones propuestas, cuya creación y aplicación práctica están supeditados al sistema de tarifas que se considere, que puede ser basado en distancia recorrida o fijo, en función de las entradas y salidas de la autopista. Además, se analizan las propiedades que verifican cada uno de los métodos y se muestran sus interpretaciones intuitivas. Por último, se formulan los juegos asociados a cada una de las soluciones.

Para concluir, en el capítulo 3 se ilustran los conceptos de solución presentados en los capítulos previos sobre varios casos reales. En concreto, nos centramos en una autopista española para ilustrar el sistema de peaje basado en distancias recorridas y en la autopista australiana Hills M2 para mostrar el uso del sistema de peaje fijo. Se emplean los métodos de [Wu et al. \(2024\)](#) adecuados para cada caso y se comparan con lo obtenido por las soluciones del capítulo 1. Además, se interpretan los resultados y se decide cuál es el mejor reparto del peaje en base a las propiedades que verifican las soluciones. Por último, se muestra un ejemplo sobre la red de autopistas de peaje en Irlanda que podría servir de motivación para extender el problema presentado en [Wu et al. \(2024\)](#) a un caso más general.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo expondremos los aspectos teóricos necesarios para entender la referencia principal en la que se basa este trabajo. Comenzaremos presentando las definiciones y conceptos de solución más conocidos en el campo de la teoría de juegos cooperativos, para después pasar a definir dos subclases bien conocidas de juegos cooperativos: los juegos de comunicación y los juegos con estructura de permiso. Ambos juegos comparten el hecho de que la cooperación entre los agentes está restringida, es decir, no se puede formar cualquier coalición entre los jugadores.

1.1. Teoría de juegos cooperativos

Para la elaboración de esta sección, nos basaremos en las referencias [González-Díaz et al. \(2010\)](#) y [Sánchez-Rodríguez y Vidal \(2014\)](#).

En la teoría de juegos cooperativos, el foco está puesto en lo que puede obtener un grupo de agentes, y no en los pagos asignados a agentes individuales, como sucede en juegos no cooperativos. Dado un grupo de agentes, un juego cooperativo define el beneficio que un grupo se puede garantizar por sí mismo, sin la ayuda o cooperación con agentes no pertenecientes a dicha coalición.

Nosotros nos centraremos en los juegos cooperativos con utilidad transferible, también denominados juegos TU. Exponemos, a continuación, las hipótesis de este modelo y seguidamente su definición formal.

- Cada coalición tiene asignado un único valor como pago (no un conjunto de pagos).
- Los pagos (utilidad) se pueden redistribuir (transferir) entre los miembros de una coalición libremente, sin ningún tipo de restricción.

Definición 1. Un juego cooperativo con utilidad transferible es un par (N, v) , donde:

- N es un conjunto finito de jugadores.
- $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ es una función que asocia a cada coalición $S \subseteq N$ un número real $v(S)$, que representa el pago que la coalición S se puede garantizar por sí misma, independientemente de lo que hagan el resto de jugadores. Asumimos que $v(\emptyset) = 0$.

Los subconjuntos de N se llaman coaliciones y v se denomina función característica. Denotamos por G^N a la clase de todos los juegos con conjunto de jugadores N .

Las cuestiones fundamentales que intenta responder la teoría de juegos cooperativos son:

- ¿Qué coalición(es) se formará(n)?

- ¿Cómo debería de repartir esa coalición(es) el pago entre sus miembros?

La respuesta a la primera pregunta suele ser la gran coalición N , i.e, todos los agentes acuerdan trabajar juntos. No obstante, esto no siempre tiene porqué ser así. Dependerá de lo beneficioso que resulte la cooperación y de cómo dividamos el pago entre los jugadores, lo cual nos lleva a la segunda pregunta: ¿cómo debería una coalición dividir su pago? En este caso, la respuesta varía en función de cuál sea el objetivo de la coalición. Hay dos enfoques principales: estabilidad y justicia. En el caso de la estabilidad, el objetivo sería encontrar soluciones que ofrezcan repartos estables según distintos criterios. Un ejemplo de solución que aporta asignaciones estables es el *core* (Gilles, 1953). El segundo enfoque es la justicia, para el cual se buscan repartos que representen un compromiso justo para los jugadores. Soluciones enmarcadas bajo este principio son, por ejemplo, el valor de Shapley (Shapley, 1953), el nucleolus (Schmeidler, 1969) y el τ -valor (Tijs, 1981).

Es importante mencionar algunas propiedades que puede cumplir un juego cooperativo con utilidad transferible.

Definición 2. Un juego $(N, v) \in G^N$ es:

1. Superaditivo si, para todo $S, T \subseteq N$ tal que $S \cap T = \emptyset$, entonces $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$.
2. Convexo si, para todo $S, T \subseteq N$, $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T)$, o equivalentemente, si $v(S \cup i) - v(S) \geq v(T \cup i) - v(T)$, para todo $S, T \subseteq N$ tal que $T \subseteq S \subseteq N \setminus i$.
3. Monótono si, para todo $S, T \subseteq N$ tal que $S \subseteq T$, se tiene que $v(S) \leq v(T)$.

La propiedad de superaditividad afirma que la unión de dos grupos disjuntos cualesquiera no provoca una disminución de los beneficios. En concreto, implica que el mayor pago se otorga a la gran coalición, con lo cual, cuando tenemos un juego superaditivo, es natural asumir que la gran coalición es la que se formará. La segunda caracterización de la convexidad implica que un juego es convexo si la contribución de cada jugador a una coalición no decrece si más jugadores se incorporan a la coalición. Por último, la monotonía nos dice que el pago de una coalición dada no es menor que el pago alcanzable por cualquiera de sus subcoaliciones.

A continuación, introducimos una clase importante de juegos TU que constituyen una base de G^N considerado como espacio vectorial. Son los denominados juegos de unanimidad.

Definición 3. Sea $\emptyset \neq T \subseteq N$. El juego de unanimidad de la coalición T , (N, u_T) , se define para cada coalición $S \subseteq N$,

$$u_T(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } T \subseteq S \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La siguiente proposición muestra que cada juego (N, v) se puede expresar de forma única como una combinación lineal de juegos de unanimidad. Esto demuestra que, efectivamente, estos juegos forman una base de G^N considerado como espacio vectorial.

Proposición 4. Sea $(N, v) \in G^N$. Entonces, los coeficientes $(c_T)_{\emptyset \neq T \subseteq N} \in \mathbb{R}^{2^N \setminus \{\emptyset\}}$ definidos por

$$c_T = \sum_{T' \subseteq T} (-1)^{|T| - |T'|} v(T')$$

son tales que

$$v = \sum_{T \subseteq N} c_T u_T$$

de forma única. A los coeficientes c_T se les denomina dividendos de Harsanyi (Harsanyi, 1959).

Los coeficientes c_T tienen importancia por sí mismos ya que se pueden interpretar como la influencia de cada juego de unanimidad en el juego original.

Vistos los conceptos más básicos sobre juegos con utilidad transferible, pasamos ahora a definir los principales conceptos de solución que se enmarcan dentro de este contexto.

En la teoría de juegos con utilidad transferible, el concepto de solución de un juego se puede estudiar desde dos perspectivas: una consiste en indicar qué repartos son más preferidos que otros siguiendo unos determinados criterios (conceptos de solución tipo conjunto) y el otro enfoque es el concepto de solución puntual, que consiste en dejar que sea un árbitro o un juez el que recomiende a los jugadores un reparto del valor entre ellos.

Las soluciones tipo conjunto establecen criterios para eliminar repartos del conjunto inicial de partida, mientras que la metodología clásica de las soluciones puntuales establece criterios, axiomas o propiedades básicas que deben verificar las soluciones. En general, lo que diferencia a los distintos conceptos de solución tipo conjunto son los criterios empleados para decidir qué es beneficioso, o estable, para los jugadores. Por el contrario, lo que diferencia a los diferentes conceptos de solución tipo puntual son los axiomas que se imponen a la solución, y que suelen estar basados en la justicia o en las expectativas racionales de los jugadores. Por otro lado, los conceptos de solución tipo conjunto pueden seleccionar uno, un número finito, una cantidad infinita o, incluso, ningún reparto, mientras que en las soluciones puntuales de juegos TU, el reparto, si existe, es único.

Formalizamos ahora matemáticamente el concepto de solución de un juego cooperativo que recoge tanto los conceptos de solución tipo conjunto como las soluciones puntuales.

Definición 5. Una solución definida en algún dominio $\Omega \subseteq G^N$, es una correspondencia $\Psi, \Psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$, que asocia a cada juego (N, v) en Ω un subconjunto $\Psi(N, v) \subset \mathbb{R}^N$.

En el caso de que la solución sea siempre unitaria hablamos de *solución puntual* o *regla de reparto* (en inglés, *allocation rule*). En otro caso, se trata de una solución de tipo conjunto. En este trabajo, la única solución de tipo conjunto que trataremos será el *core* o núcleo, mientras que en las soluciones puntuales nos centraremos en el valor de Shapley, el nucleolus y el τ -valor.

Empezamos por definir el núcleo.

Núcleo

En este apartado, introducimos el concepto más importante relacionado con la propiedad de estabilidad: el *core* o núcleo, tratado por Edgeworth (1881) y Gilles (1953). Antes, introducimos algunas propiedades de los repartos asociados con un juego de utilidad transferible.

Definición 6. Un reparto es un vector $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^N$, donde cada coordenada x_i representa la cantidad asignada al jugador i . Dado un reparto $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^N$, la suma de las cantidades asignadas a los miembros de una coalición $S \subseteq N$ se denota por $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$.

A continuación, enumeramos dos propiedades muy deseables para una regla de reparto.

Sea (N, v) un juego con utilidad transferible.

- Racionalidad individual. Un reparto $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^N$ verifica la propiedad de racionalidad individual si cada jugador $i \in N$ recibe un pago que no es inferior a lo que puede garantizarse por sí mismo, i.e, $x_i \geq v(i)$.
- Eficiencia. Un reparto $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^N$ es eficiente si distribuye el valor de la gran coalición, $v(N)$, entre los jugadores. Esto es, $x(N) = x_1 + \dots + x_n = v(N)$.

La primera propiedad establece que cada jugador debe obtener, al menos, lo que se puede garantizar por sí mismo. La segunda, razonable si asumimos que los jugadores van a formar la gran coalición,

impone que se va a repartir el valor total disponible.

Los repartos eficientes que son individualmente racionales se denominan imputaciones.

Definición 7. Sea $(N, v) \in G^N$. El conjunto de imputaciones del juego (N, v) es el conjunto de todos los repartos eficientes que verifican, además, la propiedad de racionalidad individual.

$$I(N, v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i \in N} x_i = v(N), x_i \geq v(i), \forall i \in N \right\}.$$

El conjunto de imputaciones de un juego superaditivo siempre es no vacío. La racionalidad individual de los repartos en $I(N, v)$ garantiza que ningún jugador “bloqueará” un reparto en $I(N, v)$, ya que no puede conseguir nada mejor por su cuenta. Sin embargo, se puede dar que una coalición de jugadores tenga incentivos para desviarse de algunos repartos de $I(N, v)$. Para impedir que esto suceda, el núcleo se define imponiendo una condición de racionalidad coalicional sobre los repartos del conjunto de imputaciones. Dado un juego $v \in G^N$, un reparto $x \in \mathbb{R}^N$ verifica la propiedad de racionalidad coalicional si, para cada coalición $S \subseteq N$, $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$. El núcleo es el conjunto de los repartos eficientes que satisfacen la racionalidad coalicional.

Definición 8. El *core* o núcleo de un juego (N, v) es el conjunto:

$$C(N, v) = \{x \in I(N, v) : x(S) \geq v(S), \forall S \subseteq N\}.$$

La racionalidad coalicional supone que a cada coalición $S \subseteq N$ debe corresponderle, al menos, lo que se puede garantizar por sí misma. Por tanto, los repartos del *core* son estables, en el sentido de que ninguna coalición tendría incentivos para desviarse y obtener un reparto mejor (en sentido estricto) que lo que asigna un reparto en el núcleo.

A continuación, ilustraremos algunos de los conceptos mencionados previamente.

Ejemplo: Ilustración de los conceptos de solución

El objetivo de este problema es el reparto del dinero entre tres empresas de transporte, A , B y C , ubicadas en los puntos extremos de dos autopistas según se indica en la Figura 1.1. La empresa C es la propietaria de las autopistas. Cada año, esta empresa gana 350000 euros en beneficios por el uso de dichas carreteras. La empresa A , viendo el éxito que tienen estas autopistas y con el fin de ganar dinero, propone instalar un punto de peaje en la autopista $A1$, con lo que se pasarían a generar 700000 euros de ganancias anuales. Por su parte, la empresa B plantea construir una gasolinera en la autopista $A2$, con lo cual el beneficio ascendería a 775000 euros.

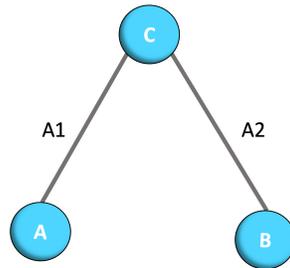


Figura 1.1: Representación gráfica del problema a tratar.

Representamos esta situación mediante un juego cooperativo con utilidad transferible. Sea $N = \{A, B, C\}$ el conjunto de jugadores, donde A es la empresa que ofrece instalar un punto de peaje en la autopista $A1$, B es la empresa que ofrece construir una gasolinera en la autopista $A2$ y C es la empresa propietaria de las dos autopistas. Los beneficios (en miles de euros) de las distintas

coaliciones que se pueden formar aparecen detallados a continuación.

Tanto la empresa A como la empresa B necesitan el acuerdo de la empresa C para poder beneficiarse de las ganancias generadas por las autopistas (i.e, para poder llevar a cabo sus propuestas de recaudación de dinero de las autopistas), pues la empresa C es su propietaria. Dicho de otro modo, sin la cooperación del jugador C no se puede obtener ningún beneficio. Por tanto,

$$v(A) = v(B) = v(A, B) = 0.$$

Si la empresa C no colabora con ninguno de los otros dos agentes mantendría su situación de ganancias actual, i.e, los 350000 euros anuales. Si llega a un acuerdo con la empresa A para obtener el mayor valor posible, conseguirán entre las dos 700000 euros. Por otro lado, si se coaliga con la empresa B , los beneficios de la cooperación ascenderían a los 775000 euros. Finalmente, si las tres empresas colaboran y deciden llevar adelante el proyecto que, de forma conjunta, proporcione más beneficios, obtendrán entre las tres 775000 euros. Es decir,

$$v(C) = 350, \quad v(A, C) = 700, \quad v(B, C) = 775, \quad v(A, B, C) = 775.$$

De este modo, la función característica v del juego (N, v) viene dada por

$$v = [v(\emptyset), v(A), v(B), v(C), v(A, B), v(A, C), v(B, C), v(A, B, C)] = [0, 0, 0, 350, 0, 700, 775, 775].$$

Observamos que $v(A, B, C) > v(A) + v(B) + v(C)$.

A continuación, presentamos algunas posibles soluciones al reparto de beneficios y sus objeciones.

► **Reparto igualitario.**

$$x_A = x_B = x_C = \frac{775000}{3} = 258333.33.$$

Objeción: la empresa C podría argumentar que $x_C = 258333.33 < v(C) = 350000$ con lo que no tendría incentivos para cooperar. Vemos que no se verifica la propiedad de racionalidad individual para este jugador, pues el pago que recibe del reparto x es inferior a lo que se puede garantizar por sí mismo en el juego (N, v) .

► **Proporcional a la contribución marginal de cada jugador a la coalición C .**

$$x_A = v(A, C) - v(C) = 700 - 350 = 350.$$

$$x_B = v(B, C) - v(C) = 775 - 350 = 425.$$

$$x_C = 0.$$

donde $v(A, C) - v(C)$ (respectivamente $v(B, C) - v(C)$) representarían la contribución marginal de la empresa A (respectivamente B) a la empresa C . Dicho de otro modo, representarían el incremento adicional en las ganancias anuales de la autopistas provocado por las propuestas de cada compañía.

Objeción: la empresa C podría argumentar que $x_C = 0 < v(C) = 350000$ con lo que no tendría incentivos para cooperar. La interpretación sería que la empresa C , al ser la propietaria de las dos carreteras, reclamaría recibir algún beneficio independientemente de que no haya hecho ninguna propuesta directa para aumentar las ganancias del negocio de autopistas. Del mismo modo, las coaliciones (A, C) y (B, C) también obtendrían un reparto menor del que se pueden garantizar por sí mismas, pues $x_A + x_C = 350 < v(A, C) = 700$ y $x_B + x_C = 425 < v(B, C) = 775$. Vemos, por tanto, que la situación sería inestable, pero en este caso las empresas A y B no estarían mejor

yendo por su cuenta o cooperando entre ellas, pues están en inferioridad de condiciones: tanto juntas como separadas ganan 0. Una solución sería que la empresa C se aliase solo con una compañía, por ejemplo la A , y ofrecerle $351 > x_A$ unidades y quedándose C con $v(A, C) - 351 = 700 - 351 = 349 > 0$.

► **Proporcional a las contribuciones marginales (a la gran coalición).**

Las contribuciones marginales vienen dadas por las siguientes diferencias.

$$M_A(N, v) = v(A, B, C) - v(B, C) = 775 - 775 = 0.$$

$$M_B(N, v) = v(A, B, C) - v(A, C) = 775 - 700 = 75.$$

$$M_C(N, v) = v(A, B, C) - v(A, B) = 775 - 0 = 775.$$

De este modo, la contribución marginal de la empresa A representaría la ganancia adicional que recibiría esta empresa una vez que se conoce que las compañías restantes (en este caso, B y C) van a colaborar. Las contribuciones marginales $M_B(N, v)$ y $M_C(N, v)$ tendrían una interpretación análoga.

Observamos que la suma de los costes marginales es $M_A(N, v) + M_B(N, v) + M_C(N, v) = 850 > v(A, B, C)$, con lo que podemos recurrir al siguiente reparto proporcional:

$$x_A = \frac{0}{850} \cdot v(A, B, C) = 0.$$

$$x_B = \frac{75}{850} \cdot v(A, B, C) = 68.38.$$

$$x_C = \frac{775}{850} \cdot v(A, B, C) = 706.62.$$

En este caso, ningún jugador o coalición tendría incentivos para desviarse, pues con este reparto nadie obtendría un beneficio menor que el que puede garantizarse por sí mismo. De hecho, salvo el jugador A , que no mejora con este reparto ($x_A = v(A)$), el resto de agentes obtendría un beneficio mayor. La única objeción es que quizás esta asignación es injusta para la empresa A , pues a pesar de que contribuye con una propuesta que permitiría generar más beneficios, no consigue ninguna ganancia (al contrario de lo que pasa con la empresa B).

¿Cómo debería ser entonces el reparto (x_A, x_B, x_C) de los beneficios generados por el uso de las autopistas? Es decir, ¿cuál sería una solución no objetable por los agentes?

Antes de responder a esta pregunta, estudiemos primero las propiedades del juego v .

• **Superaditividad.**

Tenemos que comprobar

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T), \quad \forall S, T \subseteq N \text{ tal que } S \cap T = \emptyset.$$

$$\begin{aligned}
v(\emptyset) + v(T) &\leq v(T), \forall T \subseteq N, \text{ pues } v(\emptyset) = 0. \\
v(A) + v(B) &\leq v(A, B), \text{ pues } 0 + 0 \leq 0. \\
v(A) + v(C) &\leq v(A, C), \text{ pues } 0 + 350 \leq 700. \\
v(B) + v(C) &\leq v(B, C), \text{ pues } 0 + 350 \leq 775. \\
v(A, B) + v(C) &\leq v(A, B, C), \text{ pues } 0 + 350 \leq 775. \\
v(A, C) + v(B) &\leq v(A, B, C), \text{ pues } 700 + 0 \leq 775. \\
v(B, C) + v(A) &\leq v(A, B, C), \text{ pues } 775 + 0 \leq 775.
\end{aligned}$$

Por tanto, el juego v es superaditivo.

• **Convexidad.**

Tenemos que comprobar

$$v(S \cup i) - v(S) \geq v(T \cup i) - v(T), \quad \forall S, T \subseteq N \text{ tal que } T \subseteq S \subseteq N \setminus i.$$

El juego v no es convexo, pues tomando $i = A$, $S = (B, C)$ y $T = C$, se tiene que $v(A, B, C) - v(B, C) \not\geq v(A, C) - v(C)$, pues $775 - 775 = 0 \not\geq 350 = 700 - 350$.

• **Monotonía.**

Tenemos que comprobar

$$v(S) \leq v(T) \quad \forall S, T \subseteq N \text{ tal que } S \subseteq T.$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned}
S = \emptyset, T \subseteq N &\text{ se tiene } v(\emptyset) \leq v(T), \text{ pues } 0 \leq v(T), \forall T \subseteq N. \\
S = \{A\}, T = \{A, B\} &\text{ y } v(A) \leq v(A, B), \text{ pues } 0 \leq 0. \\
S = \{A\}, T = \{A, C\} &\text{ y } v(A) \leq v(A, C), \text{ pues } 0 \leq 700. \\
S = \{B\}, T = \{A, B\} &\text{ y } v(B) \leq v(A, B), \text{ pues } 0 \leq 0. \\
S = \{B\}, T = \{B, C\} &\text{ y } v(B) \leq v(B, C), \text{ pues } 0 \leq 775. \\
S = \{C\}, T = \{A, C\} &\text{ y } v(C) \leq v(A, C), \text{ pues } 350 \leq 700. \\
S = \{C\}, T = \{B, C\} &\text{ y } v(C) \leq v(B, C), \text{ pues } 350 \leq 775. \\
S = \{A, B\}, T = \{A, B, C\} &\text{ y } v(A, B) \leq v(A, B, C), \text{ pues } 0 \leq 775. \\
S = \{A, C\}, T = \{A, B, C\} &\text{ y } v(A, C) \leq v(A, B, C), \text{ pues } 700 \leq 775. \\
S = \{B, C\}, T = \{A, B, C\} &\text{ y } v(B, C) \leq v(A, B, C), \text{ pues } 775 \leq 775.
\end{aligned}$$

Por tanto, el juego v es monótono.

A continuación, calcularemos el *core* del juego v .

Se tiene que un reparto (x_A, x_B, x_C) pertenece a $C(N, v)$ si y solo si:

$$\begin{aligned}
x_A + x_B + x_C &= 775 \quad (\text{principio de eficiencia}). \\
x_A \geq 0, x_B \geq 0, x_C &\geq 350 \quad (\text{racionalidad individual}). \\
x_A + x_B \geq 0, x_A + x_C &\geq 700, x_B + x_C \geq 775 \quad (\text{racionalidad coalicional}).
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la restricción $x_A + x_B + x_C = 775$, se tiene que:

$$\begin{aligned} x_A + x_B \geq 0 &\iff 775 - x_C \geq 0 \iff x_C \leq 775. \\ x_A + x_C \geq 700 &\iff 775 - x_B \geq 700 \iff x_B \leq 75. \\ x_B + x_C \geq 775 &\iff 775 - x_A \geq 775 \iff x_A \leq 0. \end{aligned}$$

Por tanto, $C(N, v)$ está formado por los puntos $(x_A, x_B, x_C) \in \mathbb{R}^3$ verificando

$$\{x_A + x_B + x_C = 775, x_A = 0, 0 \leq x_B \leq 75, 350 \leq x_C \leq 775\}.$$

Como $x_A = 0$, obtenemos que $x_C = 775 - x_B$. Por tanto, el núcleo, $C(N, v)$, resulta en

$$\begin{aligned} &\left\{ (x_A, x_B, x_C) \in \mathbb{R}^3 : \sum_{i \in N} x_i = 775, x_A = 0, 0 \leq x_B \leq 75, 350 \leq 775 - x_B \leq 775, x_C = 775 - x_B \right\} \\ &= \{(0, x_B, 775 - x_B) : 0 \leq x_B \leq 75\} = \text{conv}(\{(0, 0, 775), (0, 75, 700)\}), \end{aligned}$$

donde $\text{conv}(\{x_1, \dots, x_k\})$ representa la envoltura^a convexa de los puntos x_1, \dots, x_k .

^aLa envoltura convexa de un conjunto \mathbf{X} de un espacio euclídeo es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a \mathbf{X} . En concreto, si \mathbf{X} es un conjunto formado por k puntos, x_1, x_2, \dots, x_k , su envoltura convexa viene dada por la expresión: $\text{conv}(\mathbf{X}) = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i : x_i \in \mathbf{X}, \alpha_i \in \mathbb{R}, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1 \right\}$.

Pasamos ahora a definir y caracterizar axiomáticamente las soluciones de tipo puntual. Comenzamos por el valor de Shapley.

Valor de Shapley

En el apartado anterior nos referimos al núcleo de un juego TU como el concepto de solución tipo conjunto más importante para juegos con utilidad transferible. Ahora presentamos la regla de reparto más notable: el valor de Shapley (Shapley, 1953), que es la que más comúnmente se asocia con el principio de justicia.

Para establecer una forma “justa” de dividir un pago para una coalición, necesitamos definir primero qué entendemos por “justicia”. Una forma de hacerlo es identificando axiomas que expresen las propiedades de una división de pagos justa entre los jugadores. A continuación, presentamos las definiciones y propiedades deseables para que una regla de reparto, Ψ , proporcione un pago justo entre los miembros de una coalición. Algunas de estas propiedades conducirán a una axiomatización para caracterizar el valor de Shapley.

Definición 9 (Simetría). Dos jugadores i y j se dicen simétricos o intercambiables respecto a $(N, v) \in G^N$ si siempre contribuyen lo mismo a cada coalición del resto de agentes, i.e:

$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}), \quad \forall S \subseteq N \setminus \{i, j\}.$$

Definición 10 (Jugador títere y jugador nulo). Un jugador $i \in N$ en un juego $(N, v) \in G^N$ se llama títere si no aporta beneficio adicional a las coaliciones a las que se une, i.e, si $v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(i)$, para todo $S \subseteq N \setminus \{i\}$. Un jugador títere $i \in N$ que verifica $v(i) = 0$ se dice, además, que es un jugador nulo:

$$v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(i), \quad \forall S \subseteq N \setminus \{i\} \text{ y } v(i) = 0.$$

Definición 11 (Juego suma). Sean $(N, v_1), (N, v_2) \in G^N$. El juego $(N, v_1 + v_2)$ se define como:

$$(v_1 + v_2)(S) = v_1(S) + v_2(S), \quad \forall S \subseteq N.$$

- Eficiencia. Para todo $(N, v) \in G^N$,

$$\sum_{i \in N} \Psi_i(N, v) = v(N).$$

La propiedad de eficiencia nos indica que la suma de las asignaciones que reciben todos los jugadores ha de coincidir con el valor de la gran coalición.

- Aditividad. Para todo $(N, v), (N, w) \in G^N$, se verifica que

$$\Psi(N, v + w) = \Psi(N, v) + \Psi(N, w).$$

La propiedad de aditividad establece que el pago que reciben los jugadores en un juego es igual a la suma de los pagos que recibirían si el juego se descompone en suma de dos.

- Jugador títere. Para todo $(N, v) \in G^N$ e $i \in N$ jugador títere, se tiene que

$$\Psi_i(N, v) = v(i).$$

La propiedad de jugador títere establece que si un jugador no realiza aportación adicional a los demás jugadores, entonces debe recibir su asignación individual.

- Jugador nulo. Para todo $(N, v) \in G^N$ e $i \in N$ jugador nulo,

$$\Psi_i(N, v) = 0.$$

La propiedad de jugador nulo es más débil que la de jugador títere, ya que permite que un jugador títere, siempre que no sea nulo, pueda recibir algo diferente a su asignación individual.

- Simetría. Para todo $(N, v) \in G^N$ y todo par $i, j \in N$ de jugadores simétricos,

$$\Psi_i(N, v) = \Psi_j(N, v).$$

La propiedad de simetría nos dice que si dos jugadores son intercambiables en el juego, deben recibir el mismo pago.

Una propiedad relacionada con simetría, aunque no equivalente, es la de anonimato. Para definirla, necesitamos la siguiente notación.

Definición 12. Dados $N, N' \subseteq \mathbb{N}$, una función biyectiva $p : N \rightarrow N'$ y $x \in \mathbb{R}^N$, definimos $p(x) \in \mathbb{R}^{N'}$ como el reparto resultante de cambiar las coordenadas de x según p , es decir,

$$p(x)_{p(i)} = x_i,$$

para todo $i \in N$.

Análogamente, dado $S \subseteq N$, definimos $p(S) \subseteq N'$ como

$$p(S) = \{p(i) : i \in S\} \subseteq N',$$

es decir, $p(S)$ representa la misma coalición S cambiando el nombre de los jugadores según lo indicado por p .

Si cambiamos el identificador (o nombre) de los jugadores mediante una función biyectiva, una regla anónima no se verá afectada por ello. Más específicamente, si el índice de un jugador cambia, el

pago asignado a su nuevo índice será el mismo que el asignado al índice antiguo. Formalmente:

- Anonimato. Dados $N, N' \subset \mathbb{N}$ conjuntos finitos y $p : N \rightarrow N'$ biyectiva,

$$\Psi(N', p(v)) = p(\Psi(N, v))$$

para todo $(N, v) \in G^N$, donde $(N', p(v)) \in G^{N'}$ es el juego definido por $p(v)(p(S)) = v(S)$, para todo $S \subseteq N$.

Toda regla anónima es también simétrica, pero el recíproco no es cierto.

- Covarianza. Dados $(N, v), (N, w) \in G^N$, $r \in \mathbb{R}_{++}$ y $\alpha \in \mathbb{R}^N$ tales que $w(S) = rv(S) + \sum_{i \in S} \alpha_i$ para todo $S \subseteq N$, se verifica que

$$\Psi(N, w) = r\Psi(N, v) + \alpha.$$

La propiedad de invarianza por traslaciones (respectivamente cambios de escala) refleja que si un juego es el traslado por otro mediante un cambio de origen (respectivamente de escala), entonces la regla de reparto también se traslada (respectivamente escala) de la misma forma. La covarianza es una combinación de ambas propiedades.

A continuación, enunciamos la caracterización más clásica del valor de Shapley.

Teorema 13. *Existe un único valor en G^N verificando las propiedades de eficiencia, jugador nulo, simetría y aditividad; y es el valor de Shapley.*

Presentamos ahora la definición del valor de Shapley, como aparece originalmente en [Shapley \(1953\)](#). La idea es que los jugadores deberían recibir pagos promedio de sus contribuciones marginales.

Definición 14. El valor de Shapley de un juego $(N, v) \in G^N$ es el reparto

$$\varphi_i(N, v) = \frac{1}{|N|!} \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} |S|!(|N| - |S| - 1)! (v(S \cup i) - v(S)),$$

para cada $i \in N$. Aquí, $v(S \cup i) - v(S)$ denota la contribución marginal del jugador i a la coalición S , mientras que $|N|$ y $|S|$ denotan los cardinales de las coaliciones N y S , respectivamente.

Podemos interpretar el valor de Shapley de la siguiente forma. Supongamos que los jugadores van llegando a un lugar de modo aleatorio, y al llegar cada jugador recibe como utilidad su aportación marginal a los jugadores que ya estaban presentes. Si los distintos órdenes de llegada de los jugadores son equiprobables, entonces el valor de Shapley se puede ver como el vector de utilidades esperadas de los jugadores bajo este procedimiento. A partir de esto, la expresión de $\varphi_i(N, v)$ se puede interpretar como la expectativa que el jugador i tiene por participar en el juego (N, v) . Los coeficientes en las fórmulas anteriores indican que todas las coaliciones del mismo tamaño son igualmente probables. De hecho, $|S|!(|N| - |S| - 1)!$ es el número de ordenaciones para las cuales los predecesores del jugador i son los jugadores de S .

La caracterización clásica del valor de Shapley ha recibido críticas en la literatura, debido a que la propiedad de aditividad no proviene de ninguna consideración de justicia. Estas críticas motivaron la aparición de axiomatizaciones alternativas al valor de Shapley. A continuación, presentamos dos, debidas a [Young \(1985\)](#) y a [Hart and Mas-Colell \(1989\)](#), respectivamente.

Antes de presentar las caracterizaciones, necesitamos introducir algunas definiciones.

Definición 15 (Monotonía fuerte (o marginalidad)). Dados $(N, v), (N, w) \in G^N$ e $i \in N$ tales que para cada $S \subseteq N \setminus \{i\}$, $w(S \cup i) - w(S) \geq v(S \cup i) - v(S)$, entonces

$$\Psi_i(N, w) \geq \Psi_i(N, v).$$

La monotonía fuerte indica que si la contribución marginal de un jugador a todas las coaliciones en un juego dado es superior o igual a la contribución marginal del jugador a todas las coaliciones en otro juego, entonces no debe recibir una asignación menor en el primer juego que en el segundo.

Definición 16 (Estándar para dos jugadores). Para cada uno de los dos jugadores $i \in N$ se tiene que (suponiendo $|N| = 2$)

$$\Psi_i(N, v) = v(i) + \frac{1}{2} \left(v(N) - \sum_{j \in N} v(j) \right).$$

La propiedad de ser estándar para dos jugadores indica, para juegos de dos jugadores, un reparto de la utilidad total a partes iguales una vez se descuentan los valores individuales. Es decir, la asignación que recibe cada jugador se puede descomponer en dos partes o etapas: en la primera etapa cada jugador recibe lo que se puede garantizar por sí mismo y, en la segunda, se divide el resto a partes iguales.

Definición 17 (Consistencia). Para cada $(N, v) \in G^N$, $S \subseteq N$ e $i \in S$ se verifica que

$$\Psi_i(S, v_s^\Psi) = \Psi_i(N, v),$$

siendo (S, v_s^Ψ) el juego reducido a la coalición S según la regla Ψ .

La propiedad de consistencia establece igualdad (o consistencia) entre la solución en el juego original y la solución en el juego reducido a una coalición.

El juego reducido (S, v_s^Ψ) surge cuando los jugadores de $N \setminus S$ reciben el pago establecido para ellos por la regla Ψ y abandonan el juego, permitiendo a los demás jugadores de S renegociar su pago. Estos últimos conforman el conjunto de jugadores en el juego reducido. La propiedad de consistencia para una solución establece que, si pagamos a todos los jugadores de acuerdo a un reparto en el conjunto de soluciones del juego original, entonces los agentes del juego reducido pueden alcanzar el correspondiente pago en el conjunto de soluciones del juego reducido. Dicho de otro modo, no hay inconsistencia entre lo que los jugadores del juego reducido pueden obtener con respecto al juego original.

La consistencia es un requerimiento natural para una solución. Lo que no es tan obvio es cómo definir el juego reducido. Diferentes definiciones conducen a distintos conceptos de solución.

[Hart and Mas-Colell \(1989\)](#) definieron el juego reducido en base a los subjuegos de un juego dado. Dado un juego (N, v) y cualquier coalición $S \subseteq N$, el subjuego (S, v) sobre S se obtiene restringiendo la función característica v a los subconjuntos de S , i.e. a 2^S . De este modo, dada una regla de reparto Ψ y un juego (N, v) , el juego reducido (S, v_s^Ψ) con respecto a la regla de reparto Ψ se define como

$$v_s^\Psi(R) = v(R \cup (N \setminus S)) - \sum_{i \in N \setminus S} \Psi_i(R \cup (N \setminus S), v_{R \cup (N \setminus S)}), \quad \text{para cada } R \subseteq S.$$

Teorema 18 (Young, 1985). *Existe un único valor en G^N que verifica las propiedades de eficiencia, simetría y monotonía fuerte¹, y es el valor de Shapley.*

Teorema 19 (Hart and Mas-Colell, 1989). *Existe un único valor que verifica las propiedades de consistencia y estándar para dos, y es el valor de Shapley.*

Destacamos que, además de las propiedades empleadas en las caracterizaciones, el valor de Shapley verifica la propiedad de jugador títtere y covarianza.

¹Se tiene que eficiencia + simetría + monotonía fuerte \implies jugador nulo.

Previamente hemos afirmado que sería conveniente repartir el valor total de la gran coalición mediante una asignación del núcleo, pues solo estos repartos garantizan que ningún grupo de agentes está insatisfecho (tiene motivos para desviarse). No obstante, un juego puede tener un núcleo vacío. Además, en aquellos problemas con núcleo no vacío, la estabilidad (representada por el núcleo) y la justicia (representada por el valor de Shapley) no siempre son compatibles. Por ejemplo, el valor de Shapley puede no pertenecer al núcleo, incluso aunque éste sea no vacío.

El siguiente resultado relaciona el valor de Shapley con el núcleo.

Teorema 20. Sea $(N, v) \in G^N$.

1. Si v es superaditivo, entonces $\varphi(v) \in I(N, v)$.
2. Si v es convexo, entonces $\varphi(v) \in C(N, v)$.

Dicho de otro modo, cuando tenemos un juego superaditivo, el valor de Shapley verifica la propiedad de racionalidad individual (pues recordemos que siempre satisface el axioma de eficiencia), por lo que el reparto que recibe cada jugador no es inferior a su asignación individual. Además, si el juego es convexo, entonces el valor de Shapley es un reparto estable.

Ejemplo: Ilustración de los conceptos de solución (continuación)

Calcularemos ahora el valor de Shapley para este ejemplo, para lo cual necesitamos obtener, en primer lugar, los vectores de contribuciones marginales correspondientes a cada posible orden de llegada de los jugadores. Los resultados se muestran en la Tabla 1.1.

Orden \ Jugador	A	B	C
ABC	0	0	775
ACB	0	75	700
BAC	0	0	775
BCA	0	0	775
CAB	350	75	350
CBA	0	425	350
	350	575	3725

Tabla 1.1: Contribuciones marginales asociadas a cada orden de llegada de los jugadores A , B y C .

Por ejemplo, para el orden de llegada BCA, las contribuciones marginales de cada jugador se calcularían como sigue:

$$A : M_A(N, v) = v(A, B, C) - v(B, C) = 775 - 775 = 0.$$

$$B : M_B(N, v) = v(B) = 0.$$

$$C : M_C(N, v) = v(B, C) - v(B) = 775 - 0 = 775.$$

Se procedería de forma análoga con el resto de órdenes de llegada.

El valor de Shapley es la media aritmética de los vectores de contribuciones marginales, esto es,

$$\varphi(N, v) = \frac{1}{6}(350, 575, 3725) = (58.33, 95.83, 620.83).$$

Como el juego es superaditivo, el valor de Shapley verifica la propiedad de racionalidad individual. Sin embargo, el juego no es convexo, por lo que el valor de Shapley no pertenece al núcleo. Por tanto, no es una solución estable. De hecho, observamos que las coaliciones (A, C) y (B, C) objetarían a este reparto, pues $v(A, C) = 700 > 679.16 = 58.33 + 620.82 = \varphi(A, C)$ y $v(B, C) = 775 > 716.66 = 95.83 + 620.83 = \varphi(B, C)$. Es decir, estas coaliciones no tendrían incentivos para cooperar y estarían mejor yendo por su cuenta, pues los beneficios proporcionados por el valor de Shapley son menores que el beneficio que se pueden garantizar por sí mismas.

Nucleolus

Otra regla de reparto importante es el nucleolus, introducido en [Schmeidler \(1969\)](#). Así como el valor de Shapley está ligado esencialmente a la justicia, el nucleolus está vinculado con la estabilidad. Se basa en la idea de minimizar la insatisfacción de los grupos más “infelices”. Con este propósito, introducimos el concepto de exceso.

Definición 21. Sea (N, v) un juego y tomemos $x \in \mathbb{R}^N$ y $S \in 2^N \setminus \emptyset$. El exceso de una coalición S para un vector x , denotado por $e(S, x)$, está dado por:

$$e(S, x) = v(S) - x(S) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i.$$

Si el exceso es positivo, es decir, si $x(S) < v(S)$, los miembros de S no estarán contentos con lo que reciben en x porque consiguen menos que lo que pueden obtener por ellos mismos. En este sentido, podríamos decir que el exceso mide la queja (o infelicidad) de la coalición frente a un posible reparto y que cada coalición estará mejor cuanto menor sea ese número. Cuánto mayor sea, más “infeliz” está la coalición S . Si $S = N$, o bien si $S = \emptyset$, $e(S, x) = 0$. Por tanto, a cada posible reparto, x , le asociaremos un vector de excesos que tendrá tantas coordenadas como coaliciones ($2^{|N|} - 2$ si descontamos la coalición vacía y la total).

El exceso de x , denotado por $e(x)$, es el vector en $\mathbb{R}^{2^{|N|}-1}$ conteniendo los excesos de x , ordenados de mayor a menor, con respecto a todas las coaliciones no vacías. Más precisamente, si $i \in \{1, \dots, 2^{|N|} - 2\}$ y $e_i(x)$ denota la i -ésima componente de $e(x)$, entonces $e_i(x) \geq e_{i+1}(x)$.

Ahora ya estamos en condiciones de presentar el nucleolus de un juego. El nucleolus es una solución que un árbitro podría recomendar para dividir $v(N)$ entre los jugadores si usa el siguiente procedimiento: primero se buscan las imputaciones, x , que hacen que $e_1(x)$ sea mínimo (esta es la máxima queja en contra de x , que se pretende minimizar). Después, entre los vectores que minimizan la máxima queja, el árbitro busca aquellos que minimizan la segunda máxima queja, y así sucesivamente.

Definición 22. Definimos el nucleolus de un juego (N, v) como:

$$Nu(N, v) = \{x \in I(N, v) : e(x) \leq_L e(y), \text{ para todo } y \in I(N, v)\},$$

donde \leq_L denota el orden lexicográfico² en $\mathbb{R}^{2^{|N|}-1}$.

