



Universidade de Vigo

Trabajo Fin de Máster

Análisis de los problemas de árbol de mínimo coste: el caso multiobjetivo

Sergio Sáez Cabrera

Máster en Técnicas Estadísticas

Curso 2022-2023

Propuesta de Trabajo Fin de Máster

Título en galego: Análise dos problemas da árbore de menor custo: o caso multi-obxectivo
Título en español: Análisis de los problemas de árbol de mínimo coste: el caso multiobjetivo
English title: Analysis of minimum cost tree problems: the multi-objective case
Modalidad: Modalidad A
Autor/a: Sergio Sáez Cabrera, Universidade de Vigo
Director/a: Leticia Lorenzo Picado, Universidade de Vigo
Breve resumen del trabajo: Análisis de los problemas de árboles de mínimo coste. Además, se introducen los problemas de árboles de expansión óptimos multicriterio, determinando diferentes reglas de reparto.

Don/doña Leticia Lorenzo Picado, Profesora Titular del Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidade de Vigo, informan que el Trabajo Fin de Máster titulado

Análisis de los problemas de árbol de mínimo coste: el caso multiobjetivo

fue realizado bajo su dirección por don/doña Sergio Sáez Cabrera para el Máster en Técnicas Estadísticas. Estimando que el trabajo está terminado, dan su conformidad para su presentación y defensa ante un tribunal.

En Vigo, a 14 de Julio de 2023.

El/la director/a:
Don/doña Leticia Lorenzo Picado

El/la autor/a:
Don/doña Sergio Sáez Cabrera

Declaración responsable. Para dar cumplimiento a la Ley 3/2022, de 24 de febrero, de convivencia universitaria, referente al plagio en el Trabajo Fin de Máster (Artículo 11, [Disposición 2978 del BOE núm. 48 de 2022](#)), **el/la autor/a declara** que el Trabajo Fin de Máster presentado es un documento original en el que se han tenido en cuenta las siguientes consideraciones relativas al uso de material de apoyo desarrollado por otros/as autores/as:

- Todas las fuentes usadas para la elaboración de este trabajo han sido citadas convenientemente (libros, artículos, apuntes de profesorado, páginas web, programas,...)
- Cualquier contenido copiado o traducido textualmente se ha puesto entre comillas, citando su procedencia.
- Se ha hecho constar explícitamente cuando un capítulo, sección, demostración,... sea una adaptación casi literal de alguna fuente existente.

Y, acepta que, si se demostrara lo contrario, se le apliquen las medidas disciplinarias que correspondan.

Índice general

1. Problemas de árboles de mínimo coste	1
1.1. Modelización formal	2
1.2. Algoritmos para el cálculo del árbol de coste mínimo	4
1.2.1. Algoritmo de Prim	4
1.2.2. Algoritmo de Kruskal	5
1.2.3. Algoritmo de Borůvka	7
1.3. Cooperación en árboles óptimos	8
1.4. Reglas de reparto	11
1.4.1. Regla de Bird	11
1.4.2. Regla de Dutta-Kar	13
1.4.3. Regla Folk	15
2. Árboles de expansión óptimos multicriterio	21
2.1. Introducción	21
2.1.1. Concepto de núcleo	23
2.2. Reparto de costes multicriterio mediante juegos cooperativos	24
3. Árboles de expansión óptimos multicriterio con variables binarias	27
3.1. Introducción	27
3.2. Construcción de árboles óptimos de máxima calidad	28
3.2.1. Algoritmo de Prim modificado	29
3.3. Reparto del coste de los árboles de expansión óptimos de máxima calidad	30
3.3.1. Extensión de la Regla Folk	32
4. Conclusiones y futuras líneas de desarrollo	35
Bibliografía	36

Capítulo 1

Problemas de árboles de mínimo coste

La formación de redes es un problema ampliamente estudiado tanto en la investigación operativa como en la doctrina económica. Inicialmente, el diseño eficiente de algoritmos y la optimización computacional son cuestiones analizadas en la investigación operativa. Sobre la base de estos conocimientos, el ámbito económico se centra en el procedimiento de distribución de los costes, así como el diseño de mecanismos para formar las redes.

En el problema del árbol mínimo coste (abreviado, *mcstp* por sus siglas en inglés), un grupo de varios agentes/jugadores, ubicados en distintos puntos territoriales, precisan de una asistencia determinada, suministrada por un distribuidor en común denominado fuente. Los agentes reciben el servicio mediante conexiones que acarrearán cierto coste. La intención de este problema se fundamenta en la localización de aquel árbol de mínimo coste en el que la totalidad de los agentes estén vinculados, directa o indirectamente a la fuente, al menor coste posible.

Existen numerosos métodos aplicables para obtener un árbol que conecte a los agentes a la fuente del recurso, de manera que el coste de la red seleccionada sea mínimo. Podemos encontrar situaciones reales que pueden ser modeladas de acuerdo a este enfoque como es el caso de Bergantiños y Lorenzo (2004) en el que se analiza un caso real en la que los habitantes de un determinado pueblo deben pagar el coste de la construcción de tuberías desde sus respectivas casas hasta el suministro de agua.

Cuando se obtiene el árbol mínimo, la distribución de los costes entre los agentes de la red es un tema ampliamente investigado en la literatura y en el que se han propuesto múltiples soluciones (véase Bergantiños y Vidal-Puga 2021 para análisis comparativos). Sin embargo, la situación es más compleja cuando, además del coste, intervienen otros elementos que se identifican en la red, como las restricciones de calidad y que se representan mediante problemas de árbol de expansión multiobjetivo.

Por esta razón, se considera imperioso una precedente sinopsis de los árboles de mínimo coste para tratar de identificar el esquema que una todos los agentes con la fuente al menor coste. Asimismo, se estudiará su distribución donde, además del coste, también haya asociado otro parámetro.

1.1. Modelización formal

En primer lugar, se introducen una serie de definiciones para contextualizar los problemas de árbol de mínimo coste. El contenido de este capítulo se ha diseñado tomando como referencia el trabajo desarrollado por Fraga Canosa (2022) para su trabajo de fin de máster, dado que comparten una base de contextualización común.

Un *mstp* implica un conjunto finito de agentes o nodos, siendo $N = \{1, \dots, n\}$ el número de agentes que precisan conectarse a la fuente, la cual se denota por 0, y se define $N_0 = N \cup \{0\}$. Los agentes están conectados mediante arcos o aristas. La notación (i, j) representa el arco $i, j \in N_0, i \neq j$. A cada arco, se le asigna un peso c_{ij} el cual representa el valor numérico asociado a la conexión entre nodos (usualmente el coste).

Los arcos pueden estar orientados si únicamente se pueden recorrer en una dirección, o no orientados si no se distingue entre el nodo origen y el nodo de destino. Asumimos la premisa estándar de los problemas de árbol de mínimo coste, donde se trabaja con arcos no dirigidos $c_{ij} = c_{ji}$. Asimismo, se considera un grafo completo ya que son posibles todas las conexiones entre los agentes, donde se conocen dichos costes de conexión.

Definición 1.1. *Un problema de árbol de mínimo coste es un par (N_0, C) , por el cual:*

- $N_0 = N \cup \{0\}$
- $C = (c_{ij})_{i,j \in N_0}, c_{ij} \geq 0$ para todo $i, j \in N, c_{ij} = c_{ji}$ y $c_{ii} = 0$ para todo $i \in N_0$

La matriz de costes $C = (c_{ij})_{i,j \in N_0}$ representa los costes de conexión entre los pares de nodos. Designamos al conjunto de la matriz de costes de N_0 como C^N . Considerados $C, C' \in C^N$ se dice que $C \leq C'$ si $c_{ij} \leq c'_{ij}$ para todo $i, j \in N_0$.

Definición 1.2. *Un grafo G sobre N_0 es un subconjunto de $\{(i, j) : i, j \in N_0, i \neq j\}$ cuyos elementos se denominan arcos.*

Definición 1.3. *Dado un grafo G y un par de nodos i, j , un camino de i a j en el grafo G es una secuencia de arcos diferentes $\{(i_{s-1}, i_s)\}_{s=1}^P$ que satisface $(i_{s-1}, i_s) \in G$ para todo $s \in \{1, 2, \dots, P\}$, $i_0 = i$ e $i_P = j$. Se dice, por tanto, que $i, j \in N$ están conectados en G , si existe un camino de i hasta j . En caso de que $i_0 = i_P$ se tiene un ciclo. G^N denota el conjunto de todas las redes sobre N_0 , y G_0^N denota todas las redes sobre N_0 , de tal modo que todo agente está conectado a la fuente.*

Definición 1.4. *Un árbol de expansión t es un grafo no dirigido que satisface que para todo $i, j \in N$, hay un único camino de i a j , $i \neq j$. Para cada árbol t , se asocia un vector de imputación de pesos $c^t = (c_i^t)_{i \in N}$ donde c_i^t , el peso asociado al agente i , coincide con c_{ij} donde j es el primer agente en el camino único desde i a la fuente.*

El árbol de mínimo coste será aquel árbol que lleve asociado el menor coste de todos. Es decir, la suma de los pesos de los arcos es menor o igual a la suma de los pesos de los arcos de cualquier otro árbol de expansión asociado al grafo.