Los elementos del *core* verifican que $e(S, x) \leq 0$ para todo $S \subseteq N$. Por tanto, es evidente que los vectores de excesos de los elementos del *core* son lexicográficamente menores que los de cualquier

²Según el orden lexicográfico, para cada $x, y \in \mathbb{R}^{2^{|N|}-1}$, $x \leq_L y$ si y solo si $x = y$ o si existe un $i \in \{1, \dots, 2^{|N|} - 1\}$ tal que $x_j = y_j$ para cada $j < i$ y $x_i < y_i$.

punto de fuera del núcleo. Esto implica que si el *core* de un juego es no vacío, entonces el nucleolus está contenido en el *core*.

A pesar de que el nucleolus sigue un principio natural de justicia, su definición es compleja, por lo que el análisis de sus propiedades es más complicado que el desarrollado para el valor de Shapley. Snijders (1995) caracteriza el nucleolus por las propiedades de unicidad, anonimato, covarianza y consistencia (definiendo, para ello, un nuevo juego reducido). Además, el nucleolus verifica las propiedades de jugador títere, jugador nulo y simetría, pero no verifica la propiedad de aditividad.

Ejemplo: Ilustración de los conceptos de solución (continuación)

Calcularemos ahora el nucleolus para este ejemplo.

Previamente se ha calculado el núcleo de este juego:

$$C(N, v) = \{(0, x_B, 775 - x_B) : 0 \leq x_B \leq 75\}.$$

Como el *core* es no vacío, el nucleolus existe y es único. Además, es un elemento del núcleo. Por tanto, es de la forma $x = (0, a, 775 - a)$, con $0 \leq a \leq 75$.

Ahora necesitamos hallar los excesos para cada una de las coaliciones. Los cálculos se muestran en la Tabla 1.2.

	$v(S)$	$x(S)$	$e(S, x)$
\emptyset	0	0	0
$\{1\}$	0	0	0
$\{2\}$	0	a	$-a$
$\{3\}$	350	$775 - a$	$a - 425$
$\{1, 2\}$	0	a	$-a$
$\{1, 3\}$	700	$775 - a$	$a - 75$
$\{2, 3\}$	775	775	0

Tabla 1.2: Excesos asociados a las coaliciones.

Por definición, el nucleolus minimiza la máxima queja, i.e, el primer elemento del vector de excesos. Cuánto más positivo es el valor del exceso, más infeliz es la coalición. Por tanto, si conociésemos el valor del parámetro a , sabríamos exactamente cuál es la coalición más infeliz, pero como en este caso el exceso dependerá del valor que tome a ($0 \leq a \leq 75$), tenemos que el nucleolus será la solución óptima del siguiente problema (pues solo nos interesan aquellos excesos que dependen de a):

$$\min_{0 \leq a \leq 75} \{\max\{-a, a - 425, a - 75\}\}.$$

Como es evidente que $a - 75 > a - 425$, el problema anterior se puede expresar como

$$\min_{0 \leq a \leq 75} \{ \max \{ -a, a - 75 \} \}.$$

Resolveremos este problema de forma gráfica, como se indica en la Figura 1.2. En primer lugar, representamos la variable a en el eje de abscisas y, para los valores de a comprendidos entre 0 y 75, representamos las funciones $-a$ y $a - 75$. Acto seguido, representamos con trazo azul la función $M(a) = \max \{ -a, a - 75 \}$. Finalmente resolvemos el problema $\min_{0 \leq a \leq 75} M(a)$ obteniendo que el valor óptimo es $a = 37.5$, por lo que el nucleolus del juego es $Nu(N, v) = (0, 37.5, 737.5)$.

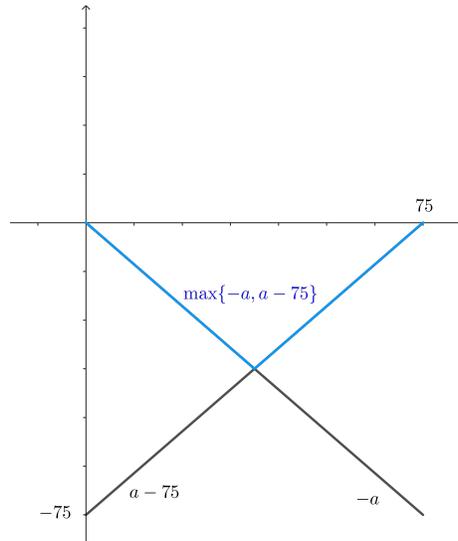


Figura 1.2: Representación gráfica para el cálculo del nucleolus.

τ -valor

El τ -valor, introducido por [Tijds \(1981\)](#), es un concepto de solución puntual en una subclase de los juegos con utilidad transferible. Dado un juego (N, v) , el τ -valor es el único vector de pagos eficiente que actúa como compromiso (i.e, es una combinación convexa) de dos vectores que representan el mínimo y el máximo pago que los jugadores aspiran a tener.

Antes de definir el τ -valor, necesitamos introducir unos conceptos previos, que se corresponderán con una cota superior y otra inferior del núcleo de un juego.

Definición 23. Dado un juego $(N, v) \in G^N$ y un jugador $i \in N$, definimos:

- El pago de utopía del jugador i como el valor

$$M_i(N, v) = v(N) - v(N \setminus i).$$

- El mínimo derecho del jugador i como el valor

$$m_i(N, v) = \max_{S \subseteq N: i \in S} \left\{ v(S) - \sum_{j \in S \setminus i} M_j(N, v) \right\}.$$

El vector $M(N, v) := (M_i(N, v))_{i \in N}$, cuyas componentes son las contribuciones marginales de cada jugador al valor de la gran coalición, se pueden ver como el pago de utopía, en el sentido de que

$M_i(N, v)$ representa una cota superior para las aspiraciones del jugador i en el juego v . En otras palabras, representa lo máximo que éste podría pedir, de forma que si pidiese más, entonces sería rentable para la gran coalición no tenerlo en cuenta y pasar a formar su subjuego de $n - 1$ jugadores. En cuanto a la cota inferior, parece razonable calcular para cada jugador lo que le queda a cada coalición a la que pertenece si el resto de jugadores de la coalición se llevasen su pago de utopía. Así, como mínimo, cada jugador se puede asegurar el máximo de estas cantidades sobre todas las coaliciones a las que pertenece. Este valor es la cota inferior o mínimo derecho de un jugador (representa la cota inferior para las aspiraciones del jugador i).

En lo siguiente, restringiremos nuestra atención al conjunto de los juegos cuasi-equilibrados $Q^N \subset G^N$, dado por:

$$Q^N := \left\{ v \in G^N : m(N, v) \leq M(N, v), \sum_{i \in N} m_i(N, v) \leq v(N) \leq \sum_{i \in N} M_i(N, v) \right\}.$$

Ahora estamos en condiciones de definir el τ -valor.

Definición 24. Sea $(N, v) \in G^N$ un juego TU cuasi-equilibrado, $m(N, v)$ el vector de mínimos derechos y $M(N, v)$ el vector de los pagos de utopía de los jugadores. Se define el τ -valor como el reparto que verifica

$$\tau(N, v) = m(N, v) + \alpha(M(N, v) - m(N, v)),$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\sum_{i \in N} \tau_i(N, v) = v(N)$.

El τ -valor no tiene por qué ser un elemento del núcleo.

Tijs (1987) caracteriza el τ -valor mediante tres axiomas: eficiencia, la propiedad de mínimos derechos y la propiedad de proporcionalidad restringida. A continuación, introducimos las correspondientes definiciones de estas dos últimas.

Definición 25 (Propiedad de mínimos derechos). Sea $\Psi : Q^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ una aplicación. Entonces, Ψ se dice que tiene la propiedad de mínimos derechos si

$$\Psi(v) = m(N, v) + \Psi(v - m(N, v)), \quad \forall v \in Q^N, \quad (1.1)$$

donde $m(N, v)$ es el vector de mínimos derechos del juego v . El juego $v - m(N, v)$ se llama juego derecho reducido asociado a v .

Para una regla Ψ verificando esta propiedad no importa, para un jugador i , recibir el reparto $\Psi_i(v)$ descrito por la regla Ψ en el juego v , u obtener su mínimo derecho en v más la asignación que la regla Ψ le proporciona en el juego reducido $v - m(N, v)$. Observamos que esta propiedad es una versión más débil de la propiedad de aditividad, pues la ecuación (1.1) se puede reescribir como

$$\Psi(v) - m(N, v) = \Psi(v - m(N, v)).$$

Definición 26 (Propiedad de proporcionalidad restringida). Una regla de reparto $\Psi : Q^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ tiene la propiedad de proporcionalidad restringida si, para cada $v \in Q_0^N$:

$$\Psi(v) \text{ es un múltiplo del vector de utopía } M(N, v).$$

donde Q_0^N denota la familia de juegos cuasi-equilibrados con vector de mínimos derechos nulo, i.e., $Q_0^N = \{v \in Q^N : m_i(N, v) = 0, \forall i \in N\}$.

La propiedad de proporcionalidad restringida afirma que, para juegos con vector de mínimos derechos nulo, el reparto asignado a los jugadores es proporcional a la contribución marginal de los

jugadores a la gran coalición.

En [Tijs and Ottern \(1993\)](#) y [Driessen \(1996\)](#) se pueden encontrar las otras propiedades que verifica el τ -valor en la clase de los juegos cuasi-equilibrados, y son: racionalidad individual, propiedad del jugador títere, simetría, covarianza, consistencia (para un juego reducido particular) y la propiedad estándar para juegos con dos jugadores. De hecho, en [Driessen \(1996\)](#) se proporciona una caracterización axiomática del τ -valor en términos de las propiedades de consistencia y estándar para dos.

Ejemplo: Ilustración de los conceptos de solución (continuación)

Calcularemos ahora el τ -valor para este ejemplo.

El pago de utopía para cada jugador es:

$$M_A(N, v) = v(N) - v(N \setminus A) = v(A, B, C) - v(B, C) = 0.$$

$$M_B(N, v) = v(N) - v(N \setminus B) = v(A, B, C) - v(A, C) = 75.$$

$$M_C(N, v) = v(N) - v(N \setminus C) = v(A, B, C) - v(A, B) = 775.$$

De este modo, $M(N, v) = (0, 75, 775)$.

A continuación, obtendremos el vector de mínimos derechos.

Para el jugador A , las coaliciones que lo contienen son $\{A\}$, $\{A, B\}$, $\{A, C\}$ y $\{A, B, C\}$. Por tanto, el mínimo derecho para el jugador A será el máximo entre:

$$v(A) = 0.$$

$$v(A, B) - M_B(N, v) = -75.$$

$$v(A, C) - M_C(N, v) = -75.$$

$$v(A, B, C) - M_B(N, v) - M_C(N, v) = -75.$$

Así, el mínimo derecho del jugador A es 0.

Procediendo de modo análogo con los jugadores B y C , obtenemos que sus mínimos derechos son, respectivamente, 0 y 700. Por tanto, $m(N, v) = (0, 0, 700)$. Así:

$$\tau(N, v) = (0, 0, 700) + \alpha((0, 75, 775) - (0, 0, 700)) = (0, 75\alpha, 700 + 75\alpha),$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ verificando $\sum_{i \in N} \tau_i(N, v) = 775$. De estas relaciones obtenemos que $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\tau(N, v) = (0, 37.5, 737.5)$. Vemos que este reparto coincide con la asignación proporcionada por el nucleolus y, por tanto, el τ -valor pertenece al *core* del juego v , i.e, es una solución estable.

En la [Figura 1.3](#) mostramos la representación gráfica del conjunto de imputaciones para el juego v , del núcleo (que se corresponde con el segmento de puntos extremos $(0, 0, 775)$, $(0, 75, 700)$), así como de distintas soluciones (a saber: valor de Shapley, nucleolus y τ -valor). Vemos que el nucleolus y el τ -valor están ubicados, exactamente, en el punto medio del segmento que conforma el núcleo.

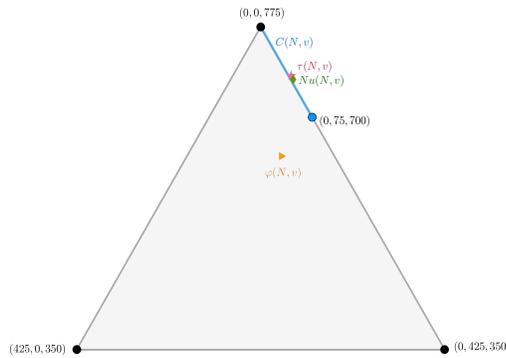


Figura 1.3: Representación gráfica del conjunto de imputaciones (gris), *core* (azul) y distintas soluciones.

En la Tabla 1.3 se presenta una comparativa de las propiedades que satisfacen el valor de Shapley, el nucleolus y el τ -valor. Aquí, “+” indica que el método satisface la propiedad, mientras que “-” tiene el significado opuesto. Además, “ \oplus ” indica que la propiedad se usa en alguna caracterización de la solución.

1.2. Juegos de comunicación

Es natural asumir que, en situaciones reales, la cooperación entre los jugadores requiere comunicación. No obstante, puede haber restricciones en las posibilidades de comunicación por diversos motivos. Por ejemplo, si los jugadores se comunican a través de una red de telecomunicaciones, puede haber impedimentos tecnológicos como una capacidad limitada o una cobertura de red restringida. Además, las afinidades o rivalidades entre los agentes también pueden estimular o prevenir su comunicación. En un contexto político, la comunicación puede estar restringida a los miembros de las mismas alianzas políticas. En relaciones comerciales, la comunicación entre los jugadores de distintas compañías está supeditada a los acuerdos mercantiles. La necesidad de modelizar las restricciones en la comunicación que con tanta frecuencia se presentan en la vida real en el contexto de los juegos cooperativos condujo a la introducción de nuevos modelos teóricos, comúnmente referidos como juegos de comunicación.

Los juegos de comunicación son una variación de los juegos TU propuesta por Myerson (1977) para situaciones en las que hay restricciones en la cooperación de los jugadores. La teoría de grafos permite modelizar estructuras de cooperación parcial mediante un grafo no dirigido, de forma que cada enlace o arco representa una comunicación bilateral entre los agentes. La cooperación será factible si y solo si los jugadores están conectados a través del grafo (i.e, si hay un arco o un camino de arcos que los conecta). Notar que, en la teoría clásica de los juegos TU, el pago de un jugador solo refleja su papel en la colaboración. Ahora, en los juegos de comunicación, su pago también dependerá de sus “habilidades comunicativas” (i.e, con cuántos jugadores se puede comunicar) y de su importancia como intermediario en la red de comunicación. Dicho de otro modo, de su posición dentro del grafo.

Definición 27. Un grafo no dirigido sobre N es un par (N, g) , donde N es un conjunto de nodos y g es un conjunto de pares no ordenados de diferentes elementos de N . Estos pares, que se denotarán por $(i : j)$, se llaman enlaces.

Definición 28. Una sucesión de nodos (i_1, \dots, i_{k+1}) es un ciclo en (N, g) si

1. $k \geq 2$,
2. Todos los nodos i_1, \dots, i_k son distintos (i.e, son jugadores diferentes de N),

Propiedades	Nucleolus	Valor de Shapley	τ -valor
Eficiencia	+	\oplus	\oplus
Racionalidad individual	+	-	+
Simetría	+	\oplus	+
Jugador nulo	+	\oplus	+
Aditividad	-	\oplus	-
Jugador títere	+	+	+
Covarianza	\oplus	+	+
Continuidad	+	+	+
Monotonía fuerte	-	\oplus	-
Anonimato	\oplus	+	+
Consistencia	\oplus	\oplus	\oplus
Estándar para dos	-	\oplus	\oplus
Propiedad de mínimos derechos	-	+	\oplus
Propiedad de proporcionalidad restringida	-	-	\oplus
Unicidad	\oplus	+	+
Pertenencia al <i>core</i>	+	-	-

Tabla 1.3: Comparación de las propiedades que satisfacen las soluciones clásicas para juegos TU.

3. $i_{k+1} = i_1$, y
4. $(i_h : i_{h+1}) \in g$, para $h = 1, \dots, k$.

Un grafo (N, g) se denomina grafo sin ciclos si no contiene ningún ciclo.

Solo consideraremos grafos sin ciclos y, además, $(i : j) = (j : i)$. Denotaremos por g^N al grafo completo sobre N , i.e.,

$$g^N = \{(i : j) : i \in N, j \in N, i \neq j\},$$

y por GR al conjunto de todos los grafos no dirigidos, siguiendo la notación del artículo original de Myerson (1977). Sea $g \in GR$ e $i, j \in N$ tal que $(i : j) \in g$. El grafo que se obtiene eliminado el arco $(i : j)$ lo denotaremos por $g_{-(i:j)} = g \setminus \{(i : j)\}$.

A continuación, presentamos los conceptos de subgrafo, conectividad y componente, que nos serán de utilidad para relacionar coaliciones y grafos de cooperación.

Definición 29. Para una coalición $S \in 2^N$, el subgrafo de (N, g) sobre S se define como el grafo $(S, g(S))$, con $g(S) = g \cap (S \times S)$.

Definición 30. Sea $S \subseteq N$ una coalición, $g \in GR$ e $i, j \in S$ dados. Decimos que i y j están conectados en (S, g) si y solo si existe un camino en g desde i hasta j que está contenido en S . Esto es, i y j están conectados en S por g si $i = j$ o si existe algún $k \geq 1$ y una secuencia (i_0, i_1, \dots, i_k) con $i^0 = i, i^k = j, (i_{l-1} : i_l) \in g$ e $i_l \in S$ para cada l desde 1 hasta k . Un grafo (S, g) se dice conectado o conexo si cualesquiera dos nodos $i, j \in S$ están conectados en (S, g) . En un grafo dado (S, g) , una coalición $S \subseteq N$ es conexas si el subgrafo $(S, g(S))$ es conexo. Denotaremos a la colección de todos los subconjuntos conexos de S en el subgrafo $(S, g(S))$ de (N, g) por $C^g(S)$.

Definición 31. Una coalición $S \subseteq N$ es una componente de (N, g) si el subgrafo $(S, g(S))$ es maximalmente conexo, i.e., si $(S, g(S))$ es conexo y, para cada $j \in N \setminus S$, el subgrafo $(S \cup \{j\}, g(S \cup \{j\}))$ no es conexo.

Notar que la colección de componentes de (S, g) forma una partición de S . Es decir, para cada $S \subseteq N$, existe una única partición de S en subcoaliciones maximales cuyos miembros están conectados en S por g . Denotaremos a esta partición por S/g y cada componente en S/g se llamará *componente (conexa) de S con respecto a g* . Notar que $S/g \subseteq C^g(S)$. El conjunto de todas las componentes conexas de N con respecto a g es N/g . Podemos interpretar S/g como la colección de coaliciones más pequeñas en las que S rompería si los jugadores solo se pudieran coaligar usando los enlaces dados por el grafo g . Por ejemplo, si $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $g = \{1 : 2, 1 : 4, 2 : 4, 3 : 4\}$, entonces $\{1, 2, 3\}/g = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$, pues el 4 no está en la coalición $\{1, 2, 3\}$, con lo cual no existe un camino directo entre 1 y 3 ni entre 2 y 3. También se tiene que $N/g = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{5\}\}$, pues en este caso los enlaces presentes en el grafo g no tienen en cuenta al jugador 5, con lo cual no existe un camino que relacione a este jugador con alguno de los restantes.

Dado un grafo de cooperación g (que indique cómo se deben relacionar/cooperar los jugadores), la partición N/g es la estructura coalicional natural asociada al grafo g . La idea es que, aún en el caso de que dos jugadores no tengan un enlace directo entre ellos, pueden cooperar eficientemente si los dos tienen un acuerdo con algún amigo mutuo o si de otro modo están conectados a través de g .

Definición 32. Un juego TU con grafo de comunicación (o juego de comunicación) es un par (v, g) , donde $v \in G^N$ y $g \in GR$.

La pregunta que nos hacemos ahora es de qué forma va a depender la asignación de pagos de la estructura de cooperación entre los jugadores. Representaremos el juego $(N, v) \in G^N$ por su función

característica, v . Cada número $v(S)$ es la utilidad que la coalición S se puede garantizar por sí misma. Sea GR el conjunto de todas las posibles estructuras de cooperación para el juego v (i.e, todos los posibles grafos sobre los jugadores N). Los repartos de v se pueden representar por una función $\Psi : GR \rightarrow \mathbb{R}^N$ que asigna vectores de pagos a cada grafo de cooperación. De esta forma, la regla de reparto pone énfasis en que los pagos finales deben depender del grafo de cooperación, i.e, de la forma en que los jugadores decidan cooperar.

Formalmente, definimos una regla de asignación para v como la función $\Psi : GR \rightarrow \mathbb{R}^N$ tal que:

$$\forall g \in GR, \forall S \in N/g, \quad \sum_{i \in S} \Psi_i(g) = v(S). \quad (1.2)$$

La condición (1.2) se denomina eficiencia entre componentes y afirma que si S es una componente conexa de g , entonces los miembros de S deben repartirse el valor total de la coalición S , $v(S)$.

Para obtener una asignación de pagos razonable en juegos de comunicación, Myerson (1977) definió una serie de propiedades deseables para una regla de reparto en este contexto.

Definición 33 (Estabilidad). Una regla de asignación $\Psi : GR \rightarrow \mathbb{R}^N$ es estable si y solo si para cada $g \in GR$ e $i, j \in N$, con $(i : j) \in g$,

$$\Psi_i(g) \geq \Psi_i(g_{-(i:j)}) \text{ y } \Psi_j(g) \geq \Psi_j(g_{-(i:j)}).$$

Es decir, una regla de asignación es estable si dos jugadores siempre se benefician llegando a un acuerdo bilateral. Así, todos los jugadores querrían estar conectados con el mayor número de miembros posible y podríamos esperar el grafo de cooperación completo g^N como la estructura de cooperación del juego, de modo similar a cómo se espera en los juegos TU superaditivos que la gran coalición N se forme y que los jugadores se repartan $v(N)$ entre ellos.

Ahora bien, un juego puede tener muchas reglas de reparto estables. Notar que la propiedad de estabilidad no nos dice cómo se debe repartir la utilidad entre los jugadores, sino que simplemente es una propiedad que incita a la cooperación (simplemente afirma que los jugadores no se verán perjudicados si deciden cooperar). Para reducir el número de reglas de asignación, necesitamos decidir cómo se reparte la utilidad. Con este fin, uno puede pensar en un principio de igualdad de ganancias o justicia: dos jugadores deberían ganar lo mismo de su acuerdo bilateral.

Definición 34 (Justicia). Una regla de reparto $\Psi : GR \rightarrow \mathbb{R}^N$ es justa si y solo si:

$$\forall g \in GR, \forall (i : j) \in g, \Psi_i(g) - \Psi_i(g_{-(i:j)}) = \Psi_j(g) - \Psi_j(g_{-(i:j)}).$$

Esta propiedad dice que dos jugadores se ven beneficiados (o perjudicados) del mismo modo si se rompe el enlace entre ellos.

Dado un juego de comunicación (v, g) , el juego de comunicación restringida $v/g \in G^N$ se define, para cada $S \subseteq N$, por

$$(v/g)(S) := \sum_{T \in S/g} v(T).$$

Este juego TU refleja la idea de que solo los jugadores que se pueden comunicar entre ellos a través de los enlaces en g son capaces de generar valor. Myerson (1977) propuso un reparto para juegos de comunicación basado en el valor de Shapley del juego de comunicación restringida v/g .

Teorema 35. Dada un juego v , existe una única regla de asignación justa $\Psi : GR \rightarrow \mathbb{R}^N$. Esta regla de asignación justa también satisface:

$$\Psi(g) = \varphi(v/g), \quad \forall g \in GR,$$

donde $\varphi(\cdot)$ es el operador del valor de Shapley.

Además, si v es superaditivo, entonces la regla de asignación justa también es estable (análogo al hecho de que si v es convexo, entonces el valor de Shapley pertenece al núcleo, que es el conjunto de soluciones estables).

Ejemplo: Ilustración de los conceptos de solución (continuación)

Calcularemos ahora el valor de Myerson para este ejemplo.

Consideremos el grafo no orientado de la Figura 1.1. En este caso, $N = \{A, B, C\}$ y $g = \{(A : C), (B : C)\}$. Vemos que los jugadores A y B están conectados en $\{A, B, C\}$ a través de g , pero no lo están en $\{A, B\}$. Calculemos la función característica del juego de comunicación restringida (v/g) .

$$\begin{aligned}(v/g)(i) &= v(i), \quad \forall i = A, B, C. \\(v/g)(A, B) &= v(A) + v(B) = 0 + 0 = 0. \\(v/g)(A, C) &= v(A, C) = 700. \\(v/g)(B, C) &= v(B, C) = 775. \\(v/g)(A, B, C) &= v(A, B, C) = 775.\end{aligned}$$

Por tanto, la función característica del juego con comunicación restringida es $(v/g) = [0, 0, 350, 0, 700, 775, 775]$, que coincide precisamente con la función característica del juego original, pues en este caso $v(A, B) = v(A) + v(B)$. Por tanto, el valor de Myerson (que es el valor de Shapley del juego (v/g)) coincide con el valor de Shapley del juego v .

A continuación, introducimos unos juegos de comunicación con características especiales: los juegos con grafo lineal.

Los juegos con grafo lineal son un caso particular de los juegos de comunicación, donde la restricción en la comunicación viene determinada por la ordenación lineal entre los jugadores. En este tipo de juegos, solo los jugadores consecutivos se pueden comunicar entre ellos. Ejemplos de esto son situaciones en las que se sigue una secuencia, como en las producciones industriales, las distribuciones del agua de un río (donde los agentes se ordenan de forma lineal siguiendo la dirección de la corriente) o los segmentos de una autopista. Este último caso será el que trataremos en el capítulo 2, por lo que los juegos de comunicación con grafo lineal tienen especial relevancia.

En primer lugar, fijaremos la notación correspondiente a este tipo de juegos. Para ello, nos basaremos en [van den Brink et al. \(2007\)](#). Supondremos, sin pérdida de generalidad, que los jugadores están ordenados siguiendo el orden natural desde 1 hasta n . La estructura en el conjunto de jugadores está dada por el grafo lineal (N, g) , donde N es el conjunto de jugadores y $g \subseteq g^c = \{(i : i + 1) : i = 1, \dots, n - 1\}$ el conjunto de enlaces. Si $g = g^c$ entonces todo par de jugadores consecutivos están conectados de forma directa por una arista. Para $i, j \in N$, con $i \leq j$, denotaremos por $[i, j]$ al conjunto $\{i, i + 1, \dots, j - 1, j\} \subseteq N$ de jugadores sucesivos. Una coalición es conexa en el grafo (N, g) si y solo si $S = [i, j]$ para algún $i, j \in N$, $i \leq j$ y $(k : k + 1) \in g$ para todo $k \in [i, j - 1]$. Decimos que un conjunto de jugadores S es una componente si y solo si están conectados y $S \cup \{i\}$ no está conectado para cada $i \in N \setminus S$. Un grafo lineal $g \subseteq g^c$ consta de diferentes componentes y a su vez estas componentes están formadas por jugadores ordenados de modo consecutivo.

Asimismo, denotaremos al juego con grafo lineal por (v, g) y a la colección de todos los juegos con grafo lineal por $G^N \times \mathcal{G}$, donde $\mathcal{G} = \{g : g \subseteq g^c\}$ es el conjunto de todos los posibles grafos lineales que se pueden formar sobre los jugadores de N . Como vimos previamente con los juegos de comunicación, una coalición $S \subseteq N$ solo obtiene el beneficio $v(S)$ si S es conexa. Cuando S no es conexa, los jugadores de S solo obtienen la suma de los valores de las componentes del subgrafo $(S, g(S))$ con

$g(S) = \{(i : i + 1) \in g : (i : i + 1) \subseteq S\}$. Por tanto, el juego restringido inducido por el grafo lineal (v, g) está dado por:

$$(v/g)(S) = \sum_{T \in S/g} v(T),$$

donde S/g es la colección de todas las componentes de S . Se tiene por [Le Breton et al. \(1992\)](#) que el juego restringido v/g de un juego de grafos sin ciclos superaditivo tiene un núcleo no vacío, y por tanto, esto se mantiene para los juegos con grafo lineal superaditivos.

En [van den Brink et al. \(2007\)](#) se definen cuatro propiedades relativas al efecto de eliminar los enlaces entre los jugadores, de forma que cada una de estas propiedades determinará una única solución en la clase de los juegos con grafo lineal que verifique la eficiencia entre componentes. Estas propiedades informan sobre el cambio que se produce en el vector de pagos al suprimir un enlace del grafo lineal. Para enunciarlas, tomemos $g \in \mathcal{G}$ e $i = 1, \dots, n - 1$. Sea $(N, g(i))$ el grafo sobre N con $g(i) \equiv g_{-(i:i+1)} = g \setminus \{(i : i + 1)\}$ el conjunto de enlaces obtenidos eliminando el arco $(i : i + 1)$ de g (si $(i : i + 1) \in g$).

Definición 36. Se tienen los siguientes puntos.

1. Una solución Ψ en $G^N \times \mathcal{G}$ es justa si para cualquier $i = 1, \dots, n - 1$, $v \in G^N$ y $g \in \mathcal{G}$ se tiene que $\Psi_i(v, g) - \Psi_i(v, g(i)) = \Psi_{i+1}(v, g) - \Psi_{i+1}(v, g(i))$.
2. Una solución Ψ en $G^N \times \mathcal{G}$ es equivalente superiormente si para cualquier $i = 1, \dots, n - 1$, $v \in G^N$ y $g \in \mathcal{G}$ se tiene que $\Psi_j(v, g(i)) = \Psi_j(v, g)$, $j = 1, \dots, i$.
3. Una solución Ψ en $G^N \times \mathcal{G}$ es equivalente inferiormente si para cualquier $i = 1, \dots, n - 1$, $v \in G^N$ y $g \in \mathcal{G}$ se tiene que $\Psi_j(v, g(i)) = \Psi_j(v, g)$, $j = i + 1, \dots, n$.
4. Una solución Ψ en $G^N \times \mathcal{G}$ se dice que tiene la propiedad de pérdida igualitaria si para cualquier $i = 1, \dots, n - 1$, $v \in G^N$ y $g \in \mathcal{G}$ se tiene que $\sum_{j=1}^i (\Psi_j(v, g) - \Psi_j(v, g(i))) = \sum_{j=i+1}^n (\Psi_j(v, g) - \Psi_j(v, g(i)))$.

La primera propiedad es la propiedad de justicia introducida en [Myerson \(1977\)](#). El axioma de equivalencia superior afirma que el pago de un jugador j no depende de la presencia de los enlaces inferiores, mientras que la propiedad de equivalencia inferior significa que el pago de un jugador no se ve afectado por la presencia de enlaces superiores. Por último, la propiedad de pérdida igualitaria es una alternativa a la justicia que, en vez de igualar el cambio en los pagos individuales para los jugadores a los que se les elimina el enlace, establece que el pago total de los jugadores situados a ambos lados del enlace eliminado deben variar en la misma cantidad. Determinar qué propiedad es más adecuada dependerá de la aplicación en cuestión.

Antes de presentar el siguiente teorema, introduciremos la definición formal de contribución marginal asociada a un cierto orden o permutación de los jugadores.

Definición 37. El vector marginal de un juego v , asociado a un orden o permutación lineal sobre el conjunto de jugadores, asigna a cada agente su contribución (i.e, su cambio en el valor) de la coalición de agentes que lo preceden en el orden. Formalmente, sea el orden π asignando la posición $\pi(i) \in N$ a cualquier $i \in N$. Entonces, la contribución marginal del agente $i \in N$ en el juego v dado el orden π está dado por

$$m_i^\pi(v) = v(\pi^i) - v(\pi^i \setminus \{i\}),$$

donde $\pi^i = \{j \in N : \pi(j) \leq \pi(i)\}$.

El siguiente teorema establece que, junto con la propiedad de eficiencia entre componentes, cada una de las cuatro propiedades mencionadas en la Definición 36 selecciona una única solución en la clase de los juegos con grafo lineal $G^N \times \mathcal{G}$.

Teorema 38. Sea $\Psi : G^N \times \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^N$ una solución eficiente entre componentes en la clase $G^N \times \mathcal{G}$. Entonces,

1. Ψ es justa si y solo si $\Psi = \Psi^s$.
2. Ψ es equivalente superiormente si y solo si $\Psi = \Psi^u$.
3. Ψ es equivalente inferiormente si y solo si $\Psi = \Psi^l$.
4. Ψ satisface la propiedad de pérdida igualitaria si y solo si $\Psi = \Psi^e$,

donde Ψ^s, Ψ^u, Ψ^l y Ψ^e son las soluciones en $G^N \times \mathcal{G}$ dadas por

1. $\Psi^s(v, g) = \varphi(v/g)$, para todo $(v, g) \in G^N \times \mathcal{G}$.
2. $\Psi^u(v, g) = m^u(v/g)$, para todo $(v, g) \in G^N \times \mathcal{G}$.
3. $\Psi^l(v, g) = m^l(v/g)$, para todo $(v, g) \in G^N \times \mathcal{G}$.
4. $\Psi^e(v, g) = 1/2 \cdot (m^u(v/g) + m^l(v/g))$, para todo $(v, g) \in G^N \times \mathcal{G}$.

Estas soluciones asignan, respectivamente, el valor de Shapley de v/g (valor de Myerson), el vector de contribuciones marginales de v/g correspondiente al orden $u(i) = i$, el vector de contribuciones marginales que corresponde al orden $l(i) = n + 1 - i$ y la media de esos dos vectores.

Se tiene que, para un juego v superaditivo, los vectores de contribuciones marginales $m^u(v/g)$ y $m^l(v/g)$ están en el núcleo de v/g y, por tanto, la media de esos dos vectores también estará en el núcleo. En efecto, el núcleo es un politopo convexo, con lo cual cualquier combinación convexa de dos elementos del núcleo también estará en el conjunto. En particular, la media de dos vectores es una combinación convexa (pues los coeficientes asociados a dichos vectores suman 1). Así, las propiedades de equivalencia superior, equivalencia inferior y la propiedad de pérdida igualitaria resultan en soluciones estables, en el sentido de que pertenecen al núcleo del juego restringido. Sin embargo, la propiedad de justicia puede dar una solución fuera del núcleo. La estabilidad del valor de Shapley está asegurada cuando el juego restringido es convexo.

A continuación, compararemos las cuatro soluciones en función de cómo distribuyen los dividendos de Harsanyi entre los jugadores, lo cual nos proporcionará una interpretación alternativa de las propiedades mencionadas en el Teorema 38.

Una solución Ψ en G^N se llama solución de Harsanyi si distribuye el dividendo de cada coalición S en un juego TU entre los jugadores de S de acuerdo a un sistema de asignación dado. Formalmente, la colección de posibles sistemas de reparto, P , viene dada por:

$$\left\{ p = (p^S)_{S \in \Omega^*} : p^S \in \mathbb{R}^N, p_i^S = 0 \text{ para } i \in N \setminus S, p_i^S \geq 0 \text{ para } i \in S \text{ y } \sum_{j \in S} p_j^S = 1, \text{ para cada } S \in \Omega^* \right\}$$

Es decir, un sistema de repartos $p \in P$ asigna para cada coalición $S \in \Omega^*$ (la colección de coaliciones no vacías) un reparto no negativo p_i^S para cada jugador $i \in S$, siendo la suma de todos esos repartos igual a 1. Para un sistema de repartos $p \in P$ dado, la correspondiente solución de Harsanyi, es la solución Ψ^p , definida sobre G^N , dada por:

$$\Psi_i^p(v) = \sum_{\{S \in \Omega^* : i \in S\}} p_i^S c_S(v), \quad i \in N,$$

i.e, esta solución asigna al jugador $i \in N$ en el juego $v \in G^N$ la suma de los repartos $p_i^S c_S(v)$ que i obtiene en los dividendos de Harsanyi, $c_S(v)$, sobre todas las coaliciones $S \in \Omega^*$ que contienen a i . El vector de pagos $\Psi^p(v)$ se llama vector de pagos de Harsanyi.

Se tiene que cualquier función Ψ que asigna al juego v el vector marginal $m^\pi(v)$ para algún orden π dado es una solución de Harsanyi. En efecto, para un π dado y una coalición $S \subseteq N$, sea $i(S)$ un

jugador en S tal que $\pi(j) \leq \pi(i(S))$ para todo $j \in S$. Consideremos el sistema de repartos $p(\pi) \in P$ dado por $p_j^S(\pi) = 1$ si $j = i(S)$ y $p_j^S(\pi) = 0$ para todo $j \neq i(S)$. Entonces, se tiene (Derks et al., 2006), que:

$$m^\pi(v) = \Psi^{p(\pi)}(v),$$

i.e, el vector de contribuciones marginales $m^\pi(v)$ iguala el vector de pagos de Harsanyi obtenido al asignar el dividendo de cualquier coalición S al último jugador en S según la permutación π . Por tanto, la solución Ψ en G^N asignando $\Psi(v) = m^\pi(v)$ para cualquier $v \in G^N$ es una solución de Harsanyi con el sistema de repartos $p = p(\pi)$.

Ahora estamos preparados para caracterizar cada una de las cuatro soluciones del Teorema 38 en base a la distribución de los dividendos en el juego restringido v/g . Se tiene:

- Como $\Psi^u(v, g) = m^u(v/g)$, la propiedad de equivalencia superior afirma que el dividendo de la coalición $[h, k]$ en v/g se asigna por completo al último jugador k .
- Como $\Psi^l(v, g) = m^l(v/g)$, la propiedad de equivalencia inferior asigna por completo el dividendo de la coalición $[h, k]$ en v/g al primer jugador h .
- Como $\Psi^e(v, g) = 1/2 \cdot (m^l(v/g) + m^u(v/g))$, la propiedad de pérdida igualitaria establece que el dividendo de la coalición $[h, k]$ en v/g se reparta de forma igualitaria entre los dos jugadores h y k .
- Como $\Psi^s(v, g) = \varphi(v/g)$ y el valor de Shapley es la solución de Harsanyi que se obtiene al distribuir el dividendo de forma equitativa entre todos los jugadores de la coalición, la propiedad de justicia resulta en una división igualitaria del dividendo de la coalición $[h, k]$ en v/g entre todos los jugadores en $[h, k]$.

Concluimos esta sección proporcionando una expresión explícita para los dividendos del juego restringido v/g . Se tiene que cualquier coalición no conexa tiene dividiendo cero. Aplicando una fórmula general dada en Owen (1986) para grafos sin ciclos en el caso particular de los juegos con grafos lineales, se tiene que el dividendo de una coalición conexa $[i, j]$, con $j > i$, en v/g está dado por:

$$c_{[i,j]}(v/g) = v[i, j] - v[i + 1, j] - v[i, j - 1] + v[i + 1, j - 1].$$

Se tiene que (v, g) es convexo-lineal si y solo si el juego v/g es convexo, y éste a su vez es convexo si para todo i, j , con $j > i$, se tiene que $c_{[i,j]}(v/g) \geq 0$ (i.e, todos los dividendos de coaliciones conteniendo al menos dos jugadores son no negativas). Si el juego (v, g) es convexo-lineal, la propiedad de justicia proporciona un vector de pagos en el núcleo del juego restringido.

En Herings et al. (2008) se introduce un nuevo concepto de solución puntual para juegos de comunicación sin ciclos, denominada *average tree solution* (o AT). Esta solución está caracterizada por eficiencia entre componentes y justicia entre componentes. La propiedad de justicia entre componentes es una alternativa a la justicia propuesta por Myerson (1977), que establece que eliminar un enlace entre dos jugadores asigna a las dos componentes resultantes el mismo cambio en media en el vector de pagos, donde la media se toma sobre los jugadores de esas componentes. Así, esta propiedad enfatiza que en un juego de grafos cooperativo, las pérdidas asociadas al eliminar un enlace deberían ser atribuidas a las componentes, y no únicamente a los dos jugadores conectados de forma directa cuyo enlace se elimina. Además, las pérdidas deben ser proporcionales al tamaño de la componente. La solución AT siempre está en el núcleo del juego restringido y se puede calcular de forma sencilla como un promedio de n vectores de contribuciones marginales, donde n es el número de jugadores. Además, esta solución se puede generar con una distribución específica de los dividendos de Harsanyi.

Comenzamos presentando formalmente la propiedad de justicia entre componentes.

Definición 39. Una solución Ψ en la clase de los juegos de grafos sin ciclos, $G^N \times GR$, satisface justicia entre componentes si para cualquier (v, g) y para cualquier enlace $(i : j) \in g$, se tiene

$$\frac{1}{|S^i|} \sum_{h \in S^i} (\Psi_h(v, g) - \Psi_h(v, g_{-(i:j)})) = \frac{1}{|S^j|} \sum_{h \in S^j} (\Psi_h(v, g) - \Psi_h(v, g_{-(i:j)}))$$

donde S^i y S^j son las componentes conexas en $g_{-(i:j)}$ conteniendo a i y a j , respectivamente. Dicho de otro modo, S^h es el subconjunto de jugadores conectados a h en el grafo que resulta de eliminar el enlace $(i : j)$, con $h = i$ o $h = j$.

Antes de dar la expresión cerrada para la solución AT, necesitamos introducir los conceptos de grafo dirigido y de árbol.

Un grafo dirigido es un par (N, D) , donde N es el conjunto de nodos y D es una colección de enlaces dirigidos. Si $(i : j) \in D$, entonces el nodo j es un *sucesor* de i e i es un *predecesor* de j . Decimos que $j \neq i$ es un subordinado de i si existe un camino que los conecte, i.e, si existe una sucesión de enlaces dirigidos $(i_h : i_{h+1}) \in D$, $h = 1, \dots, k$ tal que $i_1 = i$ y $i_{k+1} = j$. Denotamos al conjunto de subordinados de i en (N, D) por $Sub_D(i)$ y denotamos por $Sub_D^c(i) = Sub_D(i) \cup \{i\}$. Un grafo dirigido (N, D) es un árbol si hay un nodo en N , llamado nodo raíz o nodo superior, sin ningún predecesor en D y, además, existe una única sucesión de enlaces dirigidos en (N, D) desde ese nodo a cualquier otro nodo.