Definición 1.5. *Un árbol de mínimo coste para (N_0, C) , abreviado mt por sus siglas en inglés, es un árbol t tal que $C(t) = \min_{G \in G_0^N} \sum_{(i,j) \in G} c_{ij}$.*

Definición 1.6. *Dado un *mstp* (N_0, C) , denotamos el coste asociado con cualquier mt como $m(N_0, C)$.*

Del mismo modo que en los *mcstp* se dispone de un *mt*, también es posible que no necesariamente sea único, ya que puede haber más de un árbol de coste mínimo.

Para evidenciar esta situación, tomamos como ejemplo un caso que nos será de utilidad para describir las diversas problemáticas que se expondrán a lo largo del capítulo.

Ejemplo 1.1. Situación con más de un árbol de mínimo coste. Consideremos el siguiente *mcstp* (N_0, C) donde $N = \{1, 2, 3\}$ y la siguiente matriz de costes C .

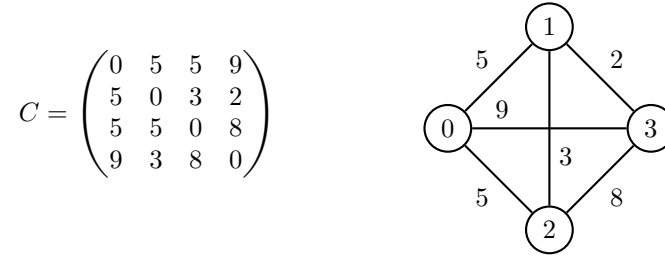


Figura 1.1: Matriz de costes y grafo asociado

El grafo mostrado en el ejemplo sirve para demostrar el supuesto contemplado con anterioridad en cuanto a la posibilidad de que no haya una sola solución única y que existan varios árboles de mínimo coste.

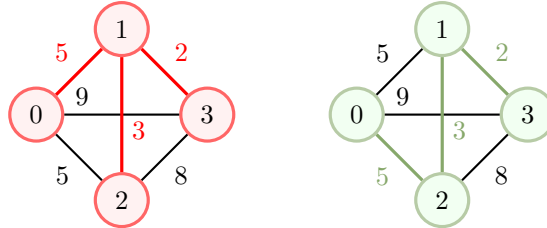


Figura 1.2: Árboles de mínimo coste.

Estas definiciones, aunque no abarcan toda la terminología de la teoría de grafos, nos aportan un punto de origen para abordar los problemas que se presentan a continuación. Como hemos observado previamente, los datos de partida siempre consistirán en un conjunto de nodos y arcos que conforman un grafo completo con pesos, siendo el objetivo construir un árbol de expansión de mínimo coste a partir del mismo. Estos detalles específicos se concretarán en función del tipo de problema que se presente, si bien en esta sección, nos centraremos en los problemas de árboles de coste mínimo.

1.2. Algoritmos para el cálculo del árbol de coste mínimo

La literatura sobre los problemas de árbol de mínimo coste comienzan con la definición de algoritmos para su construcción.

A menudo, los pesos de los arcos son identificados como costes debido la gran variedad de problemas en los que se modela esta situación. Por esta razón, se emplea el significado de árbol de expansión de coste mínimo o árbol de coste mínimo. En lo sucesivo se tratarán ambos términos de manera equivalente.

El objetivo, dado un grafo no dirigido y completo, radica en la búsqueda de un árbol que una todos los nodos y que la suma del peso de los arcos sea inferior o igual a la suma del peso de los arcos que forman cualquier otro árbol de expansión presente en el grafo. A través de los años, se han planteado numerosos algoritmos de búsqueda, si bien nos centraremos en aquellos tres más extendidos y utilizados. Estos son: el algoritmo de **Prim**, el de **Kruskal** y el de **Borůvka**.

1.2.1. Algoritmo de Prim

Debido a su sencilla implementación, el algoritmo de Prim es ampliamente utilizado en la teoría de grafos y en la optimización de redes. Este algoritmo fue desarrollado en 1930 por el matemático checo Vojtěch Jarník, ahora bien, no sería hasta 1957 que se publicaría de manera independiente a manos del matemático e ingeniero informático Robert C. Prim, mientras trabajaba en la *Bell Telephone Laboratories*. En aquel momento, la compañía estaba interesada en encontrar soluciones eficientes para la construcción de redes telefónicas y, en particular, en la búsqueda de un árbol de expansión mínimo para una red de líneas de comunicación. Prim diseñó el algoritmo para esta finalidad y posteriormente lo publicó en un artículo titulado “Shortest Connection Networks and Some Generalizations”.

El planteamiento, que Prim propone para resolver el problema, radica en la idea de conectar los nodos consecutivamente hasta alcanzarlos a todos. Contando con un grafo no dirigido, comenzamos a partir de un nodo escogido como punto de partida y proseguimos seleccionando en cada etapa el arco de menor coste (en caso de arcos con mismo coste, se elige de manera aleatoria) para unir el nodo del árbol con aquel que aún no está incluido. Tras su vinculación, repetimos el proceso hasta incorporar todos los nodos y tener un árbol de expansión cuyo coste será mínimo.

El algoritmo de Prim (1957) se elabora a través de las siguientes etapas:

Iniciamos con $S^0 = \{0\}$ y $G^0(C) = \emptyset$.

- **Etapa 1:** Tomamos el arco $(0, i)$ de forma que $c_{0i} = \min_{j \in N} \{c_{0j}\}$. Si existen varios arcos que cumplen esta condición, se escoge uno. Ahora, $S^1 = \{0, i\}$ y $G^1(C) = \{(0, i)\}$.
- **Etapa p+1:** Dados $S^p \subset N_0$ y $G^p(C)$, se selecciona el arco (i, j) con $j \in S^p$ e $i \in N_0 \setminus S^p$ de forma que $c_{ij} = \min_{l \in S^p, k \in N_0 \setminus S^p} \{c_{lk}\}$. Si existen varios arcos que cumplen esta condición, se selecciona uno. Ahora, $S^{p+1} = S^p \cup \{i\}$ y $G^{p+1}(C) = G^p(C) \cup \{(i, j)\}$.

El proceso es completado en n etapas y se denota G^n al árbol obtenido a través del algoritmo de Prim.

Ejemplo 1.2. Ejemplo de ejecución del algoritmo de Prim.

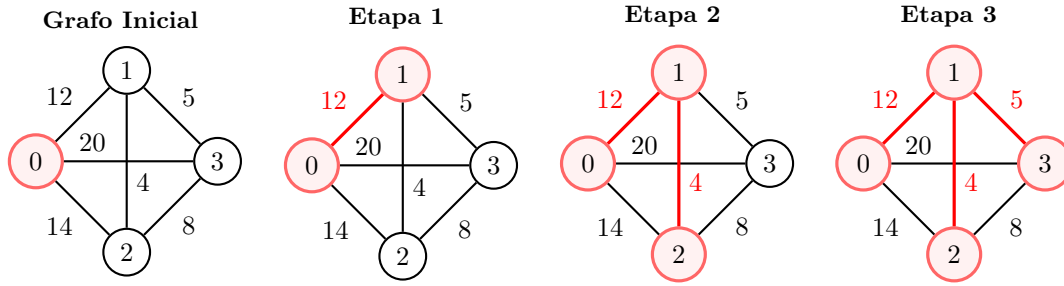


Figura 1.3: Etapas del algoritmo de Prim

Con mayor detalle, se presenta el procesamiento de las etapas:

$$S^0 = \{0\} \text{ y } G^0(C) = \emptyset$$

■ **Etapa 1**

$$c_{0i} = \min_{j \in N} \{c_{0j}\} = \min\{c_{01}, c_{02}, c_{03}\} = \min\{c_{01}\}$$