Sea (N, g) un grafo no dirigido sin ciclos y sea $S \in N/g$ una componente conexa de dicho grafo. Entonces, cada nodo $i \in S$ induce un único árbol $T(i)$ en S del siguiente modo. Para cada $j \in S \setminus \{i\}$, tomamos el camino único en $(S, g(S))$ desde i hasta j , y cambiamos los enlaces no dirigidos en este camino por dirigidos, de tal forma que el primer nodo en cualquier par ordenado es el nodo que viene primero en el camino desde i hasta j . Definimos ahora $g_{T(i)}(j) = \{h \in S : (j : h) \in T(i)\}$ como el conjunto de sucesores de j en $T(i)$.

Sea ahora (v, g) un juego de grafos sin ciclos y consideremos una componente $S \in N/g$ e $i \in S$. Asociamos al jugador j en el árbol $T(i)$ pagos $t_j^i(v, g)$ dados por

$$t_j^i(v, g) = v(Sub_{T(i)}^c(j)) - \sum_{h \in g_{T(i)}(j)} v(Sub_{T(i)}^c(h)) = v(Sub_{T(i)}^c(j)) - (v/g)(Sub_{T(i)}(j)). \quad (1.3)$$

De este modo, vemos que $t_j^i(v, g)$ es la contribución marginal del agente $j \in S$ en el árbol $T(i)$. Por una parte, el primer término de la ecuación (1.3) indica que dicha contribución marginal es igual al valor de la coalición consistente de ese jugador y de todos sus subordinados en $T(i)$ menos la suma de los valores de las coaliciones formadas por cualquier sucesor de j y por todos los subordinados de este sucesor en $T(i)$. Por otro lado, el segundo término de la fórmula (1.3) indica que el pago del jugador j en el árbol $T(i)$ es igual a lo que contribuye el jugador j cuando se une a sus subordinados en $T(i)$.

Presentamos ahora la solución *average tree* (AT), que asigna a cada juego (v, g) el vector de pagos en el cual el jugador j en una componente $S \in N/g$ recibe la media sobre $i \in S$ de los pagos $t_j^i(v, g)$.

Definición 40 (average tree solution). En la clase de los juegos de grafos sin ciclos, la solución *average tree* (AT) asigna a cualquier juego (v, g) , el vector de pagos $AT(v, g)$ dado por:

$$AT_j(v, g) = \frac{1}{|S|} \sum_{i \in S} t_j^i(v, g),$$

donde j es un jugador perteneciente a la componente $S \in N/g$.

El siguiente teorema proporciona una caracterización de la solución AT.

Teorema 41. *En la clase de los juegos de grafos sin ciclos, la solución AT es la única solución que satisface eficiencia entre componentes y justicia entre componentes.*

Para el caso de los juegos de grafos (sin ciclos) superaditivos, la solución AT también puede ser caracterizada mediante justicia entre componentes y pertenencia al núcleo.

Teorema 42. *En la clase de los juegos de grafos superaditivos sin ciclos, la solución AT es la única solución verificando pertenencia al núcleo y justicia entre componentes.*

De este modo, la solución AT puede ser una alternativa atractiva a otras soluciones como el valor de Myerson que pueden no pertenecer al núcleo, incluso en la clase de los juegos de grafos superaditivos.

Por último, veremos cómo obtener la solución AT en función de los dividendos de Harsanyi. Para ello, para cada coalición conexa S en (N, g) y $j \in S$, sea $p_S^g(j)$ el número de jugadores fuera de S representados por j en S . Decimos que el jugador $j \in S$ representa al jugador k fuera de S si k está conectado a j y, en el único camino conectando a j y a k , todos los jugadores entre j y k están fuera de S . De este modo:

$$p_S^g(j) = \sum_{h \in N \setminus S: (j:h) \in g} |K^h|,$$

donde K^h es la componente del grafo $(N, g_{-(j:h)})$ conteniendo al jugador h . Claramente, el jugador j conecta los jugadores en S con los jugadores en K^h , en el sentido de que el enlace $(j : h)$ está en el camino entre cualquier jugador i en S y cualquier jugador k en el conjunto $K^h \subseteq N \setminus S$.

Ahora, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 43. *El pago al jugador i según la solución AT está dado por*

$$AT_i(v, g) = \sum_{S \in C^g(N): i \in S} \frac{1 + p_S^g(i)}{|S| + \sum_{j \in S} p_S^g(j)} c_S(v/g), \quad i \in N.$$

El Teorema 43 muestra que la solución AT se puede obtener distribuyendo los dividendos de cualquier coalición conexa S entre sus miembros de forma que el reparto de un jugador $i \in S$ en el dividendo de la coalición S está dado por $(1 + p_S^g(i))/(|S| + \sum_{j \in S} p_S^g(j))$. El peso $1 + p_S^g(i)$ es igual al número de jugadores que están representados por i en S (incluyéndose a él mismo), i.e: uno, más el número de jugadores fuera de S (pero situados en la componente que contiene a S), que están conectados a i a través de un camino de jugadores fuera de S . De esta forma, vemos que los repartos de la solución AT no solo dependen de la estructura del subgrafo $(S, g(S))$, sino que también dependen de la estructura del grafo (N, g) fuera de S . De hecho, los repartos dependen de la estructura de todo el subgrafo sobre la componente K conteniendo a S . Como resultado, la solución AT para el juego de unanimidad u_S puede cambiar cuando el grafo cambia en K , pero no en S .

Para finalizar esta sección, notemos que el grafo no dirigido $(S, g(S))$ induce $s = |S|$ árboles diferentes, un árbol por cada uno de los s nodos diferentes en S . En Béal et al. (2010) se presentan dos extensiones del *average tree solution*: la solución del árbol marginal (*marginalist tree solution*) y la solución del árbol aleatoria (*random tree solution*), que resultan de relajar la hipótesis de que los diferentes árboles que se obtienen al cambiar el nodo raíz tienen el mismo impacto en el cálculo de la solución. En concreto, la solución del árbol marginal se define como una combinación lineal de los vectores de contribuciones marginales (1.3), mientras que la solución del árbol aleatoria está dada por una distribución de probabilidad sobre el conjunto de todos los vectores de contribuciones marginales.

Ejemplo: Ilustración de los conceptos de solución (continuación)

Calcularemos ahora la solución AT para este ejemplo.

Consideremos el grafo no orientado de la Figura 1.1. En este caso, $N = \{A, B, C\}$ y $g = \{(A : C), (B : C)\}$. El grafo (N, g) es conexo, con lo cual tiene una sola componente. Además, el grafo (N, g) induce 3 árboles (i.e, tres grafos dirigidos que tienen como nodo raíz cada uno de los jugadores de N), uno por cada uno de los 3 nodos de N : $T(A) = \{(A : C), (C : B)\}$, $T(B) = \{(B : C), (C : A)\}$ y $T(C) = \{(C : A), (C : B)\}$. En la Figura 1.4 se ilustran los tres árboles inducidos.

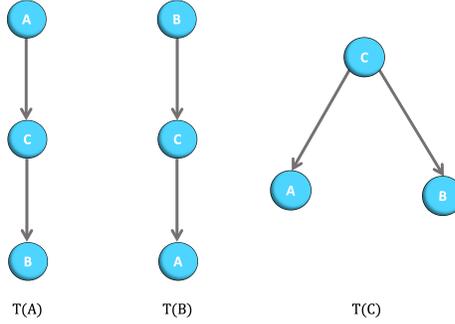


Figura 1.4: Árboles inducidos por cada nodo en el juego v .

Usando la expresión

$$t_j^i(v, g) = v(\text{Sub}_{T(i)}^c(j)) - (v/g)(\text{Sub}_{T(i)}(j)),$$

calcularemos $t^i(v, g)$, para cada $i = A, B, C$.

■ $i = A$.

• $t_A^A(v, g) = v(\text{Sub}_{T(A)}(A) \cup A) - (v/g)(\text{Sub}_{T(A)}(A))$, donde $\text{Sub}_{T(A)}(A)$ son los subordinados de A en $T(A)$. Como en $T(A)$, A es el nodo raíz, los subordinados son los jugadores C y B . Por tanto

$$v(\text{Sub}_{T(A)}(A) \cup A) = v(A, B, C) = v(N) = 775.$$

Ahora, para calcular $(v/g)(\text{Sub}_{T(A)}(A)) = (v/g)(B, C)$, necesitamos tener en cuenta que

$$(v/g)(S) = \sum_{T \in S/g} v(T), \quad S \subseteq N.$$

Como, en nuestro caso, $(B, C)/g$ es conexo, la única componente conexa es la propia coalición (B, C) . Por tanto, $(v/g)(B, C) = v(B, C) = 775$.

De este modo, $t_A^A(v, g) = v(A, B, C) - v(B, C) = 775 - 775 = 0$.

• $t_B^A(v, g) = v(\text{Sub}_{T(A)}(B) \cup B) - (v/g)(\text{Sub}_{T(A)}(B))$, donde $\text{Sub}_{T(A)}(B)$ son los subordinados de B en $T(A)$. Como en $T(A)$, B no tiene subordinados, se tiene que $\text{Sub}_{T(A)}(B) = \emptyset$.

De este modo, $t_B^A(v, g) = v(B) - v(\emptyset) = 0 - 0 = 0$.

• $t_C^A(v, g) = v(\text{Sub}_{T(A)}(C) \cup C) - (v/g)(\text{Sub}_{T(A)}(C))$, donde $\text{Sub}_{T(A)}(C)$ son los subordinados de C en $T(A)$. En $T(A)$, C solo tiene al jugador B como subordinado, por lo que $\text{Sub}_{T(A)}(C) = B$.

De este modo, $t_C^A(v, g) = v(B, C) - v(B) = 775$.

Por tanto $t^A = (0, 0, 775)$.

■ $i = B$.

Procediendo de modo análogo a como hicimos para $i = A$, obtenemos que $t^B = (0, 75, 700)$.

■ $i = C$.

• $t_A^C(v, g) = v(\text{Sub}_{T(C)}(A) \cup A) - (v/g)(\text{Sub}_{T(C)}(A))$, donde $\text{Sub}_{T(C)}(A)$ son los subordinados de A en $T(C)$. En $T(C)$, A es un nodo terminal, por lo que no tiene subordinados. Por tanto, $t_A^C(v, g) = v(A) - v(\emptyset) = 0 - 0 = 0$.

• $t_B^C(v, g) = v(\text{Sub}_{T(C)}(B) \cup B) - (v/g)(\text{Sub}_{T(C)}(B))$, donde $\text{Sub}_{T(C)}(B)$ son los subordinados de B en $T(C)$. Al igual que pasaba con el nodo A , en $T(C)$ el nodo B tampoco tiene subordinados. Así, $t_B^C(v, g) = v(B) - v(\emptyset) = 0 - 0 = 0$.

• $t_C^C(v, g) = v(\text{Sub}_{T(C)}(C) \cup C) - (v/g)(\text{Sub}_{T(C)}(C))$, donde $\text{Sub}_{T(C)}(C)$ son los subordinados de C en $T(C)$. En $T(C)$, el nodo C tiene a A y a B como subordinados, con lo cual

$$v(\text{Sub}_{T(C)}(C) \cup C) = v(A, B, C) = v(N) = 775.$$

Ahora, para calcular $(v/g)(\text{Sub}_{T(C)}(C)) = (v/g)(A, B)$, notamos que $(A, B)/g = \{(A), (B)\}$, ya que, al no estar A y B conectados, las componentes conexas maximales inducidas por el grafo g son (A) y (B) . Por tanto

$$(v/g)(A, B) = \sum_{T \in (A, B)/g} v(T) = v(A) + v(B) = 0 + 0 = 0, \quad S \subseteq N.$$

De este modo, $t_C^C(v, g) = 775 - 0 = 775$, con lo cual $t^C(v, g) = (0, 0, 775)$.

Por tanto, la solución AT es:

$$AT(v, g) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 775 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 75 \\ 700 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 775 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 25 \\ 750 \end{pmatrix}.$$

Observamos que la solución AT está en el núcleo del juego, pues es eficiente y su segunda componente es 25, que verifica la condición del núcleo ($0 \leq 25 \leq 75$). Esto se debe al hecho de que el juego v verifica la condición de superaditividad. De este modo, el reparto $(0, 25, 750)$ es estable.

1.2.1. Solución AT para grafos lineales

Cuando tenemos un grafo lineal, los cálculos para la solución AT se simplifican y se pueden interpretar fácilmente. Para la elaboración de este apartado, nos hemos basado en [Suzuki \(2010\)](#).

En un grafo lineal $g = \{(1 : 2), (2 : 3), \dots, (n - 1 : n)\}$, cada nodo solo se puede comunicar con su vecino(s). Expresando un grafo lineal como una línea horizontal, asignamos un número a cada nodo indicando su posición relativa desde la izquierda, etiquetando con 1 al nodo ubicado en el extremo

izquierdo de esta línea. Denotaremos por L_i y R_i al conjunto de nodos localizados a la izquierda de $i \in N$ y a la derecha, respectivamente. Dicho de otro modo $L_i = \{1, \dots, i-1\}$ y $R_i = \{i+1, \dots, n\}$.

Para el cálculo de la solución AT para un grafo lineal (v, g) , consideramos t_j^i como el pago al jugador j cuando i se escoge como el nodo raíz. Solo puede tomar tres valores como se indica a continuación.

$$t_j^i = \begin{cases} v(R_j \cup \{j\}) - v(R_j), & \text{si } i \in L_j \\ v(N) - v(L_j) - v(R_j), & \text{si } i = j \\ v(L_j \cup \{j\}) - v(L_j), & \text{si } i \in R_j. \end{cases} \quad (1.4)$$

Debido a la estructura de los grafos lineales, independientemente de cual sea el nodo j , siempre vamos a obtener el pago $v(R_j \cup \{j\}) - v(R_j)$ si el nodo raíz se sitúa a su izquierda. Notar que $v(R_j \cup \{j\}) - v(R_j)$ es la contribución marginal del jugador j cuando se une a la coalición formada por los nodos que se sitúan a su derecha. Como el nodo raíz está a la izquierda de j , los nodos a la derecha de j serían sus subordinados. Este pago ocurre $j-1$ veces. De modo similar, si el nodo raíz i está situado a la derecha de j , siempre obtendríamos la expresión $v(L_j \cup \{j\}) - v(L_j)$ y tendría una interpretación análoga. Esta expresión ocurre en $n-j$ ocasiones. El jugador j también tiene una oportunidad de ser el nodo raíz, y la correspondiente fórmula se muestra en la línea central de la ecuación (1.4). La solución AT para el jugador $j \in N$, se expresaría como

$$AT_j(v, g) = \frac{1}{n}v(N) + \frac{1}{n} \{(j-1)v(R_j \cup \{j\}) - jv(R_j) + (n-j)v(L_j \cup \{j\}) - (n-j+1)v(L_j)\}.$$

Vemos que el método AT se obtiene por medio de la solución igualitaria $(v(N)/n)$ y algunos términos correctores. Como $L_1 = R_n = \emptyset$ (pues el nodo 1 no tiene nodos a su izquierda y el nodo n no tiene ninguno a su derecha), podemos simplificar la expresión de AT para estos dos jugadores como se muestra a continuación

$$AT_1 = \frac{1}{n}v(N) - \frac{1}{n}(v(N \setminus \{1\}) - (n-1)v(\{1\})),$$

$$AT_n = \frac{1}{n}v(N) - \frac{1}{n}(v(N \setminus \{n\}) - (n-1)v(\{n\})).$$

Notamos que para los dos jugadores terminales, el término de corrección de la solución igualitaria puede ser negativo si las asignaciones individuales de los nodos 1 y n no son muy grandes. En un grafo lineal, si la contribución marginal de un jugador terminal a la gran coalición no es muy grande y el valor que se puede garantizar por sí mismo es pequeño, entonces la solución AT proporcionará un reparto en el que recibe un valor por debajo de la media, i.e, inferior a $v(N)/n$.

En la Tabla 1.4 mostramos una comparativa de los axiomas que satisfacen las soluciones mencionadas para juegos de comunicación.

1.3. Juegos con estructura de permiso

Previamente, estudiamos las restricciones en la comunicación, donde solo los jugadores que estaban conectados mediante un enlace del grafo podían cooperar. En esta sección, estudiaremos las restricciones en la cooperación surgidas de las jerarquías. Un modelo central en este contexto son los juegos con estructura de permiso.

En un juego TU, no hay restricciones en las posibilidades de cooperación de los jugadores, i.e, cada coalición es factible o admisible y puede generar valor. Los juegos con estructura de permiso describen situaciones en las que los jugadores en un juego TU forman parte de una organización jerárquica que está representada por un grafo dirigido (estructura de permiso), de forma que los jugadores necesitan

Propiedades	Valor de Myerson	AT	Ψ^e	Ψ^u	Ψ^l
Eficiencia entre componentes	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus
Justicia entre componentes	—	\oplus	—	—	—
Justicia	\oplus	—	—	—	—
Estabilidad de Myerson	—	—	—	—	—
Equivalencia superior	—	—	—	\oplus	—
Equivalencia inferior	—	—	—	—	\oplus
Pérdida igualitaria	—	—	\oplus	—	—
Selección en el <i>core</i>	—	—	—	—	—

Tabla 1.4: Comparación de las propiedades que satisfacen las soluciones para juegos de comunicación.

el permiso de otros agentes para poder cooperar. Se pueden hacer diferentes enfoques sobre cómo la estructura de permiso afecta a las posibilidades de cooperación. En el enfoque conjuntivo, como se introduce en [Gilles et al. \(1992\)](#) y [van den Brink and Gilles \(1996\)](#), se asume que cada agente tiene el permiso de *todos* sus predecesores antes de cooperar. Alternativamente, en el enfoque disjuntivo ([van den Brink, 1997](#)), se asume que cada jugador necesita el permiso de *al menos uno* de sus predecesores antes de cooperar con otros jugadores dentro de una coalición.

Para tener en cuenta las limitaciones en la cooperación, para cada juego con una estructura de permiso se define un juego modificado que asigna a cada coalición el valor de la mayor subcoalición admisible del juego original. Los enfoques conjuntivo y disjuntivo dan lugar a diferentes juegos modificados. Además, si se aplican soluciones clásicas de los juegos TU a los juegos modificados obtenemos soluciones para juegos con estructura de permiso. Por ejemplo, aplicando el valor de Shapley a los dos juegos restringidos mencionados previamente, obtenemos dos soluciones diferentes dentro de una estructura de permiso: los valores de permiso conjuntivos y disjuntivos de Shapley.

Formalmente, una estructura de permiso es un grafo dirigido (digrafo) sobre N , (N, D) . De ahora en adelante asumiremos que el digrafo es irreflexivo, i.e, $(i : i) \notin D$, para todo $i \in N$. Denotaremos por \mathcal{D}^N a la colección de todos los digrafos irreflexivos sobre N . Además, los subordinados o sucesores de i en D los denotaremos por $Sub_D(i) := \{j \in N : (i, j) \in D\}$ y al conjunto de sus predecesores por $Pre_D(i) := \{j \in N : (j, i) \in D\}$. Nos referiremos a los nodos superiores (i.e, sin predecesores) mediante el conjunto $TOP(D) = \{i \in N : Pre_D(i) = \emptyset\}$, siguiendo la notación en [van den Brink et al. \(2007\)](#).

Definición 44. Un juego con estructura de permiso es una tripla (N, v, D) , donde N es un conjunto finito de jugadores, $v \in G^N$ es un juego cooperativo y $D \in \mathcal{D}^N$ es una estructura de permiso sobre N .

La colección de todos los juegos con estructura de permiso sobre un conjunto finito de jugadores N es la colección $G^N \times \mathcal{D}^N$.

Presentamos ahora los dos principales enfoques en las posibilidades de cooperación de los jugadores para los juegos con estructura de permiso: el enfoque conjuntivo y el disjuntivo.

En el enfoque conjuntivo, se asume que un jugador necesita permiso de *todos* sus predecesores para cooperar con otros jugadores. Así, una coalición es factible si y solo si para cada jugador en la coalición, todos sus predecesores también están en dicha coalición. Esto nos lleva a introducir una clase de coaliciones capaces de actuar sin permiso de jugadores externos (fuera de esa coalición).

Definición 45. Sea $D \in \mathcal{D}^N$ una estructura de permiso sobre N . La coalición $E \subseteq N$ es autónoma en D si $Pre_D(i) \subseteq E$, para todo $i \in E$.

Así, para una estructura de permiso D , el conjunto de las coaliciones conjuntivas factibles está dado por la colección de todas las coaliciones autónomas, que denotaremos por Φ_D^c . Formalmente,

$$\Phi_D^c = \{E \subseteq N : Pre_D(i) \subseteq E, \forall i \in E\}.$$

De acuerdo al enfoque conjuntivo, las coaliciones autónomas son, esencialmente, las únicas coaliciones capaces de generar valor dentro de un juego con estructura de permiso.

Si (N, v, D) es un juego con estructura de permiso, podemos interpretar la situación como sigue. Esencialmente, podemos asociar $v \in G^N$ con las posibilidades económicas abiertas a cada coalición en N . Así, $v(E)$ representa la cantidad de utilidad que la coalición $E \subseteq N$ obtendría normalmente si no fuese por la estructura de permiso impuesta en el juego.

A continuación, en base al enfoque conjuntivo, transformaremos un juego con estructura de permiso en un juego TU, que describe todas las posibilidades abiertas a los jugadores dentro de la estructura de

permiso D , dados sus pagos en el juego v . El juego TU resultante se denomina la restricción conjuntiva de v en la estructura de permiso D .

Con este propósito, presentamos la siguiente colección de juegos TU para una estructura de permiso arbitraria $D \in \mathcal{D}^N$:

$$G(N, D) := \{v \in G^N : v(E) = v(\sigma^c(E)), \forall E \subseteq N\},$$

donde $\sigma^c(E) := \bigcup_{\{F \in \Phi_D^c : F \subseteq E\}} F$ es el conjunto autónomo más grande asociado a la coalición E . Desde el enfoque conjuntivo, se tiene que una coalición $E \subseteq N$ puede obtener, como máximo, el pago generado por $\sigma^c(E)$. Por tanto, el juego conjuntivo restringido es el juego que asigna a cada coalición, $E \subseteq N$, el valor de su mayor subconjunto conjuntivo factible.

La definición previa introduce una aplicación $r_{v,D}^c : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$, que asigna a cada coalición $E \subseteq N$ el valor del mayor subconjunto conjuntivo factible, i.e

$$r_{v,D}^c(E) = v(\sigma^c(E)), \quad \forall E \subseteq N.$$

La aplicación $r_{v,D}^c$ es la restricción conjuntiva de un juego v con una estructura de permiso D , y se define como la proyección de v sobre el conjunto $G(N, D)$ en el espacio vectorial real G^N .

Una solución para juegos con una estructura de permiso es una función, Ψ , que asigna una distribución de pagos $\Psi(v, D) \in \mathbb{R}^N$ a cada juego con una estructura de permiso (v, D) sobre N . El valor de permiso conjuntivo de Shapley, φ^c , es la solución que asigna a cada juego con una estructura de permiso, el valor de Shapley del juego conjuntivo restringido:

$$\varphi^c(v, D) = \varphi(r_{v,D}^c), \quad \forall (v, D) \in G^N \times \mathcal{D}^N.$$

Alternativamente al enfoque conjuntivo, podemos considerar el enfoque disjuntivo, donde se asume que un nodo no superior necesita permiso de *al menos* uno de sus predecesores. Así, una coalición es factible si y solo si para cada jugador en la coalición (excepto el jugador superior), tiene al menos uno de sus predecesores en la coalición. Por tanto, considerando la estructura de permiso D , el conjunto de coaliciones disjuntivas factibles está dado por:

$$\Phi_D^d = \{E \subseteq N : Pre_D(i) \cap E \neq \emptyset \quad \forall i \in E \setminus TOP(D)\}.$$

De forma análoga al enfoque conjuntivo, el juego disjuntivo restringido del juego con estructura de permiso (v, D) es el juego $r_{v,D}^d$, que asigna a cada coalición $E \subseteq N$, el valor del mayor subconjunto factible disjuntivo.

$$r_{v,D}^d(E) = v(\sigma^d(E)), \quad \forall E \subseteq N,$$

donde $\sigma^d(E) = \bigcup_{\{F \in \Phi_D^d : F \subseteq E\}} F$ es el mayor conjunto disjuntivo factible de E en Φ_D^d .

El valor de permiso disjuntivo de Shapley, φ^d , es la solución que asigna a cada juego con una estructura de permiso, el valor de Shapley del juego disjuntivo restringido:

$$\varphi^d(v, D) = \varphi(r_{v,D}^d), \quad \forall (v, D) \in G^N \times \mathcal{D}^N.$$

A continuación, mostraremos los conceptos previamente mencionados empleando el ejemplo de las empresas de transporte a lo largo de dos autopistas.

Ejemplo: Ilustración de los conceptos de solución (continuación)

El ejemplo de las tres empresas de transporte y las autopistas induce una estructura de permiso natural, pues recordemos que los jugadores A y B necesitan el *permiso* del jugador C para generar beneficios. Dicho de otro modo, el jugador C es el superior de los jugadores A y B (los jugadores A y B solo tienen un superior y es el mismo). Esto se ilustra en el grafo de la Figura 1.5.

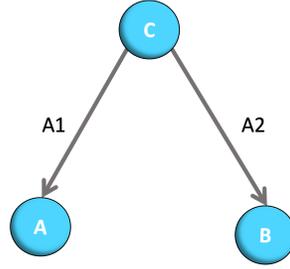


Figura 1.5: Representación de la estructura de permiso inducida en el problema de las empresas de transporte.

Calcularemos los valores de permiso conjuntivo y disjuntivo para este ejemplo.

Tenemos que $N = \{A, B, C\}$ y $g = \{(C : A), (C : B)\}$. Como los jugadores A y B tienen el mismo superior en común (y solo hay un superior), el conjunto de coaliciones factibles conjuntivas y disjuntivas será el mismo, pues en este caso es equivalente que en una coalición estén, para cada jugador de la coalición, todos sus predecesores, a que tenga al menos uno. Por tanto, las coaliciones factibles conjuntivas (disjuntivas) son $\{C\}$, $\{A, C\}$, $\{B, C\}$ y $\{A, B, C\}$.

$$\Phi_D^c = \{\{C\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \{A, B, C\}\}.$$

Ahora, para calcular la función característica de la restricción conjuntiva del juego, necesitamos obtener, para cada coalición contenida en N , el mayor subconjunto conjuntivo factible contenido en dicha coalición.

$$\{A\} \rightarrow \sigma^c(A) = \emptyset \quad [\{A\} \notin \Phi_D^c] \implies r_{v,D}^c(A) = v(\emptyset) = 0.$$

$$\{B\} \rightarrow \sigma^c(B) = \emptyset \quad [\{B\} \notin \Phi_D^c] \implies r_{v,D}^c(B) = v(\emptyset) = 0.$$

$$\{C\} \rightarrow \sigma^c(C) = \{C\} \quad [\{C\} \in \Phi_D^c] \implies r_{v,D}^c(C) = v(C) = 350.$$

$$\{A, B\} \rightarrow \sigma^c(A, B) = \emptyset \quad [\{A, B\} \notin \Phi_D^c] \implies r_{v,D}^c(A, B) = v(\emptyset) = 0.$$

$$\{A, C\} \rightarrow \sigma^c(A, C) = \{A, C\} \quad [\{A, C\} \in \Phi_D^c] \implies r_{v,D}^c(A, C) = v(A, C) = 700.$$

$$\{B, C\} \rightarrow \sigma^c(B, C) = \{B, C\} \quad [\{B, C\} \in \Phi_D^c] \implies r_{v,D}^c(B, C) = v(B, C) = 775.$$

$$\{A, B, C\} \rightarrow \sigma^c(A, B, C) = \{A, B, C\} \quad [(\{A, B, C\}) \in \Phi_D^c] \implies r_{v,D}^c(A, B, C) = v(A, B, C) = 775.$$

Ahora, para calcular el valor de permiso conjuntivo (disjuntivo) se aplicaría el valor de Shapley al juego conjuntivo (disjuntivo) restringido, que tiene como función característica $r_{v,D}^c = [0, 0, 350, 0, 700, 775, 775]$. En este caso, por las características de nuestro juego, la función característica coincide con el juego original, por lo que, al igual que sucedía con el valor de Myerson, el valor de Shapley del juego restringido coincide con el valor de Shapley del juego original.

Para ilustrar un caso donde los valores de permiso conjuntivo y disjuntivo asignan repartos diferentes, consideraremos el siguiente ejemplo de [van den Brink \(2017\)](#).

Ejemplo: Estructura de permiso

Consideremos el juego con estructura de permiso (v, D) en $N = \{1, 2, 3, 4\}$ dado por $v(E) = 1$ si $4 \in E$, $v(E) = 0$ si $4 \notin E$ y $D = \{(1 : 2), (1 : 3), (2 : 4), (3 : 4)\}$ (ver Figura 1.6). Las coaliciones factibles conjuntivas son $\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$ y $\{1, 2, 3, 4\}$. Adicionalmente, las coaliciones disjuntivas son $\{1, 2, 4\}$ y $\{1, 3, 4\}$ (fijarse que cada coalición conjuntiva factible es también factible desde el punto de vista disyuntivo, i.e., $\Phi_D^c \subseteq \Phi_D^d$ para todo $D \in D^N$).

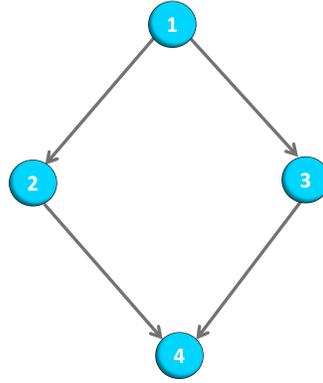


Figura 1.6: Estructura de permiso D para este ejemplo.

La restricción conjuntiva está dada por $r_{v,D}^c(E) = 1$ si $E = \{1, 2, 3, 4\}$ y $r_{v,D}^c(E) = 0$ en otro caso. Así, el valor de Shapley viene dado por $\varphi^c(v, D) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. La restricción disjuntiva está dada por $r_{v,D}^d(E) = 1$ si $E \in \{\{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ y $r_{v,D}^d(E) = 0$ en otro caso. De este modo, el valor de Shapley resulta en $\varphi^d(v, D) = (\frac{5}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{5}{12})$.

En este ejemplo, si no hay ninguna restricción y de acuerdo con el valor de Shapley en el juego no restringido v , el jugador 4 recibe el pago completo de 1, mientras que el resto de jugadores reciben cero (pues $v(E) = 1$ si $4 \in E$ y $v(E) = 0$ si $4 \notin E$, i.e. los jugadores 1, 2 y 3 son jugadores nulos, no aportan nada a la coalición a la que se suman. Como el valor de Shapley verifica la propiedad de jugador nulo, el pago que reciben estos jugadores es cero). Sin embargo, en el enfoque conjuntivo, los otros tres jugadores restantes son necesarios para hacer al jugador 4 activo y, por tanto, el juego restringido se convierte en el juego de unanimidad de la gran coalición N . Además, el valor de permiso conjuntivo reparte el pago de forma equitativa sobre los cuatro jugadores. En el enfoque disjuntivo, los jugadores 2 y 3 no son necesarios para hacer activo al jugador 4 de forma conjunta, pero al menos uno de ellos sí es preciso. Esto último se refleja en los pagos dados por el valor de permiso disjuntivo, donde los jugadores reciben $1/5$ de los pagos dados a los jugadores 1 y 4.

¿Cuál de los dos enfoques es más adecuado? Depende de la aplicación que se considere.

Notar que si tenemos un grafo lineal, los valores de permiso conjuntivo y disjuntivo coinciden, pues para cualquier jugador no superior en un grafo lineal, es equivalente tener todos los predecesores en la coalición a tener al menos a uno de ellos y, por tanto, los conjuntos de coaliciones conjuntivas factibles y disjuntivas factibles coinciden. El digrafo D correspondiente a la estructura de permiso de izquierda a derecha en un grafo lineal es $D = \{(i : i + 1) : i = 1, \dots, n - 1\}$ y el juego conjuntivo (o disjuntivo) restringido de v en D está dado por $r_{v,D}(E) = v(\{i \in E : \{1, \dots, i - 1\} \subseteq E\})$ para todo $E \subseteq N$.

Ahora trataremos algunas propiedades para soluciones en juegos con una estructura de permiso. Como en [van den Brink \(2017\)](#) únicamente se centran en el valor de Shapley, nos referiremos a los valores de permiso conjuntivos y disjuntivos de Shapley simplemente como los valores de permiso conjuntivos y disjuntivos. Previamente, introduciremos algunas definiciones.

Definición 46. El jugador $i \in N$ es no esencial en el juego con estructura de permiso (v, D) si i y todos sus subordinados son jugadores nulos en el juego v , i.e. $v(E) = v(E \setminus \{j\})$ para todo $E \subseteq N$ y $j \in \{i\} \cup \text{Sub}_D(i)$.

Definición 47. El jugador i es necesario en el juego v si $v(E) = 0$ para todo $E \subseteq N \setminus \{i\}$.

A continuación, presentamos los axiomas que caracterizan a los valores de Shapley de los correspondientes juegos conjuntivo y disjuntivo restringidos. Las propiedades de eficiencia y aditividad son

generalizaciones de los axiomas para juegos TU. La propiedad del jugador no esencial requiere que este tipo de jugadores reciban un pago nulo (este axioma es análogo a la propiedad de jugador nulo en juegos TU), mientras que el axioma del jugador necesario requiere que los jugadores necesarios ganen, como mínimo, tanto como cualquier otro jugador si el juego es monótono.

- Eficiencia. Para cada $v \in G^N$ y $D \in \mathcal{D}^N$, se tiene que $\sum_{i \in N} \Psi_i(v, D) = v(N)$.
- Aditividad. Para cada $v \in G^N$ y $D \in \mathcal{D}^N$, se tiene que $\Psi(v + w, D) = \Psi(v, D) + \Psi(w, D)$.
- Propiedad del jugador no esencial. Para cada $v \in G^N$ y $D \in \mathcal{D}^N$, si $i \in N$ es un jugador no esencial en (v, D) , entonces $\Psi_i(v, D) = 0$.
- Propiedad del jugador necesario. Para cada $v \in G^N$ monótono y $D \in \mathcal{D}^N$, si $i \in N$ es un jugador necesario en (v, D) , entonces $\Psi_i(v, D) \geq \Psi_j(v, D)$, para todo $j \in N$.

Ambos valores de permiso satisfacen los cuatro axiomas. Por tanto, para encontrar axiomatizaciones que caractericen, i.e, diferencien ambas soluciones, necesitamos introducir axiomas adicionales.

Para obtener una axiomatización del valor de permiso conjuntivo, introducimos el axioma de monotonía estructural, que establece que en juegos monótonos, los jugadores ganan, como mínimo, tanto como sus sucesores.

- Monotonía estructural. Para cada $v \in G^N$ monótono y $D \in \mathcal{D}^N$, si $j \in \text{Sub}_D(i)$, entonces $\Psi_i(v, D) \geq \Psi_j(v, D)$.

El valor de permiso disjuntivo no satisface el axioma de monotonía estructural. Esto lo vemos en el ejemplo de [van den Brink \(2017\)](#), en el cual, con el valor de permiso disjuntivo, el jugador 2 gana $\frac{1}{12}$, mientras que el jugador 4 gana $5/12$. Es decir, el jugador 2 recibe una cantidad estrictamente menor que la de su sucesor, por lo que no se satisface la condición dada por la monotonía estructural. Lo que sí satisface el valor de permiso disjuntivo es una versión más débil de esta propiedad, llamada monotonía estructural débil. Antes de introducir este axioma, definiremos el concepto de dominancia completa.

Definición 48. Un jugador $i \in N$ domina completamente al jugador $j \in N$ si todos los caminos de permiso dirigidos desde el jugador superior i_0 al jugador j contienen al jugador i . Denotamos al conjunto de jugadores que el jugador i domina completamente por $\overline{\text{Sub}}_D(i)$, i.e,

$$\overline{\text{Sub}}_D(i) = \{j \in \text{Sub}_D(i) : i \text{ pertenece a cada camino dirigido desde } i_0 \text{ hasta } j\}.$$

Definimos también el conjunto de predecesores dominantes $\overline{\text{Pre}}_D(i) = \{j \in \text{Pre}_D(i) : i \in \overline{\text{Sub}}_D(j)\}$.

La monotonía estructural débil requiere que un jugador gane, como mínimo, tanto como cada uno de sus subordinados completos.

- Monotonía estructural débil. Para cada juego $v \in G^N$ monótono y $D \in \mathcal{D}^N$, si $i \in N$ y $j \in \overline{\text{Sub}}_D(i)$, entonces $\Psi_i(v, D) \geq \Psi_j(v, D)$.

Además, el valor de permiso disjuntivo satisface la propiedad de justicia disjuntiva, la cual establece que eliminar el arco entre dos jugadores h y $j \in \text{Sub}_D(h)$ (con $|\text{Pre}_D(j)| \geq 2$) cambia los pagos de los jugadores h y j en la misma cantidad. Además, los pagos de todos los jugadores i que dominan completamente al jugador h también cambian en esta misma cantidad. Para $D \in \mathcal{D}^N$, $h \in N$ y $j \in \text{Sub}_D(h)$, denotamos la estructura de permiso que queda después de haber eliminado el arco entre h y j como $D_{-(h:j)} = D \setminus \{(h : j)\}$.

- Justicia disjuntiva. Para cada $v \in G^N$ y $D \in \mathcal{D}^N$, si $h \in N$ y $j \in \text{Sub}_D(h)$ (con $|\text{Pre}_D(j)| \geq 2$), entonces $\Psi_j(v, D) - \Psi_j(v, D_{-(h:j)}) = \Psi_i(v, D) - \Psi_i(v, D_{-(h:j)})$, para todo $i \in \{h\} \cup \overline{\text{Pre}_D(h)}$.

Se puede comprobar, en el ejemplo de [van den Brink \(2017\)](#), que el valor de permiso conjuntivo no satisface la justicia disjuntiva. No obstante, sí verifica una versión alternativa del axioma de justicia, llamada justicia conjuntiva, que esencialmente afirma que suprimir el enlace entre dos jugadores h y $j \in \text{Sub}_D(h)$ (con $|\text{Pre}_D(j)| \geq 2$) cambia los pagos del jugador j y de cualquier otro predecesor $g \in \text{Pre}_D(j) \setminus \{h\}$ en la misma cantidad. Además, los pagos de todos los jugadores que dominan completamente a cualquier otro predecesor g también varían en la misma cantidad.

- Justicia conjuntiva. Para cada $v \in G^N$ y $D \in \mathcal{D}^N$, si $h, j, g \in N$ son tales que $h \neq g$ y $j \in \text{Sub}_D(h) \cap \text{Sub}_D(g)$, entonces $\Psi_j(v, D) - \Psi_j(v, D_{-(h:j)}) = \Psi_i(v, D) - \Psi_i(v, D_{-(h:j)})$, para todo $i \in \{g\} \cup \overline{\text{Pre}_D(g)}$.

Los axiomas presentados caracterizan los dos valores de permiso (de Shapley) para juegos con una estructura de permiso jerárquica.

Teorema 49. *En la clase de los juegos con estructura de permiso jerárquica se cumplen dos axiomatizaciones.*

(i) ([van den Brink, 1997](#)) *Una solución f es igual al valor de permiso disjuntivo φ^d si y solo si satisface eficiencia, aditividad, la propiedad del jugador no esencial, la propiedad del jugador necesario, la monotonía estructural débil y la justicia disjuntiva.*

(ii) ([van den Brink, 1999](#)) *Una solución f es igual al valor de permiso conjuntivo φ^c si y solo si satisface eficiencia, aditividad, la propiedad del jugador no esencial, la propiedad del jugador necesario, la monotonía estructural débil y la justicia conjuntiva.*

El teorema previo nos da axiomatizaciones comparables de los valores de permiso conjuntivos y disjuntivos que difieren solo en un axioma. En particular, un axioma que refleja de algún modo un tratamiento equitativo con respecto a ciertos jugadores a la hora de eliminar los arcos que los unen.

En juegos monótonos, el efecto en el pago de un sucesor del arco eliminado depende del enfoque conjuntivo o disjuntivo que tomemos. Según el valor de permiso conjuntivo, el pago de un sucesor no decrece, pero según el enfoque disjuntivo no se incrementa. Esto proviene de una diferencia fundamental entre ambos enfoques, donde eliminar un arco lleva a un mayor número de coaliciones factibles en el enfoque conjuntivo, pero a menos coaliciones factibles en el enfoque disjuntivo. En el enfoque conjuntivo, eliminar un arco significa que el sucesor de este arco ya no necesita el permiso de ese predecesor. En el enfoque disjuntivo, eliminar un enlace significa que el sucesor ya no puede usar el permiso de este predecesor, por lo que necesita el permiso de al menos uno de sus otros predecesores, que también era suficiente antes de eliminar el arco. En otras palabras, en el enfoque disjuntivo, añadir un arco crea posibilidades, mientras que desde el punto de vista conjuntivo, añadir un arco crea restricciones.