$$S^1 = \{0, 1\} \text{ y } G^1(C) = \{(0, 1)\}$$

■ **Etapa 2**

$$c_{ij} = \min_{l \in S^1, k \in N_0 \setminus S^1} \{c_{lk}\} = \min_{l \in \{0,1\}, k \in \{2,3\}} c_{lk} = \min\{c_{02}, c_{03}, c_{12}, c_{13}\} = \min\{c_{12}\}$$

$$S^2 = \{0, 1, 2\} \text{ y } G^2(C) = \{(0, 1), (1, 2)\}$$

■ **Etapa 3**

$$c_{ij} = \min_{l \in S^2, k \in N_0 \setminus S^2} \{c_{lk}\} = \min_{l \in \{0,1,2\}, k \in \{3\}} c_{lk} = \min\{c_{03}, c_{13}, c_{23}\} = \min\{c_{13}\}$$

$$S^3 = \{0, 1, 2, 3\} = N_0 \text{ y } G^3(C) = \{(0, 1), (1, 2), (1, 3)\}$$

Obtenemos, de esta forma, un *mt*, formado por la adherencia de los arcos $(0, 1) - (1, 2) - (1, 3)$. $m(N_0, C) = c_{01} + c_{12} + c_{13} = 12 + 4 + 5 = 21$. En este caso en particular, podemos comprobar que existe un único *mt*, sin embargo, podría no darse esta situación (como se observa en el ejemplo 1.2).

1.2.2. Algoritmo de Kruskal

El algoritmo de Kruskal para encontrar un árbol de expansión de mínimo coste fue propuesto por el matemático estadounidense Joseph Kruskal en 1956.

Tanto el algoritmo de Prim como el de Kruskal se utilizaron por primera vez en la década de 1950 para la construcción de redes telefónicas, y desde entonces se han empleado en una gran variedad de aplicaciones, como en el diseño de redes de ordenadores y en la optimización de rutas de transporte.

La idea detrás del algoritmo radica en la construcción de un árbol mediante la incorporación progresiva de arcos con el menor coste sin formar ciclos.

Formalmente el algoritmo de Kruskal (1956) se define como:

Empezamos con $A^0(C) = \{(i, j) | i, j \in N_0, i \neq j\}$ y $G^0(C) = \emptyset$.

- **Etapa 1:** Sea $(i, j) \in A^0(C)$ un arco de forma que $c_{ij} = \min_{(k,l) \in A^0(C)} \{c_{kl}\}$.

Si existen varios arcos que cumplen esta condición, se selecciona uno.

Tenemos que $(i^1(C), j^1(C)) = (i, j)$, $A^1(C) = A^0(C) \setminus \{(i, j)\}$ y $G^1(C) = \{(i^1(C), j^1(C))\}$.

- **Etapa p+1:** Definidos los conjuntos $A^p(C)$ y $G^p(C)$, sea $(i, j) \in A^p(C)$ un arco de forma que $c_{ij} = \min_{(k,l) \in A^p(C)} \{c_{kl}\}$.

Si existen varios arcos que cumplen esta condición, se selecciona uno. Ahora, $S^{p+1} = S^p \cup \{i\}$ y $G^{p+1}(C) = G^p(C) \cup \{(i, j)\}$. Existen dos posibilidades:

1. $G^p(C) \cup \{(i, j)\}$ contiene un ciclo. Ir al principio de la Etapa p+1 con $A^p(C) = A^p(C) \setminus \{(i, j)\}$ y $G^p(C)$ igual.
2. $G^p(C) \cup \{(i, j)\}$ no tiene ciclos. Establecemos $(i^{p+1}(C), j^{p+1}(C)) = (i, j)$, $A^{p+1}(C) = A^p(C) \setminus \{(i, j)\}$, y $G^{p+1}(C) = G^p(C) \cup \{(i^{p+1}(C), j^{p+1}(C))\}$. Ir a la etapa p+2

El proceso es completado en n etapas. Conduce a un árbol $G^n(C)$, el cual puede no ser único.

Ejemplo 1.3. Ejemplo de ejecución del algoritmo de Kruskal (Grafo del ejemplo 1.3).

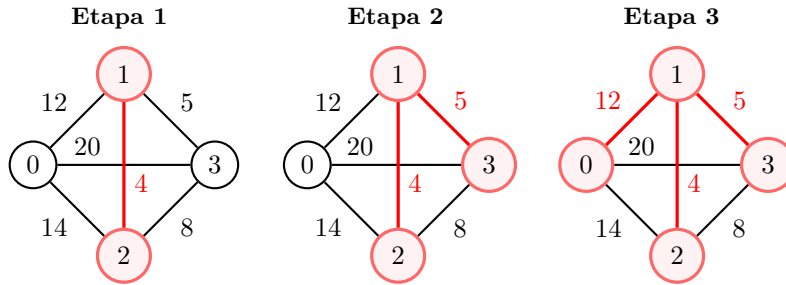


Figura 1.4: Etapas del algoritmo de Kruskal

Análogamente, se incorpora el procesamiento de las etapas:

$A = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ y $G^0(C) = \emptyset$

- **Etapa 1**

$$c_{ij} = \min_{(l,k) \in A^0(C)} \{c_{lk}\} = \min\{c_{12}\}$$

$$A^1(C) = A^0(C) \setminus \{(1, 2)\} \quad G^1(C) = \{(1, 2)\}$$

- **Etapa 2**

$$c_{ij} = \min_{(l,k) \in A^0(C)} \{c_{lk}\} = \min\{c_{13}\}$$

$$A^2(C) = A^0(C) \setminus \{(1, 2), (1, 3)\} \quad G^2(C) = \{(1, 2), (1, 3)\}$$

- **Etapa 3** La selección del arco (2,3) formaría un ciclo por lo que se descarta.

$$c_{ij} = \min_{(l,k) \in A^0(C)} \{c_{lk}\} = \min\{c_{01}\}$$

$$A^3 = A^0(C) \setminus \{(0, 1), (1, 2), (1, 3)\} \quad y \quad G^3(C) = \{(0, 1), (1, 2), (1, 3)\}$$

Obtenemos así, un mt , formado por la consecución de los arcos $(0, 1) - (1, 2) - (1, 3)$. $m(N_0, C) = c_{01} + c_{12} + c_{13} = 12 + 4 + 5 = 21$.

A diferencia del algoritmo de Prim, cuya formación parte de un vértice seleccionado y establece el árbol de expansión mínima sobre el mismo, el algoritmo de Kruskal construye el árbol de expansión mínima a partir de las aristas de menor peso del grafo.

1.2.3. Algoritmo de Borůvka

El algoritmo de Borůvka fue propuesto por el matemático checo Otakar Borůvka en 1926 para encontrar la ruta más eficiente de una red eléctrica. A pesar de que fuera descubierto en varias ocasiones de manera independiente con posterioridad, se le atribuye el fundamento de ser el primero en modelizar este tipo de problemas, así como de formular un algoritmo para su resolución.

La principal diferencia de este algoritmo frente a los anteriormente descritos, es que el algoritmo de Borůvka hace uso de una aproximación distinta centrada en la conexión de componentes. En consecuencia, una componente conexa es un árbol de G en el que todos los nodos están conectados entre sí por un camino.

La idea es obtener un árbol añadiendo secuencialmente, para cada componente conexa, el arco con menor peso que una esta componente conectada con otras componentes vinculadas en atención a la no formación de ciclos.

Definición 1.7 Dado un grafo $G \in G_0^N$, $S \subset N_0$ es una componente conexa inducida por G si se satisface:

- Para cada $i, j \in S$, existe un camino en G de i a j .
- Si $i \in S$ y $j \in N_0 \setminus S$, entonces i y j no están conectados en G .

Formalmente, dado un grafo G , $P(N_0, G)$ es la fragmentación de N_0 en componentes conexas inducida por G . Denotamos por S_i la componente conexa a la que pertenece el jugador i .

A continuación, se exponen las distintas etapas del algoritmo de Borůvka (1926):

Comenzamos con $G = \emptyset$, por lo tanto, $P(N_0, G) = \{\{i\}_{i \in N_0}\}$

- **Etapa 1:** Para cada $i \in P(N_0, G)$, sea j_i tal que $c_{ij_i} = \min_{(k \in N_0 \setminus \{i\})} \{c_{ik}\}$.

En caso de que haya varios arcos (i, j_i) atendiendo esta condición, se selecciona uno sin crear ciclos. Tenemos que $G = \bigcup_{i \in N_0} \{(i, j_i)\}$.

Existen dos posibles casos:

1. $P(N_0, G) = N_0$. El algoritmo se termina y tenemos un mt en nuestro grafo G .
2. $P(N_0, G) \neq N_0$. Ir a la etapa p+1.