Para finalizar esta sección, destacamos que [van den Brink et al. \(2012\)](#) desarrollaron una adaptación de la solución AT para juegos con una estructura de permiso, donde la estructura de permiso es la de un árbol orientado. Esto significa que un jugador i está en la parte superior de la estructura de permiso (i.e, es el nodo raíz) y para cualquier otro jugador j , con $j \neq i$, hay un camino directo desde i hasta j . Además, [van den Brink et al. \(2012\)](#) proporcionan dos axiomatizaciones para este nuevo valor y lo comparan con el valor de permiso conjuntivo.

En la Tabla 1.5 se puede ver una comparativa de las propiedades que satisfacen los valores de permiso conjuntivo y disjuntivo.

Propiedades	Permiso conjuntivo	Permiso disjuntivo
Eficiencia	\oplus	\oplus
Aditividad	\oplus	\oplus
Jugador no esencial	\oplus	\oplus
Jugador necesario	\oplus	\oplus
Monotonía estructural	\oplus	—
Monotonía estructural débil	\oplus	\oplus
Justicia conjuntiva	\oplus	—
Justicia disjuntiva	—	\oplus

Tabla 1.5: Comparación de las propiedades que satisfacen las soluciones para juegos con estructura de permiso.

1.3.1. Juegos de enlaces

Dado que en los juegos cooperativos tratados en la referencia principal de este trabajo, [Wu et al. \(2024\)](#), cobran especial importancia los enlaces de un grafo, terminaremos este capítulo introduciendo juegos donde los jugadores son los enlaces del grafo y no los nodos. Este tipo de juegos no han sido muy estudiados en la literatura, y normalmente son un paso intermedio para definir una solución que asigne un reparto a los nodos.

[Meessen \(1988\)](#) introdujo un modelo para juegos de comunicación basado en la importancia de los enlaces en una red de comunicación. En su tesis, definió el juego de enlaces $(g, (r/g)_v)$, asociado a un juego de comunicación (v, g) , como

$$(r/g)_v(g') = \sum_{C \in N/g'} v(C), \quad \forall g' \subseteq g. \quad (1.5)$$

En este modelo, el conjunto de jugadores se corresponde con el conjunto de enlaces y el valor obtenido por una coalición de enlaces, g' , es la suma de los valores de las coaliciones de nodos que se corresponden con las componentes conexas maximales de g' . Notemos que $(r/g)_v(g') = (v/g')(N)$ para todo $g' \subseteq g$. Por tanto, el valor de una coalición g' de enlaces es precisamente el valor de la gran coalición N en el juego restringido v/g' si la red de comunicación g' se forma. Si g' no está conectado, la gran coalición N se particionaría en diversas componentes y, como no hay comunicación entre diferentes componentes, N recibiría la suma de pagos obtenida por cada componente en N/g' .

Si tenemos un juego con una estructura de permiso, [Gavilán et al. \(2022\)](#) crearon un juego de enlaces para un grafo dirigido. Para ello, definen primero el juego dirigido restringido (N, v^D) , en el

cual el valor de una coalición se obtiene por el principio de inclusión-exclusión aplicado a los valores de los jugadores conectados por los caminos maximales en esa coalición (i.e, no hay una secuencia de nodos más larga que conecte esos dos jugadores para la coalición dada). Para la formulación específica del juego (N, v^D) y del juego de enlaces asociado nos remitimos a [Gavilán et al. \(2022\)](#).

Por último, destacamos el trabajo de [Saavedra-Nieves and Algaba \(2024\)](#), donde se calcula el valor de Shapley de dos juegos de enlaces para obtener una medida de centralidad de los enlaces de un grafo, que permita hacer un ranking de las conexiones más importantes entre los jugadores (que en este caso son los nodos). Nos centraremos en uno de los juegos introducidos en esta referencia, en concreto, nos centramos en el juego de conectividad TU aditivo ponderado, (N, v^{awconn}) , con respecto a (N, g) . Para formular este juego, se define una función no negativa f , dependiente de la coalición S , para cuantificar la efectividad de cualquier coalición en el grafo (N, g) de acuerdo a la influencia que tengan los jugadores en él, que vendrá representada por un conjunto de pesos sobre N , $\mathcal{I} = \{w_j\}_{j \in N}$, con $w_j \geq 0$, y la fuerza relacional entre ellos en la red de comunicación vendrá determinada por un sistema de pesos sobre los enlaces g , $\mathcal{R} = \{k_{(l:h)}\}_{(l:h) \in g}$, con $k_{(l:h)} \geq 0$. La función característica que emplean en [Saavedra-Nieves and Algaba \(2024\)](#) es, para cada coalición $S \subseteq N$ en el grafo (N, g) ,

$$f(S, \mathcal{I}, \mathcal{R}) = \begin{cases} \left(\sum_{j \in S} w_j \right) \cdot \max_{(l:h) \in g(S)} k_{(l:h)} & \text{si } |S| > 1, \\ w_i & \text{si } S = \{i\}, \text{ con } i \in N. \end{cases}$$

Esta aplicación específica, para cada posible coalición $S \subseteq N$, la suma de los pesos de los miembros de S multiplicados por el peso máximo sobre el conjunto de enlaces conectando el subgrafo inducido por la coalición S .

Por tanto, dada la situación de comunicación (N, f, g) , el juego de conectividad aditivo ponderado (N, v^{awconn}) está dado, para cada $S \subseteq N$, por

$$v^{awconn}(S) = \sum_{T \in S/g} f(T, \mathcal{I}, \mathcal{R}). \quad (1.6)$$

Observamos que el juego anterior asigna a cada coalición conexa S el valor de su efectividad, dada por la función f considerada. En el caso de que la coalición S no sea conexa, asigna la efectividad agregada de todas las componentes conexas maximales en el subgrafo inducido por S . El juego de enlaces asociado a (N, v^{awconn}) , que denotaremos por $(g, (r/g)_{v^{awconn}})$, se obtiene aplicando la expresión (1.5) con la función característica dada por (1.6).

Si ahora aplicamos las soluciones clásicas de teoría de juegos cooperativos con utilidad transferible, como el nucleolus, el τ -valor o el valor de Shapley, a los juegos de enlaces mencionados previamente, obtendremos repartos para los enlaces del grafo, donde ahora los enlaces son los jugadores. Caracterizar axiomáticamente y desarrollar soluciones específicas para este tipo de juegos es una cuestión interesante a investigar de cara al futuro, que puede ofrecer perspectivas nuevas tanto para aquellos problemas donde los enlaces sean más importantes que los nodos, como para aquellas situaciones donde los nodos sean los agentes pero queramos estudiar más en profundidad las conexiones que los unen.

Capítulo 2

Problema de asignación de peajes en una autopista

En este capítulo analizaremos en detalle el problema recogido en [Wu et al. \(2024\)](#) sobre cómo repartir el peaje total recolectado en una autopista entre los segmentos que dividen la carretera. En la primera sección, trataremos brevemente los modelos que sirvieron de base para la creación de las soluciones propuestas. En concreto, explicaremos el problema del río contaminado ([Ni and Wang, 2007](#)) y el juego de la autopista ([Dong et al., 2012a](#)). En la segunda sección expondremos el problema de asignación de peajes en una autopista de [Wu et al. \(2024\)](#), junto con tres posibles soluciones que se corresponderán con el valor de Shapley de los correspondientes juegos asociados. Además, también se estudiarán las propiedades de cada una de las soluciones.

2.1. Problemas relacionados

2.1.1. Problema del río contaminado

Este problema, tratado en [Ni and Wang \(2007\)](#), plantea cómo repartir los costes de limpieza de un río entre los agentes ubicados a lo largo de él. Para responder a esta cuestión, se recurre a las dos principales doctrinas para resolver disputas internacionales: la teoría de la absoluta soberanía territorial (o ATS, de *Absolute Territorial Sovereignty*) y la teoría de la integridad territorial ilimitada (o UTI, de *Unlimited Territorial Integrity*). Aplicando estas doctrinas, [Ni and Wang \(2007\)](#) proponen dos métodos: el método de responsabilidad local compartida (o LRS, de *Local Responsibility Sharing*) y el método del reparto superior igualitario (o UES, de *Upstream Equal Sharing*), que se corresponderán con los valores de Shapley de los juegos de costes inducidos por las teorías ATS y UTI.

A continuación, enunciamos formalmente el problema.

Consideremos un río dividido en n segmentos indexados en un determinado orden $i = 1, 2, \dots, n$, siguiendo la dirección río arriba-río abajo. Sea $N = \{1, \dots, n\}$ un conjunto finito de agentes (por ejemplo, pares casa-firma) localizados a lo largo del río, cada uno de los cuales está ubicado en uno de los segmentos siguiendo el orden especificado previamente. Asumimos que cada firma genera una cierta cantidad de contaminantes de algún tipo que todas las casas quieren evitar y que, en cada segmento, la firma i está localizada inmediatamente antes de la casa i . En cada segmento i ($i = 1, 2, \dots, n$), una autoridad medioambiental fija un estándar para el nivel de polución que obliga al agente i (par firma-casa) a gastar c_i en limpiar los contaminantes del segmento i para que la calidad del flujo de agua satisfaga dichos estándares ambientales. Queremos encontrar métodos para repartir el coste total de limpieza del río $c_1 + \dots + c_n \in \mathbb{R}_+$ entre todos los pares casa-firma. Desde el punto de vista de la

responsabilidad, el problema de reparto del coste se puede ver como el problema de dividir el coste entre las n firmas, pues al fin y al cabo son las firmas las responsables de la contaminación del río. En la Figura 2.1 podemos ver una representación del problema, donde la flecha azul indica la dirección de la corriente (río arriba-río abajo). Denotamos $C = (c_1, \dots, c_n)$.



Figura 2.1: Representación del problema del río contaminado de Ni and Wang (2007).

De este modo, el problema del río contaminado es un par (N, C) , y una solución a este problema es un vector $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ tal que x asigna a cada problema (N, C) la solución $x(N, C)$.

La teoría ATS establece que un país tiene soberanía absoluta sobre el territorio y los recursos ubicados dentro de sus fronteras, mientras que la doctrina UTI afirma que un país no debería alterar las condiciones naturales de su propio territorio a costa de perjudicar a un país vecino. Sin embargo, en el problema del río contaminado, Ni and Wang (2007) interpretan estas teorías en términos de la *responsabilidad* que los agentes tienen a la hora de contaminar el río en función de su ubicación. En concreto, la doctrina ATS afirma que la población del segmento j tiene una soberanía absoluta de pedir a cualquier agente contaminador localizado en el segmento j que pague los costes para la depuración del agua del río. Es decir, bajo la teoría ATS, la responsabilidad de los costes de limpiar el río en el segmento j -ésimo deberían asignarse a los agentes contaminadores en ese segmento. Esta traslación de la teoría ATS se llama el principio de responsabilidad local (o LR, de *Local Responsibility*). Por otro lado, la versión de responsabilidad de la UTI extiende el alcance de las responsabilidades de un contaminador para la limpieza de contaminantes. En concreto, establece que la población ubicada en el segmento j tiene el derecho de exigir a los contaminadores en el segmento j , así como todos los contaminadores localizados río arriba, que asuman los costes de limpieza. Es decir, los agentes localizados río arriba deberían soportar algunas responsabilidades por los agentes localizados río abajo. Esta interpretación de la teoría UTI se llama responsabilidad río abajo (o DR, de *Downstream Responsibility*).

En base a los principios LR y DR mencionados previamente, Ni and Wang (2007) propusieron, respectivamente, los métodos de responsabilidad local compartida (o LRS) y el método del reparto igualitario río arriba (o UES), junto con las siguientes axiomatizaciones.

- Método de responsabilidad local compartida.

$$x_i^{LRS}(C) = c_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Esta solución asigna costes a los agentes en base a los costes asociados al segmento en el que están ubicados. Ni and Wang (2007) caracterizaron este método por los axiomas de aditividad, eficiencia y no coste ciego. Esta última propiedad establece que si un agente no contamina, entonces tampoco debería asumir ningún coste.

- Método del reparto igualitario río arriba.

$$x_i^{UES}(C) = \frac{1}{i}c_i + \frac{1}{i+1}c_{i+1} + \cdots + \frac{1}{n}c_n, \quad i = 1, \dots, n.$$

Esta solución asigna, para cada agente i , el coste local asociado a su propio segmento más los costes de los agentes ubicados río abajo. Ni and Wang (2007) caracterizaron este método por los axiomas de aditividad, eficiencia, independencia de costes río arriba y simetría río arriba. Esta última propiedad establece que todos los agentes ubicados río arriba tienen las mismas responsabilidades en un determinado coste de polución río abajo.

A continuación, definimos los correspondientes juegos asociados a cada uno de los métodos, basados en los principios LR y DR, respectivamente.

Sea $N = \{1, \dots, n\}$ un conjunto de firmas (o pares casa-firma). Supongamos que las n casas no cambian de ubicación independientemente de cómo las firmas se coaliguen. Sea $S \subseteq N$ una coalición entre las n firmas. Denotemos por $\min S$ al elemento más pequeño de S , i.e, a la firma localizada más río arriba en la coalición S .

Bajo el principio LR, cada miembro de S es responsable únicamente de los costes de limpieza de su propio segmento, y la responsabilidad total de la coalición S es simplemente la suma de todas las responsabilidades locales de sus miembros. Por tanto, para un vector de costes de polución $C \in \mathbb{R}_+^n$ dado, los costes totales de la coalición S se pueden escribir como:

$$v^C(S) = \sum_{i \in S} c_i. \quad (2.1)$$

Por otro lado, bajo el principio DR, cada miembro de S tiene responsabilidad no solo de los costes de polución de su propio segmento, sino también de los costes de todos los agentes localizados río abajo. Por tanto, el coste total de la coalición S debería ser:

$$w^C(S) = \sum_{i=\min S}^n c_i. \quad (2.2)$$

Asumimos que $v^C(\emptyset) = w^C(\emptyset) = 0$. Ni and Wang (2007) muestran que los repartos de costes relativos a los métodos LRS y UES coinciden, respectivamente, con los valores de Shapley de los juegos (N, v^C) y (N, w^C) y, además, pertenecen al núcleo de los correspondientes juegos.

Una generalización del problema del río contaminado es la que se trata en Dong et al. (2012b). El modelo de Dong et al. (2012b) difiere del de Ni and Wang (2007) en dos aspectos. En primer lugar, consideran un árbol más general que el árbol lineal de Ni and Wang (2007). En segundo lugar, proponen dos interpretaciones diferentes de la teoría UTI, y muestran que estas interpretaciones dan lugar a dos métodos de reparto de costes completamente distintos. En concreto, además de los métodos de la responsabilidad local compartida y del reparto igualitario río arriba propuestos en Ni and Wang (2007), Dong et al. (2012b) introducen una nueva solución: el reparto igualitario río abajo (o DES, de *Downstream Equal Sharing*), la cual asigna a cada agente el coste local asociado más el reparto equitativo de los costes río arriba. Dong et al. (2012b) argumentan que, cuando consideramos un determinado reparto de costes (responsabilidad), los agentes localizados río abajo deberían heredar cierta proporción de responsabilidad en el reparto de costes río arriba. Esto último se corresponde con una nueva lectura de la teoría UTI, llamada el principio de responsabilidad río arriba (o UR, de *Upstream Responsibility*). Este principio establece que un agente es responsable del coste de su propio segmento y parcialmente responsable de los costes de los segmentos superiores.

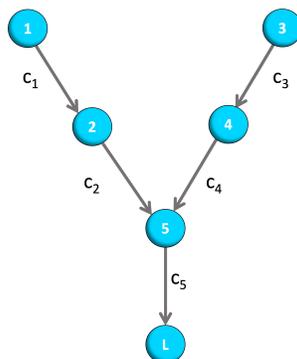


Figura 2.2: Representación estilizada del problema del río contaminado generalizado con 5 agentes.

En la caracterización de los tres métodos, hay dos axiomas que sobresalen. Uno de ellos es el de la aditividad, el cual se emplea en las tres caracterizaciones. La independencia de costes irrelevantes es un nuevo axioma introducido por [Dong et al. \(2012b\)](#) que satisfacen dos de las tres soluciones (UES y DES). Este axioma, fundamental en el modelo de [Dong et al. \(2012b\)](#), es un axioma de equidad, que dice que ningún agente es responsable por los costes que son irrelevantes¹ para él. Notamos que en el modelo de [Ni and Wang \(2007\)](#) todos los agentes son relevantes entre sí (pues al ser el árbol lineal, hay una única rama). Además, se tiene que las soluciones LRS y UES son extensiones de los dos métodos correspondientes en [Ni and Wang \(2007\)](#), pero el método DES está íntimamente relacionado con la solución para el problema del aeropuerto ([Littlechild and Owen, 1973](#)). De hecho, ambas soluciones coinciden si el árbol es lineal.

Por último, cabe resaltar que cada uno de los tres métodos es el valor de Shapley de un juego especial asociado con el problema. Los tres juegos son:

- Juego independiente (definido en (2.1)). Siguiendo la filosofía de la solución LRS, en este juego el coste de una coalición está dado por el coste total de todos los agentes en esa coalición.
- Juego orientado hacia arriba (definido en (2.2)). Basado en la solución UES, en este juego el coste de una coalición está dado por el coste total de todos los miembros de la coalición más todos los costes río abajo.
- Juego orientado hacia abajo. De acuerdo con el planteamiento de la solución DES, en este juego el coste de una coalición está dado por la suma del coste total de todos los jugadores de la coalición más todos los costes río arriba.

Se tiene que todos estos juegos son cóncavos y, por tanto, los repartos de costes proporcionados por estos tres métodos están en los núcleos de los correspondientes juegos.

2.1.2. Problema del peaje en una autopista

En [Dong et al. \(2012a\)](#) se plantea la cuestión de cómo implantar un sistema de tarifas en una autopista lineal, donde los agentes son los usuarios de dicha autopista (i.e, los vehículos). Las hipótesis que se hacen en este modelo son las siguientes.

Supongamos que tenemos una autopista dividida en segmentos por un número de entradas y salidas. En cada salida, se cobra un peaje a los vehículos que salen de la autopista. Los costes asociados a los distintos segmentos en los que se divide la carretera dependen de dos factores: la longitud de

¹Decimos que dos agentes son irrelevantes entre ellos si se localizan en dos ramas diferentes del árbol.

la sección y el volumen de tráfico en esa parte de la carretera. El objetivo es encontrar un método que satisfaga equilibrio de presupuesto, i.e, que asigne un peaje a cada vehículo de forma que el peaje total recolectado por todos los vehículos en todas las salidas cubra exactamente el coste total asociado a la autopista. También interesa repartir el coste a los usuarios de una forma equitativa y eficiente, de modo que tendría sentido que los vehículos más pesados (como camiones, autobuses...) asumiesen mayores costes, puesto que provocan un mayor desgaste a la carretera. El peaje uniforme que se suele emplear en la práctica es el que cobra en proporción a la longitud de carretera usada. No obstante, esto último genera un problema: puede haber subsidios cruzados tanto entre usuarios como entre secciones de carretera, i.e, hay usuarios a los que se les cobra especialmente alto y otros muy bajo, de modo que al final un grupo de usuarios financia los costes de tramos de carretera usados por otros vehículos. La solución a esto sería suponer que el coste no depende del volumen de tráfico en esa sección, con lo cual el problema se reduciría a cómo repartir un coste fijo entre todos los usuarios (Henriet and Moulin, 1996).

Formalmente, el problema se plantea como sigue. Consideremos una autopista lineal dividida en n secciones por un conjunto de entradas $E = \{1, \dots, n\}$ y un conjunto de salidas $N = \{1, \dots, n\}$. Asumimos que la salida i , con $i = 1, \dots, n-1$, está localizada entre la entrada i y la entrada $i+1$, pero que la salida n está ubicada después de la entrada n . Un ejemplo con tres entradas y salidas se muestra en la Figura 2.3.

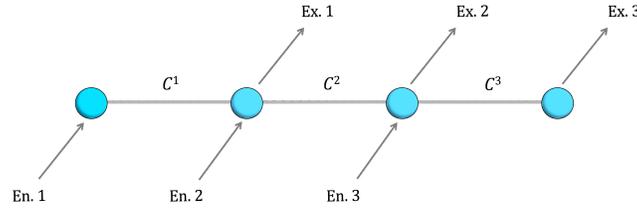


Figura 2.3: Modelo de autopista de Dong et al. (2012a).

Un agente es un par (i, j) , $i \leq j$, representando vehículos que entran en la entrada i y salen en la salida j . Por tanto, un agente es la unión de un tipo de usuarios (vehículos). Sea $V = \{(i, j) : i, j = 1, \dots, n, i \leq j\}$ el conjunto de todos los agentes. Suponemos que el tráfico es de una sola dirección, por ejemplo, de izquierda a derecha, como en la Figura 2.3. Sea x_{ij} , $i \leq j \in N$, la demanda del agente (i, j) , i.e, el número de vehículos que entran en la entrada i y salen en la salida j . Un vector de demandas x es, por tanto:

$$x = (x_{11}, \dots, x_{1n}, x_{22}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{(n-1)(n-1)}, x_{(n-1)n}, x_{nn}).$$

Sea $C^i(x)$, con $i \in N$, el coste de la sección i de la autopista (desde la entrada i hasta la salida i), que depende tanto de la longitud de la carretera como del volumen de vehículos, x , en esa parte de la autopista durante un cierto período de tiempo (por ejemplo, un año).

En cada salida, se cobra un peaje para cada vehículo. Sea y_{ij} la tarifa total cobrada al agente (i, j) . Para cada agente $(i, j) \in V$, denotemos por $K(i, j) = \{i, i+1, \dots, j\}$ el conjunto de segmentos de autopista usados por el agente (i, j) . El problema que queremos resolver es cómo fijar el peaje (equivalentemente, el precio unitario y_{ij}/x_{ij} por cada vehículo) en cada salida de forma que el coste total, $\sum_{i \in N} C^i(x)$, es igual al peaje total recolectado en todas las salidas, $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_{ij}$.

Formalmente, el juego del peaje en una autopista es una tripla (V, x, C) . Una solución al problema (V, x, C) es un vector

$$y = (y_{11}, \dots, y_{1n}, y_{22}, \dots, y_{2n}, \dots, y_{(n-1)(n-1)}, y_{(n-1)n}, y_{nn})$$

tal que:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_{ij} = \sum_{i=1}^n C^i(x)$$

Un método es una función y que asigna a cada problema (V, x, C) una solución $y(V, x, C)$.

La solución que proponen [Dong et al. \(2012a\)](#) (i.e, el método de tarificación) es:

$$y_{ij}(V, x, C) = \left[\sum_{l=i}^j \frac{C^l(\sum_{m=1}^l \sum_{k=l}^n x_{mk})}{\sum_{m=1}^l \sum_{k=l}^n x_{mk}} \right] x_{ij}. \quad (2.3)$$

En otras palabras, la fórmula (2.3) cobra a cada vehículo la suma del coste medio que incurre en cada sección de la autopista que atraviesa. Observar que la función de coste C la estamos poniendo como función del volumen de tráfico (número de vehículos) en dichas secciones.

Los axiomas que caracterizan a la solución anterior son los siguientes.

1. Test de independencia. Esta condición exige que el coste soportado por los vehículos viajando desde i hasta j no exceda el coste total de las secciones de carretera que usan.
2. Sin fusiones ni divisiones (a prueba de tránsito). Esta propiedad establece que ningún vehículo tiene incentivos para desviarse de su plan de ruta saliendo y volviendo a entrar en salidas y entradas intermedias. Sin esta propiedad, un método de tarificación induciría manipulaciones estratégicas por los usuarios de la carretera (vehículos) y generaría patrones de tráfico impredecibles.
3. Recuperación de costes. Este axioma garantiza que para una sección determinada entre dos salidas consecutivas, el peaje total recolectado (que puede ser en varias salidas distintas) de todos los vehículos que usan esa sección (asociado a esa parte de la carretera) debería cubrir (ser mayor igual) el coste de esa sección. Sin esta propiedad, un método de tarificación tendría que cobrar más a algunos vehículos de modo no proporcional a su uso de la carretera para mantener el equilibrio presupuestario de toda la autopista. Dicho en otras palabras, algunas secciones financiarían implícitamente el coste de otras secciones.

Además, en [Dong et al. \(2012a\)](#) se compara la solución (2.3) con otros dos métodos: el método del reparto del coste promedio y el método de reparto del coste promedio ponderado.

- Método del reparto del coste promedio

$$y_{ij}(V, x, C) = \left[\frac{\sum_{i=1}^n C^i(x)}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij}} \right] x_{ij}.$$

Esto es, independientemente del número de secciones que un vehículo haya usado, siempre se le cobra lo mismo (lo cual no es una solución justa). De hecho, esta solución viola tanto la condición del test de independencia como la de recuperación de costes.

- Método de reparto del coste promedio ponderado

$$y_{ij}(V, x, C) = \left[\frac{\sum_{i=1}^n C^i(x)}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n x_{ij} \cdot (j - i + 1)} \right] (j - i + 1) \cdot x_{ij}.$$

Cabe señalar que $(j - i + 1)$ representa el número de secciones que hay desde la entrada i hasta la salida j (cualesquiera que sean i y j). Por tanto, este método cobra de forma proporcional a las secciones usadas (esto es, cuantas más secciones usa un vehículo, mayor peaje tiene que pagar). Por

ejemplo, si usa dos o tres secciones tiene que pagar el doble o el triple que aquellos transportes que sólo usen una sección. No obstante, este método viola también la condición de recuperación de costes.

Ahora podemos relacionar el método de tarificación propuesto con el valor de Shapley.

Para cualquier coalición de agentes $S \subseteq V$, sea $K(S) = \cup_{(i,j) \in S} K(i,j)$ el conjunto de secciones usadas por los agentes en S . Definamos el siguiente juego (basta con dar la función característica c):

$$c(S) = \sum_{k \in K(S)} C^k, \quad S \subseteq V,$$

donde C^k son los costes asociados a la sección k , i.e, desde la entrada k hasta la salida k .

El valor de Shapley del juego c es:

$$\varphi_{ij}(c) = \sum_{S \subseteq V: (i,j) \in S} \frac{(|S| - 1)! (|V| - |S|)!}{|V|!} [c(S) - c(S \setminus \{i, j\})], \quad (i, j) \in V.$$

Por otro lado, si en un problema del peaje en una autopista suponemos que hay una unidad de tráfico por cada par entrada salida, i.e, $x_{mk} = 1, m \leq k = 1, \dots, n$, podemos ver que el método de tarificación y_{ij} en (2.3) da lugar a:

$$y_{ij}(V, x, C) = \sum_{l=i}^j \frac{C^l}{l(n-l+1)}, \quad (i, j) \in V. \quad (2.4)$$

Se tiene que el valor de Shapley del juego c coincide con (2.4).

La principal limitación del método propuesto en Dong et al. (2012a) es la linealidad de autopista. El siguiente paso sería caracterizar un método de tarifas que pueda lidiar con las externalidades de una red de tarificación de autopistas más general.

2.2. Problema de asignación de peajes en una autopista

En el problema del peaje en una autopista de Dong et al. (2012a) se estudia cómo fijar los peajes que soportan los costes de mantenimiento y construcción de la autopista entre los usuarios, mientras que el problema tratado en Wu et al. (2024) analiza cómo el peaje recolectado por los usuarios de la autopista se reparte entre sus distintos segmentos. Además, el modelo de Dong et al. (2012a) es un problema de costes, mientras que el problema de asignación de peajes es de beneficios. Aunque el problema de asignación de peajes en una autopista está íntimamente relacionado con el problema del peaje en una autopista, se puede ver igualmente como una extensión del problema del río contaminado. En concreto, este último se corresponde con el problema de asignación de peajes en una autopista si cada usuario solo hace uso de un segmento. En la Tabla 2.1 presentamos una comparativa entre los tres problemas mencionados.

2.2.1. Modelo y métodos

En esta sección introduciremos la notación del modelo de asignación de peajes en una autopista y explicaremos las diferentes soluciones propuestas.

Consideremos una autopista de peaje unidireccional (en un solo sentido) lineal que está dividida en n segmentos indexados en un orden dado $i = 1, 2, \dots, n$. Denotemos el conjunto de segmentos por

	Río contaminado	Peaje en una autopista	Asignación de peajes en una autopista
Agentes	Pares casa-firma, ubicados en los segmentos de un río	Usuarios de la autopista (vehículos)	Segmentos de la autopista
Tipo de juego	Asignación de costes	Asignación de costes	Reparto de beneficios
Función característica	Depende de los costes de limpieza del río	Depende de costes de construcción y mantenimiento	Depende del peaje recaudado por todos los usuarios de la autopista

Tabla 2.1: Diferencias entre el problema del río contaminado, el problema de peaje en una autopista y el problema de asignación de peajes en una autopista.

$N = \{1, 2, \dots, n\}$. Asumamos que la entrada del segmento $i \in N \setminus \{1\}$ está localizada en el mismo lugar que la salida del segmento $i - 1$, como se muestra en la Figura 2.4. Para $h < k$, denotaremos una secuencia de segmentos consecutivos por $(i_h, i_{h+1}, \dots, i_{k-1}, i_k)$, donde $i_{j+1} = i_j + 1$ para todo $j = h, \dots, k - 1$, de forma que $[i_h, i_k]$ será el camino desde i_h hasta i_k . Además, denotaremos el conjunto de segmentos localizados en el camino $[i_h, i_k]$ por $\mathcal{P}([i_h, i_k])$, i.e. $\mathcal{P}([i_h, i_k]) = \{i_h, \dots, i_k\}$. Un segmento aislado también se puede ver como un camino, a saber, $\mathcal{P}([i, i]) = \{i\}$. Denotaremos el peaje total recolectado de todos los usuarios que se incorporan en la entrada i y salen en la salida j como $t_{ij} \geq 0$. Una matriz T , $|N| \times |N|$ -dimensional no negativa es una matriz de peaje (de un solo sentido) si $t_{ij} = 0$ para cada $i > j$. Es decir, T es una matriz triangular superior. Destacamos que, al imponer esta condición, estamos recorriendo la autopista de izquierda a derecha, como se muestra en la Figura 2.4. Por ejemplo, $t_{23} \neq 0$ implicaría que nos incorporamos en la entrada 2 y salimos en la salida 3, mientras que t_{32} indicaría que entramos en la entrada 3 y salimos en la salida 2 (sentido derecha-izquierda). Denotamos la colección de todas las matrices de peaje $|N| \times |N|$ dimensionales por \mathcal{T}^N .

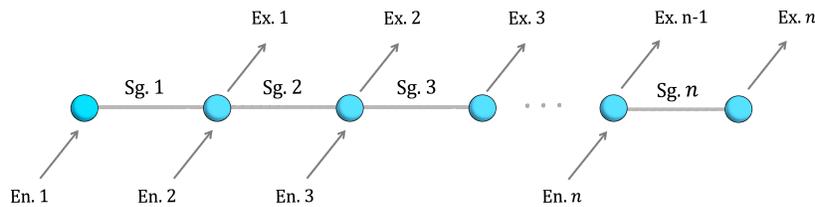


Figura 2.4: Modelo de asignación de peajes en una autopista.

Un problema de asignación de peajes en una autopista es un par (N, T) con $N = \{1, \dots, n\}$ y $T \in \mathcal{T}^N$. Notemos que los agentes en nuestro problema son los segmentos de la autopista y no los usuarios (o vehículos) que usan la autopista (como sucedía en el problema del peaje en una autopista). Además, la función característica en nuestro problema es una matriz en vez de un vector como en [Dong et al. \(2012a\)](#), pues en [Dong et al. \(2012a\)](#) se consideraba el coste de la sección i (desde la entrada i

hasta la salida i), mientras que nosotros estamos considerando un caso más general, donde el índice de la salida no tiene porqué coincidir con el índice de la entrada (i.e, $j > i$). Es por esto que los métodos van a estar basados en distancias recorridas o número de segmentos usados (coste variable) y no en el volumen de tráfico en cada sección de forma individual (que era el coste variable considerado en [Dong et al. \(2012a\)](#)).

A continuación, introducimos las definiciones de asignación de peaje y de un método de asignación de peaje.

Definición 50. Una asignación de peaje para un problema (N, T) es un vector no negativo $x \in \mathbb{R}_+^N$ donde cada coordenada $x_i \in \mathbb{R}_+$ asigna un reparto del peaje total para cada segmento $i \in N$.

Definición 51. Un método de asignación de peaje es una aplicación f que asigna un reparto de peaje, $f(N, T)$, a cada problema de asignación de peajes en una autopista (N, T) .

Como estamos considerando que el conjunto de segmentos N está fijo, podemos identificar un problema de asignación de peaje en una autopista, (N, T) , simplemente por la matriz de peajes T . Además, de aquí en adelante consideraremos que un usuario realiza un único viaje desde alguna entrada hasta alguna salida de la autopista. De este modo, si un usuario usa la autopista dos veces, se considerará como dos usuarios diferentes.

En función de los criterios que se sigan para asignar el peaje se pueden construir una gran cantidad de sistemas de tarificación. En [Wu et al. \(2024\)](#) únicamente se consideran dos métodos de asignación de peajes, a saber, el sistema de peaje basado en distancia y el sistema de peaje fijo. En el sistema basado en distancia, el peaje de un usuario depende del número de segmentos usados, i.e, en la distancia recorrida; mientras que en el sistema de peajes fijos, la tarifa cobrada a un usuario está relacionada con su entrada (o salida). Los métodos asociados a estos dos tipos de sistemas de peajes se denominan, respectivamente: método de reparto igualitario entre segmentos (o SES, de *Segments Equal Sharing method*) y método de reparto igualitario entre salidas/entradas (o ExES/EnES de *Exits/Entrances Equal Sharing method*).

Definición 52. El método de reparto igualitario entre segmentos (o SES) está dado por

$$f_i^{Se}(N, T) = \sum_{h=1}^i \sum_{k=i}^n \frac{t_{hk}}{k-h+1}, \quad \text{para cada } i \in N \text{ y } T \in \mathcal{T}^N.$$

Este método reparte el peaje obtenido por cada usuario de forma equitativa entre los segmentos usados por dicho usuario.

Definición 53. El método de reparto igualitario entre salidas (o ExES) está dado por

$$f_i^{Ex}(N, T) = \sum_{k=i}^n \frac{\sum_{h=1}^k t_{hk}}{k}, \quad \text{para cada } i \in N \text{ y } T \in \mathcal{T}^N.$$

Definición 54. El método de reparto igualitario entre entradas (o EnES) está dado por

$$f_i^{En}(N, T) = \sum_{h=1}^i \frac{\sum_{k=h}^n t_{hk}}{n-h+1}, \quad \text{para cada } i \in N \text{ y } T \in \mathcal{T}^N.$$

Vemos que el método ExES asigna todo el peaje recolectado en una salida de forma igualitaria entre el correspondiente segmento y todos los segmentos superiores, mientras que el método EnES reparte todo el peaje recolectado por los usuarios que entran en un determinado segmento de forma

equitativa sobre ese segmento y todos los segmentos inferiores. Estos dos métodos son adecuados para un sistema de peaje fijo, específicamente en situaciones donde (i) el peaje se recolecta en las salidas de la autopista o (ii) el peaje se recolecta al entrar en la autopista.

Además, se tiene que los métodos SES, ExES y EnES son las extensiones de los métodos LRS, UES y DES del problema del río contaminado, en el sentido de que devuelven los resultados de estos métodos si $t_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$.

2.2.2. Caracterizaciones de los métodos

En esta sección veremos qué propiedades verifican las soluciones, junto con sus correspondientes interpretaciones en el contexto del problema de asignación de peajes en una autopista.

Comenzamos por la axiomatización del método SES.

- Aditividad. Para cada $T, T' \in \mathcal{T}^N$, $f(N, T + T') = f(N, T) + f(N, T')$.

La interpretación de esta propiedad para el problema de asignación de peajes en una autopista es la siguiente: el reparto del peaje no depende de la frecuencia (diaria, semanal, mensual, anual...) con la que se asignan las ganancias. Por ejemplo, imaginemos que T_i representa el dinero recolectado de los usuarios que recorrieron la autopista en el día i . Entonces $f(N, T_i)$ es el reparto de dinero entre los segmentos de la autopista para ese día i en particular, que será distinto del reparto del día j , $f(N, T_j)$ para $j \neq i$, pues en otro día j no tendremos los mismos usuarios que en el día i , y esos usuarios habrán usado distintos segmentos de la autopista (o recorrido distancias diferentes). Además, $f(N, \sum_{k=1}^7 T_k)$ será el reparto de las ganancias al cabo de una semana, pues $\sum_{k=1}^7 T_k$ representa el peaje recolectado en siete días. Por tanto, lo que dice la aditividad es que da lo mismo repartir las ganancias al cabo de un día durante siete días, que repartir los beneficios a lo largo de los segmentos una vez ha pasado una semana ($f(N, \sum_{k=1}^7 T_k) = \sum_{k=1}^7 f(N, T_k)$).

- Eficiencia. Para cada $T \in \mathcal{T}^N$, $\sum_{i \in N} f_i(N, T) = \sum_{h \in N} \sum_{k \in N} t_{hk}$.

Este axioma nos dice que el peaje total recolectado será repartido entre todos los segmentos.

- Propiedad del segmento no esencial. Para cada $T \in \mathcal{T}^N$ e $i \in N$, si $t_{hk} = 0$ para todo $h \leq i \leq k$, entonces $f_i(N, T) = 0$.

Esta propiedad afirma que si un segmento de la autopista no es empleado por ningún usuario, entonces el correspondiente segmento no recibirá ninguna ganancia en el reparto del peaje, i.e. no participará en el reparto final de ganancias. Notar que esta propiedad implica el axioma de no coste ciego de [Ni and Wang \(2007\)](#).

- Simetría de segmentos. Para cada $T \in \mathcal{T}^N$ e $i, j \in N$ tal que $i, j \in \mathcal{P}([h, k])$ para todo $h, k \in N$ con $t_{hk} \geq 0$, se tiene que $f_i(N, T) = f_j(N, T)$.

La propiedad de simetría de segmentos nos dice que los segmentos por los que transitan todos los usuarios deben recibir el mismo reparto de ganancias.

Ejemplo

Consideremos una autopista lineal con 3 segmentos, $N = \{1, 2, 3\}$ y una matriz de peaje $T \in \mathcal{T}^N$ tal que $t_{12} = t_{13} = t_{22} = t_{23} = 0$, $t_{11} = 1$, $t_{33} = 1$. Sea f^{Se} el método SES. En este caso, el segmento 2 no es empleado por ningún usuario, pues todos los elementos de la matriz de peaje

que involucran al segmento 2 son nulos. En efecto, t_{12} significa que entramos en la entrada 1 y salimos en la salida 2 (con lo cual, usamos los dos primeros segmentos); t_{23} implica que entramos en la entrada 2 y salimos en la 3, con lo cual usamos los segmentos 2 y 3. Lo mismo para t_{13} y t_{22} . Obtenemos que $f^{Se}(N, T) = (1, 0, 1)$. Vemos que f^{Se} satisface la propiedad del segmento no esencial pues $f_2^{Se}(N, T) = 0$. Por otro lado, si la matriz de peaje tuviese todos los elementos nulos excepto t_{13} y t_{23} (siendo estos últimos iguales a 1) querría decir que los segmentos 2 y 3 son segmentos usados por todos los vehículos de la autopista. En este caso, $f^{Se}(N, T) = (0.33, 0.83, 0.83)$, por lo que vemos que $f_2^{Se}(N, T) = f_3^{Se}(N, T)$. Es decir, los segmentos 2 y 3 obtienen el mismo reparto del peaje con esta solución. Por tanto, vemos que el método SES satisface la propiedad de simetría de segmentos.

Los métodos ExES y EnES no verifican el axioma del segmento no esencial, pues en este caso $f^{Ex}(N, T) = (1.33, 0.33, 0.33)$ y $f^{En}(N, T) = (0.33, 0.33, 1.33)$. Vemos que estos métodos le asignan un reparto no nulo al segmento 2, a pesar de que por él no transita ningún vehículo.

Como mencionamos previamente, un problema de asignación de peajes en una autopista con $t_{ij} = 0$ si $i \neq j$ es equivalente a un problema del río contaminado. Por Ni and Wang (2007), sabemos que el método LRS está caracterizado por la aditividad, eficiencia y la propiedad de no coste ciego. Sin embargo, estos tres axiomas no son suficientes para caracterizar el método SES en el problema de asignación de peajes de una autopista, pues no imponen ninguna restricción o condición sobre cómo se debería repartir el peaje t_{ij} entre los segmentos en el camino de i hasta j , con $i < j$, si no se ha recolectado peaje en ningún otro segmento. Este problema se resuelve usando la propiedad de simetría de segmentos.

El método SES se puede caracterizar empleando únicamente los axiomas de aditividad, eficiencia, la propiedad del segmento no esencial y la simetría de segmentos. No obstante, en Wu et al. (2024) se presenta una caracterización alternativa empleando una versión más fuerte del axioma de simetría de segmentos que también satisface el método SES: la propiedad de segmento necesario.

- Propiedad del segmento necesario. Para cada $T \in \mathcal{T}^N$ e $i \in N$, si $t_{hk} = 0$ para todo $h, k \in N$ con $i \notin \mathcal{P}([h, k])$, entonces $f_i(N, T) \geq f_j(N, T)$ para cada $j \in N$.

Este axioma requiere que un segmento que es utilizado por todos los usuarios gane, como mínimo, lo que gana cualquier otro segmento.

Ejemplo

Sea $N = \{1, 2, 3\}$, $T \in \mathcal{T}^N$ y f^{Se} el método SES. Si todos los elementos que involucran al segmento 2 son no nulos (en particular, son iguales a 1) y $t_{11} = t_{33} = 0$, querría decir que el segmento 2 es el único de los tres segmentos que es empleado por todos los usuarios de la autopista. En este caso, $f^{Se}(N, T) = (0.83, 2.33, 0.83)$, por lo que vemos que el segmento 2 no gana menos de lo que reciben los otros segmentos ($f_2^{Se}(N, T) \geq f_1^{Se}(N, T), f_3^{Se}(N, T)$).