- **Etapa p+1:** Para cada $S \in P(N_0, G)$, sea j_i tal que $c_{ij_i} = \min_{(k \in N_0 \setminus S \setminus \{i\})} \{c_{kl}\}$.

En caso de que haya varios arcos (i, j_i) atendiendo esta condición, se selecciona uno sin crear ciclos. Tenemos que $G = G \cup \left(\bigcup_{S \in P(N_0, G)} \{(i, j_i)\} \right)$.

Tras alcanzar este procedimiento, regresamos a los dos posibles casos. En el supuesto de que $P(N_0, G) \neq N_0$ ir a la etapa $p+2$

Este proceso es completado en un número finito de etapas. El algoritmo conduce a un árbol, el cual puede no ser único.

Ejemplo 1.4. Ejemplo de ejecución del algoritmo de Borůvka (Grafo del ejemplo 1.3).

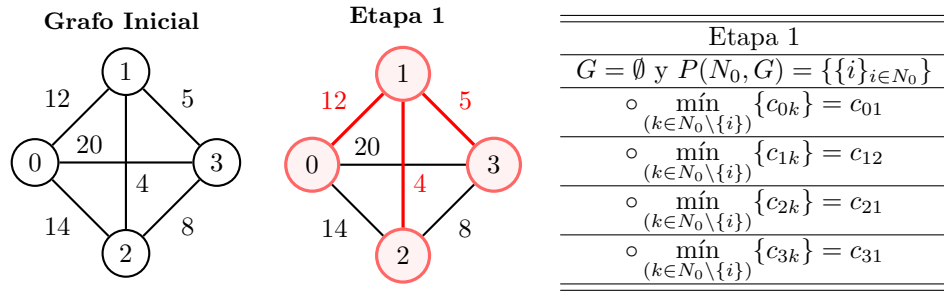


Figura 1.5: Etapas del algoritmo de Borůvka

Contemplamos a partir de este ejemplo que $G = \bigcup_{i \in N_0} \{(i, j_i)\} = \{(0, 1), (1, 2), (1, 3)\}$.

Ya que $P(N_0, G) = N_0$, en la etapa 1 obtenemos un mt para el grafo G .

1.3. Cooperación en árboles óptimos

En el supuesto de árboles de coste mínimo se asume que los agentes, que se identifican con nodos de un grafo, construyen un mt ; ahora bien, una vez se obtiene este, aparece una cuestión igual de relevante, repartir entre ellos el coste de alguna determinada manera.

Pese a todo, debemos añadir que si tomamos en consideración situaciones reales que encajan en el marco de los $mcstp$, el reparto de costes sigue distintos planteamientos en la teoría de juegos. Por un lado está el punto de vista no cooperativo, donde los agentes actúan independientemente, sin establecer acuerdos vinculantes. Bergantiños y Lorenzo (2004) reflexionan el supuesto de que cada agente tome sus decisiones por separado, lo que provoca que la necesidad del bien proporcionado por el proveedor (la fuente) sea diferente. En consecuencia, el agente i puede beneficiarse del hecho de saber que la conexión es extremadamente importante para j . Es por ello que el agente i podría conectarse a través de j , ya que este se conectará a la fuente con toda seguridad, acogiéndose a un menor coste. Por otro lado, en el punto de vista cooperativo, se asume que los agentes se pondrán de acuerdo a la hora de construir el árbol de mínimo coste y se buscarán soluciones de reparto de dicho coste global. Muchos problemas de investigación operativa se han tratado desde el punto de vista de la teoría de juegos cooperativos, como son los problemas de transporte o inventario (Meca et al 2003). Dentro del presente estudio, nos ocuparemos de este segundo enfoque.

Conociendo esto, en circunstancias como las que acabamos de considerar en donde tenemos varios agentes conectados a una fuente, se considera necesario ahondar en la definición de una serie de conceptos relacionados para entender la vía en la que han de dividirse los costes entre los agentes implicados.

Los juegos cooperativos son aquellos en los que se consideran situaciones en las que participan un conjunto de individuos con capacidad para alcanzar acuerdos vinculantes para así, lograr un beneficio

en común. Del mismo modo, nos centraremos en aquellos juegos con utilidad transferible (abreviado, TU por sus siglas en inglés) en donde se asume que los costes generados por cualquier coalición se pueden repartir de cualquier forma entre sus miembros.

Definición 1.8. *Un juego cooperativo de utilidad transferible, es un par (N, v) , donde:*

- $N = \{1, 2, \dots, n\}$ es un conjunto de jugadores.
- v es la función característica, que asocia a cada coalición $S \subset N$ un número real $v(S)$, que representa el valor de la coalición S . Se considera que $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ y que $v(\emptyset) = 0$.

Por consiguiente, hay dos posibles formas de definir las reglas de asignación en los *mcstp*. Por un lado está el planteamiento directo por el cual, a través de algoritmos como los que se presentaron con anterioridad, se determina el coste atribuido entre los agentes. Por otro lado, está la posibilidad de adoptar un planteamiento indirecto mediante los juegos cooperativos. Este último enfoque se basa en la asociación de un juego TU (N, v) con un *mcstp* (N_0, C) , en el que se calcula su reparto de acuerdo a las reglas ya conocidas dentro de la literatura de los juegos cooperativos.

A continuación, se describen los juegos cooperativos más importantes en la literatura de *mcstp*.

Juego pesimista

Se conoce como juego pesimista aquel juego TU presentado por Bird (1976), según el cual cada coalición $S \subseteq N$ pagaría su coste mínimo de conexión asumiendo que los agentes que no figuran en la coalición no participan.

Definición 1.9. *Dado un problema de árboles de mínimo coste (N_0, C) , el juego pesimista asociado es un par (N, v_C) tal que*

$$v_C(S) = m(S_0, C)$$

El enfoque pesimista hace referencia a la suposición de que los agentes $N \setminus S$ no cooperan, por lo que condiciona que sus nodos no estén disponibles para su conexión a la fuente.

Juego optimista

Alternativamente, se puede adoptar un criterio optimista. Bergantiños y Vidal-Puga (2007a) asocian a cada *mcstp* un juego TU donde el coste de cada coalición $S \subseteq N$ se obtiene asumiendo que aquellos agentes que no pertenecen a la coalición, ya están conectados a la fuente. Además, la conexión a través de ellos es posible sin inducir en un coste adicional.

Definición 1.10. *Dado un problema de árboles de mínimo coste (N_0, C) , el juego optimista asociado es un par (N, v_C^o) tal que*

$$v_C^o(S) = m(S_0, C^{+(N \setminus S)})$$

con $c_{ij}^{+(N \setminus S)} = c_{ij}$ para todos los agentes $i, j \in S$ y $c_{i0}^{+(N \setminus S)} = \min_{j \in (N \setminus S)_0} c_{ij}$ para todo $i \in S$.

Juego monótono

Por otra parte, Bird (1976) analiza otro tipo de criterio en el que se permite vincular libremente a los miembros de la coalición S junto con otros agentes de fuera de la coalición, asumiendo los gastos

de dichas conexiones ajenas a la coalición, con el objetivo de minimizar el coste por el que se conectan a la fuente. (Se ahondará este criterio en el próximo capítulo.)

Definición 1.11. Dado un problema de árboles de mínimo coste (N_0, C) , el juego monótono asociado es un par (N, v_C^m) tal que

$$v_C^m(S) = m(T_0, C_T) : S \subseteq T \subseteq N$$

donde $m(T_0, C_T)$ denota el coste mínimo de conexión de un árbol de expansión para un (T_0, C) .

Dado un $mcstp(N_0, C)$, se pueden asociar dos juegos adicionales utilizando su forma irreducible: (N, v_{C^*}) y $(N, v_{C^*}^o)$

Forma irreducible

La forma irreducible de un $mcstp(N_0, C)$ se identifica como un grafo minimal $(N_0, C^*) = (N_0, C^t)$ asociado a un árbol de mínimo coste t . Bird (1976) define al grafo minimal (N_0, C^t) como aquel que se obtiene reduciendo el coste de un arco (i, j) al máximo coste del arco que hay en el único camino de t , que une los dos nodos del arco (i, j) . Cabe destacar que la forma irreducible, si bien se calcula a través de un mt , no depende del mismo. En consecuencia se denota como C^* . (Véase Aarts and Driessen, 1993 para profundizar en las comprobaciones)

Por lo tanto, la forma irreducible (N_0, C^*) tiene la propiedad de que si se reduce el coste de un arco, el coste mínimo de conexión de todos los agentes a la fuente también se reduce. Por añadidura, Bergantiños y Vidal-Puga (2005) prueban que (N_0, C^*) es irreducible si y sólo si existe solo un mt en (N_0, C^*) que satisface las siguientes dos condiciones:

1. Se encuentra un árbol de coste mínimo donde los agentes están en línea, empezando por el nodo fuente $t = \{(i_{p-1}, i_p)_{p=1}^n$ donde $i_0 = 0$
2. Dado $i_p, i_q \in N_0, p < q$, entonces $c_{i_p i_q} = \max_{p < r \leq q} \{c_{i_{r-1} i_r}\}$

Ejemplo 1.5. Obtención de los distintos tipos de juegos asociados al problema del *ejemplo 1.3*.