Teorema 55. *El método SES es el único método que satisface aditividad, eficiencia, la propiedad del segmento no esencial y la propiedad del segmento necesario.*

A continuación, presentamos la caracterización axiomática de los métodos ExES y EnES. Además de los axiomas de aditividad y eficiencia descritos previamente, estos métodos verifican las siguientes propiedades.

- Independencia de las salidas superiores. Para cada $T, T' \in \mathcal{T}^N$ e $i \in N$, si $t_{hk} = t'_{hk}$ para todo $k \geq i$ y $h \leq k$, entonces $f_j(N, T) = f_j(N, T')$ para todo $j \geq i$.

Esta propiedad dice que el reparto del peaje asignado a un segmento i depende únicamente de los peajes recolectados de los usuarios que salen en ese segmento o de aquellos que lo hacen en una salida posterior ($k \geq i$).

- Independencia de las entradas inferiores. Para cada $T, T' \in \mathcal{T}^N$ e $i \in N$, si $t_{hk} = t'_{hk}$ para todo $h \leq i$ y $k \geq h$, entonces $f_j(N, T) = f_j(N, T')$ para todo $j \leq i$.

Ejemplo

Sea $N = \{1, 2, 3\}$ y consideremos dos matrices de peaje distintas $T, T' \in \mathcal{T}^N$. Es decir, tendríamos dos autopistas lineales divididas en 3 segmentos donde se cobra un peaje distinto en cada una de ellas. Supongamos que T y T' únicamente difieren en el peaje que se cobra por usar el segmento 1 (i.e, $t_{11} = 3 \neq 2 = t'_{11}$), pero coinciden en las tarifas cobradas para los segmentos 2 y 3, y los elementos correspondientes de la matriz son todos iguales a 1. En este caso, el método f^{Ex} devuelve el reparto $(5, 2, 1)$ para el problema (N, T) , y devuelve el reparto $(4, 2, 1)$ para el problema de asignación de peajes (N, T') . Por tanto, vemos que el reparto asignado a los segmentos 2 y 3 coincide, independientemente de que el peaje recolectado en la salida 1 sea distinto. El método f^{En} no verifica la propiedad de independencia de las salidas superiores, pues en este caso obtendríamos $f^{En}(N, T) = (1.67, 2.67, 3.67)$ y $f^{En}(N, T') = (1.33, 2.33, 3.33)$, por lo que $f_2^{En}(N, T) \neq f_2^{En}(N, T')$ y $f_3^{En}(N, T) \neq f_3^{En}(N, T')$.

Si, por el contrario, asumimos que las matrices T y T' solo difieren en el peaje recolectado en el segmento 3 ($t_{33} = 3 \neq 2 = t'_{33}$), pero coinciden en las tarifas cobradas a los segmentos 1 y 2, donde los elementos correspondientes de la matriz son iguales a 1), entonces $f^{En}(N, T) = (1, 2, 5)$ y $f^{En}(N, T') = (1, 2, 4)$, por lo que vemos que el reparto proporcionado por el método EnES a los segmentos 1 y 2 coincide en ambos casos, a pesar de que las matrices T y T' son distintas. El método ExES no verifica esta propiedad, pues $f^{Ex}(N, T) = (3.67, 2.667, 1.67)$ y $f^{Ex}(N, T') = (3.33, 2.33, 1.33)$. Vemos que los segmentos 1 y 2 obtienen repartos distintos.

Esta propiedad es el dual del axioma de independencia de las salidas superiores, y dice que el reparto del peaje asignado a un segmento solo depende de los peajes recolectados por los usuarios que entran en ese segmento o en una entrada previa a dicho segmento.

- Simetría de salidas. Para cada $T \in \mathcal{T}^N$ e $i, j \in N$, con $i < j$ si $t_{hk} = 0$ para todo $h \leq k$ con $i \leq k < j$, entonces $f_i(N, T) = f_j(N, T)$.

- Simetría de entradas. Para cada $T \in \mathcal{T}^N$ e $i, j \in N$, con $i < j$ si $t_{hk} = 0$ para todo $h \leq k$ con $i < h \leq j$, entonces $f_i(N, T) = f_j(N, T)$.

Ejemplo

Sea $N = \{1, 2, 3\}$ y $T \in \mathcal{T}^N$. Supongamos que $t_{12} = t_{22} = 0$ (el resto de elementos iguales a 1). Esto significaría que ningún usuario sale en la salida 2 de la autopista, donde la salida 2 es la que se ubica entre los segmentos 2 y 3 (en concreto, al final del segmento 2 y al comienzo del 3). En este caso, el método ExES devuelve $f^{Ex}(N, T) = (2, 1, 1)$, por lo que vemos que verifica la propiedad de simetría de salidas ($f_2^{Ex}(N, T) = f_3^{Ex}(N, T)$). El método EnES no verifica esta propiedad, pues $f^{En}(N, T) = (0.67, 1.17, 2.17)$ ($f_2^{En}(N, T) = f_3^{En}(N, T)$).

Del mismo modo, si $t_{33} = 0$ y el resto de elementos de la matriz son iguales a 1, implicaría que ningún usuario emplea la entrada 3 de la autopista, ubicada entre los segmentos 2 y 3. El método EnES asigna el reparto $f^{En}(N, T) = (1, 2, 2)$, por lo que vemos que $f_2^{En}(N, T) = f_3^{En}(N, T)$. El método ExES no cumple este axioma, ya que $f^{Ex}(N, T) = (2.67, 1.67, 0.67)$, por lo que los segmentos 2 y 3

no reciben lo mismo.

Las últimas dos propiedades de simetría requieren que dos segmentos reciban el mismo reparto de las ganancias si ningún usuario sale (respectivamente entra) entre los dos segmentos.

Los siguientes dos resultados caracterizan a los métodos ExES y EnES, respectivamente.

Teorema 56. *El método ExES es el único método que satisface aditividad, eficiencia, independencia de las salidas superiores y simetría de salidas.*

Teorema 57. *El método EnES es el único método que satisface aditividad, eficiencia, independencia de las entradas inferiores y simetría de entradas.*

Notamos que los axiomas de independencia de salidas superiores y entradas inferiores, así como la simetría de entradas y salidas, son análogos a los axiomas de independencia de costes superiores e inferiores y simetría superior e inferior del problema del río contaminado que caracterizan a los métodos UES y DES (junto a las propiedades de aditividad y eficiencia) de [Ni and Wang \(2007\)](#) y [Dong et al. \(2012b\)](#).

Se tiene que los métodos ExES y EnES no verifican la propiedad del segmento no esencial. Sin embargo, ambos métodos satisfacen una de las siguientes versiones más débiles, que requieren que un segmento reciba una ganancia nula si ningún usuario sale (respectivamente entra) en ese segmento o en una salida posterior (respectivamente entrada anterior).

- Propiedad del segmento no esencial inferior. Para cada $T \in \mathcal{T}^N$ e $i \in N$, tal que $t_{hk} = 0$ para todo $k \geq i$ y $h \leq k$, se tiene que $f_i(N, T) = 0$.

- Propiedad del segmento no esencial superior. Para cada $T \in \mathcal{T}^N$ e $i \in N$, tal que $t_{hk} = 0$ para todo $h \leq i$ y $k \geq h$, se tiene que $f_i(N, T) = 0$.

Ejemplo

Sea $N = \{1, 2, 3\}$ y $T \in \mathcal{T}^N$ tal que $t_{11} = 1$ y el resto de elementos de la matriz son nulos. En este caso, solo se sale por la salida 1 de la autopista. Es decir, no se emplea ni la salida 2 ni la 3. El método ExES devuelve $f^{Ex}(N, T) = (1, 0, 0)$, por lo que se verifica la propiedad del segmento no esencial inferior (pues $f_2^{Ex}(N, T) = 0$ y $f_3^{Ex}(N, T) = 0$). El método SES también verifica esta propiedad ($f^{SES}(N, T) = (1, 0, 0)$), pero no así el método EnES, que asigna el reparto $f^{En}(N, T) = (0.33, 0.33, 0.33)$.

Por el contrario, si asumimos que todos los elementos de la matriz son nulos excepto $t_{33} = 1$, querría decir que solo se emplea el segmento 3 de la autopista. Dicho de otro modo, no se entra por la entrada 2 ni tampoco en la entrada 1. En este caso, $f^{En}(N, T) = (0, 0, 1)$. Vemos que $f_1^{En}(N, T) = f_2^{En}(N, T) = 0$. El método SES también cumple esta propiedad ($f^{Se}(N, T) = (0, 0, 1)$), pero no ocurre lo mismo con el método ExES ($f^{Ex}(N, T) = (0.33, 0.33, 0.33)$).

Como las dos últimas propiedades combinadas implican la propiedad del segmento no esencial, tenemos que el método SES está determinado de forma unívoca por la aditividad, eficiencia y las propiedades del segmento necesario, segmento no esencial inferior y segmento no esencial superior. Por el contrario, el método ExES (respectivamente el método EnES) satisface la propiedad del segmento no esencial inferior (respectivamente propiedad del segmento no esencial superior), pero no satisface la propiedad del segmento no esencial superior (respectivamente inferior). Así, para determinar de forma única los métodos ExES y EnES usando las versiones más débiles de la propiedad del segmento no esencial, necesitamos un axioma adicional.

2.2.3. Juegos asociados a los métodos

En esta sección analizaremos, desde el punto de vista de la teoría de juegos cooperativos, los distintos métodos propuestos.

Empezamos por definir el juego de asignación de segmentos.

Para cada problema de asignación de peajes en una autopista, definimos un juego cooperativo asociado, denominado juego de asignación de segmentos (*segments allocation game*), que asigna a cada coalición $E \subseteq N$, el peaje recolectado usando solo los segmentos de E , i.e:

$$v^{Se}(E) = \sum_{i,j \in N, \mathcal{P}([i,j]) \subseteq E} t_{ij}. \quad (2.5)$$

Para ver que el método SES proporciona la misma asignación de peaje que al aplicar el valor de Shapley del juego (2.5), necesitamos previamente relacionar el juego de asignación de segmentos con los juegos de comunicación lineal (Myerson, 1977). Se tiene que, en base a los dividendos de Harsanyi, los dividendos de Harsanyi de coaliciones de segmentos consecutivos corresponden al peaje recolectado de usuarios que usan exactamente esos segmentos, mientras que los dividendos de Harsanyi de coaliciones que no comprenden segmentos consecutivos son cero (van den Brink et al., 2007).

- Proposición 58.**
1. Para cada $T \in \mathcal{T}^N$ y $E \subseteq N$ tal que $E = \mathcal{P}([i,j])$ para algún $i, j \in N$, se tiene que $c_E(v^{Se}) = t_{ij}$.
 2. Para cada $T \in \mathcal{T}^N$ y $E \subseteq N$ tal que no existen $i, j \in N$ con $\mathcal{P}([i,j]) = E$, se tiene que $c_E(v^{Se}) = 0$.
 3. Para cada juego (N, v) tal que $c_E(v) \geq 0$ para cada $E \subseteq N$ y $c_E(v) = 0$ si no existen $i, j \in N$ con $\mathcal{P}([i,j]) = E$, se tiene que (N, v) es el juego de asignación de segmentos de un problema de asignación de peajes en una autopista.

Proposición 59. Sea $T \in \mathcal{T}^N$. Entonces $f^{Se}(N, T) = \varphi(v^{Se})$.

En base a estos resultados, podemos obtener nuevas axiomatizaciones del método SES considerando las caracterizaciones del valor de Myerson para juegos de comunicación. Por ejemplo, la axiomatización original de Myerson (1977) usando justicia y eficiencia entre componentes se puede adaptar para caracterizar el método SES. Trasladando estas propiedades al problema de asignación de peajes en una autopista, obtendríamos los axiomas de justicia de peajes y eficiencia en sub-autopistas. Para ver que la caracterización de Myerson sigue siendo válida en la subclase de los juegos de grafos lineales, consultar van den Brink et al. (2007).

Para trasladar la justicia de Myerson a nuestro contexto, “romper el enlace” ($i : i+1$), $i = 1, \dots, n-1$ se puede interpretar como una carretera cortada en el problema de asignación de peajes en una autopista, resultando en una pérdida de todas las tarifas recolectadas de los usuarios que entran en la entrada i o en una entrada previa y salen en $i+1$ o en una salida posterior. Esto implica una reducción de tarifas de todos los usuarios que pasan entre estos dos segmentos de la autopista. El axioma de justicia de Myerson se puede interpretar como justicia de peajes, requiriendo que la reducción tenga el mismo efecto en el reparto de estos dos segmentos vecinos desconectados del resto de segmentos de la carretera.

- Justicia de peajes. Para cada $T, T' \in \mathcal{T}^N$ e $i \in N \setminus \{n\}$ tal que $t'_{hk} = t_{hk}$ si $h \leq k \leq i$ o $i+1 \leq h \leq k$ y $t'_{hk} = 0$ si $h \leq i < k$, se tiene que $f_i(N, T) - f_i(N, T') = f_{i+1}(N, T) - f_{i+1}(N, T')$.

Para trasladar la eficiencia entre componentes a nuestro contexto, primero introducimos el concepto de sub-autopista.

Definición 60. Una coalición de segmentos consecutivos $E \subseteq N$ es una sub-autopista si $t_{ij} = 0$ para cada $i, j \in N$ con $\mathcal{P}([i, j]) \cap E \neq \emptyset$ y $\{i, j\} \not\subseteq E$.

Es decir, una coalición de segmentos consecutivos $E \subseteq N$ es una sub-autopista si no se recolecta peaje de usuarios que entran o salen fuera de E y atraviesan segmentos de E . La eficiencia entre componentes de Myerson se puede interpretar como eficiencia en sub-autopistas requiriendo que el peaje de cada sub-autopista se asigne exactamente sobre los segmentos en esa autopista. Más formalmente:

- Eficiencia en sub-autopistas. Para cada $T \in \mathcal{T}^N$ y sub-autopista $E \subseteq N$, se tiene que $\sum_{i \in E} f_i(N, T) = \sum_{h, k \in N, \mathcal{P}([h, k]) \subseteq E} t_{hk}$.

De este modo, obtenemos una nueva caracterización del método SES.

Teorema 61. *El método SES es el único método que satisface las propiedades de justicia de peajes y eficiencia en sub-autopistas.*

En el siguiente ejemplo mostramos cómo se calcularía la función característica v^{Se} , y veremos que el método SES coincide con el valor de Shapley de este juego.

Ejemplo

Sea $N = \{1, 2, 3\}$ y $T \in \mathcal{T}^N$ la matriz de peaje dada por $t_{11} = 1$, $t_{12} = 2$, $t_{13} = 3$, $t_{22} = 0.5$, $t_{23} = 1.5$, $t_{33} = 2.7$. Entonces:

$v^{Se}(1) = t_{11} = 1$ (En la coalición $\{1\}$ solo se usa el segmento 1).

$v^{Se}(2) = t_{22} = 0.5$ (En la coalición $\{2\}$ solo se usa el segmento 2).

$v^{Se}(3) = t_{33} = 2.7$ (En la coalición $\{3\}$ solo se usa el segmento 3).

¿ $v^{Se}(1, 2)$? En este caso, el conjunto de posibles viajes por la autopista que emplean los segmentos 1 o 2 comprende a los usuarios que entran en la entrada 1 y salen en la salida 1, aquellos que entran en la entrada 2 y salen en la salida 2 y, además, a aquellos que entran en la entrada 1 y salen en la salida 2. Por tanto:

$$v^{Se}(1, 2) = \sum_{i, j \in \{1, 2\}} t_{ij} = t_{11} + t_{12} + t_{22} = 1 + 2 + 0.5 = 3.5.$$

¿ $v^{Se}(1, 3)$? En este caso, los viajes que involucran solo a los segmentos 1 y 3 (i.e. en los que no interviene el segmento 2) son aquellos que se inician en la entrada 1 y finalizan en en la salida 1 y aquellos que comienzan en la entrada 3 y acaban en la salida 3. Por tanto, $v^{Se}(1, 3) = t_{11} + t_{33} = 1 + 2.7 = 3.7$.

¿ $v^{Se}(2, 3)$? Razonando de forma análoga al cálculo de $v^{Se}(1, 2)$ (pues en el caso de $(2, 3)$ también se tiene que los elementos son consecutivos), obtenemos que $v^{Se}(2, 3) = t_{22} + t_{23} + t_{33} = 0.5 + 1.5 + 2.7 = 4.7$.

¿ $v^{Se}(1, 2, 3)$? En este caso, como los 3 segmentos son consecutivos, para calcular todos los viajes que involucran a estas secciones de la autopista tendríamos que tener en cuenta todas los posibles subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$. Por tanto, obtendríamos $v^{Se}(1, 2, 3) = t_{11} + t_{12} + t_{13} + t_{22} + t_{23} + t_{33} = 1 + 2 + 3 + 0.5 + 1.5 + 2.7 = 10.7$.

Así, la función característica v^{Se} es igual a:

$$v^{Se}(E) = [1, 0.5, 2.7, 3.5, 3.7, 4.7, 10.7].$$

El valor de Shapley de este juego es $\varphi(N, v^{Se}) = (3, 3.25, 4.45)$.

Calculemos ahora el método SES y veamos si coincide con el valor de Shapley.

$$f_1^{Se}(N, T) = \sum_{h=1}^1 \sum_{k=1}^3 \frac{t_{hk}}{k-h+1} = \frac{t_{11}}{1-1+1} + \frac{t_{12}}{2-1+1} + \frac{t_{13}}{3-1+1} = t_{11} + \frac{1}{2}t_{12} + \frac{1}{3}t_{13} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

$$f_2^{Se}(N, T) = \sum_{h=1}^2 \sum_{k=2}^3 \frac{t_{hk}}{k-h+1} = \frac{t_{12}}{2-1+1} + \frac{t_{13}}{3-1+1} + \frac{t_{22}}{2-2+1} + \frac{t_{23}}{3-2+1} = 1 + 1 + 0.5 + 0.75 = 3.25.$$

$$f_3^{Se}(N, T) = \sum_{h=1}^3 \sum_{k=3}^3 \frac{t_{hk}}{k-h+1} = \frac{t_{13}}{3-1+1} + \frac{t_{23}}{3-2+1} + \frac{t_{33}}{3-3+1} = 1 + 0.75 + 2.7 = 4.45.$$

Por tanto, $f^{Se}(N, T) = (3, 3.25, 4.45)$ y $f^{Se}(N, T) = \varphi(N, v^{Se})$.

A continuación, introducimos los juegos de asignación de salidas y de entradas.

En problemas de asignación de peajes en una autopista con un sistema fijo de peajes, donde los peajes se cobran en las salidas, uno puede argumentar que los segmentos localizados por debajo de j no tienen derecho a compartir la tarifa t_{ij} . En base a esta idea, se introduce el juego de asignación de salidas (*exits allocation game*), el cual asigna a cada coalición el peaje total recolectado de las salidas que forman parte de esa coalición o por debajo de un miembro de dicha coalición. Formalmente,

$$v^{Ex}(E) = \sum_{j=\min E}^n \sum_{i=1}^j t_{ij}, \quad \forall E \subseteq N, \quad (2.6)$$

donde $\min E = \min_{i \in E} i$ es el segmento localizado más arriba en la coalición E .

Se tiene que el método ExES se corresponde con el valor de Shapley del juego de asignación de salidas.

Proposición 62. Sea $T \in \mathcal{T}^N$. Entonces $f^{Ex}(N, T) = \varphi(v^{Ex})$.

Ejemplo

Sea $N = \{1, 2, 3\}$ y consideremos la matriz de peaje $T \in \mathcal{T}^N$ tal que $t_{11} = 1$, $t_{12} = t_{22} = 2$, $t_{13} = t_{23} = t_{33} = 3$. Es decir, el peaje varía en función de la salida de la autopista por la que se salga. Veamos cómo queda la función característica.

$$v^{Ex}(1) = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^j t_{ij} = t_{11} + (t_{12} + t_{22}) + (t_{13} + t_{23} + t_{33}) = 1 + (2 + 2) + (3 + 3 + 3) = 14.$$

$$v^{Ex}(2) = \sum_{j=2}^3 \sum_{i=1}^j t_{ij} = (t_{12} + t_{22}) + (t_{13} + t_{23} + t_{33}) = (2 + 2) + (3 + 3 + 3) = 4 + 9 = 13.$$

$$v^{Ex}(3) = \sum_{j=3}^3 \sum_{i=1}^j t_{ij} = t_{13} + t_{23} + t_{33} = 3 + 3 + 3 = 9.$$

$$v^{Ex}(1, 2) = \sum_{j=\min\{1,2\}}^3 \sum_{i=1}^j t_{ij} = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^j t_{ij} = v^{Ex}(1) = 14.$$

$$v^{Ex}(1, 3) = \sum_{j=\min\{1,3\}}^3 \sum_{i=1}^j t_{ij} = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^j t_{ij} = v^{Ex}(1) = 14.$$

$$v^{Ex}(2, 3) = \sum_{j=\min\{2,3\}}^3 \sum_{i=1}^j t_{ij} = \sum_{j=2}^3 \sum_{i=1}^j t_{ij} = v^{Ex}(2) = 13.$$

$$v^{Ex}(1, 2, 3) = \sum_{j=\min\{1,2,3\}}^3 \sum_{i=1}^j t_{ij} = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^j t_{ij} = v^{Ex}(1) = 14.$$

Por tanto,

$$v^{Ex} = [14, 13, 9, 14, 14, 13, 14].$$

El valor de Shapley de este juego es $\varphi(N, v^{Ex}) = (6, 5, 3)$.

Obtengamos la asignación proporcionado por el método ExES y veamos si coincide con el reparto proporcionado por el valor de Shapley.

$$\begin{aligned} f_1^{Ex}(N, T) &= \sum_{k=1}^3 \frac{\sum_{h=1}^k}{k} = \frac{t_{11}}{1} + \frac{t_{12} + t_{22}}{2} + \frac{t_{13} + t_{23} + t_{33}}{3} = 1 + \frac{2+2}{2} + \frac{3+3+3}{3} = 1 + 2 + 3 = 6, \\ f_2^{Ex}(N, T) &= \sum_{k=2}^3 \frac{\sum_{h=1}^k}{k} = \frac{t_{12} + t_{22}}{2} + \frac{t_{13} + t_{23} + t_{33}}{3} = \frac{2+2}{2} + \frac{3+3+3}{3} = 5, \\ f_3^{Ex}(N, T) &= \sum_{k=3}^3 \frac{\sum_{h=1}^k}{k} = \frac{t_{13} + t_{23} + t_{33}}{3} = \frac{3+3+3}{3} = 3. \end{aligned}$$

En efecto, vemos que $f^{Ex}(N, T) = \varphi(N, v^{Ex}) = (6, 5, 3)$.

De forma similar, el juego cooperativo subyacente al método EnES, llamado juego de asignación de entradas (o *entrances allocation game*), está dado por

$$v^{En}(E) = \sum_{i=1}^{\max E} \sum_{j=i}^n t_{ij}, \quad \forall E \subseteq N, \quad (2.7)$$

donde $\max E = \max_{i \in E} i$ es el segmento localizado más abajo en la coalición E .

Se tiene que el método EnES se corresponde con el valor de Shapley del juego de asignación de entradas.

Proposición 63. *Sea $T \in \mathcal{T}^N$. Entonces $f^{En}(N, T) = \varphi(v^{En})$.*

Ejemplo

Sea $N = \{1, 2, 3\}$ y consideremos la matriz de peaje $T \in \mathcal{T}^N$ tal que $t_{11} = t_{12} = t_{13} = 1$, $t_{22} = t_{23} = 2$ y $t_{33} = 3$. Es decir, el peaje varía en función de la entrada de la autopista que se considere. Veamos cómo queda la función característica.

$$v^{En}(1) = \sum_{i=1}^1 \sum_{j=i}^3 t_{ij} = t_{11} + t_{12} + t_{13} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

$$v^{En}(2) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=i}^3 t_{ij} = (t_{11} + t_{12} + t_{13}) + (t_{22} + t_{23}) = 3 + (2 + 2) = 7.$$

$$v^{En}(3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=i}^3 t_{ij} = (t_{11} + t_{12} + t_{13}) + (t_{22} + t_{23}) + t_{33} = 3 + 4 + 3 = 10.$$

$$v^{En}(1, 2) = \sum_{i=1}^{\max\{1,2\}} \sum_{j=i}^3 t_{ij} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=i}^3 t_{ij} = v^{En}(2) = 7.$$

$$v^{En}(1, 3) = \sum_{i=1}^{\max\{1,3\}} \sum_{j=i}^3 t_{ij} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=i}^3 t_{ij} = v^{En}(3) = 10.$$

$$v^{En}(2, 3) = \sum_{i=1}^{\max\{2,3\}} \sum_{j=i}^3 t_{ij} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=i}^3 t_{ij} = v^{En}(3) = 10.$$

$$v^{En}(1, 2, 3) = \sum_{i=1}^{\max\{1,2,3\}} \sum_{j=i}^3 t_{ij} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=i}^3 t_{ij} = v^{En}(3) = 10.$$

Por tanto,

$$v^{En} = [3, 7, 10, 7, 10, 10, 10].$$

El valor de Shapley de este juego es $\varphi(N, v^{En}) = (1, 3, 6)$.

Obtengamos la asignación proporcionada por el método EnES y veamos si coincide con el reparto proporcionado por el valor de Shapley.

$$f_1^{En}(N, T) = \sum_{h=1}^1 \frac{\sum_{k=h}^3 t_{hk}}{3-h+1} = \frac{t_{11} + t_{12} + t_{13}}{3-1+1} = \frac{1+1+1}{3} = 1,$$

$$f_2^{En}(N, T) = \sum_{h=1}^2 \frac{\sum_{k=h}^3 t_{hk}}{3-h+1} = \left(\frac{t_{11} + t_{12} + t_{13}}{3-1+1} \right) + \left(\frac{t_{22} + t_{23}}{3-2+1} \right) = 1 + \frac{2+2}{2} = 1 + 2 = 3,$$

$$f_3^{En}(N, T) = \sum_{h=1}^3 \frac{\sum_{k=h}^3 t_{hk}}{3-h+1} = \left(\frac{t_{11} + t_{12} + t_{13}}{3-1+1} \right) + \left(\frac{t_{22} + t_{23}}{3-2+1} \right) + \left(\frac{t_{33}}{3-3+1} \right) = 1 + 2 + 3 = 6.$$

En efecto, vemos que $f^{En}(N, T) = \varphi(N, v^{En}) = (1, 3, 6)$.

Como mencionamos previamente, el método SES se puede ver como el valor de Myerson del juego de comunicación asociado y, por tanto, verifica la propiedad de justicia de peajes. Sin embargo, los métodos ExES y EnES no satisfacen este axioma. Lo que sí verifican es que el efecto de un cambio en el reparto de las tarifas entre los segmentos intermedios i , con $h \leq i \leq k$, es igual a la suma de los efectos de los repartos de un segmento superior a h y un segmento inferior a k . Si no hay un segmento superior (o inferior) al camino $[h, k]$, la propiedad de justicia es ligeramente diferente, igualando los efectos del cambio de reparto asociado al agente intermedio i y de un segmento localizado por debajo de k (respectivamente por encima de h).

En concreto, el método ExES satisface el siguiente axioma, denominado justicia de externalidades I.

• Justicia de externalidades I. Sean $T, T' \in \mathcal{T}^N$ tal que existe $h, k \in N, 1 < h \leq k$, con $t_{ij} = t'_{ij}$ para todo $(i, j) \neq (h, k), i, j \in N$.

(i) Cuando $k < n$, tenemos:

$$f_s(N, T) - f_s(N, T') = f_p(N, T) - f_p(N, T') + f_q(N, T) - f_q(N, T'),$$

para todo $s \in \{h, \dots, k\}, p \in \{1, \dots, h-1\}$ y $q \in \{k+1, \dots, n\}$.

(ii) Cuando $k = n$, tenemos:

$$f_s(N, T) - f_s(N, T') = f_p(N, T) - f_p(N, T'),$$

para todo $s \in \{h, \dots, k\}, p \in \{1, \dots, h-1\}$.

Por su parte, el método EnES satisface el axioma denominado justicia de externalidades II.

• Justicia de externalidades II. Sean $T, T' \in \mathcal{T}^N$ tal que existe $h, k \in N, h \leq k < n$, con $t_{ij} = t'_{ij}$ para todo $(i, j) \neq (h, k), i, j \in N$.

(i) Cuando $h > 1$, tenemos:

$$f_s(N, T) - f_s(N, T') = f_p(N, T) - f_p(N, T') + f_q(N, T) - f_q(N, T'),$$

para todo $s \in \{h, \dots, k\}$, $p \in \{1, \dots, h-1\}$ y $q \in \{k+1, \dots, n\}$.

(ii) Cuando $h = 1$, tenemos:

$$f_s(N, T) - f_s(N, T') = f_q(N, T) - f_q(N, T'),$$

para todo $s \in \{h, \dots, k\}$, $q \in \{k+1, \dots, n\}$.

Ejemplo

Consideremos una autopista con 4 segmentos, de forma que $N = \{1, 2, 3, 4\}$ y sean $T, T' \in \mathcal{T}^N$ dos matrices de peaje. Supongamos que $t_{ij} = t'_{ij}$ para todo $(i, j) \neq (2, 3)$. Es decir, el único cambio de peaje se produce para los vehículos que entran en la entrada 2 y salen en la salida 3, lo cual comprende a los segmentos 2 y 3 de la autopista, i.e, el camino $[2, 3]$. Entonces, un método, f , que satisfaga cualesquiera de las dos propiedades sobre justicia de externalidades verificará: $f_2(N, T) - f_2(N, T') = f_1(N, T) - f_1(N, T') + f_4(N, T) - f_4(N, T')$ y $f_3(N, T) - f_3(N, T') = f_1(N, T) - f_1(N, T') + f_4(N, T) - f_4(N, T')$. Dicho de otro modo, el cambio de peaje experimentado por los segmentos 2 y 3 es equivalente a la suma de los cambios de peaje del segmento 1 (segmento superior al segmento 2) y del segmento 4 (segmento inferior al segmento 3).

Si, en cambio, consideramos que $t_{ij} = t'_{ij}$ para todo $(i, j) \neq (3, 4)$, i.e, que afecta al camino $[3, 4]$, un método que satisfaga justicia de externalidades I cumplirá que $f_1(N, T) - f_1(N, T') = f_2(N, T) - f_2(N, T') = f_3(N, T) - f_3(N, T') = f_4(N, T) - f_4(N, T')$. En efecto, como no hay ningún segmento a la derecha del segmento 4, el efecto del cambio de peaje de los segmentos 3 y 4 es igual al experimentado por los segmentos 1 y 2 (superiores a $[3, 4]$).

Si suponemos que $t_{ij} = t'_{ij}$ para todo $(i, j) \neq (1, 2)$, obtendríamos la misma conclusión si f satisface la propiedad de justicia de externalidades II, pues en este caso el camino a considerar sería $[1, 2]$, y, como no hay ningún segmento a la izquierda (superior) al segmento 1, el pago de los segmentos (intermedios) 1 y 2 es el mismo que para los segmentos 3 y 4 (a la derecha del camino $[1, 2]$).

Para obtener caracterizaciones de los métodos ExES y EnES que difieran en un único axioma, podemos debilitar las hipótesis de los dos axiomas de externalidad, considerando cambios que no involucren a los segmentos extremos de la autopista ($k = n$ y $h = 1$). Por tanto, consideraremos que la entrada h es estrictamente mayor que 1 y la salida k es estrictamente menor que n , i.e, la parte (i) de los dos axiomas de externalidad.

- Justicia de externalidades. Sean $T, T' \in \mathcal{T}^N$ tal que existe $h, k \in N, 1 < h \leq k < n$, con $t_{ij} = t'_{ij}$ para todo $(i, j) \neq (h, k)$, $i, j \in N$. Se tiene que

$$f_s(N, T) - f_s(N, T') = f_p(N, T) - f_p(N, T') + f_q(N, T) - f_q(N, T'),$$

para todo $s \in \{h, \dots, k\}$, $p \in \{1, \dots, h-1\}$ y $q \in \{k+1, \dots, n\}$.

Notamos que tanto el método ExES como el método EnES verifican la propiedad de justicia de externalidades, pero el método SES no.

Al debilitar la propiedad de justicia de externalidades, añadimos un axioma de monotonía respecto a ampliar la autopista en alguno de los nodos terminales que verificarán ambos métodos. Antes de

formalizar dicho método, introducimos la notación para problemas de asignación de peajes en una autopista ampliada. Por convención, permitimos el índice 0 en problemas de este tipo.

Definición 64 (Problema de asignación de peajes en una autopista ampliada). Para cada $N = \{1, \dots, n\} \subseteq \mathbb{N}$, $T \in \mathcal{T}^N$ y $m \in \{0, n+1\}$, un problema de asignación de peajes en una autopista ampliada es un par (N^{+m}, T^{+m}) , donde $N^{+m} = N \cup \{m\}$ y $T^{+m} \in \mathcal{T}^{N^{+m}}$ tal que $t_{ij}^{+m} = t_{ij}$ para todo $i, j \in N$ y $t_{ij}^{+m} = 0$ si $i = m$ o si $j = m$ (i.e, si i (respectivamente j) es un nodo terminal de la autopista).

Ahora estamos en condiciones de introducir la propiedad de monotonía de segmentos.

- Monotonía de segmentos. Para cada $T \in \mathcal{T}^N$ y $m \in \{0, n+1\}$, $f_i(N, T) \geq f_i(N^{+m}, T^{+m}) \forall i \in N$.

Este axioma de monotonía establece que si añadimos un segmento al comienzo o al final de una autopista, de forma que no se recolecta ninguna tarifa que involucre a estos nuevos segmentos y no se produce ningún otro cambio en los peajes de los segmentos restantes, entonces los segmentos originales no se deben beneficiar de esta nueva situación.

Ejemplo

Sea $N = \{1, 2, 3\}$ y consideremos la autopista ampliada $N' = \{1, 2, 3, 4\}$. Consideremos sendas matrices de peaje $T \in \mathcal{T}^N$ y $T' \in \mathcal{T}^{N'}$. Sea $t_{ij} = t'_{ij}$ para todo $i, j \in N$ y $t'_{14} = t'_{24} = t'_{34} = t'_{44} = 0$. Estas últimas igualdades implican que no se recolecta ningún dinero del segmento 4 (no es empleado en ningún viaje realizado por la autopista). Tomando $m = 4$, si f satisface monotonía de segmentos, entonces $f_1(N, T) \geq f_1(N', T')$, $f_2(N, T) \geq f_2(N', T')$ y $f_3(N, T) \geq f_3(N', T')$.

La monotonía de segmentos la satisfacen tanto el método ExES como el método EnES. En las axiomatizaciones que presentamos a continuación, la única diferencia es con respecto a la propiedad del segmento no esencial.

Teorema 65. *El método ExES es el único método verificando aditividad, eficiencia, la propiedad del segmento necesario, la propiedad del segmento no esencial inferior, la propiedad de justicia de externalidades y la monotonía de segmentos.*

Teorema 66. *El método EnES es el único método verificando aditividad, eficiencia, la propiedad del segmento necesario, la propiedad del segmento no esencial superior, la propiedad de justicia de externalidades y la monotonía de segmentos.*

Previamente hemos visto que el juego de asignación de segmentos está íntimamente relacionado con los juegos de comunicación. No obstante, los juegos de asignación de salidas y de entradas están relacionados con los juegos con estructura de permiso. En concreto:

- El juego v^{Ex} es el juego dual² de la restricción conjuntiva (o disjuntiva) del juego restringido (N, v^{Se}, D) donde v^{Se} es el juego de asignación de segmentos y $D = \{(i : i+1) : i = 1, \dots, n-1\}$ es la estructura de permiso lineal donde los enlaces en la autopista están orientados de arriba hacia abajo (equivalentemente de izquierda a derecha). Así, el método ExES es igual al valor de permiso conjuntivo (respectivamente disjuntivo) de este juego dual. Usando esta observación, podemos aplicar directamente una de las axiomatizaciones del valor de permiso conjuntivo en [van den Brink \(2017\)](#), estableciendo que el método ExES es el único método satisfaciendo aditividad, eficiencia, la propiedad del segmento no esencial inferior, la propiedad del segmento necesario y la monotonía superior. El último axioma establece que los segmentos superiores siempre ganan, como mínimo, lo que ganan los segmentos inferiores.

- El juego v^{En} es el juego dual de la restricción conjuntiva (o disjuntiva) del juego restringido (N, v^{Se}, D) donde v^{Se} es el juego de asignación de segmentos y $D = \{(i : i-1) : i = 2, \dots, n\}$ es el

²El juego dual (N, v^*) de un juego (N, v) está dado por $v^*(E) = v(N) - v(N \setminus E)$, para todo $E \subseteq N$.

digrafo donde los enlaces en la autopista están orientados de abajo hacia arriba (equivalentemente de derecha a izquierda). Consecuentemente, el método EnES se puede caracterizar por axiomas análogos a los de método ExES. En concreto, es el único método verificando aditividad, eficiencia, la propiedad del segmento no esencial superior, la propiedad del segmento necesario y la monotonía inferior. El último axioma establece que los segmentos inferiores siempre ganan, como mínimo, lo que ganan los segmentos superiores.

Para terminar este capítulo, en la Tabla 2.2 presentamos un resumen de las propiedades que verifican cada uno de los métodos del problema de asignación de peajes en una autopista.

Propiedades	f^{Se}	f^{Ex}	f^{En}
Aditividad	\oplus	\oplus	\oplus
Propiedad del jugador necesario	+	\oplus	\oplus
Monotonía de segmentos	+	\oplus	\oplus
Eficiencia	\oplus	\oplus	\oplus
Eficiencia en sub-autopistas	\oplus	-	-
Simetría de segmentos	\oplus	+	+
Simetría de salidas	-	\oplus	-
Simetría de entradas	-	-	\oplus
Propiedad del segmento no esencial	\oplus	-	-
Propiedad del segmento no esencial inferior	+	\oplus	-
Propiedad del segmento no esencial superior	+	-	\oplus
Independencia de las salidas superiores	+	\oplus	-
Independencia de las entradas inferiores	+	-	\oplus
Justicia de peajes	\oplus	-	-
Justicia de externalidades I	-	\oplus	-
Justicia de externalidades II	-	-	\oplus
Justicia de externalidades	-	\oplus	\oplus

Tabla 2.2: Comparación de las propiedades que satisfacen las soluciones del problema de asignación de peajes en una autopista.

Capítulo 3

Aplicación práctica a datos reales

En este capítulo aplicaremos las soluciones presentadas en este trabajo a distintos problemas reales sobre autopistas para discutir cuál es la mejor forma de repartir el peaje recolectado. En primer lugar, analizaremos en detalle un conjunto de datos sobre los tramos de una autopista española y después nos centraremos en los tramos de la autopista australiana Hills M2. Por último, presentaremos una extensión del caso de la autopista lineal a una más general sobre la red de autopistas en Irlanda y proponemos alternativas que se podrían aplicar en este contexto.

3.1. Método SES: autopista española

La cuestión que nos planteamos en esta sección es cómo repartir el peaje recolectado por los vehículos que transitan una autopista española entre los segmentos en los que se divide, donde los segmentos vienen delimitados por las entradas y salidas de la autopista. Este problema se puede representar mediante un grafo no dirigido como el que se observa en la Figura 3.1, donde los nodos simbolizan las entradas (En.) y salidas (Ex.), mientras que los enlaces son los segmentos.

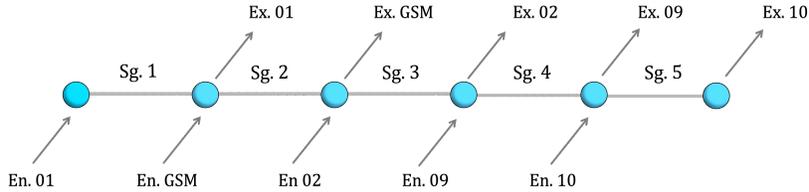


Figura 3.1: Segmentos de una autopista española, junto con el nombre de sus entradas y salidas.

Dado que la filosofía de las tarifas en España está basada en distancias recorridas, sólo tiene sentido aplicar la primera solución presentada en Wu et al. (2024), i.e, el método SES. Además, compararemos el resultado proporcionado por este método con lo que obtenemos mediante otras soluciones clásicas en teoría de juegos cooperativos como las presentadas en el capítulo 1. Con este fin, calcularemos primero el juego asociado. Recordemos que el juego de asignación de segmentos se define como

$$v^{Se}(E) = \sum_{i,j \in N, \mathcal{P}([i,j]) \subseteq E} t_{ij},$$

donde N es el conjunto de segmentos de la autopista, $\mathcal{P}([i,j])$ es el conjunto de segmentos localizados en el camino $[i,j]$ y t_{ij} representa el peaje total recolectado de todos los usuarios que se incorporan en la entrada i y salen en la salida j . Es decir, a cada coalición $E \subseteq N$, se le asigna el peaje recolectado

usando solo los segmentos de E .

Antes de formalizar el juego cooperativo asociado al problema de la autopista española y de entrar en detalle sobre los repartos de peaje proporcionados por las distintas soluciones, haremos un análisis exploratorio de nuestros datos. Esto nos ayudará a entender mejor y a hacer una interpretación más adecuada de las asignaciones dadas por las distintas soluciones (además de que puede proporcionar nuevas perspectivas e implicaciones).

3.1.1. Análisis exploratorio para la autopista española

En España, además de la distancia recorrida, los peajes dependen del tipo de vehículo considerado, el cual se puede dividir en tres categorías¹ en función de su peso: vehículo ligero, vehículo pesado 1 y vehículo pesado 2. El peaje es mayor cuanto mayor sea el peso del vehículo. De este modo, a igual distancia recorrida, un automóvil perteneciente a la categoría de vehículos pesados 2 tendrá que pagar un mayor peaje que los vehículos de las dos categorías inferiores.

La Tabla A.1 proporciona las tarifas asociadas a los distintos tramos de la autopista española para cada tipo de vehículo. Además, considerando que la dirección de tráfico no es importante en nuestro modelo, la Tabla A.2 proporciona el número total de movimientos mensuales efectuados en días laborables usando cada segmento de la autopista en cualquier dirección (derecha o izquierda). A efectos de visualizar mejor estos datos, en la Figura 3.2 presentamos los diagramas de Sankey en función del tipo de vehículo para ilustrar el flujo de automóviles desde cada entrada hasta cada salida de la autopista. El trazo más grueso del diagrama de Sankey significa que el enlace tiene mayor peso, i.e, que por ese trayecto de la autopista circulan un mayor número de vehículos.

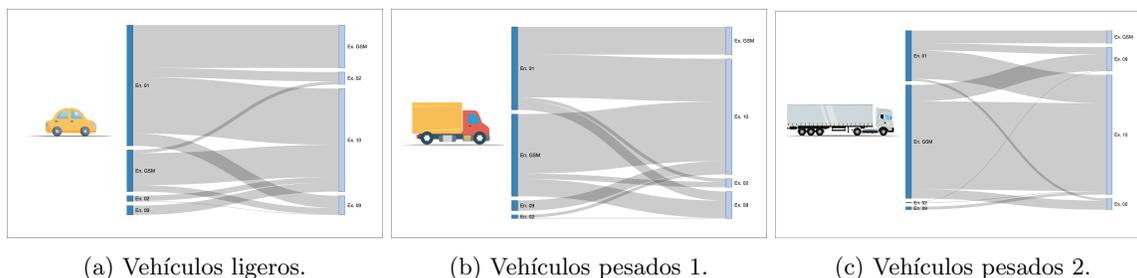


Figura 3.2: Diagramas de Sankey para ilustrar el flujo de tráfico entre las distintas entradas y salidas de la autopista española, fijando el tipo de vehículo.

A la vista del gráfico, obtenemos las siguientes conclusiones:

- Del diagrama de Sankey correspondiente a los vehículos ligeros (Figura 3.2a) observamos que el tramo más usado para esta categoría de automóviles (o el tipo de viaje más común) es aquel que se realiza desde la entrada 01 hasta la salida 10. Es decir, los vehículos ligeros tienden a usar toda la autopista. El segundo tramo más usado es el que va desde la entrada 01 hasta la salida GSM, i.e, aquel que comprende los dos primeros segmentos. Por el contrario, el tramo menos usado es el que va desde la entrada 02 hasta la salida 09, i.e, es el tramo formado por los segmentos centrales de la autopista (3 y 4).
- A la vista del diagrama de Sankey para vehículos pesados 1 (Figura 3.2a) vemos que el tramo más usado para este tipo de vehículos es el que va desde la entrada GSM hasta la salida 10,

¹Los vehículos ligeros abarcan, en esencia, a coches, motocicletas y furgones. Los vehículos pesados 1 abarcan a vehículos de 3 ejes, tales como coches con remolque o camiones de 3 ejes y los vehículos pesados 2 son, generalmente, vehículos con más de 3 ejes. Para una información más detallada sobre los vehículos incluidos en cada categoría, consultar <https://www.audasa.es/la-autopista/tarifas-y-descuentos/tab-id-1>.

seguido del tramo comprendido entre la entrada 01 y la salida 10. El tramo menos usado es el que va desde la entrada 02 hasta la salida 09 (i.e, los segmentos 3 y 4). Vemos, por tanto, que la distribución de los camiones ligeros a lo largo de los segmentos de la autopista es bastante parecida a la de los vehículos ligeros (usan también gran parte de la autopista y usan menos los segmentos centrales). Difieren, no obstante, en la utilización del segmento 1 (en el caso de los vehículos ligeros es el tercer segmento más usado).

- A la vista del diagrama de Sankey para vehículos pesados 2, vemos también que el tramo más usado para este tipo de vehículos es el que va desde la entrada GSM hasta la salida 10, seguido del tramo comprendido entre la entrada 01 y la salida 10. El tramo menos usado es el que va desde la entrada 02 hasta la salida 09 (i.e, los segmentos 3 y 4). Vemos que la distribución de los camiones pesados es muy parecida a la de los camiones ligeros. Una diferencia llamativa es que hay más variabilidad entre el segmento más y menos usado para el caso de los vehículos más pesados.

En la Tabla A.4 y en la Figura 3.3 podemos observar el número de viajes (usuarios) que utilizaron cada uno de los cinco segmentos en los que se divide la autopista. Por ejemplo, para calcular el número de usuarios que usaron el segmento 2, sumamos los usuarios que entraron en la entrada 01 y salieron en las salidas GSM, 02, 09 y 10, así como los usuarios que entraron en la entrada GSM y salieron en las salidas 02, 09 y 10, pues para realizar todos estos viajes necesariamente se tuvo que haber empleado el segmento 2 (al ser todos los segmentos consecutivos). Observamos que el segmento empleado por un mayor número de usuarios para recorrer la autopista es el 2 (representando un 25.96 % de los viajes), seguido del segmento 3. El segmento menos usado es el 5 (con un 16.67 % de usuarios que lo emplearon para realizar alguno de sus viajes). Notamos también que la clase de los vehículos ligeros es la que predomina en todos los segmentos de la autopista, pues este tipo de automóviles es el más común, por lo que hay una mayor proporción de ellos frente a la que existe para vehículos pesados. Además:

- El segmento 2 es por el que circulan más vehículos ligeros, camiones ligeros y camiones pesados.
- El segmento menos usado por los vehículos ligeros es el segmento 5. Además, vemos que hay mucha variabilidad entre el segmento más y menos usado para esta categoría de automóviles. En concreto, el segmento 2 se emplea en un 25.98 % de los viajes realizados en la autopista, mientras que el segmento 5 sólo se emplea en un 16.49 %, i.e, el segmento 2 se emplea aproximadamente en un 10 % más de ocasiones con respecto al segmento 5.
- El segmento más usado por los vehículos pesados 1 es el segmento 2, seguido de cerca por el segmento 4, mientras que el menos utilizado es el segmento 1. En este caso, 31.06 % de los vehículos pesados 1 emplearon el segmento 2 y un 15.61 % usaron el segmento 1. Es decir, los camiones ligeros emplean el segmento 2 el doble de veces con respecto al segmento 1. Vemos que hay más variabilidad en el uso de los segmentos más y menos transitados para este tipo de automóviles con respecto a los ligeros.
- El segmento más usado por los vehículos pesados 2 es, de nuevo, el segmento 2, seguido muy de cerca por el segmento 3. Al igual que ocurría con los vehículos pesados 1, emplean con menos frecuencia el primer segmento de la autopista. En particular, los vehículos más pesados emplean el segmento 2 en el 26.05 % de los viajes, mientras que solo emplean el segmento 1 el 8.01 % de las veces. Es decir, los vehículos más pesados emplean el segmento 2 más de tres veces más que el segmento 1. Observamos que este tipo de vehículos son los que poseen una mayor diferencia/variabilidad entre el segmento más y menos usado.

Observamos que la variabilidad en el uso de los segmentos aumenta con el peso de los vehículos considerados. Esto se debe al hecho de que la varianza disminuye con el aumento del tamaño muestral, i.e: cuántas más observaciones consideremos, menor será la varianza. Esto es precisamente lo que ocurre en nuestro caso, pues los vehículos pertenecientes a la categoría más pesada son los menos frecuentes, y

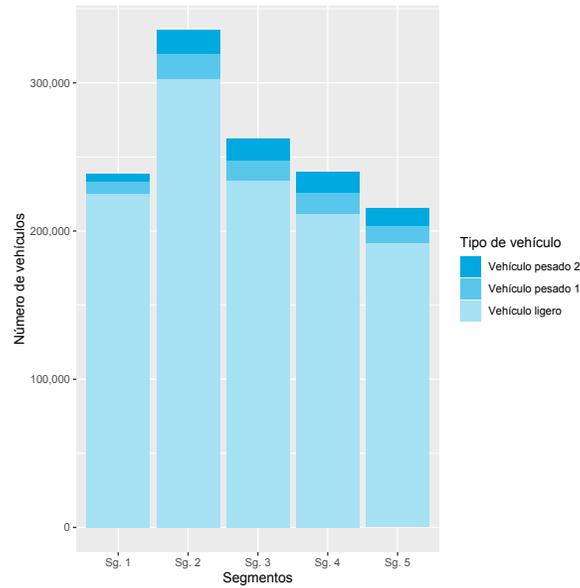


Figura 3.3: Representación gráfica del número de vehículos que transitan por cada segmento, distinguiendo en función del tipo de vehículo considerado.

por ello, son los que presentan una mayor variabilidad. Por el contrario, los vehículos ligeros son los que más abundan en la autopista, i.e, el tamaño muestral considerado en esta categoría es mucho mayor, por lo que la variabilidad se reduce. Además, notamos que, cuando incluimos todos los vehículos en el modelo, la distribución de los vehículos es muy parecida a la que obtenemos considerando únicamente los vehículos ligeros. Esto es debido a que hay muchos más vehículos ligeros en comparación con los de las categorías pesadas. Por tanto, al integrar todos los vehículos, perdemos las “sutilezas” en el uso de los segmentos que conseguimos cuando consideramos cada tipo de vehículo por separado. Vemos que en el caso de los camiones, independientemente de cuál sea su masa, el segmento menos usado en sus viajes es el 1, no el 5 (i.e, el extremo inicial de la autopista).

Para calcular los tramos o conjuntos de segmentos consecutivos más usados considerando todos los tipos de vehículos, tomaremos únicamente los usuarios que emplean todos los segmentos de ese tramo. Por ejemplo, si consideramos el tramo $\{1, 2, 3\}$, consideramos los usuarios que entran en la entrada 01 y salen en la salida 02 (no tendremos en cuenta en el cómputo los usuarios que entran en GSM y salen en GSM o en 02, pues para estos usuarios no intervendría el segmento 1). De este modo, el tramo más usado es el que va desde la entrada 01 hasta la salida 10, i.e, con 112070 usuarios, que representan un 30.68 % del número total de usuarios que circulan por la autopista. El segundo tramo más usado es el que va desde la entrada 01 hasta la salida GSM (2 primeros segmentos), representando un 22.97 % de los usuarios. El tramo menos usado es el que comprende a los usuarios que entran en la entrada 02 y salen en la salida 09, con un porcentaje de apenas 0.26 % respecto al total. Dicho de otro modo, hay muy pocos usuarios que circulen únicamente por los tramos centrales de la autopista (segmentos 3 y 4).

3.1.2. Formulación del problema y soluciones

Para poder definir el problema de asignación de peajes en una autopista, (N, T) , necesitamos: (i) el conjunto de segmentos N , que en nuestro caso es $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, pues tenemos 5 segmentos y (ii) la matriz de peaje T^2 .

² $t_{ij} = Tarifa_{s_{ij}} \times Numerovehiculos_{ij}$.

La matriz de peaje T para el modelo con todos los tipos de vehículos se calcula siguiendo estos pasos: (i) calculamos las matrices de peaje T para cada uno de los tipos de vehículos (vehículos ligeros, camiones ligeros y camiones pesados), que resultan de multiplicar los peajes cobrados a cada vehículo en cada tramo de la autopista por el número de vehículos en ese tramo y (ii) sumamos las tres matrices obtenidas. De este modo, la matriz de peaje final resume el peaje recolectado en la autopista española considerando todos los vehículos que circularon por ella. Las componentes de la matriz final, T , se muestran en la Tabla A.3.

Juego del método SES

Una vez tenemos los ingredientes necesarios para definir el problema de asignación de peajes, el siguiente paso es formular el juego cooperativo asociado al método SES: el juego de asignación de segmentos. Programando la ecuación (2.5) en \mathbf{R} para el caso de 5 jugadores (o menos) y usando la matriz de peaje T dada en la Tabla A.3, obtenemos que v^{Se} es igual a:

$$v^{Se} = [0, 0, 0, 0, 0, 105861.55, 0, 0, 0, 7502.25, 0, 0, 864.80, 0, 13991.80, 151235.20, 105861.55, 105861.55, 864.80, 0, 13991.80, 35966.15, 7502.25, 13991.80, 30757, 252143.10, 151235.20, 119853.35, 30757, 283364.20, 930076.95].$$

Observamos que el peaje recolectado por todos los segmentos a lo largo de un mes es de 930076.95 euros, correspondiente al valor de la coalición total, $v(N)$. Este es el peaje total recolectado.

Una vez definido el juego, estamos en condiciones de calcular distintas soluciones sobre él. En concreto, compararemos los resultados dados por el nucleolus, el valor de Shapley (que coincide con el método SES), el τ -valor, la solución de pérdida igualitaria y la solución AT.

Antes de nada, veremos las propiedades que verifica el juego (N, v^{Se}) con los datos de la autopista española. Para ello, hacemos uso de la librería `CoopGame` de [Staudacher and Anwander \(2019\)](#). Así, obtenemos que v^{Se} es convexo, superaditivo, monótono, esencial (por tanto, tiene sentido calcular el nucleolus, pues el conjunto de imputaciones es no vacío), equilibrado (por tanto, el núcleo es no vacío) y cuasi-equilibrado (por tanto, tiene sentido calcular el τ -valor). Además, como el juego tiene núcleo no vacío, el nucleolus pertenece a él, y como es convexo, el valor de Shapley también es un reparto del núcleo. Asimismo, como el juego es superaditivo, tanto la solución de pérdida igualitaria como la solución AT también son estables, en el sentido de que pertenecen al núcleo del juego. Por último, el τ -valor pertenece al núcleo por ser eficiente y, además, verificar que $\tau(S) \geq v^{Se}(S), \forall S \subseteq N$.

Soluciones del juego del método SES

En la Tabla 3.1 se presentan los repartos del dinero recolectado en la autopista a cada uno de sus segmentos en base a distintas soluciones, junto con el porcentaje de peaje asignado respecto al peaje total recaudado. La Figura 3.4 ilustra estos resultados para una mejor visualización. Mencionamos que el nucleolus y el τ -valor también se calcularon empleando la librería `CoopGame`.

Observamos que el nucleolus proporciona un reparto equitativo, tratando a todos los segmentos por igual (les asigna el mismo dinero a todos). Tanto el τ -valor como el valor de Shapley otorgan un mayor porcentaje de dinero al segmento 2, seguido del segmento 3 (i.e, dan más dinero a los segmentos centrales de la autopista). Sin embargo, estos métodos difieren en el segmento al que asignan un menor porcentaje. En concreto, el valor de Shapley asigna el menor porcentaje al segmento 5, mientras que el τ -valor proporciona la menor cantidad de dinero al segmento 1. Por su parte, la solución de pérdida igualitaria, a diferencia del valor de Shapley y del τ -valor que asignan el mayor porcentaje a los segmentos centrales, asigna la mayor cantidad de dinero a los tramos extremos de la autopista, i.e:

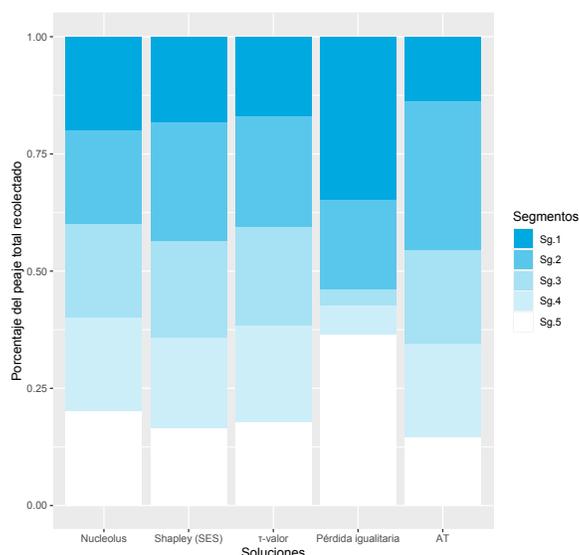


Figura 3.4: Representación gráfica del porcentaje de peaje asignado a cada segmento en función del tipo de solución considerada.

los segmentos 1 y 5, mientras que el segmento que menos recibe es el 3 (i.e, el segmento central). Por último, la solución AT reparte más dinero al segmento 2 y menos al segmento 1.

Intentemos razonar ahora, para cada solución, por qué proporciona ese reparto de dinero (en base a los axiomas que verifique) y decidamos cuál es la solución más adecuada para el problema de asignación de peajes a los segmentos en función del objetivo que tengamos en mente.

Para empezar, todas las soluciones verifican, en este caso, la propiedad de estabilidad, en el sentido de que ningún jugador o coalición va a tener incentivos para desviarse y formar un grupo por su cuenta, pues no va a obtener un reparto mejor. Por tanto, para decidir qué solución es más adecuada en este contexto, tendremos que basarnos en otros criterios, por ejemplo, de justicia.

Observamos que, en este caso, el nucleolus proporciona el mismo reparto que la solución equitativa ($v(N)/n$), que reparte de forma igualitaria el valor de la gran coalición a todos los segmentos. Es decir, cada segmento recibe la media del peaje total recolectado.

¿Por qué el nucleolus proporciona un reparto equitativo? Calculando el vector de excesos con respecto al vector de asignaciones proporcionado por el nucleolus, observamos que las coaliciones que esta solución considera más infelices o inestables son las de tamaño uno, i.e, las coaliciones $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$ y $\{5\}$. En efecto, estas coaliciones son las que tienen un exceso más grande (menos negativo). Vemos que, como el nucleolus considera a todos los segmentos de forma individual como igual de infelices (pues de hecho ningún segmento por sí solo es capaz de generar beneficios), les termina por asignar el mismo reparto a todos. Destacamos también que las siguientes coaliciones más infelices son la $\{1, 2\}$ y la $\{4, 5\}$, i.e, los segmentos que conforman la parte inicial y final de la autopista, respectivamente.

El valor de Shapley, en cambio, se basa en las contribuciones marginales, es decir, lo que aporta cada jugador a la coalición a la que se une, considerando todas las posibles permutaciones de segmentos, de forma que cada componente de esta solución es la expectativa que el segmento i obtiene por participar en el juego v^{Se} . En el caso particular del juego de asignación de peajes en una autopista, el valor de Shapley del juego v^{Se} coincide con el método SES, y como vimos, este método reparte el peaje recolec-

	Segmento 1	Segmento 2	Segmento 3	Segmento 4	Segmento 5
Nucleolus	186015.4 (20 %)	186015.4 (20 %)	186015.4 (20 %)	186015.4 (20 %)	186015.4 (20 %)
Shapley (método SES)	169772.7 (18.25 %)	237100.0 (25.49 %)	189901.8 (20.42 %)	180522.8 (19.41 %)	152779.7 (16.43 %)
τ-valor	157746.5 (16.96 %)	219362.6 (23.59 %)	197630.2 (21.25 %)	189975.5 (20.43 %)	165362.0 (17.78 %)
Pérdida igualitaria	323356.38 (34.77 %)	179234.37 (19.27 %)	31069.43 (3.34 %)	57449.85 (6.18 %)	338966.93 (36.44 %)
AT	129342.6 (13.91 %)	293902.4 (31.60 %)	186900.2 (20.10 %)	184345.0 (19.82 %)	135586.8 (14.58 %)

Tabla 3.1: Asignaciones del peaje recolectado para cada uno de los segmentos de una autopista española en base a distintas soluciones. En paréntesis se representa el porcentaje del peaje asignado respecto al peaje total recolectado.

tado por cualquier usuario de forma equitativa o uniforme entre los segmentos usados por dicho usuario.

Por su parte, el τ -valor supone un compromiso o equilibrio entre las máximas aspiraciones de los jugadores (i.e, su contribución marginal a la gran coalición) y lo mínimo que pueden exigir (que se calcula como el máximo beneficio sobrante del jugador si el resto de jugadores de la coalición llevasen su pago de utopía). En nuestro caso, realizando los cálculos en \mathbb{R} con ayuda de la librería `CoopGame`, obtenemos que el vector de mínimos derechos del juego v^{Se} es $m(N, v) = (0, 0, 0, 0, 0)$ y el pago de utopía de los jugadores es $M(N, v) = (646712.8, 899320, 810223.6, 778841.8, 677933.9)$. Vemos que el segmento que más contribuye a la gran coalición (i.e, al peaje total recolectado) es el segmento 2, seguido del segmento 3. Por el contrario, el que menos contribuye es el segmento 1. Como el vector de mínimos derechos es 0, el τ -valor resulta en $\tau(N, v) = \alpha \cdot M(N, v)$, i.e, es proporcional a las máximas aspiraciones de los jugadores. Esto no es de extrañar, pues el τ -valor cumple la propiedad de proporcionalidad restringida. Así, obtenemos que el τ -valor asigna, aproximadamente, 1/4 de la contribución marginal que cada segmento realiza a la gran coalición.

De este modo, tenemos dos posibles enfoques. Si pensamos que es más justo asignar más dinero al segmento que genera un mayor peaje (que contribuye más a la gran coalición), entonces el τ -valor es un reparto más natural. No obstante, si pensamos que es más justo asignar de forma proporcional al número de usuarios que usan cada uno de los segmentos, entonces sería más adecuado usar el valor de Shapley, pues el segmento 1 es más empleado que el segmento 5 (aunque, mirando la Figura 3.3, también vemos que el segmento 1 lo usan más ligeros que el 5, pero hay más pesados usando el segmento 5 que el 1). Un posible motivo para proporcionar más beneficios a los segmentos más usados es que éstos sufren un mayor desgaste, por lo que tendría sentido destinar el mayor dinero a estos segmentos para su posible reparación y/o mantenimiento. Por ejemplo, ya vimos en el análisis exploratorio que,

con independencia del tipo de vehículo considerado, el segmento 2 es el más utilizado. Es, por tanto, el segmento que soporta un mayor peso de los vehículos y el que se va a desgastar más rápido a largo plazo. Así, desde un punto de vista práctico, tiene sentido destinar más peaje a este segmento a fin de sufragar los costes derivados de su mantenimiento.

Otro aspecto a tener en cuenta es que el τ -valor no satisface la propiedad de aditividad. Recordemos que la interpretación de este axioma en el contexto del problema de asignación de peajes en una autopista era que el reparto del peaje no depende de la frecuencia con la que se asigna. En nuestro caso, como los datos de tráfico se tomaron a lo largo de un mes, esta propiedad se traduciría en que sería equivalente repartir las ganancias al cabo de un día, durante 30 días, que repartir los beneficios recaudados al final del mes. El hecho de que el τ -valor no satisfaga este axioma implica que el reparto del peaje a cada segmento depende de la frecuencia con la que se distribuya. Dicho de otro modo, con el τ -valor obtendríamos repartos distintos en función de si asignamos dinero al cabo de un día o al cabo de una mes. Esto tampoco parece que sea muy adecuado en este contexto.

Por otro lado, la solución de pérdida igualitaria es la media aritmética de la aportación adicional que hace cada segmento cuando consideramos que la dirección de tráfico es de izquierda a derecha y la aportación extra cuando consideramos la circulación de derecha a izquierda. Vemos que este método proporciona un menor beneficio a los segmentos centrales de la autopista (segmentos 2, 3 y 4) y un beneficio mayor únicamente a los segmentos extremos, donde un usuario entra (segmento 1) o sale (segmento 5) de la autopista. Además, vemos que esta solución es la que presenta mayor variabilidad, pues los segmentos 1 y 5 reciben valores muy por encima de la media, mientras que los segmentos 3 y 4 reciben valores muy por debajo.

Por último, la solución AT se comporta de modo similar al τ -valor, en el sentido de que proporciona una mayor asignación del peaje al segmento 5 en relación al segmento 1. No obstante, asigna más al segmento 2 a costa de reducir el peaje del resto de segmentos. De hecho, la solución AT es, de todos los métodos, la que proporciona un menor beneficio a los segmentos extremos. Ya vimos en el apartado de la solución AT para grafos lineales que, en el caso de tener un grafo lineal y cuando la unión de un jugador extremo a una coalición formada por los jugadores restantes no incrementa demasiado el valor de la gran coalición y su valor individual también es pequeño, la solución AT resulta en un reparto en los que estos jugadores extremos reciben un pago por debajo de la media. Esto es precisamente lo que sucede en nuestro caso, pues la asignación individual de cada segmento es nula ($v(i) = 0, \forall i = 1, \dots, 5$) y la contribución marginal de los segmentos 1 y 5 también es baja. La expresión de la solución AT para estos dos segmentos, siguiendo la ecuación (1.4) es

$$\begin{aligned} AT_1 &= \frac{1}{5}v(N) - \frac{1}{5}v(N \setminus \{1\}) = \frac{1}{5}(v(N) - v(N \setminus \{1\})), \\ AT_5 &= \frac{1}{5}v(N) - \frac{1}{5}v(N \setminus \{5\}) = \frac{1}{5}(v(N) - v(N \setminus \{5\})). \end{aligned}$$

Es decir, el reparto asignado a los segmentos extremos es el promedio de la contribución marginal de estos segmentos a la gran coalición. Vemos que en nuestro caso la media es $v(N)/5 = 186015.4$ y tanto el segmento 1 como el 5 tienen pagos muy por debajo de este valor.

Destacamos que, como vimos en el análisis exploratorio, el segmento menos usado por los vehículos ligeros es el segmento 5, mientras que para los vehículos pesados es el segmento 1. Por tanto, el reparto proporcionado por el valor de Shapley es más acorde con la distribución de los vehículos ligeros en la autopista, mientras que el reparto proporcionado por el τ -valor y por la solución AT supondrían una asignación de beneficios más adecuada teniendo en cuenta la distribución de los vehículos pesados 1 y 2, pues estas dos últimas soluciones aportan una menor cantidad de beneficios al segmento menos usado por este tipo de automóviles.

A efectos de comparar mejor las soluciones, obtendremos correlaciones entre ellas. La Figura 3.5 muestra las nubes de puntos correspondientes a cada par de posibles combinaciones entre las soluciones. Cuánta más estrecha la nube de puntos entre dos métodos, más parecidos serán. En cambio, cuánto más dispersa sea, más diferentes son. Observamos que parece haber una relación muy estrecha entre el valor de Shapley y la solución AT, i.e., estas soluciones aportan resultados parecidos de distribución del peaje. De hecho, observamos un patrón creciente y una relación lineal entre ellas, pues los puntos se sitúan muy próximos a la recta de regresión. Por tanto, para un incremento dado de la solución AT (respectivamente del valor de Shapley) se produce un correspondiente incremento constante en el valor de Shapley (respectivamente solución AT). En menor grado, también observamos relación positiva entre el valor de Shapley y el τ -valor, así como entre el τ -valor y la solución AT. Por otro lado, cuando comparamos estos tres métodos con la solución de pérdida igualitaria, observamos una dependencia negativa, i.e.: para los segmentos a los que el valor de Shapley, el τ -valor y la solución AT les proporcionan un reparto relativo elevado, la solución de pérdida igualitaria les da un reparto muy bajo, mientras que los segmentos a los que la solución de pérdida igualitaria les da un reparto muy alto son los más perjudicados por el resto de soluciones, pues son los que reciben menos dinero. Asimismo, observamos un dato “atípico” que se aleja de la tendencia marcada por la recta de regresión. Este dato es el que corresponde al segmento 2. Por último, observamos que no parece haber relación alguna entre la distribución dada por nucleolus con la asignación proporcionada por los demás métodos.

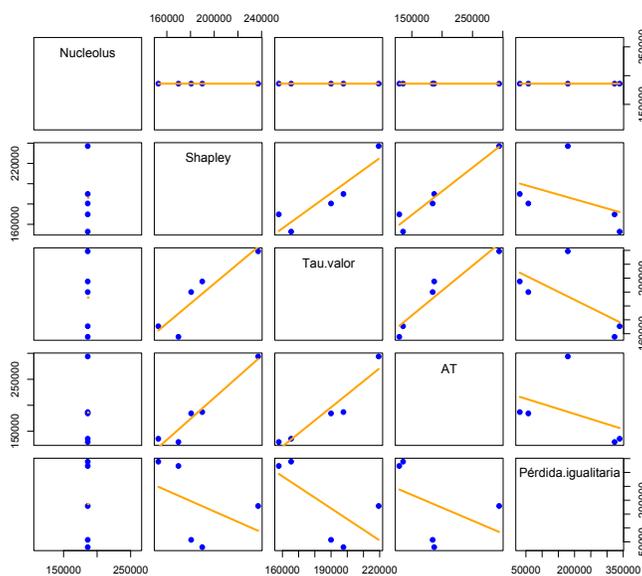


Figura 3.5: Diagramas de dispersión entre las soluciones presentadas en la Tabla 3.1. En naranja se representa la recta de regresión ajustada para los datos.

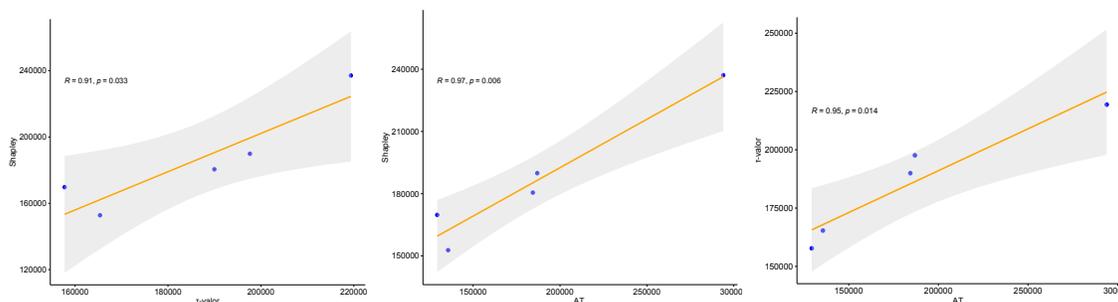
La Tabla 3.2 proporciona los coeficientes de correlación de Pearson entre el valor de Shapley, el τ -valor, la solución AT y la solución de pérdida igualitaria. Observamos que la relación más fuerte es la que se da entre la solución AT y el valor de Shapley. También observamos que los coeficientes de correlación entre la solución de pérdida igualitaria y el resto de soluciones son negativos, en consonancia con la dependencia lineal negativa que observábamos en los diagramas de dispersión de la Figura 3.5.

Para analizar si estas correlaciones son significativas, equivalentemente, si la relación lineal entre las soluciones es significativa, en la Figura 3.6 proporcionamos los intervalos de confianza al nivel 95 % para los coeficientes de correlación de Pearson (R) asociados al valor de Shapley, τ -valor y solución AT,

Correlación	Shapley	τ -valor	AT	Pérdida igualitaria
Shapley	1	–	–	–
τ -valor	0.908	1	–	–
AT	0.971	0.949	1	–
Pérdida igualitaria	–0.41	–0.667	–0.425	1

Tabla 3.2: Coeficientes de correlación de Pearson entre distintas soluciones.

junto con el p-valor asociado para medir el nivel de significación. Observamos que todos los coeficientes de correlación son positivos fijado un nivel de significación del 5%. Sin embargo, el más significativo es el que tiene asociado un p-valor más pequeño, i.e., el correspondiente a la correlación entre la solución AT y el valor de Shapley. Observamos también que los intervalos de confianza son estrechos, sobre todo en el caso de la correlación entre la solución AT y el valor de Shapley, indicando que hay un bajo error en la estimación del coeficiente (dicho de otro, que la estimación del coeficiente de correlación es precisa).

Figura 3.6: Intervalos de confianza al 95% y nivel de significación para las correlaciones entre el valor de Shapley, τ -valor y la solución AT.

Por último, en la Figura 3.7 se muestran los intervalos de confianza para los coeficientes de correlación con la solución de pérdida igualitaria. En este caso, ninguna correlación es significativa, pues los p-valoros son mayores que 0.05. Por tanto, no habría una relación lineal significativa entre la solución de pérdida igualitaria con el resto de soluciones. Además, notamos que los intervalos de confianza son más anchos que los de la Figura 3.6, indicando que la estimación de estos coeficientes de correlación es menos precisa (mayor error).

Queremos aclarar que las conclusiones obtenidas para las correlaciones hay que tomarlas con precaución, debido al bajo tamaño muestral del que disponemos (solo tenemos 5 observaciones). En

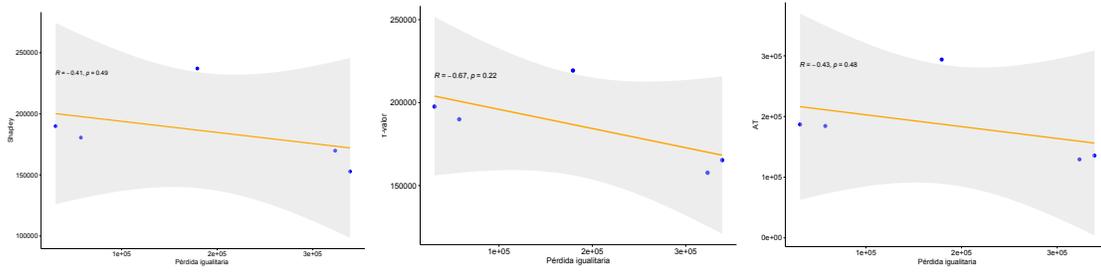


Figura 3.7: Intervalos de confianza al 95 % y nivel de significación para las correlaciones entre el valor de Shapley, τ -valor y la solución AT con la solución de pérdida igualitaria.

particular, para calcular la correlación de Pearson, se asume que las soluciones tienen que seguir una distribución normal y que los datos son homocedásticos (i.e, que la varianza de los errores del modelo de regresión es la misma para cada observación i , con $i = 1, \dots, n$), algo que, con tan pocos datos, es difícil que se cumpla. Lo mismo ocurre con los intervalos de confianza (tampoco resultan del todo fiables si no se verifican estas hipótesis). En este caso, como estamos empleando los coeficientes de correlación para un análisis meramente descriptivo (no inferencial), el incumplimiento de alguna de estas hipótesis no tiene un impacto muy grande.

Juego de enlaces y ranking de segmentos

A continuación, calcularemos el valor de Shapley del juego de enlaces asociado al juego de conectividad aditivo ponderado (N, v^{awconn}) definido en (1.6) para obtener un ranking de los segmentos, a efectos de medir su importancia. Consideraremos que todos los nodos tienen la misma importancia, por lo que tomaremos $w_i = \frac{1}{6}$, pues como tenemos 5 segmentos (i.e, 5 arcos del grafo), el número de nodos es igual a 6. Para asignar peso a los enlaces, consideraremos que cada segmento tendrá un peso proporcional al número de viajes que utilizan cada segmento, de forma que $k_{(1:2)} = 0.184$ (segmento 1), $k_{(2:3)} = 0.259$ (segmento 2), $k_{(3:4)} = 0.203$ (segmento 3), $k_{(4:5)} = 0.185$ (segmento 4), $k_{(5:6)} = 0.166$ (segmento 5). Notar que, tanto para los nodos como para los segmentos, estamos tomando los pesos normalizados (i.e, suman 1).

El juego de enlaces asociado a (N, v^{awconn}) es

$$(r/g)_{v^{awconn}}(A) = (v^{awconn}/A)(N) = \sum_{T \in A/g} v^{awconn}(T), \quad \forall A \subseteq g, \quad (3.1)$$

donde $g = \{(1:2), (2:3), (3:4), (4:5), (5:6)\}$ es el conjunto de enlaces de la autopista española y A/g son las componentes conexas maximales de enlaces inducidas en g mediante los arcos presentes en la coalición A . Para calcular el término $v^{awconn}(T)$ en (3.1), tenemos que emplear las expresiones 1.5 y 1.6 y tener en cuenta si la coalición de arcos A es o no conexas. Si es conexas, podemos aplicar directamente la función f a la coalición, y si no es conexas, aplicaríamos f a cada una de las coaliciones conexas inducidas por A en el grafo g , por lo que el valor de v^{awconn} sería la suma de los valores obtenidos al aplicar f a cada una de dichas coaliciones conexas.

De este modo, la función característica para el juego de enlaces $(g, (r/g)_{v^{awconn}})$ es

$$(r/g)_{v^{awconn}} = [0.061, 0.086, 0.068, 0.062, 0.055, 0.129, 0.129, 0.123, 0.116, 0.129, 0.148, 0.141, 0.101, 0.123, 0.092, 0.173, 0.191, 0.184, 0.162, 0.184, 0.153, 0.173, 0.184, 0.178, 0.135, 0.216, 0.228, 0.221, 0.196, 0.216, 0.259].$$

Comprobando las propiedades del juego $(r/g)_{v^{awconn}}$ en \mathbf{R} , obtenemos que es monótono, pero no es

ni superaditivo ni convexo. Además, tampoco es esencial ni cuasi-equilibrado, por lo que no podemos calcular el nucleolus ni tampoco el τ -valor. Finalmente, el juego tampoco es equilibrado, con lo cual el *core* es vacío. En la Tabla 3.3 podemos ver la asignación del valor de Shapley para cada segmento y en la Tabla 3.4 el ránking obtenido (un segmento es más importante cuánto mayor sea su componente del valor de Shapley). De este modo, vemos que el segmento 2 es el que más contribuye a la conectividad de toda la autopista, mientras que el segmento que menos contribuye es el 4.

	Segmento 1	Segmento 2	Segmento 3	Segmento 4	Segmento 5
Valor de Shapley	0.0521	0.0705	0.0483	0.0420	0.0461

Tabla 3.3: Valor de Shapley del juego de enlaces $(g, (r/g)_{v^{awconn}})$.

Posición	$\varphi(g, (r/g)_{v^{awconn}})$
1	Segmento 2
2	Segmento 1
3	Segmento 3
4	Segmento 5
5	Segmento 4

Tabla 3.4: Ránking de los segmentos de una autopista española.

Destacamos que, si normalizamos³ los valores de la Tabla 3.3 (para que sumen 1) y los multiplicamos por el peaje total, dado por $v^{Se}(N) = 930076.95$, obtenemos otro reparto del peaje. En concreto, el valor de Shapley normalizado es $(0.2012, 0.2722, 0.1865, 0.1622, 0.1780)$, por lo que una nueva distribución del peaje entre los cinco segmentos de la autopista española vendría dado por

$$(0.2012 \cdot 930076.95, 0.2722 \cdot 930076.95, 0.1865 \cdot 930076.95, 0.1622 \cdot 930076.95, 0.1780 \cdot 930076.95) = (187131.5, 253166.9, 173459.4, 150858.5, 165553.7).$$

³El valor de Shapley normalizado se obtendría dividiendo cada uno de los elementos de la Tabla 3.3 por la suma total de los valores, que es: $0.052 + 0.0705 + 0.0483 + 0.0420 + 0.0461 = 0.259$.

Observamos que esta nueva distribución del peaje asigna el mayor número de beneficios al segmento 2, mientras que el segmento más perjudicado es el segmento 4. Notamos que, a pesar de que al segmento 4 le asignamos un mayor peso que al segmento 5 en el juego, el segmento 5 recibe un reparto del peaje mayor. Asimismo, los segmentos 1 y 4 tenían unos pesos muy parecidos (0.184 y 0.185, respectivamente), pero su importancia es muy distinta.

Para terminar esta sección, analizaremos las distribuciones del peaje proporcionadas por distintas soluciones desde un punto de vista económico, mediante el índice de Gini y la curva de Lorenz.

El índice o coeficiente de Gini (Gini, 1912) es la medida más popular para cuantificar el grado de inequidad o desigualdad socioeconómica, especialmente la referida a la distribución de beneficios o ingresos. El índice de Gini se puede derivar a partir de la curva de Lorenz (Lorenz, 1905) como se puede ver en la Figura 3.8, donde en el eje de abscisas se organizan las unidades de análisis (individuos, países...) en base a la unidad de la variable para la cual se está representado la distribución. Por ejemplo, si consideramos la variable X como una población y la variable Y como los ingresos que recibe esa población, el eje de abscisas ordenaría a los individuos en función del dinero que ganan de menor a mayor (i.e, desde los más pobres, hasta los más ricos). Si los valores de la distribución acumulada Y están perfectamente alineados con la distribución acumulada de la población X , entonces la curva de Lorenz resulta en una línea recta de 45 grados también conocida como línea de equidad máxima. De este modo, el índice de Gini se calcularía como la proporción entre el área encerrada bajo la línea de equidad máxima y la curva de Lorenz, dividido por el área total bajo la línea de equidad. Vemos que el área entre la curva de Lorenz y la línea de equidad es una medida de discrepancia entre el ingreso y la distribución entre la población (por eso el índice de Gini es una medida de inequidad). El índice de Gini toma valores en el intervalo unidad, $[0,1]$. Cuánto más próximo esté el índice de cero (i.e, cuánto más pequeña sea el área A), más equitativa será la distribución de los ingresos. Por el contrario, si el índice está cercano al 1 (i.e, si el área, A , es grande) entonces más desigual será la distribución.

Las líneas azul y naranja intersecando al comienzo y al final de la curva de Lorenz del panel derecho de la Figura 3.8 muestran aspectos específicos de la distribución. La línea C corta la curva de Lorenz donde el 40% de la población gana sólo el 10% de ingresos, mientras que la línea D corta la curva de Lorenz en el punto donde el 10% de la población más "rica" gana, aproximadamente, el 28% de los ingresos más altos $((1 - 0.72) \cdot 100)$. Explorando estos aspectos de la distribución es posible tener un mejor entendimiento de cómo de variable es la distribución de los ingresos.