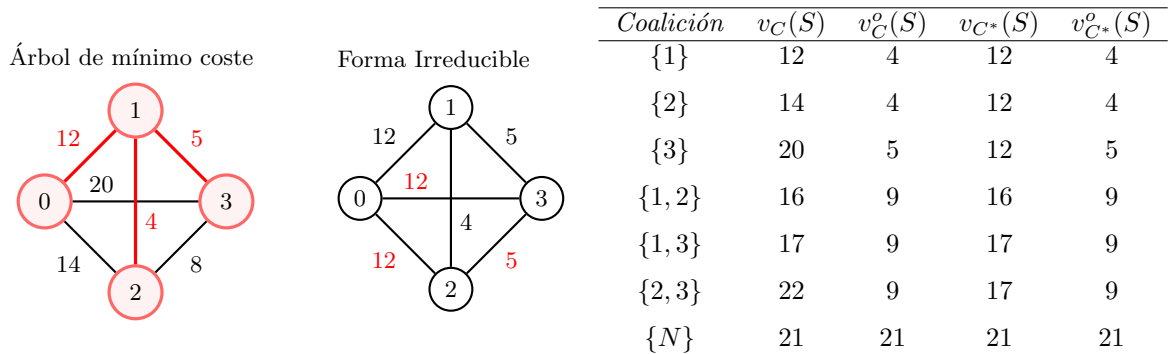


Figura 1.6: Coaliciones del juego pesimista, optimista y su forma irreducible.

Como podemos constatar a través de este ejemplo, en el caso de un juego pesimista, el valor de una coalición se reduce al mejor valor que puedan lograr por sí mismos. En cambio, en los juegos optimistas, los agentes están dispuestos a colaborar entre sí. Es decir, pueden conectarse mediante integrantes de su coalición o de manera directa, así como por aquellos agentes restantes, dado que se asume su previa conexión a la fuente.

1.4. Reglas de reparto

Como ya se ha mencionado, una de las cuestiones más estudiadas en la literatura sobre los *mcstp* es conocer de qué manera se puede repartir el coste del árbol mínimo. Para ello se considera pertinente profundizar en la definición de reglas de asignación de costes.

Definición 1.12. *Una regla de asignación de costes es una función ψ que asigna a cada problema de árboles de coste mínimo (N_0, C) , el vector $\psi(N_0, C) \in \mathbb{R}^N$ tal que:*

$$\sum_{i \in N} \psi_i(N_0, C) = m(N_0, C)$$

donde $\psi_i(N_0, C)$ es el coste asociado al agente i y $m(N_0, C)$ es el coste mínimo de conexión de los agentes a la fuente, es decir, el vector proporcionado por la regla es eficiente.

De esta forma, dado un problema de árboles de expansión (N_0, C) , la regla de asignación indica el coste atribuido de los agentes en N . Nótese que la fuente 0 no es un agente activo y por lo tanto, no soporta ninguna parte del coste. Con ello, existen numerosas reglas propuestas en la literatura relativa a los problemas de árboles de mínimo coste. Se presentan a continuación aquellas reglas más conocidas:

1.4.1. Regla de Bird

El procedimiento seguido por Bird (1976) para la norma de imputación de costes se fundamenta en el algoritmo de Prim. Los agentes se conectan a la fuente en base a las etapas de este algoritmo (descrito en el apartado 1.2.1.), y cada agente paga su correspondiente coste de conexión al predecesor inmediato.

Definición 1.13. *Dado un problema de árboles de mínimo coste (N_0, C) , la regla de Bird para la asignación de costes:*

$$B_i(N_0, C) = c_{i\alpha(i)} \quad \forall i \in N$$

donde $\alpha(i)$ es el primer agente en el camino que une el agente i a la fuente en el árbol de mínimo coste.

La regla de Bird se concreta con respecto a un árbol específico, asumiendo el coste de aquel arco que le conecta, directa o indirectamente, a la fuente.

Ejemplo 1.6. Asignación de costes asociado al *mcstp* siguiendo la regla de Bird del ejemplo 1.3.

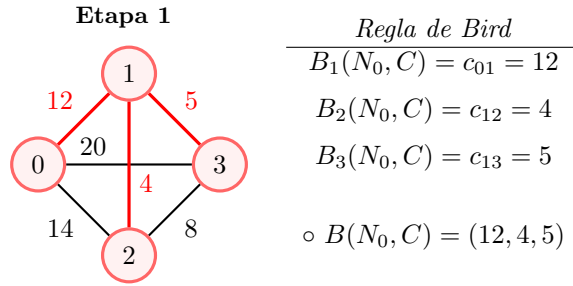


Figura 1.7: Reparto de asignación de costes según la regla de Bird

Cabe señalar que esto no define una regla si C da lugar a más de un mt . No obstante, cuando C no induce a un único mt , Dutta y Kar (2004) vuelven a recurrir a la regla de Bird para cada $mcstp$ derivado de C . Tomando posteriormente, una combinación convexa de las asignaciones correspondientes a cada $mcst$ como regla.

Definición 1.14. Dado un problema de árboles de mínimo coste (N_0, C) con dos o más mt . Sea Π_N el conjunto de los posibles órdenes sobre N , y dado $\pi \in \Pi_N$, se define $B^\pi(N_0, C)$ como la asignación obtenida cuando se aplica el algoritmo de Prim sobre (N_0, C) y la asignación se resuelve seleccionando el primer agente dado por π . Así pues:

$$P^\pi(N_0, C) = \frac{1}{|\Pi_N|} \sum_{\pi \in \Pi_N} B^\pi(N_0, C)$$

Ejemplo 1.7. Asignación de costes asociado al $mcstp$ siguiendo la regla de Bird para más de un $mcst$ (Tomamos el grafo del ejemplo *ejemplo 1.2*).

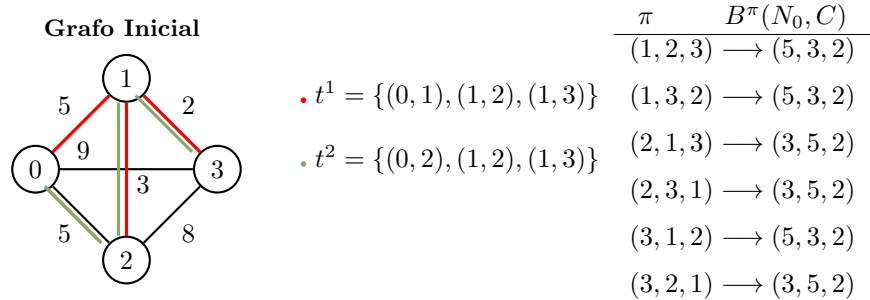


Figura 1.8: Reparto de asignación de costes según la regla de Bird para varios $mcst$

Siendo el reparto correspondiente:

$$P^\pi(N_0, C) = \frac{1}{6} \sum_{\pi \in \Pi_N} B^\pi(N_0, C) = (4, 4, 2)$$

1.4.2. Regla de Dutta-Kar

Otra regla de reparto en problemas de árboles de mínimo coste es la regla de Dutta-Kar. B. Dutta y A. Kar (2004) partieron una vez más del algoritmo de Prim para conectar secuencialmente los agentes a la fuente. Si bien, a través de esta regla, se distribuyen los costes de manera que cada agente se conecta escogiendo el mínimo coste entre lo que le correspondería y su secuencia inmediata.

Definición 1.15. *El algoritmo de Dutta-Kar procede del siguiente modo:*

Dado $A^0 = \{0\}$, $G^0 = \emptyset$, $t^0 = 0$

■ **Paso 1:** Seleccionamos el par ordenado (a^1, b^1) tal que:

$$(a^1, b^1) = \underset{(i,j) \in A^0 \times A_c^0}{\operatorname{argmin}} c_{ij}$$

Denotamos A_c al complementario de una coalición $A \subset N$, es decir, $A_c = N \setminus A$.