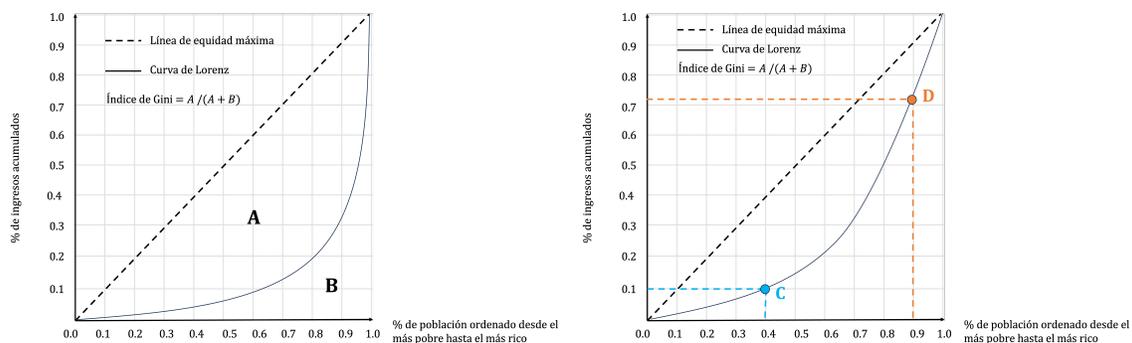


Figura 3.8: El índice de Gini se calcula como el ratio del área comprendida entre la línea de equidad máxima y la curva de Lorenz (A) dividido por el área total bajo la línea de equidad ($A + B$).

A pesar de que el índice de Gini o la curva de Lorenz son muy populares en economía, su uso no está limitado a este ámbito. En particular, han sido empleados en numerosos estudios relativos al área

del transporte, entre los que destacamos el artículo de [Delbosc and Currie \(2011\)](#), donde se emplea la curva de Lorenz para medir la distribución del transporte público entre la población de Melbourne, [Juan et al. \(2008\)](#) aplican este concepto para analizar la justicia de los peajes cobrados a los usuarios de una carretera, [Gordon and Peters \(2011\)](#) miran el impacto de los beneficios del peaje en los vehículos y [Pavkova et al. \(2016\)](#) emplea estas medidas para seleccionar qué enlaces de una red de tranvía deben recibir un trato preferencial a efectos de mejorar la eficiencia del sistema de transporte. Dicho de otro modo, para decidir en qué enlaces se debe invertir en tráfico prioritario o en medidas de transporte público para reducir los problemas de congestión.

Calculando el índice de Gini y las curvas de Lorenz en  con ayuda del paquete `ineq`, obtenemos los resultados que se muestran en la Figura 3.9.

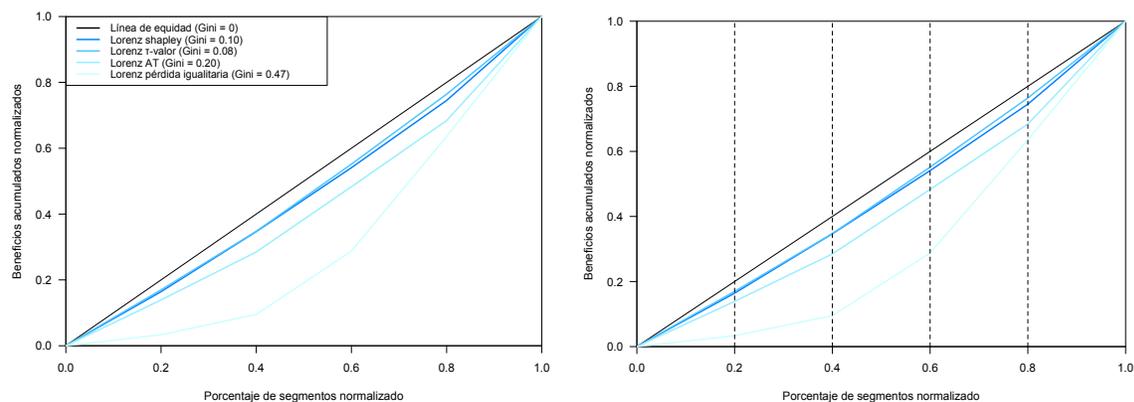


Figura 3.9: Curvas de Lorenz e índices de Gini para el valor de Shapley, τ -valor, AT y la solución de pérdida igualitaria. En negro se representa la línea de equidad máxima.

De aquí, extraemos las siguientes conclusiones:

- Hay una diferencia significativa en la distribución del peaje entre las distintas soluciones, que se confirma tanto por la separación de las curvas de Lorenz, como por la variación en el índice de Gini, que va desde 0.08 hasta 0.47.
- El método que muestra una mayor desigualdad en el reparto del peaje a los distintos segmentos es la solución de pérdida igualitaria, para la cual vemos que la mitad de los segmentos (el 50%) reciben el 20% de los beneficios más bajos. Por el contrario, el 20% de los segmentos que más dinero reciben (los segmentos más “ricos”) concentran alrededor del 40% de los beneficios más elevados.
- La solución más equitativa es el τ -valor, pues como vemos, la distribución del peaje correspondiente a esta solución es la que más se acerca a la distribución asociada a la línea de equidad máxima y es la que posee un índice de Gini más bajo (de 0.08). Observamos también que la curva de Lorenz del τ -valor coincide con la curva de Lorenz del valor de Shapley para el 50% de los segmentos más “pobres”, mientras que estas dos soluciones discrepan en la asignación del peaje para los segmentos más “ricos”.
- Resulta curioso que, aunque previamente habíamos concluido mediante los coeficientes de correlación que el valor de Shapley y la solución AT eran los métodos más parecidos en cuanto a distribución de peaje, vemos que el reparto de peaje de la solución AT es mucho más desigual que el proporcionado por el valor de Shapley. Lo mismo sucede cuando comparamos el τ -valor con la solución AT.

3.2. Métodos ExES y EnES: autopista australiana

A continuación, ilustraremos la aplicación de los métodos ExES y EnES sobre unos datos reales de la autopista australiana Hills M2⁴, propiedad de la compañía Transurban. Los precios de las tarifas en Australia se actualizan cada 4 meses y dependen, tanto del punto de peaje por el que se pasa, como de la clase a la que pertenezca el vehículo, que puede ser clase A (típicamente motos y coches) o clase B (típicamente camiones y vehículos pesados⁵). Aclaramos que los puntos de peaje se localizan a lo largo de la autopista, pero no se corresponden con sus salidas y entradas⁶. En nuestro caso, tomaremos los datos de tráfico de julio del año 2022, que se corresponde con el primer mes del año financiero 2023.

A diferencia de lo que ocurría en el modelo de Wu et al. (2024), en la autopista Hills M2 los vehículos pueden circular en dos direcciones: *eastbound* y *westbound*. Como en nuestros datos solo disponemos de la información relativa al número de vehículos que pasan por cada punto de peaje en cada dirección de tráfico, para construir los juegos de asignación de salidas y de entradas consideraremos que los puntos de peaje ubicados en la dirección *eastbound* son las salidas de la autopista, mientras que aquellos localizados en la dirección *westbound* son las entradas (ver Figura 3.10). En el caso del juego de asignación de salidas, el peaje de cada segmento se recolectará en la salida (punto de peaje) ubicado al final de dicho segmento, mientras que en el juego de asignación de entradas el peaje de cada segmento se recolecta en la entrada localizada al comienzo del mismo. Siguiendo esta línea, el tráfico de cada segmento i , con $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ vendrá determinado por el número de vehículos que pasen por el correspondiente punto de peaje i (entrada o salida, dependiendo del juego que estemos considerando).

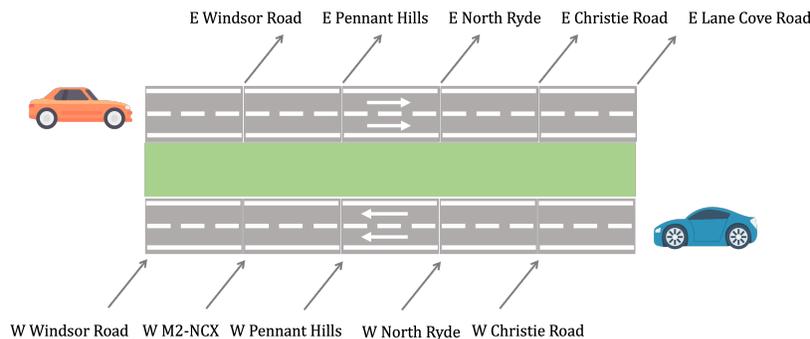


Figura 3.10: Representación de la autopista Hills M2, junto con el nombre de sus entradas (precedidas de una W) y salidas (precedidas de una E). A mayores, se indican con flechas los dos sentidos de circulación permitidos.

Para formular el juego de asignación de salidas, consideraremos como salidas de la autopista los puntos de peaje que se encuentran cuando el tráfico circula de izquierda a derecha. Las salidas en esta dirección irán precedidas de una E (de *eastbound travel*). En cambio, para construir el juego de asignación de entradas, consideraremos las entradas que se ubican a lo largo de la autopista cuando los coches siguen la dirección derecha-izquierda. Las entradas siguiendo esta dirección irán precedidas por una W (de *westbound travel*). La información sobre los puntos de peaje y la tarifa que se cobra en cada uno de ellos en función del tipo de vehículo considerado se puede ver en la Tabla A.5.

⁴Los datos de tráfico relativos a autopistas de peaje que son propiedad total o parcial de Transurban se pueden encontrar en el portal <https://nswtollroaddata.com>

⁵En Australia, las condiciones sobre los vehículos varían en función de la autopista de peaje por la que transitamos, independientemente de que el automóvil pertenezca a la clase A o B. Si estamos en la autopista Hills M2, se consideran como vehículos de la clase A aquellos que miden hasta 2.8 metros de altura y con una longitud de 12.5 metros o menos.

⁶Información sobre las salidas y entradas de la autopista Hills M2 se puede encontrar en <https://www.linkt.com.au/using-toll-roads/about-sydney-toll-roads/hills-m2/sydney>

En la Figura 3.11 representamos una ampliación de la carretera Hills M2, creada en  usando la librería `Leaflet`. En ella se puede ver las direcciones de circulación permitidas en esta autopista, y la ubicación de la salida E North Ryde y la entrada W North Ryde, marcadas con un indicador azul. Para una visualización completa e interactiva del mapa, el lector puede descargar el archivo `html` correspondiente a través del siguiente enlace: https://nubeusc-my.sharepoint.com/:u:/g/personal/paula_soto_rodriguez_rai_usc_es/Eb3VHF--7hhGv1XxJKOT_GkBGp1dC0VmmdpXbH8qcjaNsQ?e=uC0764.

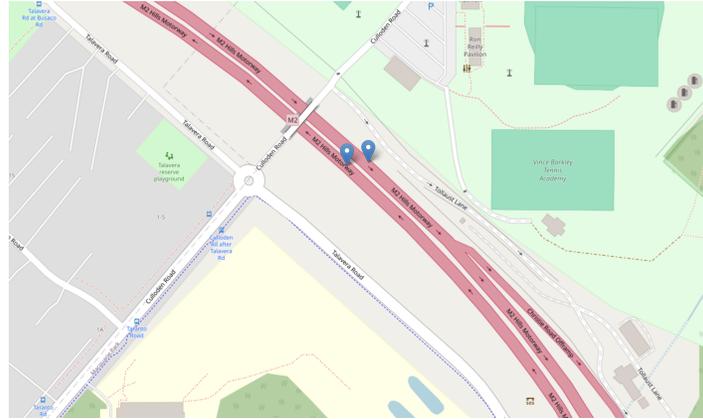


Figura 3.11: Ampliación del mapa para la autopista Hills M2. El indicador azul situado en la dirección izquierda-derecha representa la ubicación de la salida E North Ryde, mientras que el localizado en la dirección derecha-izquierda se corresponde con la entrada W North Ryde.

3.2.1. Juego de asignación de salidas

El objetivo que nos planteamos en este apartado es cómo podemos repartir el peaje recaudado en la autopista Hills M2 considerando un sistema de peaje fijo donde el peaje se recolecta en las salidas de la autopista. En este caso, la representación gráfica del problema se hace mediante un grafo dirigido, como el que se observa en la Figura 3.12, en el cual la dirección viene dada por el flujo de tráfico de izquierda a derecha.

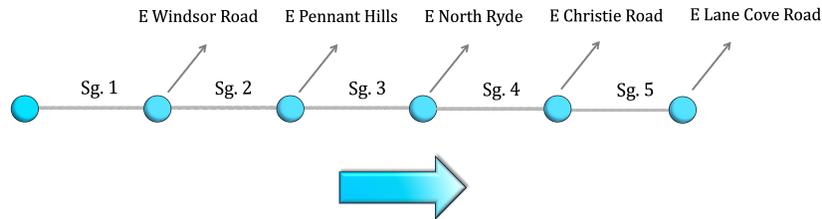


Figura 3.12: Salidas de la autopista australiana Hills M2, junto con una flecha indicando la dirección de circulación.

Por la naturaleza del problema, solo tiene sentido considerar el juego de asignación de salidas (N, v^{Ex}) , donde v^{Ex} viene dado en la ecuación (2.6). Para definir este juego necesitamos conocer el número de segmentos, que en nuestro caso es $n = 5$ (pues tenemos 5 segmentos) y la matriz de peaje T . Para calcular la matriz de peaje, además de las tarifas que se cobran en cada salida, precisamos saber el número de vehículos que circulan por cada tramo de la autopista. Las Tablas A.6 y A.7 proporcionan las matrices de tarifas y de tráfico para las salidas de la autopista Hills M2, respectivamente. Vemos

que en la matriz de tarifas, los elementos ubicados en cada columna son idénticos, pues lo que importa en un problema de asignación de salidas es lo que se cobra en las salidas, a diferencia de lo que ocurría con el problema de asignación de segmentos, donde lo que importaba era la distancia recorrida (i.e, cuántos segmentos de la autopista recorrieses, desde una cierta entrada hasta una determinada salida). Además, en este caso, la matriz de tráfico es diagonal, pues los datos que tenemos no revelan información sobre el uso de los tramos de la autopista. Por ejemplo, sabemos cuántos vehículos pasaron por los dos primeros puntos de peaje, pero no sabemos qué porcentaje de los automóviles que pasaron por el primer punto de peaje pasaron también por el segundo. Es por esto que la matriz de tráfico sólo revela el número de movimientos que hay en cada segmento individual, pero no de forma conjunta (no hay información sobre el número de vehículos que entraron en la entrada 1 y salieron en la salida 2). Para una mejor visualización, en la Figura 3.13 mostramos el tráfico de cada segmento en función del tipo de vehículo. De aquí, concluimos:

- El segmento más usado es el segmento 3, independientemente del tipo de vehículo considerado. En otras palabras, la salida más frecuentada en la autopista Hills M2 es la correspondiente a North Ryde. Del mismo modo, el segmento menos usado es el segmento 4, cuya salida asociada es la de Christie Road. Observamos que hay mucha variabilidad entre el segmento más y menos usado. En concreto, del porcentaje total de viajes, el segmento 3 se empleó en 72.29 % de ellos para los vehículos de la clase A, mientras que el segmento 4 sólo se utilizó en un 1.97 %. En cambio, en la categoría B, el segmento 3 se empleó un 77.54 % de las veces y el segmento 4 apenas un 1.25 %.
- Observamos, de nuevo, que el tipo de vehículo más común es el de la clase A, que abarca en esencia a coches y motocicletas, siendo menos habituales los camiones y vehículos pesados. Asimismo, los vehículos de la clase B usan menos los segmentos finales de la autopista (segmentos 4 y 5), mientras que los automóviles de la clase A usan con menos asiduidad el primer segmento y el penúltimo, pero usan con bastante frecuencia el último segmento.

Para calcular la matriz de peaje final T , procedemos como sigue: (i) calculamos la matriz de peaje para cada categoría de vehículo (que se obtiene como resultado de multiplicar las tarifas cobradas a cada clase y el número de vehículos de cada segmento) y (ii) sumamos las dos matrices de peaje. En este caso, la matriz T es diagonal, i.e, satisface que $t_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Los t_{ii} se muestran en la Tabla A.8. De este modo, el juego de asignación de salidas es equivalente al problema del río contaminado de Ni and Wang (2007) y el método ExES coincidirá con el método UES.

Ahora que ya disponemos de la información necesaria para definir el juego de asignación de salidas, estamos en condiciones de calcular la función característica v^{Ex} . Programando esta función en , obtenemos que es igual a:

$$v^{Ex} = [14553368.3, 14217964, 13283435.9, 619495.1, 457280, 14553368.3, 14553368.3, 14553368.3, 14553368.3, 14217964, 14217964, 14217964, 13283435.9, 13283435.9, 619495.1, 14553368.3, 14553368.3, 14553368.3, 14553368.3, 14553368.3, 14217964, 14217964.0, 14217964, 13283435.9, 14553368.3, 14553368.3, 14553368.3, 14553368.3, 14217964, 14553368.3]$$

Vemos que hay muchos elementos repetidos en la función característica. Esto viene de la construcción de v^{Ex} (ecuación (2.6)) donde, para determinar el valor asignado a una coalición, únicamente es relevante el segmento que viene primero según el orden 12345. De este modo, todas las coaliciones que contengan al segmento 1 van a generar el mismo valor que el segmento 1 por sí mismo. Lo mismo sucede para el resto de segmentos. Por este motivo, las coaliciones que más dinero recolectan son aquellas que contienen al segmento 1, pues al incluir este segmento se recolecta no solo el dinero de la salida 1, sino también el dinero recaudado en las salidas sucesivas (2, 3, 4 y 5).

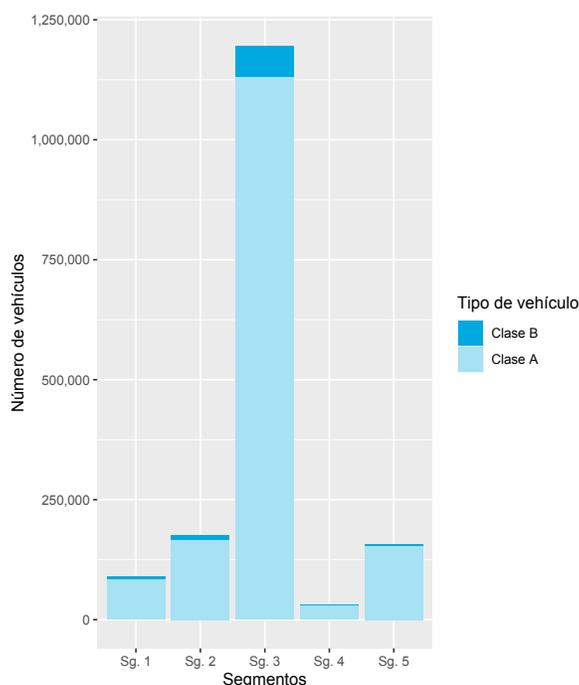


Figura 3.13: Representación gráfica del número de movimientos en cada segmento de la autopista Hills M2, distinguiendo en función del tipo de vehículo.

A continuación, comprobaremos las propiedades del juego (N, v^{Ex}) con ayuda de la librería `CoopGame`. En este caso, el juego resultante es monótono, pero no es ni superaditivo ni convexo. Además, tampoco es esencial ni cuasi-equilibrado, por lo que no existen ni el nucleolus ni el τ -valor. Finalmente, el juego tampoco es equilibrado, con lo cual el *core* es vacío. Así, el valor de Shapley no pertenece al núcleo y, por tanto, no es una solución estable. En la Tabla 3.5 mostramos las asignaciones de peaje a cada uno de los segmentos en base al valor de Shapley (que coincide con el método ExES) y la solución equivalente superior.

El valor de Shapley proporciona un reparto decreciente, i.e: el segmento 1 es el que más recibe, seguido de los segmentos 2, 3, 4 y 5. Como el valor de Shapley coincide con el método ExES, lo que sucede es que se reparte todo el peaje recolectado en una salida de forma equitativa entre el correspondiente segmento y todos sus segmentos superiores. Como el segmento 1 es el superior del resto de segmentos, siempre va a recibir un porcentaje de peajes del resto de coaliciones que se forman, incluso de aquellas que no lo contienen.

Fijándonos ahora en las contribuciones de cada segmento a la gran coalición, notamos que el segmento 1 recibe el mayor pago según el valor de Shapley, a pesar de que solo contribuye al 2.3% del peaje total recolectado⁷. Por el contrario, el segmento 3 recibe un 29.91% de beneficios a pesar de que contribuye al 87.01% del peaje total que se recolecta. La media del peaje total recolectado entre los cinco segmentos es de 2910674 euros. Vemos que los segmentos 4 y 5 reciben una asignación muy por debajo de la media con el reparto proporcionado por el valor de Shapley, mientras que el resto de segmentos reciben un beneficio muy superior. Como vemos, al no ser una solución estable, a los segmentos

⁷El porcentaje de peaje que recolecta cada segmento j respecto del peaje total se calcula como $(\sum_{i=1}^j t_{ij}/v^{Ex}(N)) \cdot 100$, donde j está fijo e i simboliza una entrada. Por ejemplo, si $j = 5$, tendríamos $(\sum_{i=1}^5 t_{i5}/v^{Ex}(N)) = (t_{15} + t_{25} + t_{35} + t_{45} + t_{55})/v^{Ex}(N)$, pues lo que recolecta cada segmento se reduce a lo que recolecta su salida y todas las salidas previas. En nuestro caso, como la matriz T es diagonal, la fórmula se reduce a $(t_{ii}/v^{Ex}(N)) \cdot 100$.

4 y 5 no les interesaría colaborar y estarían mejor desviándose y yendo por su cuenta, pues el valor que se pueden garantizar por sí mismos mediante la función v^{Ex} (i.e, sus asignaciones individuales) son mayores que el dinero dado por el reparto final. Observamos que el valor de Shapley no verifica en este caso la propiedad de racionalidad individual. Además, observamos que el método ExES parece tratar de forma injusta a los segmentos superiores (segmentos 1, 2 y 3), pues los beneficios otorgados por el valor de Shapley a estos segmentos son mucho menores que el valor que generan. En cambio, los segmentos finales de la autopista se ven menos perjudicados. Esto mismo también ocurre con el método UES de Ni and Wang (2007), donde en aquel caso se trabaja con un problema de costes. La explicación que ellos proporcionan es que los humanos escogen, voluntariamente, aquellas ubicaciones que mejor satisfagan sus preferencias, aún a pesar de que el coste de vida sea mayor. En el caso del río contaminado, las firmas están dispuestas a pagar más costes a cambio de trabajar con agua limpia. Para adaptar esta explicación a nuestro contexto, si pensamos que cada segmento de la autopista está operada por una empresa diferente, podríamos pensar que las empresas localizadas al comienzo de la autopista estarían dispuestas a asumir menos beneficios a costa de una mejor situación estratégica en la red de transporte.

Si ahora analizamos el reparto del valor de Shapley desde el punto de vista del uso de los segmentos por parte de los distintos tipos de vehículos, observamos que el segmento 3, que es el más usado tanto por los automóviles de la clase A como por los de la B, no es el que más beneficios recibe en el juego de asignación de salidas. Por el contrario, reciben más los segmentos 1 y 2, a pesar de que son utilizados con mucha menos frecuencia. Además, vemos que la distribución de beneficios dada por el valor de Shapley parece estar más en consonancia con el flujo de vehículos de la clase A por la autopista, pues se proporciona menos dinero a los segmentos 4 y 5, que son los menos usados por este tipo de vehículos, y más a los primeros segmentos de la autopista.

Por otro lado, la solución equivalente superior, que se corresponde con asignar el vector de contribuciones marginales correspondiente al orden 12345, i.e, el orden que corresponde con la estructura de permiso de izquierda a derecha, asigna todo el peaje recolectado exclusivamente al segmento 1, a pesar de que ya mencionamos que es uno de los segmentos que menos contribuye al peaje total recolectado. Este método se basa en la idea de que el pago a un jugador no depende de la presencia de segmentos inferiores. Esta solución no parece muy justa, pues los segmentos 2, 3, 4 y 5 deben recibir una parte de los beneficios, ya que contribuyen al peaje total que se recolecta en sus salidas.

	Segmento 1	Segmento 2	Segmento 3	Segmento 4	Segmento 5
Shapley (método ExES)	5155991.7 (35.43 %)	4820587.4 (33.12 %)	4353323.4 (29.91 %)	132009.8 (0.91 %)	91456.0 (0.63 %)
Equivalente superior	14553368 (100 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)

Tabla 3.5: Asignaciones de peaje en base a distintas soluciones para cada uno de los segmentos de la autopista australiana Hills M2, considerando un sistema fijo donde el peaje se recolecta en las salidas. En paréntesis se representa el porcentaje del peaje asignado respecto al peaje total recolectado.

Sabemos que el juego v^{Ex} es el dual del juego conjuntivo (o disjuntivo) (N, v^{Se}, D) donde se

toma como función característica v^{Se} , i.e, la correspondiente al juego de asignación de segmentos y $D = \{(i, i + 1) : i = 1, \dots, n - 1\}$ es la estructura de permiso de izquierda a derecha. Por tanto, el método ExES es equivalente al valor de permiso conjuntivo (respectivamente disjuntivo) de este juego dual. Pero, ¿qué sucede si en lugar de considerar la función característica v^{Se} , tomamos la función característica correspondiente al juego de salidas, v^{Ex} , y consideramos el juego conjuntivo (disjuntivo) (N, v^{Ex}, D) ? En la Tabla 3.6 podemos ver los repartos proporcionados por el nucleolus, valor de Shapley y τ -valor aplicados a este juego. En este caso, observamos que todas las soluciones proporcionan el mismo reparto y coinciden precisamente con la asignación dada por la solución equivalente superior. Es decir, se asigna todo el peaje exclusivamente al segmento 1. Es interesante el hecho de que todas estas soluciones del juego conjuntivo (disjuntivo) restringido con función característica v^{Ex} coincidan con la solución equivalente superior, pues las construcciones/definición del juego (N, v^{Ex}, D) y de la solución equivalente superior son muy distintos.

	Segmento 1	Segmento 2	Segmento 3	Segmento 4	Segmento 5
Nucleolus	14553368 (100%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
Shapley (Valor conj./disj.)	14553368 (100%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
τ-valor	14553368 (100%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)

Tabla 3.6: Asignaciones de peaje considerando el juego conjuntivo (disjuntivo) restringido $(N, r_{v^{Ex}, D}^c)$ para los segmentos de la autopista Hills M2, considerando un sistema fijo donde el peaje se recolecta en las salidas. En paréntesis se representa el porcentaje del peaje asignado respecto al peaje total recolectado.

3.2.2. Juego de asignación de entradas

En este caso, nos planteamos cuál es la mejor forma de repartir el peaje recaudado en la autopista Hills M2 considerando un sistema de peaje fijo donde el peaje se recolecta en las entradas de la autopista. Como la dirección que estamos considerando para el juego de asignación entradas es de derecha a izquierda (*westbound*), como se ilustra en la Figura 3.10, la modelización de este problema se haría mediante el grafo de la Figura 3.14. En efecto, la primera entrada que nos encontramos cuando el tráfico va de derecha a izquierda en la Figura 3.10 es la de Christie Road. Por tanto, el primer segmento (Sg. 1) considerando esta dirección es el que tiene asociada esta entrada, como se indica en la Figura 3.14.

Por la construcción de este problema, solo tiene sentido considerar el juego de asignación de entradas (N, v^{En}) , donde v^{En} viene dado en la ecuación (2.7). Para definir este juego necesitamos conocer el número de segmentos, que en nuestro caso es $n = 5$ (pues tenemos 5 segmentos) y la matriz de peaje T . Las Tablas A.9 y A.10 muestran las matriz de tarifas y los datos de tráfico correspondientes a las entradas de la autopista Hills M2, respectivamente. Ahora, a diferencia de lo que ocurría con el juego

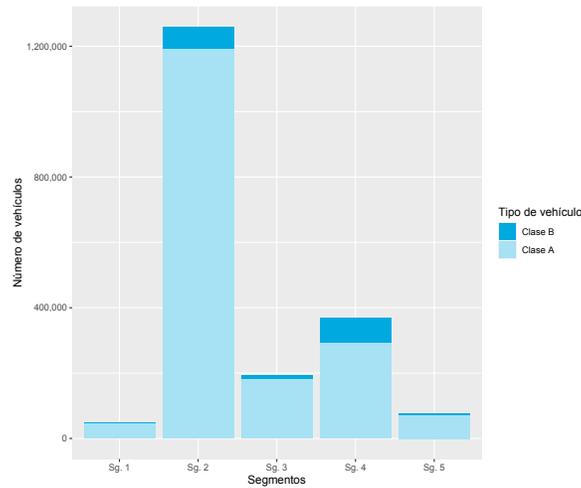


Figura 3.15: Representación gráfica del número de movimientos en cada segmento de la autopista Hills M2 para el juego de asignación de entradas, distinguiendo en función del tipo de vehículo.

únicamente es relevante el segmento que viene en último lugar según el orden 12345, o de primero según el orden 54321. De este modo, todas las coaliciones que contengan al segmento 5 van a generar el mismo valor que el segmento 5 por sí mismo. Por este motivo, las coaliciones que más dinero recolectan son aquellas que contienen al segmento 5, pues al incluir este segmento se recolecta no solo el dinero de la entrada 5, sino también el dinero recaudado en las entradas previas (1, 2, 3 y 4).

A continuación, comprobaremos las propiedades del juego (N, v^{En}) con ayuda de la librería `CoopGame`. De nuevo, como sucedía con el juego de asignación de salidas, el juego de asignación de entradas es monótono, pero no es ni esencial ni cuasi-equilibrado, con lo cual no existe el nucleolus ni tampoco el τ -valor. Además, el núcleo es vacío, con lo cual el valor de Shapley tampoco es una solución estable. En la Tabla 3.7 observamos que para el juego v^{En} , donde el peaje se recolecta en las entradas de la autopista, el valor de Shapley proporciona un reparto creciente, donde el segmento 1 es el que menos recibe, y el segmento 5 el que más. Notamos que el segmento 5 recibe el mayor pago a pesar de que solo contribuye al 1.67% del peaje total recolectado⁸. En cambio, el segmento 2 recibe solo un 19.47% del peaje total a pesar de que contribuye al 76.70% de los beneficios recolectados (de hecho, es el que más aporta). Por otro lado, la media del peaje total recolectado entre los cinco segmentos es de 3471277 euros. Vemos que, salvo el segmento 1, el resto de segmentos reciben una asignación superior al valor promedio. No obstante, a pesar de esto, todos los segmentos reciben menos de lo que se pueden garantizar por sí mismos (i.e, mediante la función v^{En}), por lo que no tendrían incentivos para cooperar. Esto es coherente con el hecho de que el valor de Shapley no sea una solución estable en este juego (pues no pertenece al núcleo).

Estudiando ahora el reparto proporcionado por el valor de Shapley desde la perspectiva del uso de los segmentos por parte de las distintas clases de automóviles, vemos que el segmento 5 es el que más beneficios recibe, a pesar de que es uno de los segmentos menos usados, tanto por vehículos ligeros como por vehículos pesados. Dicho de otro modo, es una de las secciones de carretera que menos se desgasta, por lo que desde el punto de vista práctico no sería muy adecuado destinar más dinero a este

⁸En el juego de asignación de entradas, el porcentaje de peaje recaudado por cada segmento i respecto al peaje total se calcula como $(\sum_{j=i}^5 t_{ij}/v^{En}(N)) \cdot 100$, donde ahora la entrada i está fija y hacemos variar la salida j . Por ejemplo, para el segmento 1 tendríamos $(\sum_{j=1}^5 t_{1j}/v^{En}(N)) \cdot 100$. Esto es así ya que en este juego, el peaje recolectado por un segmento viene dado por el peaje recaudado por su correspondiente entrada más el peaje recaudado por las entradas sucesivas. Al ser la matriz T diagonal, la fórmula previa se reduce a $(t_{ii}/v^{En}(N)) \cdot 100$.

segmento, ya que no va a gastar demasiado en mantenimiento o reparación. Asimismo, el segmento 2, que es el más usado por los vehículos de la clase A y el segundo más empleado por los de la clase B, es uno de lo que menos beneficios recibe. Concluimos, por tanto, que el reparto proporcionado por el valor de Shapley no es proporcional/no refleja el uso/distribución subyacente que le dan los vehículos a las distintas partes de la autopista.

Por otro lado, la solución equivalente inferior, que se corresponde con asignar el vector de contribuciones marginales correspondiente al orden 54321 de los segmentos, i.e, el orden que corresponde con la estructura de permiso de derecha a izquierda, asigna todo el peaje recolectado exclusivamente al segmento 5 (a diferencia de lo que pasaba con el juego de salidas, donde la solución equivalente superior asignaba todo el dinero al segmento 1). Este método se basa en la idea de que el pago a un jugador no depende de la presencia de segmentos superiores. Esta solución no parece muy justa, pues los segmentos 1, 2, 3 y 4 deberían recibir una parte de los beneficios, ya que contribuyen al beneficio total mediante el peaje que se recolecta en sus entradas.

	Segmento 1	Segmento 2	Segmento 3	Segmento 4	Segmento 5
Shapley (método EnES)	50343.71 (0.29 %)	3378490.41 (19.47 %)	3722133.30 (21.44 %)	4957756.57 (28.56 %)	5247658.56 (30.23 %)
Equivalente inferior	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	17356383 (100 %)

Tabla 3.7: Asignaciones de peaje en base a distintas soluciones para cada uno de los segmentos de la autopista australiana Hills M2, considerando un sistema fijo donde el peaje se recolecta en las entradas. En paréntesis se representa el porcentaje del peaje asignado respecto al peaje total recolectado.

Finalmente, en la Tabla 3.8 podemos observar el juego conjuntivo (disjuntivo) con función característica v^{En} , donde hemos hecho un razonamiento análogo al realizado para el juego (N, v^{Ex}, D) (pues el juego v^{En} es el juego dual de (N, v^{Se}, D) , donde D se corresponde con la estructura de permiso de derecha a izquierda). En este caso, vemos que tanto el nucleolus, como el valor de Shapley y el τ -valor coinciden entre sí y con el reparto proporcionado por la solución equivalente inferior.

3.3. Red de autopistas en Irlanda.

Para terminar este capítulo, ponemos un ejemplo de extensión del problema presentado en Wu et al. (2024). En concreto, consideramos la red de autopistas de peaje en Irlanda, representadas en el panel izquierdo⁹ de la Figura 3.16. En este caso, en lugar de plantearnos cómo repartir el peaje a lo largo de los segmentos de una autopista, la generalización de esta pregunta podría ser: ¿cuál es la mejor forma de repartir el peaje recaudado a cada una de las autopistas que conforman la red?

Además, si consideramos que la red de autopistas está controlada por empresas diferentes, como sucede en la realidad¹⁰, obtendríamos coaliciones a priori de enlaces, i.e, ciertas autopistas estarían

⁹La imagen se obtuvo de la página oficial de *etoll*, el método para pagar los peajes de modo electrónico por las autopistas de Irlanda. Enlace: <https://etoll.ie/driving-on-toll-roads/>

¹⁰Información detallada sobre las tarifas aplicadas a cada una de las autopistas de Irlanda, así como

	Segmento 1	Segmento 2	Segmento 3	Segmento 4	Segmento 5
Nucleolus	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	17356383 (100%)
Shapley (Valor conj./disj.)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	17356383 (100%)
τ-valor	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	17356383 (100%)

Tabla 3.8: Asignaciones de peaje considerando el juego conjuntivo (disjuntivo) restringido $(N, r_{vEn,D}^c)$ para los segmentos de la autopista Hills M2, considerando un sistema fijo donde el peaje se recolecta en las entradas. En paréntesis se representa el porcentaje del peaje asignado respecto al peaje total recolectado.

relacionadas de antemano por su pertenencia a las distintas empresas. De este modo, otra cuestión interesante a explorar sería la definición del valor de Owen (Owen, 1977) o el valor coalicional de Tijis (Casas-Méndez et al., 2003) para el caso de juegos de enlaces, donde, como en el caso de la red de autopistas de Irlanda, los jugadores serían los enlaces del grafo (i.e, las autopistas). Por ejemplo, en Irlanda, las autopistas de peaje están controladas, en esencia, por tres empresas: *Eurolink Motorway Operations* (empresa A), *Celtic Roads Group* (empresa B) y *Directroute* (empresa C). En el panel derecho de la Figura 3.16 hemos ilustrado esta situación, señalando con distintos colores las autopistas controladas por cada una de las compañías. De este modo, tenemos el conjunto de autopistas $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ y tres empresas $\{A, B, C\}$, donde A controla las autopistas $\{a, c, g\}$, B controla $\{b, d\}$ y C controla las autopistas $\{e, f\}$. Las coaliciones a priori de los jugadores (autopistas) serían, en este caso, $\{\{a, c, g\}, \{b, d\}, \{e, f\}\}$.

Asimismo, este problema puede servir como un buen campo de aplicación para las soluciones presentadas en el trabajo de van den Brink and Dietz (2014). En este estudio, se considera una partición del conjunto de jugadores, N , en diversas *uniones* y, en vez considerar a los agentes de forma individual como jugadores, se considera que los tomadores de decisiones son las uniones en la estructura coalicional del juego. En el caso de la red de autopistas de Irlanda, estas uniones serían precisamente los conjuntos de autopistas que pertenecen a una misma empresa. Además, van den Brink and Dietz (2014) introducen dos soluciones que representan generalizaciones del valor de Shapley y que asignan pagos a las uniones del juego con estructura coalicional: el valor de unión-Shapley, que considera a la unión como una sola unidad; y el valor jugador-Shapley, que toma a los jugadores como unidades y el pago de una unión es la suma de los pagos sobre todos los jugadores pertenecientes a ella.

Por último, señalamos que podría ser interesante emplear el índice de Gini y la curva de Lorenz en este contexto, siguiendo el procedimiento de Pavkova et al. (2016) para la red de transporte de

de las empresas operadoras, se puede encontrar en <https://www.tii.ie/roads-tolling/tolling-information/toll-locations-and-charges/>. Los enlaces <https://etoll.ie/tolling-map/> y <https://www.irishtimes.com/transport/2022/11/19/who-runs-irelands-road-tolls-and-who-gets-the-money/> proporcionan mapas para visualizar esta información. Los datos de tráfico se pueden obtener a través de <https://www.tii.ie/roads-tolling/operations-and-maintenance/traffic-count-data/>

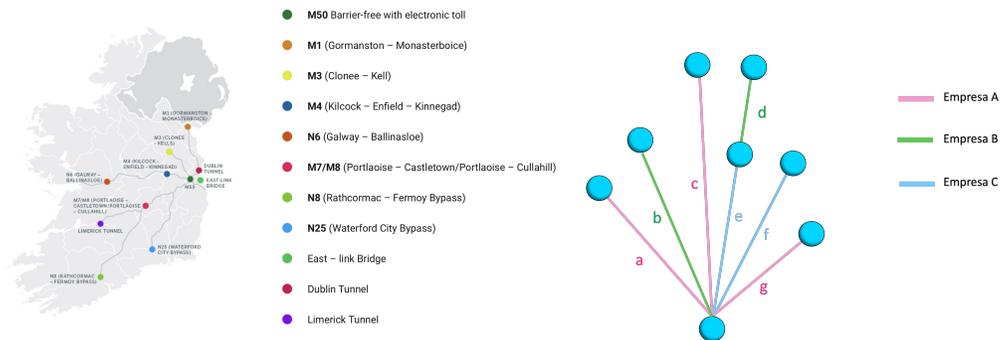


Figura 3.16: Panel izquierdo: red de autopistas de peaje en Irlanda. Panel derecho: representación simplificada del problema mediante un grafo, donde los nodos indican las entradas/salidas de las autopistas (enlaces).

tranvías. En este estudio, se reinterpretan estas medidas para comparar el rendimiento de diversos tramos para distintas rutas de un tranvía. En concreto, se analiza la distribución acumulada de la velocidad que se alcanza en cada tramo frente al volumen acumulado de pasajeros en cada una de las vías. Además, se adoptan dos enfoques: uno a nivel “local”, obteniendo índices de Gini y curvas de Lorenz para cada una de las rutas de tranvía a efectos de comparación y otro a nivel “general”, obteniendo un único índice de Gini y una única curva de Lorenz para analizar el rendimiento de toda la red. Se concluye que esta última forma de proceder resulta ser la más adecuada para identificar aquellos enlaces con un volumen alto de pasajeros pero con un rendimiento bajo a lo largo de la red, convirtiéndolos en potenciales candidatos para recibir tratamientos de prioridad. Esta forma de proceder se podría adoptar también para las autopistas de la red de Irlanda con el fin de obtener una medida resumen que permita comparar las autopistas entre sí en términos del rendimiento operativo (volumen de tráfico, velocidades alcanzadas, duración de los viajes...) así como para cuantificar cómo de bien se comporta la red de autopistas en general. Por supuesto, se pueden emplear el índice de Gini y la curva de Lorenz para comparar la distribución de peaje entre las autopistas, similar a cómo se hizo para el caso de la autopista española.