Definimos $t^1 = \max(t^0, c_{a^1, b^1})$, $A^1 = A^0 \cup \{b^1\}$, $G^1 = G^0 \cup \{(a^1, b^1)\}$.

■ **Paso k:** Definimos el par ordenado

$$(a^k, b^k) = \underset{(i,j) \in A^{k-1} \times A_c^{k-1}}{\operatorname{argmin}} c_{ij}.$$

Definimos $t^k = \max(t^{k-1}, c_{a^k, b^k})$, $A^k = A^{k-1} \cup \{b^k\}$, $G^k = G^{k-1} \cup \{(a^k, b^k)\}$.

Determinamos que $DK_{b^{k-1}}(N_0, C) = \min(t^{k-1}, c_{a^k, b^k})$.

El algoritmo termina cuando $k = |N| = n$, luego $DK_{b^n}(N_0, C) = t^n$

Por consiguiente, el coste que asignamos al agente b^{k-1} se determina a través del mínimo entre el coste de las conexiones establecidas (t^{k-1}), y el coste de la conexión en el paso k , es decir, c_{a^k, b^k} .

Ejemplo 1.8. Asignación de costes asociado al *mcstp* siguiendo la regla de Dutta-Kar del *ejemplo 1.3*.

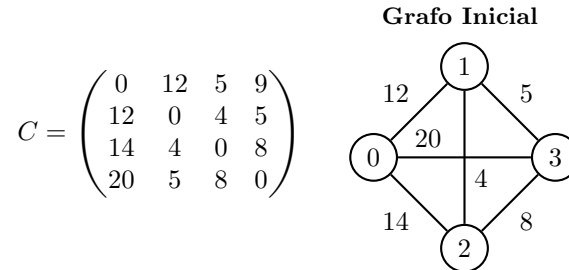


Figura 1.9: Representación de un *mcstp* para la asignación de costes según la regla de Dutta-Kar

Procedemos con $t^0 = 0$ y $A^0 = \{0\}$.

Etapla 1: Tenemos $(a^1, b^1) = (0, 1)$, $t^1 = c_{01} = 12$, $A^1 = \{0, 1\}$.

Etapla 2: Seguidamente $(a^2, b^2) = (1, 2)$, $DK_1 = \min(t^1, c_{12}) = 4$, $t^2 = \max\{t^1, c_{12}\} = 12$, $A^2 = \{0, 1, 2\}$.

Etapla 3: A continuación tenemos $(a^3, b^3) = (1, 3)$, $DK_2 = \min(t^2, c_{13}) = 5$, $t^3 = \max\{t^2, c_{13}\} = 12$, $A^3 = \{0, 1, 2, 3\}$.

Puesto que $A^3 = N_0$, $DK_3 = t^3 = 12$, el algoritmo finaliza con una asignación de $DK(N_0, C) = (4, 5, 12)$.

A través de este ejemplo, podemos contrastar que no es necesario que a un nodo se le atribuya el coste de su arista anterior o sucesiva. En este caso, el agente 2 paga el coste de $(a^3, b^3) = (1, 3)$.

Análogamente, Dutta y Kar (2004) proponen una definición alternativa de la regla para el caso en el que hay multiplicidad de árboles de mínimo coste. En este caso, se consideran las permutaciones $\pi \in \Pi_N$ como procedimiento de desempate ante aristas del mismo coste.

Definición 1.16. Dado un problema de mínimo coste arbitrario (N_0, C) , se denomina como $DK^\pi(N_0, C)$ a la asignación de costes obtenida del algoritmo anterior empleando las permutaciones de $\pi \in \Pi_N$ como medidas de prioridad para desempatar aquellas aristas con el mismo coste. Por tanto:

$$DK(N_0, C) = \frac{1}{|N|!} \sum_{\pi \in \Pi_N} DK^\pi(N_0, C)$$

Ejemplo 1.9. Asignación de costes asociado al *mcstp* siguiendo la regla de Dutta-Kar para más de un *mt* (Tomamos el grafo del ejemplo ejemplo 1.2).

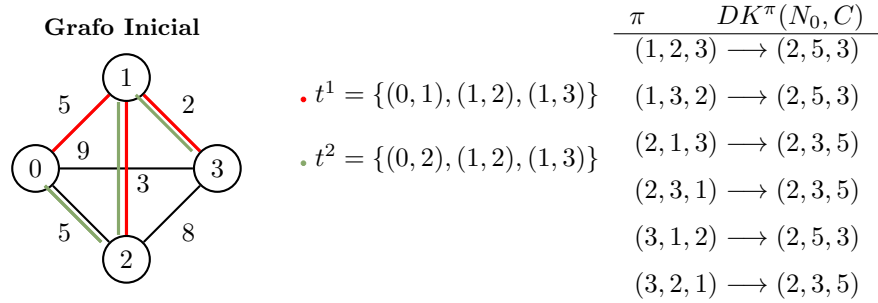


Figura 1.10: Reparto de asignación de costes según la regla de Dutta-Kar para múltiples *mcst*

Como este problema de árboles de expansión presenta dos *mt*, para obtener $DK(N_0, C)$, debemos calcular $DK^\pi(N_0, C)$ para cada una de las ordenaciones de $\pi \in \Pi_N$. Tomamos como ejemplo $\pi = (2, 1, 3)$ que se corresponde con t^2 y procedemos con el algoritmo:

Tenemos que $t^0 = 0$ y $A^0 = \{0\}$.

Etapla 1: Procedemos con $(a^1, b^1) = (0, 2)$, $t^1 = c_{02} = 5$, $A^1 = \{0, 2\}$.

Etapa 2: Seguidamente $(a^2, b^2) = (1, 2)$, $DK_2 = \min(t^1, c_{12}) = 3$, $t^2 = \max\{t^1, c_{12}\} = 5$, $A^2 = \{0, 1, 2\}$.

Etapa 3: A continuación, tenemos $(a^3, b^3) = (1, 3)$, $DK_1 = \min(t^2, c_{13}) = 2$, $t^3 = \max\{t^2, c_{13}\} = 5$, $A^3 = \{0, 1, 2, 3\}$.

Puesto que $A^3 = N_0$, $DK_3 = t^3 = 5$, el algoritmo finaliza con una asignación de $DK^\pi(N_0, C) = (2, 3, 5)$. Este proceso se repite para todas las ordenaciones de π , disponiendo de los resultados en la precedente tabla.

Siendo el reparto correspondiente:

$$DK(N_0, C) = \frac{1}{6} \sum_{\pi \in \Pi_N} DK^\pi(N_0, C) = (2, 4, 4)$$

Como podemos comprobar, el reparto de costes no es igual al que se obtuvo al aplicar la regla de Bird con el mismo ejemplo. Se obtiene una solución diferente a pesar de que, en ambos repartos, los agentes se incorporan mediante el algoritmo de Prim. No obstante, en la regla de Dutta-Kar, los agentes conectados previamente, pueden aprovecharse de los posibles intercambios en los costes asignados en cada etapa.

De esta manera comprobamos que los agentes que se conectan primero a la fuente pueden presentar un reparto de costes mucho más favorable. El agente 1 presenta una diferencia sustancial en cuanto al coste que se le asigna ya que en la regla de Bird es el vector $(12, 4, 5)$, mientras que aplicando la regla de Dutta-Kar, se aplica una asignación de $(4, 5, 12)$.

1.4.3. Regla Folk

La última de las reglas de asignación de costes estudiada en esta sección es la regla Folk. Introducida independientemente por Feltkamp et al. (1994) bajo el nombre de la regla de ERO (*Equal Remaining Obligation*), y presentada también bajo otras definiciones alternativas por Bergantiños y Vidal-Puga (2007b). Posteriormente, Bergantiños y Lorenzo-Freire (2008) fundamentan que la regla Folk para *mcstp* coincide con la regla de ERO.

Debido a la gran variedad de formas de calcular esta regla, se considera pertinente centrarse en aquellas más estudiadas en la literatura: por un lado a partir del algoritmo de Kruskal y por otro basado en los juegos cooperativos. En esta última, Bergantiños y Vidal-Puga (2007a) demuestran que se puede obtener como el valor de Shapley del juego optimista o del irreducible.

El **valor de Shapley** es una medida de distribución en teoría de juegos en el que se reparte, de manera equitativa, los costes entre los agentes que se encuentran en la coalición S . Shapley (1953) introduce un concepto en el que, llegado un nuevo jugador i , podemos medir cuál es la aportación de este jugador a la coalición, lo que se conoce como su contribución marginal: $v(S \cup i) - v(S)$.

En concreto, el valor de shapley hace uso de dichas contribuciones marginales para cuantificar qué importancia tiene cada jugador para la cooperación global y por lo tanto qué asignación debería recibir. Para determinar estas contribuciones, se contemplan todas las permutaciones posibles de los jugadores, evaluándose el beneficio que produce cada jugador si se integra o no en la coalición.

Definición 1.16. Dado un juego $TU(N, v)$ se define al valor de Shapley, para todo $i \in N$, y siendo $Pre(i, \pi)$ el conjunto de elementos de N que preceden a i en el orden π , como:

$$Sh_i(N, v) = \frac{1}{|N|!} \sum_{\pi \in \Pi_N} [v(Pre(i, \pi) \cup \{i\}) - v(Pre(i, \pi))]$$

Definición 1.17. Dado un problema de árboles de mínimo coste, la regla Folk para la asignación de costes se define como:

$$Folk(N_0, C) = Sh(N, v_C^o) = Sh(N, v_{C^*})$$

Donde (N, v_C^o) es el juego optimista asociado al problema, y (N, v_{C^*}) se corresponde con el juego pesimista asociado a su forma irreducible.

Valor de Shapley del juego optimista

Dado que el valor de shapley es la media de las contribuciones marginales, podemos obtener la regla Folk calculando estas asignaciones a través del juego optimista v_C^o para cada posible orden.

Ejemplo 1.10. Cálculo de la regla Folk mediante el valor de Shapley del juego optimista. (Tomamos el ejemplo 1.6).

Para su resolución, mostramos los grafos con respecto a cada una de las posibles coaliciones del ejemplo 1.6 adecuándose al juego optimista calculado previamente.

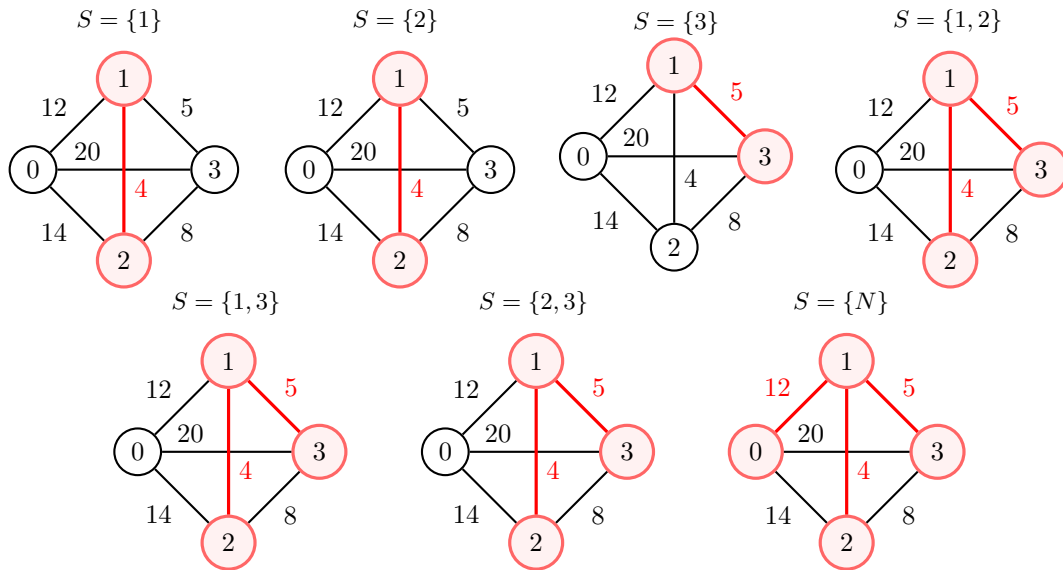


Figura 1.11: Juego optimista para cada coalición.

A continuación, se procede a calcular las contribuciones marginales para calcular el valor de Shapley y así, obtener la regla Folk para este juego.

$$Folk(N_0, C) = (6.\widehat{8}\widehat{3}, 6.\widehat{8}\widehat{3}, 7.\widehat{3})$$

Orden	Jugador 1	Jugador 2	Jugador 3
(1, 2, 3)	$v_C^o(\{1\}) = 4$	$v_C^o(\{1, 2\}) - v_C^o(\{1\}) = 5$	$v_C^o(N) - v_C^o(\{1, 2\}) = 12$
(1, 3, 2)	$v_C^o(\{1\}) = 4$	$v_C^o(N) - v_C^o(\{1, 3\}) = 12$	$v_C^o(\{1, 3\}) - v_C^o(\{1\}) = 5$
(2, 1, 3)	$v_C^o(\{1, 2\}) - v_C^o(\{2\}) = 5$	$v_C^o(\{2\}) = 4$	$v_C^o(N) - v_C^o(\{1, 2\}) = 12$
(2, 3, 1)	$v_C^o(N) - v_C^o(\{2, 3\}) = 12$	$v_C^o(\{2\}) = 4$	$v_C^o(\{2, 3\}) - v_C^o(\{2\}) = 5$
(3, 1, 2)	$v_C^o(\{1, 3\}) - v_C^o(\{3\}) = 4$	$v_C^o(N) - v_C^o(\{1, 3\}) = 12$	$v_C^o(\{3\}) = 5$
(3, 2, 1)	$v_C^o(N) - v_C^o(\{2, 3\}) = 12$	$v_C^o(\{2, 3\}) - v_C^o(\{3\}) = 4$	$v_C^o(\{3\}) = 5$
Media	$\frac{41}{6}$	$\frac{41}{6}$	$\frac{44}{6}$

Valor de Shapley para el juego pesimista del problema irreducible.

Análogamente, podemos calcular la regla Folk a través del valor de Shapley con el juego pesimista asociado a su forma irreducible de uno de los árboles de mínimo coste.

Ejemplo 1.11. Cálculo de la regla Folk mediante el valor de Shapley del juego pesimista. (Tomamos el ejemplo 1.6).

La forma irreducible asociada al *mcstp* del juego pesimista, calculada previamente, se descompone en las posibles coaliciones mostradas:

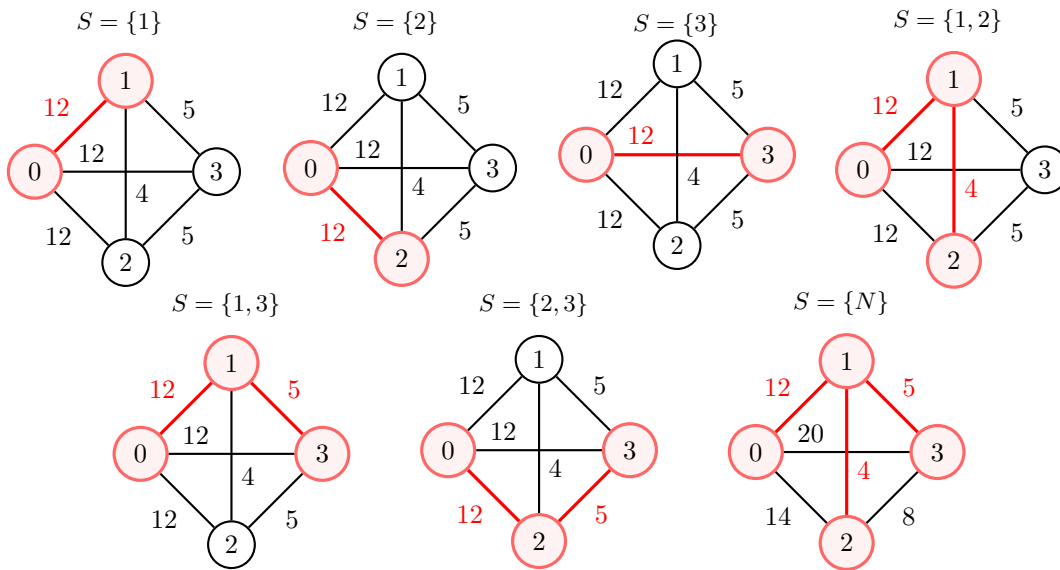
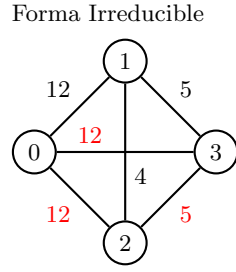
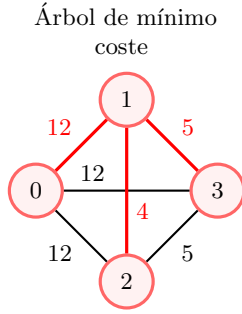


Figura 1.12: Juego pesimista de la forma irreducible para cada coalición.