Capítulo 4

Conclusiones y trabajo futuro

Este trabajo aborda el problema de asignación de peajes en una autopista. Se pretende determinar cómo repartir el peaje recaudado por los vehículos que circulan a lo largo de una autopista lineal entre los segmentos en los que se divide. En particular, estudiamos detenidamente los métodos propuestos por [Wu et al. \(2024\)](#) para resolver este problema, revisando las propiedades que caracterizan a las soluciones y formulando los juegos cooperativos asociados. A fin de facilitar la comprensión de la teoría expuesta en la referencia principal y de hacer este trabajo autocontenido, en la primera parte hemos desarrollado todos los conceptos teóricos relativos a la teoría de juegos que se mencionan en [Wu et al. \(2024\)](#): desde las soluciones clásicas de la teoría de juegos cooperativos (a saber: núcleo, valor de Shapley, τ -valor y nucleolus), pasando por los juegos de comunicación (destacando métodos clásicos como el valor de Myerson y soluciones más recientes como las creadas para grafos lineales de [van den Brink et al. \(2007\)](#) o la solución AT de [Herings et al. \(2008\)](#)) y acabando con los juegos con estructura de permiso, donde hemos tratado los dos principales enfoques: conjuntivo ([Gilles et al. \(1992\)](#) y [van den Brink and Gilles \(1996\)](#)) y disjuntivo ([van den Brink, 1997](#)). Hemos mostrado un estudio comparativo de las distintas soluciones desde el punto de vista axiomático y hemos ilustrado detalladamente su cálculo mediante un ejemplo propio.

Además, hemos contextualizado el problema de [Wu et al. \(2024\)](#), introduciendo las dos principales inspiraciones en las que está basado: el problema del río contaminado de [Ni and Wang \(2007\)](#) y [Dong et al. \(2012b\)](#), y el problema de distribución de costes en una autopista de [Dong et al. \(2012a\)](#).

Finalmente, en la última parte de esta memoria se ha realizado una comparativa a nivel práctico entre los métodos expuestos en [Wu et al. \(2024\)](#) y otras soluciones de teoría de juegos mencionadas en la primera parte, a efectos de ver cual ofrece mejores resultados. Para ello, hemos analizado dos casos reales, relativos a una autopista española y otra australiana. Se estudiaron de forma exhaustiva cada uno de los casos, incluyendo un análisis exploratorio para examinar los movimientos de los distintos tipos de vehículos a lo largo de las carreteras. Ahondamos en las propiedades de los juegos introducidos en [Wu et al. \(2024\)](#) e iniciamos el estudio de algunas cuestiones abiertas ahí planteadas. De aquí, extraemos las siguientes conclusiones:

- Con nuestros datos, tanto el nucleolus como las soluciones para grafos lineales de [van den Brink et al. \(2007\)](#) proporcionan distribuciones de peaje inadecuadas para el problema de asignación de peajes en una autopista. En el juego de asignación de segmentos, el nucleolus devuelve un reparto equitativo, el cual, a pesar de ser estable, no responde a ningún principio de justicia. En efecto, no está basado en el uso dado a los segmentos de la autopista o en su contribución marginal al peaje total recolectado. Siguiendo la misma línea, la solución de pérdida igualitaria recompensa a los segmentos extremos de la autopista, cuya contribución marginal al peaje recaudado es muy pequeña y forman parte también, del grupo de segmentos menos usados. En el caso de los juegos de asignación de entradas y salidas, las soluciones equivalente superior e inferior solo destinan el

peaje total a uno de los segmentos extremos de la autopista (segmento 1 y 5, respectivamente), proporcionando ganancias nulas al resto de segmentos.

- En cambio, el τ -valor, la solución AT y el valor de Shapley ofrecen distribuciones de peaje adecuadas, dependiendo del objetivo que se pretenda. En el caso del juego de asignación de segmentos, el valor de Shapley (método SES) reparte el peaje de modo proporcional al tráfico que soporta cada segmento, mientras que el τ -valor y la solución AT lo hacen de modo proporcional a la contribución marginal que cada segmento hace a la gran coalición. Así, el reparto proporcionado por el valor de Shapley refleja mejor la distribución subyacente del flujo de vehículos ligeros a lo largo de la autopista, mientras que el reparto del τ -valor y la solución AT plasman mejor la utilización de los segmentos por parte de los vehículos pesados. El posible inconveniente que presenta el τ -valor es que no verifica la propiedad de aditividad que sí verifica el valor de Shapley.
- La comparación de las soluciones realizada mediante los coeficientes de correlación de Pearson revela que las soluciones más semejantes en términos de la distribución del peaje son el valor de Shapley y la solución AT. No obstante, el análisis realizado mediante el índice de Gini y la curva de Lorenz refleja que la asignación de la solución AT es mucho más desigual que la relativa al valor de Shapley. Esta disparidad puede ser debida a que la solución AT no distribuye el peaje de modo tan “uniforme” como el valor de Shapley, habiendo mucha diferencia entre el segmento que más y menos recibe. Además, mediante estos índices, concluimos que el τ -valor es el que devuelve un reparto más equitativo entre los segmentos, y por tanto, el que se puede considerar que se alinea más con el principio de justicia.
- En los juegos de asignación de salidas y entradas, el valor de Shapley (métodos ExES y EnES) no se comporta tan bien como en el caso del juego de asignación de segmentos, pues presenta ciertos inconvenientes desde el punto de vista de la justicia. En efecto, distribuye más dinero a los segmentos que contribuyen en menor medida al peaje total que se recauda. Asimismo, en el caso del juego de asignación de salidas, perjudica más a los primeros segmentos de la autopista y en el de entradas a los últimos segmentos, en el sentido de que les asigna unos beneficios mucho menores de lo que se pueden garantizar por sí mismos. Por último, en el juego de asignación de salidas, el valor de Shapley también parece reflejar mejor el tráfico por parte de los vehículos ligeros, lo cual es coherente con el hecho de que este tipo de automóviles sean los más comunes (hay un mayor número de usuarios que los utilizan).
- Para finalizar, también aplicamos el valor de Shapley al juego de enlaces asociado al juego de conectividad aditivo ponderado de [Saavedra-Nieves and Algaba \(2024\)](#) sobre los datos de una autopista española, con el objetivo de obtener un ranking de importancia de los segmentos. Hemos encontrado que el segmento que más contribuye a la conectividad de toda la autopista es el segmento 2, y el que menos, el segmento 4.

Mencionamos también que todos los métodos expuestos en [Wu et al. \(2024\)](#), i.e, los métodos SES, ExES y EnES, han sido implementados en . Además, hemos programado los juegos cooperativos asociados (v^{Se} , v^{Ex} y v^{En}) para el caso de 5 jugadores o menos. El código correspondiente se puede encontrar en el Apéndice B.

Con todo, quedan diversos problemas abiertos, que fueron surgiendo durante el desarrollo del trabajo. Algunas líneas de investigación futuras son:

- Aplicar soluciones clásicas de la teoría de juegos al juego de enlaces formulado en (1.5), como el nucleolus, el τ -valor o el valor de Banzhaf ([Banzhaf, 1964](#)), con el fin de definir nuevas soluciones que proporcionen repartos a los enlaces de un grafo, y no a sus nodos. Asimismo, puede ser de interés explorar las caracterizaciones o propiedades que verifican estos métodos en este caso ya que, como vimos, el considerar a los enlaces como los jugadores proporciona nuevas perspectivas y puede servir para modelar más fielmente problemas que surjan en la práctica en otros contextos.

- Adaptar el juego o los juegos más convenientes de [Wu et al. \(2024\)](#) a un grafo más general (no lineal), como el que se ilustra para la red de autopistas de Irlanda. De este modo, tendríamos un par (N, v) , con N un conjunto de autopistas (no tramos de una autopista). A mayores, se podría incluir la partición por empresas en el modelo, y aplicar valores relacionados con las uniones a priori como el valor de Owen o el valor coalicional de Tijs al juego de enlaces correspondiente, para así obtener una asignación justa de la recaudación total entre las distintas autopistas.
- Puesto que, como vimos en el caso de la autopista española, las soluciones se comportan de manera diferente, puede ser interesante obtener caracterizaciones axiomáticas del τ -valor, nucleolus, pérdida igualitaria, solución AT e incluso el núcleo en este tipo de juegos. Asimismo, la obtención de fórmulas específicas para estos métodos en términos de t_{ij} , de forma análoga al valor de Shapley con los métodos SES, ExES y EnES.
- Como en los juegos de asignación de salidas y de entradas el valor de Shapley no funciona tan bien como en el juego de asignación de segmentos y debido a que estos juegos no cumplen ninguna propiedad relevante (haciendo imposible el cálculo de soluciones clásicas como el τ -valor o el nucleolus), hemos probado a aplicar otras soluciones como el prenucleolus ([Schmeidler, 1969](#)), el valor de Banzhaf normalizado ([Banzhaf, 1964](#)) y el *public good value* ([Holler, 1978](#)) usando la librería `CoopGame` de [Staudacher and Anwander \(2019\)](#). Si bien los resultados obtenidos tienen su interés, su análisis en profundidad merecería un estudio más detallado en el futuro.
- Como idea para extender el juego de asignación de segmentos de [Wu et al. \(2024\)](#) a un grafo genérico (no lineal), se podría sustituir el concepto de segmentos consecutivos por camino, de modo que el beneficio otorgado a una coalición en una red de autopistas consistiría en asignar el peaje recolectado usando solo aquellas combinaciones de autopistas de la coalición que estén conectadas (i.e, que se pueda viajar de forma continua por ellas).
- Teniendo en cuenta que los métodos presentados en [Wu et al. \(2024\)](#) se basan en las fórmulas definidas en [Ni and Wang \(2007\)](#) para el problema del río contaminado y que el grafo de las autopistas de Irlanda tiene una estructura de árbol con un solo nodo raíz, podría ser de interés construir una extensión de los métodos ExES o EnES (que se basan en estructuras de permiso) basándose en las fórmulas de [van den Brink et al. \(2017\)](#). En este último artículo se presenta el problema del río contaminado para grafos dirigidos con esta estructura de árbol (*sink tree structure*), se introducen nuevas axiomatizaciones de los métodos de [Ni and Wang \(2007\)](#) y [Dong et al. \(2012b\)](#) basadas en el valor de permiso conjuntivo y se obtiene un nuevo método basado en el valor de permiso disjuntivo.

Apéndice A

Tablas sobre datos de tráfico

Categoría	Origen	Destino				
		01	GSM	02	09	10
V. ligeros	01	–	1.20	2.05	2.75	3.60
	GSM	–	–	0.85	1.50	2.40
	02	–	–	–	0.85	1.50
	09	–	–	–	–	0.70
	10	–	–	–	–	–
V. pesados 1	01	–	2.20	3.75	4.90	6.65
	GSM	–	–	1.50	2.70	4.45
	02	–	–	–	1.55	2.85
	09	–	–	–	–	1.30
	10	–	–	–	–	–
V. pesados 2	01	–	3.15	5.00	6.40	8.70
	GSM	–	–	1.90	3.30	5.55
	02	–	–	–	1.85	3.55
	09	–	–	–	–	1.60
	10	–	–	–	–	–

Tabla A.1: Tarifas oficiales aplicadas en una autopista española en función del tipo de vehículo.

Categoría	Origen	Destino				
		01	GSM	02	09	10
V. ligeros	01	–	79869	17333	23066	105027
	GSM	–	–	5889	11774	59873
	02	–	–	–	880	9902
	09	–	–	–	–	17427
	10	–	–	–	–	–
V. pesados 1	01	–	2800	337	925	4310
	GSM	–	–	551	1735	6003
	02	–	–	–	67	299
	09	–	–	–	–	1037
	10	–	–	–	–	–
V. pesados 2	01	–	1225	215	700	2733
	GSM	–	–	879	1592	8486
	02	–	–	–	7	55
	09	–	–	–	–	278
	10	–	–	–	–	–

Tabla A.2: Número de movimientos habidos en un mes en cada tramo de la autopista española.

Origen	Destino				
	01	GSM	02	09	10
01	–	105861.6	37871.40	72444.0	430535.8
GSM	–	–	7502.25	27599.1	217505.8
02	–	–	–	864.8	15900.4
09	–	–	–	–	13991.8
10	–	–	–	–	–

Tabla A.3: Matriz de peaje T para el problema de asignación de peajes en una autopista española, considerando todos los tipos de vehículos.

Segmentos	V. ligeros	V. pesados 1	V. pesados 2	Total
Segmento 1	225295	8372	4873	238540
Segmento 2	302831	16661	15830	335322
Segmento 3	233744	14227	14667	262638
Segmento 4	211559	14376	13851	239786
Segmento 5	192229	11649	11552	215430

Tabla A.4: Número de vehículos que pasan por cada segmento de una autopista española.

Puntos de peaje	Tarifas	
	Clase A	Clase B
Windsor Road (E/W)	3.39 \$	10.15 \$
Pennant Hills Road (E/W)	4.79 \$	14.34 \$
Herring and Christie Roads (E/W)	4.77\$	14.33 \$
North Ryde (E/W)	9.56 \$	28.68 \$
Lane Cove Road (E)	2.83 \$	8.48 \$
M2-NCX (W)	4.79 \$	14.34 \$

Tabla A.5: Tarifas oficiales para la autopista Hills M2 aplicadas en julio del año 2022.

Categoría	Origen	Destino				
		E Windsor Road	E Pennant Hills	E North Ryde	E Christie Road	E Lane Cove Road
Clase A	–	3.39	4.79	9.56	4.77	2.83
	–	–	4.79	9.56	4.77	2.83
	–	–	–	9.56	4.77	2.83
	–	–	–	–	4.77	2.83
	–	–	–	–	–	2.83
Clase B	–	10.15	14.34	28.68	14.33	8.48
	–	–	14.34	28.68	14.33	8.48
	–	–	–	28.68	14.33	8.48
	–	–	–	–	14.33	8.48
	–	–	–	–	–	8.48

Tabla A.6: Tarifas para la autopista australiana Hills M2, considerando un sistema fijo de peaje donde el peaje se cobra en las salidas.

Segmentos	Salida	Clase A	Clase B	Total
Segmento 1	E Windsor Road	83876	5031	88907
Segmento 2	E Pennant Hills	165851	9770	175621
Segmento 3	E North Ryde	1131405	64425	1195830
Segmento 4	E Christie Road	30880	1041	31921
Segmento 5	E Lane Cove Road	153139	2818	155957

Tabla A.7: Número de vehículos que pasan por cada segmento de la autopista australiana Hills M2 en la dirección *eastbound*, junto con las correspondientes salidas.

Origen	Destino				
	E Windsor Road	E Pennant Hills	E North Ryde	E Christie Road	E Lane Cove Road
—	335404.3	—	—	—	—
—	—	934528.1	—	—	—
—	—	—	12663941	—	—
—	—	—	—	162215.1	—
—	—	—	—	—	457280

Tabla A.8: Matriz de peaje T para el problema de asignación de salidas en la autopista Hills M2, integrando las dos clases de vehículos.

Categoría	Origen	Destino				
		–	–	–	–	–
Clase A	W Christie Road	4.77	4.77	4.77	4.77	4.77
	W North Ryde	–	9.56	9.56	9.56	9.56
	W Pennant Hills	–	–	4.79	4.79	4.79
	W M2-NCX	–	–	–	4.79	4.79
	W Windsor Road	–	–	–	–	3.39
Clase B	W Christie Road	14.33	14.33	14.33	14.33	14.33
	W North Ryde	–	28.68	28.68	28.68	28.68
	W Pennant Hills	–	–	14.34	14.34	14.34
	W M2-NCX	–	–	–	14.34	14.34
	W Windsor Road	–	–	–	–	10.15

Tabla A.9: Tarifas para la autopista australiana Hills M2, considerando un sistema fijo de peaje donde el peaje se cobra en las entradas.

Segmentos	Entrada	Clase A	Clase B	Total
Segmento 1	W Christie Road	47622	1714	49336
Segmento 2	W North Ryde	1191743	66929	1258672
Segmento 3	W Pennant Hills	182333	10987	193320
Segmento 4	W M2-NCX	294537	73948	368485
Segmento 5	W Windsor Road	71211	4778	75989

Tabla A.10: Número de vehículos que pasan por cada segmento de la autopista australiana Hills M2 en la dirección *westbound*, junto con las correspondientes entradas.

Origen	Destino				
	—	—	—	—	—
W Christie Road	251718.6	—	—	—	—
W North Ryde	—	13312587	—	—	—
W Pennant Hills	—	—	1030929	—	—
W M2-NCX	—	—	—	2471247	—
W Windsor Road	—	—	—	—	289902

Tabla A.11: Matriz de peaje T para el problema de asignación de entradas en la autopista Hills M2, integrando las dos clases de vehículos.

Apéndice B

Código de R

```
1 load("tarifas.RData")
2 load("numv.RData")
3 -----#
4 #       Cálculo de las matrices de peaje para todos los tipos de vehículos.
5 -----#
6 #xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx#
7 # Matriz de número de tránsitos para vehículos ligeros independiente de la
8 # dirección: matriz triangular superior donde cada componente es el resultado de
9 # hacer nv.lig[i,j] + nv.lig[j,i].
10
11 nr <- nrow(nv.lig)
12 nc <- ncol(nv.lig)
13 nv <- matrix(nrow=nr, ncol=nc)
14 for(i in 1:nr){
15   for(j in 1:nc){
16     nv[i,j] <- nv.lig[i,j] + nv.lig[j,i]
17     if(i > j) {
18       nv[i,j] <- 0
19     }
20   }
21 }
22
23 nv
24 nlig <- nv
25
26 # La matriz T con componentes t_ij se calcula como:
27 # t_ij = tar.lig[i,j] * nv[i,j] (peaje cobrado por usuario * número de usuarios)
28
29 nr <- nrow(nv.lig)
30 nc <- ncol(nv.lig)
31 T.lig <- matrix(nrow=nr, ncol=nc)
32 for(i in 1:nr){
33   for(j in 1:nc){
34     T.lig[i,j] <- tar.lig[i,j]*nv[i,j]
35   }
36 }
37
38 T.lig
39 #xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx#
40 # Matriz de número de tránsitos para camiones ligeros independiente de la
41 # dirección: matriz triangular superior donde cada componente es el resultado de
42 # hacer nv.pes1[i,j] + nv.pes1[j,i].
43
44 nr <- nrow(nv.pes1)
45 nc <- ncol(nv.pes1)
46 nv <- matrix(nrow=nr, ncol=nc)
```

```

47 for(i in 1:nr){
48   for(j in 1:nc){
49     nv[i,j] <- nv.pes1[i,j] + nv.pes1[j,i]
50     if(i > j) {
51       nv[i,j] <- 0
52     }
53   }
54 }
55
56 npes1 <- nv
57
58 # La matriz T con componentes t_ij se calcula como:
59 # t_ij = tar.pes1[i,j] * nv[i,j] (peaje cobrado por usuario * número de usuarios)
60
61 nr <- nrow(nv.pes1)
62 nc <- ncol(nv.pes1)
63 T.pes1 <- matrix(nrow=nr, ncol=nc)
64 for(i in 1:nr){
65   for(j in 1:nc){
66     T.pes1[i,j] <- tar.pes1[i,j]*nv[i,j]
67   }
68 }
69
70 T.pes1
71 #xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx#
72 nr <- nrow(nv.pes2)
73 nc <- ncol(nv.pes2)
74 nv <- matrix(nrow=nr, ncol=nc)
75 for(i in 1:nr){
76   for(j in 1:nc){
77     nv[i,j] <- nv.pes2[i,j] + nv.pes2[j,i]
78     if(i > j) {
79       nv[i,j] <- 0
80     }
81   }
82 }
83
84 npes2 <- nv
85
86 # La matriz T con componentes t_ij se calcula como:
87 # t_ij = tar.lig[i,j] * nv[i,j] (peaje cobrado por usuario * número de usuarios)
88
89 nr <- nrow(nv.pes2)
90 nc <- ncol(nv.pes2)
91 T.pes2 <- matrix(nrow=nr, ncol=nc)
92 for(i in 1:nr){
93   for(j in 1:nc){
94     T.pes2[i,j] <- tar.pes2[i,j]*nv[i,j]
95   }
96 }
97
98 T.pes2
99 #-----#
100 #   Juego de asignación de segmentos incorporando todos los tipos de vehículos en
101 #   el modelo (vehículos ligeros, camiones ligeros y camiones pesados)
102 #-----#
103 # Toll matrix para todos los tipos de vehículos independientemente de la
104 # dirección: matriz triangular superior donde cada componente es el resultado de
105 # hacer T.lig[i,j] + T.pes1[i,j] + T.pes2[i,j].
106
107 Toll.matrix <- T.lig + T.pes1 + T.pes2
108 Toll.matrix
109
110 # CÁLCULO DEL JUEGO ASOCIADO
111

```

```

112 # Hacemos una lista con todas las posibles coaliciones de N={1,2,3,4,5}.
113 library(combinat)
114 N <- as.numeric(1:5)
115 # Lista con todas las posibles subcoaliciones de N
116 comb <- unlist(lapply(1:length(N),
117                     combinat::combn,
118                     x = N,
119                     simplify = FALSE),
120               recursive = FALSE)
121
122 comb
123
124 # P[i,j] C E si E = {1,2,4} es: P([i,j]) = {{1}, {2}, {4}, {1,2}}
125 # Un segmento aislado tb es un camino
126
127 Toll <- Toll.matrix
128 v <- numeric(length(comb))
129 for(i in 1:length(comb)) {
130
131   if(length(comb[[i]]) == 1) {
132     v[i] <- Toll[i, i]
133   }
134
135   else if(length(comb[[i]]) == 2) {
136     # Segmentos aislados
137     Toll2 <- Toll[comb[[i]][1], comb[[i]][1]] +
138       Toll[comb[[i]][2], comb[[i]][2]]
139
140     if(comb[[i]][2] == comb[[i]][1] + 1) {
141       # comb[[i]][2] == comb[[i]][1] + 1 # Los elementos en la coalición E
142       # son consecutivos
143       v[i] <- Toll[comb[[i]][1], comb[[i]][2]] + Toll2 }
144     else {
145       v[i] <- Toll2 }
146   }
147
148   else if(length(comb[[i]]) == 3) {
149     # Toll3: Peaje recolectado por los segmentos aislados (i.e, usuarios que
150     # solo usan un segmento)
151     Toll3 <- Toll[comb[[i]][1], comb[[i]][1]] +
152       Toll[comb[[i]][2], comb[[i]][2]] +
153       Toll[comb[[i]][3], comb[[i]][3]]
154
155     if((comb[[i]][3] == comb[[i]][2] + 1) && (comb[[i]][2] == comb[[i]][1] + 1)) {
156       # Todos los elementos de la coalición son consecutivos
157       v[i] <- Toll[comb[[i]][1], comb[[i]][3]] +
158         Toll[comb[[i]][1], comb[[i]][2]] +
159         Toll[comb[[i]][2], comb[[i]][3]] +
160         Toll3}
161     else if(comb[[i]][2] == comb[[i]][1] + 1) {
162       # Si no se cumple el primer if, significa que no todos los elementos son
163       # consecutivos. Por tanto, como los elementos de las coaliciones están
164       # ordenados de menor a mayor, solo se pueden dar los siguientes casos:
165       # i) Los dos primeros elementos son consecutivos
166       # ii) Los dos últimos elementos son consecutivos
167       # iii) Ningún elemento es consecutivo.
168       v[i] <- Toll[comb[[i]][1], comb[[i]][2]] + Toll3 }
169     else if(comb[[i]][3] == comb[[i]][2] + 1) {
170       v[i] <- Toll[comb[[i]][2], comb[[i]][3]] + Toll3 }
171     else {
172       # Ningún elemento es consecutivo
173       v[i] <- Toll3}
174   }
175
176   else if(length(comb[[i]]) == 4) {

```

```

177 # Segmentos aislados
178 Toll4 <- Toll[comb[[i]][1], comb[[i]][1]] +
179   Toll[comb[[i]][2], comb[[i]][2]] +
180   Toll[comb[[i]][3], comb[[i]][3]] +
181   Toll[comb[[i]][4], comb[[i]][4]]
182
183 if((comb[[i]][4] == comb[[i]][3] + 1) && (comb[[i]][3] == comb[[i]][2] + 1) && (
184   comb[[i]][2] == comb[[i]][1] + 1)) {
185   # Todos los elementos son consecutivos
186   v[i] <- Toll[comb[[i]][1], comb[[i]][4]] +
187     Toll[comb[[i]][1], comb[[i]][3]] +
188     Toll[comb[[i]][2], comb[[i]][4]] +
189     Toll[comb[[i]][1], comb[[i]][2]] +
190     Toll[comb[[i]][2], comb[[i]][3]] +
191     Toll[comb[[i]][3], comb[[i]][4]] +
192     Toll4}
193
194 else if((comb[[i]][3] == comb[[i]][2] + 1) && (comb[[i]][2] == comb[[i]][1] + 1))
195 {
196   # Los tres primeros elementos son consecutivos
197   v[i] <- Toll[comb[[i]][1], comb[[i]][3]] +
198     Toll[comb[[i]][1], comb[[i]][2]] +
199     Toll[comb[[i]][2], comb[[i]][3]] +
200     Toll4}
201
202 else if((comb[[i]][4] == comb[[i]][3] + 1) && (comb[[i]][3] == comb[[i]][2] + 1))
203 {
204   # Los tres últimos elementos son consecutivos
205   v[i] <- Toll[comb[[i]][2], comb[[i]][4]] +
206     Toll[comb[[i]][2], comb[[i]][3]] +
207     Toll[comb[[i]][3], comb[[i]][4]] +
208     Toll4}
209
210 else {
211   # Dos pares distintos de elementos consecutivos: {1,2,4,5} = {1,2} + {4,5}
212   v[i] <- Toll[comb[[i]][1], comb[[i]][2]] +
213     Toll[comb[[i]][3], comb[[i]][4]] +
214     Toll4 }
215 }
216
217 else {
218   # Segmentos aislados
219   Toll5 <- Toll[comb[[i]][1], comb[[i]][1]] +
220     Toll[comb[[i]][2], comb[[i]][2]] +
221     Toll[comb[[i]][3], comb[[i]][3]] +
222     Toll[comb[[i]][4], comb[[i]][4]] +
223     Toll[comb[[i]][5], comb[[i]][5]]
224
225   v[i] <- Toll[comb[[i]][1], comb[[i]][5]] +
226     Toll[comb[[i]][1], comb[[i]][4]] +
227     Toll[comb[[i]][2], comb[[i]][5]] +
228     Toll[comb[[i]][1], comb[[i]][3]] +
229     Toll[comb[[i]][2], comb[[i]][4]] +
230     Toll[comb[[i]][3], comb[[i]][5]] +
231     Toll[comb[[i]][1], comb[[i]][2]] +
232     Toll[comb[[i]][2], comb[[i]][3]] +
233     Toll[comb[[i]][3], comb[[i]][4]] +
234     Toll[comb[[i]][4], comb[[i]][5]] +
235     Toll5}
236 }
237
238 v.total <- v # Función característica v^{Se}
239
240 -----#
241 # Juego de asignación de salidas. Aplicación a la autopista Hills M2

```

```

239 #-----#
240 load("tarifasEXAUS.RData")
241 load("numvEXAUS.RData")
242
243 # Matriz de tarifas (T) para los coches.
244 nr <- nrow(nv.cars.exit)
245 nc <- ncol(nv.cars.exit)
246 Toll.exit.cars <- matrix(nrow=nr, ncol=nc)
247 for(i in 1:nr){
248   for(j in 1:nc){
249     Toll.exit.cars[i,j] <- tar.cars.exit[i,j]*nv.cars.exit[i,j]
250   }
251 }
252
253 Toll.exit.cars
254
255 # Matriz de tarifas (T) para los camiones.
256 nr <- nrow(tar.truck.exit)
257 nc <- ncol(tar.truck.exit)
258 Toll.exit.trucks <- matrix(nrow=nr, ncol=nc)
259 for(i in 1:nr){
260   for(j in 1:nc){
261     Toll.exit.trucks[i,j] <- tar.truck.exit[i,j]*nv.truck.exit[i,j]
262   }
263 }
264
265 Toll.exit.trucks
266
267 # Matriz de tarifas total.
268 Toll <- Toll.exit.cars + Toll.exit.trucks #!!!
269
270 #-----#
271 #       Juego de asignación de salidas
272 #-----#
273 v.exit <- numeric(length(comb))
274 n <- length(1:5)
275
276 sum.v <- function(j){
277   sum(sapply(1:j, function(i)sum(Toll[i,j])))
278 }
279
280 v.exit[1] <- sum(sapply(1:n, sum.v)) # Para cada j desde 1 hasta n...aplica function(j
281 ).
282 v.exit[2] <- sum(sapply(2:n, sum.v))
283 v.exit[3] <- sum(sapply(3:n, sum.v))
284 v.exit[4] <- sum(sapply(4:n, sum.v))
285 v.exit[5] <- sum(sapply(5:n, sum.v))
286
287 for(i in 1:n) {
288   v.exit[i] <- sum(sapply(i:n, sum.v))
289 }
290
291 for(i in 6:length(comb)) {
292   if(min(comb[[i]]) == 1) {
293     v.exit[i] <- v.exit[1]
294   }
295
296   else if(min(comb[[i]]) == 2) {
297     v.exit[i] <- v.exit[2]
298   }
299
300   else if(min(comb[[i]]) == 3) {
301     v.exit[i] <- v.exit[3]
302   }

```

```

303
304   else if(min(comb[[i]]) == 4) {
305     v.exit[i] <- v.exit[4]
306   }
307
308   else {
309     v.exit[i] <- v.exit[5]
310   }
311 }
312
313 v.exit
314
315 #-----#
316 #   Juego de asignación de entradas. Aplicación a la autopista Hills M2
317 #-----#
318 load("tarifasENAU.RData")
319 load("numvAUS.RData")
320
321 # Matriz de tarifas para los coches.
322 nr <- nrow(nv.cars.exit)
323 nc <- ncol(nv.cars.exit)
324 Toll.entrance.cars <- matrix(nrow=nr, ncol=nc)
325 for(i in 1:nr){
326   for(j in 1:nc){
327     Toll.entrance.cars[i,j] <- tar.cars.entrance[i,j]*nv.cars.entrance[i,j]
328   }
329 }
330
331 Toll.entrance.cars
332
333 # Matriz de tarifas para los camiones.
334 nr <- nrow(tar.truck.entrance)
335 nc <- ncol(tar.truck.entrance)
336 Toll.entrance.trucks <- matrix(nrow=nr, ncol=nc)
337 for(i in 1:nr){
338   for(j in 1:nc){
339     Toll.entrance.trucks[i,j] <- tar.truck.entrance[i,j]*nv.truck.entrance[i,j]
340   }
341 }
342
343 Toll.entrance.trucks
344
345 Toll <- Toll.entrance.cars + Toll.entrance.trucks
346
347 #-----#
348 #   Juego de asignación de entradas
349 #-----#
350 v.entrance <- numeric(length(comb))
351 n <- length(1:5)
352
353 sum.vent <- function(i){
354   sum(sapply(i:n, function(j) sum(Toll[i,j])))
355 }
356
357 # sapply(i:n, function(j)) significa que aplicamos, para cada j desde i hasta n,
358 # la función function(j).
359
360 # # sapply(1:5, sum.vent) significa que aplicamos, para cada i desde 1 hasta 5,
361 # la función sum.vent <- function(i).
362 v.entrance[1] <- sum(sapply(1:1, sum.vent)) # maxE = 1
363 v.entrance[2] <- sum(sapply(1:2, sum.vent)) # maxE = 2
364 v.entrance[3] <- sum(sapply(1:3, sum.vent)) # maxE = 3
365 v.entrance[4] <- sum(sapply(1:4, sum.vent)) # maxE = 4
366 v.entrance[5] <- sum(sapply(1:5, sum.vent)) # maxE = 5
367

```

```

368 for(i in 6:length(comb)) {
369
370   if(max(comb[[i]]) == 1) {
371     v.entrance[i] <- v.entrance[1]
372   }
373
374   else if(max(comb[[i]]) == 2) {
375     v.entrance[i] <- v.entrance[2]
376   }
377
378   else if(max(comb[[i]]) == 3) {
379     v.entrance[i] <- v.entrance[3]
380   }
381
382   else if(max(comb[[i]]) == 4) {
383     v.entrance[i] <- v.entrance[4]
384   }
385
386   else {
387     v.entrance[i] <- v.entrance[5]
388   }
389 }
390
391 v.entrance
392
393 #-----#
394 #                               Métodos SES, ExES Y EnES
395 #-----#
396 #xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx
397 #           Método SES
398 #xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx
399 n <- length(1:5)
400 Toll <- Toll.matrix
401
402 f.SESaux <- function(h){
403   sum(sapply(i:n, function(k) sum(Toll[h,k]/(k-h+1))))
404 }
405
406 f.SES <- numeric(n)
407 for(i in 1:n) {
408   f.SES[i] <- sum(sapply(1:i, f.SESaux))
409 }
410
411 f.SES
412
413
414 #xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx
415 #           Método ExES
416 #xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx
417 f.ExESaux <- function(k){
418   (sum(sapply(1:k, function(h) sum(Toll[h,k]))))/k
419 }
420
421 f.ExES <- numeric(n)
422 for(i in 1:n) {
423   f.ExES[i] <- sum(sapply(i:n, f.ExESaux))
424 }
425
426 f.ExES
427
428 #xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx
429 #           Método EnES
430 #xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx
431 f.EnESaux <- function(h){
432   (sum(sapply(h:n, function(k) sum(Toll[h,k]))))/(n-h+1)

```

```
433 }  
434  
435 f.EnES <- numeric(n)  
436 for(i in 1:n) {  
437   f.EnES[i] <- sum(sapply(1:i, f.EnESaux))  
438 }  
439  
440 f.EnES
```

Bibliografía

- Banzhaf J (1964) Weighted voting doesn't work: A mathematical analysis. *Rutgers Law Review* 19:317-343.
- Béal S, Rémila E and Solal P (2010) Rooted-tree solutions for tree games. *European Journal of Operational Research* 203(2):404-408.
- Casas-Méndez, B, García-Jurado I, van den Nouweland, A and Vázquez-Brage M (2003) An extension of the τ -value to games with coalition structures. *European Journal of Operational Research* 148(3):494-513.
- Castaño-Pardo A and García-Díaz A (1995) Highway cost allocation: An application of the theory of nonatomic games. *Transportation Research Part A: Policy and Practice* 29(3):187-203.
- Delbos A and Currie G (2011) Using Lorenz curves to assess public transport equity. *Journal of Transport Geography* 19(6):1252-1259.
- Derks J, Laan G V D and Vasilev V (2006) Characterizations of the random order values by Harsanyi payoff vectors. *Mathematical Methods of Operations Research* 64:155-163.
- Dong B, Guo G and Wang Y (2012a) Highway toll pricing. *European Journal of Operational Research* 220(3):744-751.
- Dong B, Ni D and Wang Y (2012b) Sharing a polluted river network. *Environmental and Resource Economics* 53(3):367-387.
- Driessen T S H (1996) On the reduced game property for and the axiomatization of the τ -value of TU-games. *TOP* 4:165-185.
- Edgeworth F (1881) *Mathematical Psychics: An Essay on the Application of Mathematics to the Moral Sciences*. Kegan Paul, London.
- Estañ T, Llorca N, Martínez R and Sánchez-Soriano J (2021) On how to allocate the fixed cost of transport systems. *Annals of Operations Research* 301:81-105.
- Fiestras-Janeiro M G, García-Jurado I and Mosquera, M A (2011) Cooperative games and cost allocation problems. *TOP* 19:1-22.
- Fagnelli V, García-Jurado I, Norde H, Patrone F and Tijs S (2000) How to share railways infrastructure costs? In F Patrone, I García-Jurado and S Tijs (eds.), *Game Practice: Contributions from Applied Game Theory*. Boston, MA: Springer 91-101.
- Gavilán E C, Manuel C M and van den Brink R (2022) A family of position values for directed communication situations. *Mathematics* 10(8).
- Gilles D (1953) *Some Theorems on n -person Games*. Ph.D Dissertation. University of Princeton.

- Gilles R, Owen G and van den Brink R (1992) Games with permission structures: the conjunctive approach. *International Journal of Game Theory* 20(3):277-293.
- Gini C (1912) Variabilità e mutabilità: contributo allo studio delle distribuzioni e delle relazioni statistiche. Tipografia di Paolo Cuppini, Bologna.
- Gómez-Rodríguez M, Davila-Pena L and Casas-Méndez B (2024) Cost allocation problems on highways with grouped users. *European Journal of Operational Research* 316(2):667-679.
- González-Díaz J, García-Jurado I and Fiestras-Janeiro M G (2010) *An Introductory Course on Mathematical Game Theory*. American Mathematical Society.
- Gordon C and Peters J (2011) Measuring toll burdens: applying Lorenz curves to a detailed data set of users of metropolitan transportation administration bridges in New York City. *Transportation Research Record* 2221:96-10.
- Harsanyi J (1959) A bargaining model for cooperative n -person games. In A W Tucker, R D Luce (eds.) *Contributions to the Theory of Games IV*. Princeton University Press, Princeton 325-355.
- Hart S and Mas-Colell A (1989) Potential, value and consistency. *Econometrica* 57(3):589-614.
- Henriet D and Moulin H (1996) Traffic-based cost allocation in a network. *RAND Journal of Economics* 27:332-345.
- Herings P, van der Laan G and Talman D (2008) The average tree solution for cycle-free graph games. *Games and Economic Behaviour* 62(1):77-92.
- Holler M J (1978) A prior party power and government formation. *Munich Social Science Review* 4:25-41
- Juan Z, Luo Q, Fu Z and Jia H (2008) Equity effects of congestion pricing on urban road resources allocation. *Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology* 8(1):74-7.
- Kuipers J, Mosquera M A and Zarzuelo, J M (2013) Sharing costs in highways: A game theoretic approach. *European Journal of Operational Research* 228(1):158-168.
- Le Breton M, Owen G and Weber S (1992) Strongly balanced cooperative games. *International Journal of Game Theory* 20:419-427.
- Littlechild S C and Owen G (1973) A simple expression for the Shapley value in a special case. *Management Science* 20:370-372.
- Lorenz M (1905) Methods for measuring the concentration of wealth. *American Statistical Association* 9(70):209-219.
- Meessen R (1988) *Communication Games*. Master's Thesis, Department of Mathematics, University of Nijmegen, The Netherlands.
- Myerson R (1977) Graphs and cooperation in games. *Mathematics of Operations Research* 2(3):225-229.
- Ni D and Wang Y (2007) Sharing a polluted river. *Games and Economic Behavior* 60:176-186.
- Owen G (1977) Values of games with a priori unions. In R Henn and O Moeschlin (eds.). *Mathematical economics and game theory* 76-88. Berlin, Heidelberg: Springer.
- Owen G (1986) Values of graph-restricted-games. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods* 7:210-220.

- Pavkova K, Currie G, Delbosc A and Sarvi M (2016) Selecting tram links for priority treatments - The Lorenz curve approach. *Journal of Transport Geography* 55:101-109.
- Rosenthal E C (2017) A cooperative game approach to cost allocation in a rapid-transit network. *Transportation Research Part B* 97:64-77.
- Saavedra-Nieves A and Algaba E (2024) A connection-based analysis of covert networks using the position value. *Expert Systems with Applications* 251, 124096.
- Sánchez-Rodríguez E and Vidal J (2014) *Juegos Coalicionales*. Universidad de Vigo.
- Schmeidler D (1969) The nucleolus of a characteristic function game. *SIAM Journal of Applied Mathematics* 17:1163-1170.
- Shapley L (1953) A value for n -person games. In H W Kuhn and A W Tucker (eds.). *Contributions to the Theory of Games*, vol. II. Princeton University Press, 307-317.
- Snijders C (1995) Axiomatization of the Nucleolus. *Mathematics of Operations Research* 20(1):189-196.
- Staudacher J and Anwander J (2019) Using the R package CoopGame for the analysis, solution and visualization of cooperative games with transferable utility. Acceso online: <https://cran.r-project.org/web/packages/CoopGame/vignettes/UsingCoopGame.pdf>
- Suzuki T (2010) Stability of the Average Tree Solution for Line Graph Games. Master's Thesis, Faculty of Economics and Business Administration, Tilburg University.
- Tijs S (1981) Bounds for the core of a game and the τ -value. In O Moeschlin and D Pallaschke (eds.). *Game Theory and Mathematical Economics*. North-Holland Publishing Company, 123-132.
- Tijs S (1987) An axiomatization of the τ -value. *Mathematical Social Sciences* 13(2):177-181.
- Tijs S and Otten G J (1993) Compromise values in cooperative game theory. *TOP* 1:1-36.
- van den Brink R and Gilles R (1996) Axiomatization of the conjunctive permission value for games with permission structures. *Games and Economic Behavior* 12(1):113-126.
- van den Brink R (1997) An axiomatization of the disjunctive permission value for games with a permission structure. *International Journal of Game Theory* 26(2):27-43.
- van den Brink R (1999) An axiomatization of the conjunctive permission value for games with a hierarchical permission structure. In H de Swart (ed.). *Logic, Game Theory and Social Choice*, 125-139.
- van den Brink R and Dietz C (2014) Union values for games with coalition structure. *Decision Support Systems* 66:1-8.
- van den Brink R, He S and Huang J-P (2017) Polluted river problems and games with a permission structure. *Games and Economic Behavior* 108:182-205.
- van den Brink R, van der Laan G and Vasil'ev V (2007) Component efficient solutions in line-graphs games with applications. *Economic Theory* 33(2):349-364.
- van den Brink R, Herings J-J, van der Laan G and Talman, D (2012) The Average Tree Permission Value for Games with a Permission Tree, Tinbergen Institute Discussion Paper. Tinbergen Institute 13-023/II. Amsterdam and Rotterdam.
- van den Brink R (2017) Games with a permission structure: A survey on generalizations and applications. *Transactions in Operations Research* 25:1-33.

- Villarreal-Cavazo A and García-Díaz A (1985) Development and application of new highway cost-allocation procedures. *Transportation Research Record* 1009:34-41.
- Wu H, van den Brink R and Estévez-Fernández A (2024) Highway toll allocation. *Transportation Research Part B: Methodological* 180:102889.
- Young H (1985) Monotonic solutions of cooperative games. *International Journal of Game Theory* 14:65-72.