A continuación, se procede con el cálculo de las contribuciones marginales, de forma que se obtiene el siguiente reparto, según la regla Folk:

$$Folk(N_0, C) = (6.8\hat{3}, 6.8\hat{3}, 7.\hat{3})$$



Orden	Jugador 1	Jugador 2	Jugador 3
(1, 2, 3)	12	4	5
(1, 3, 2)	12	4	5
(2, 1, 3)	4	12	5
(2, 3, 1)	4	12	5
(3, 1, 2)	5	4	12
(3, 2, 1)	4	5	12
Media	$\frac{41}{6}$	$\frac{41}{6}$	$\frac{44}{6}$

La dificultad que presentan los métodos anteriormente mencionados radica en la complejidad del cálculo del valor de Shapley al aumentar el número de jugadores. Es por ello que resulta pertinente obtener la regla Folk por otras vías, es decir, recurriendo al uso de los algoritmos de obtención de árboles de mínimo coste.

Regla Folk a través del algoritmo de Kruskal

Este procedimiento, propuesto por Feltkamp et al (1994) aplica las etapas del algoritmo de Kruskal para el reparto de costes. En principio, cada agente parte con unas obligaciones de pago asociadas de una unidad cuando la red está vacía, es decir, los agentes no están conectados. Según Tijs et al. (2006) en cada etapa del algoritmo, se reparte el coste del arco construido entre los agentes que se benefician del mismo. Este reparto se hace de acuerdo a las funciones de obligación que asignan a cada coalición S un vector $O(S) \in \mathbb{R}^S$ tal que:

- Si la coalición contiene a la fuente, $O_i(S) = 0$ para todo $i \in S$.
- Si la coalición no contiene a la fuente, $O_i(S) \geq 0$ y además $\sum_{i \in S} O_i(S) = 1$.
- Por otro lado, la obligación de un agente decrece a medida que la coalición a la que pertenece aumenta, es decir, cuando $i \in S \subset T$, $O_i(S) \geq O_i(T)$.

En cada etapa del algoritmo de Kruskal, el coste del arco escogido (i^p, j^p) se reparte entre los agentes que se aprovechan de esta unión. Cada uno de estos agentes paga la diferencia entre su obligación antes de añadir el arco a la red y después de añadirlo. Además, una vez que los agentes están conectados a la fuente, no presentan ninguna obligación.

Definición 1.18. La regla Folk a través de las etapas del algoritmo de Kruskal se define como:

$$Folk_i(N_0, C) = \sum_{p=1}^n c_{i^p j^p} [O_i(S^{p-1}(i)) - O_i(S^p(i))] \forall i \in N$$

Siendo $S^p(i)$ la componente conexa a la que pertenece el agente i en la etapa p y $O_i(S)$ la función de obligación para todo $i \in S \subseteq N_0$

$$O_i(S) = \begin{cases} \frac{1}{|S|}, & 0 \notin S \\ 0, & \text{cuando } 0 \in S \end{cases}$$

Ejemplo 1.12. Cálculo de la regla Folk mediante el algoritmo de Kruskal . (Tomamos el *ejemplo 1.4* en donde se ha aplicado el algoritmo de Kruskal).

Etapa 1: Como se muestra en la *Figura 1.13*, se añade la arista (1,2) y los agentes 1 y 2 son igual de responsables de su coste. Por tanto, el coste en la etapa 1 es $4 \cdot (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.

Etapa 2: Se añade la arista (1,3). La construcción de este arco beneficia también al agente 2, por lo que se distribuye el coste proporcional al estar unido con el agente 1, es decir, $(\frac{1}{3})$ entre ambos agentes y resto $(\frac{2}{3})$ al agente 3. Por tanto, el coste en la etapa 2 es $5 \cdot (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3})$.

Etapa 3: En la última etapa, se finaliza con el arco (0, 1) cuya construcción beneficia a los agentes 2 y 3, por lo que también se reparte el coste del arco entre los agentes $(\frac{1}{3})$. Por consiguiente, el coste en la etapa 3 es $12 \cdot (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

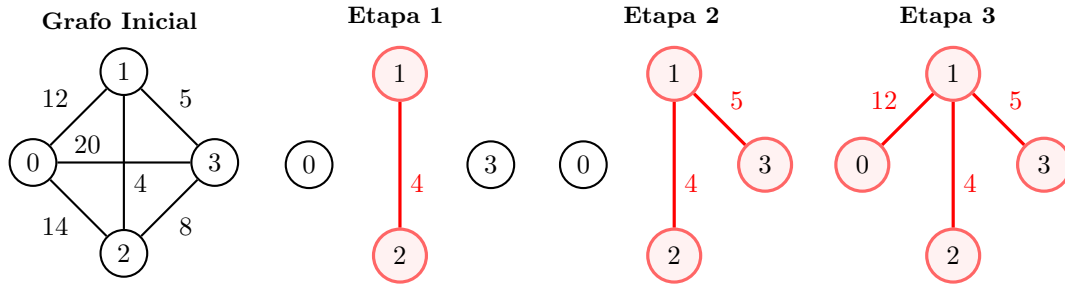


Figura 1.13: Etapas del algoritmo de Kruskal para el cálculo de la regla Folk

Etapas	Arcos	Jugador 1	Jugador 2	Jugador 3
Etapa 1	(1, 2)	$4(O_1(\{1\}) - (O_1(\{1, 2\})))$	$4(O_1(\{1\}) - (O_1(\{1, 2\})))$	0
Etapa 2	(1, 3)	$5(O_1(\{1, 2\}) - (O_1(\{N\})))$	$5(O_1(\{1, 2\}) - (O_1(\{N\})))$	$5(O_1(\{3\}) - (O_1(\{N\})))$
Etapa 2	(0, 1)	$12(O_1(\{N\}) - (O_1(\{N_0\})))$	$12(O_1(\{N\}) - (O_1(\{N_0\})))$	$12(O_1(\{N\}) - (O_1(\{N_0\})))$

$$Folk(N_0, C) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) + 5 \cdot \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right) + 12 \cdot \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = (6.8\widehat{3}, 6.8\widehat{3}, 7.\widehat{3})$$

Tras la aplicación de las tres reglas de reparto expuestas en el presente estudio, se concluye que pueden dar lugar a diferentes repartos de costes. Para el caso de las reglas de reparto de Bird y de Dutta-Kar se ha tratado de extender el algoritmo para ocuparse de aquellos problemas con más de un árbol de mínimo coste.

Es razonable considerar que los agentes de un determinado juego, con capacidad para alcanzar acuerdos vinculantes satisfagan, además de la eficiencia, los principios de racionalidad coalicional e individual, siendo estos los criterios de la definición del núcleo.

El **núcleo** de un juego en el problema clásico hace referencia a aquellas asignaciones de coste $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ en las que ninguna coalición puede proponer una alternativa en la que todos sus miembros mejoren su situación. Así pues, las condiciones que permiten determinar si una asignación

pertenece al núcleo se dan si:

$$\text{core}(N, v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i \in N} x_i = v(N) \text{ y } \sum_{i \in S} x_i \leq v(S), \forall S \subset N \right\}$$

Un reparto es estable cuando pertenece al núcleo, por lo que su composición dependerá del tipo de juego que estemos empleando en cada momento. De igual forma, en el caso de los árboles de mínimo coste, el núcleo de los juegos optimista, pesimista, monótono e irreducible es no vacío ya que es posible encontrar un reparto estable del coste del árbol mínimo entre los agentes. (Véase Granot y Huberman 1981 para su demostración.)

Sin el pretexto de ahondar en los fundamentos de las distintas propiedades, se procede a presentar un par de ellas:

Definición de propiedades 1.1. *Dado una regla de reparto de costes ψ , se satisface la propiedad de **selección del núcleo**, si para un $mcstp (N_0, C)$ y toda coalición $S \subseteq N$ tenemos:*

$$\sum_{i \in N} \psi_i(S_0, C) \leq m(S_0, C)$$

Esto indica que no existe una coalición en una posición más beneficiosa para formar su propia red, en lugar de soportar los costes correspondientes asignados en la regla de reparto.

Tanto la regla de Bird, como la regla expuesta por Dutta-Kar satisfacen esta propiedad. (Véase Dutta y Kar 2004 para profundizar en las demostraciones). Asimismo la regla Folk también la satisface. (Véase Bergantiños y Vidal-Puga 2007b para su demostración).

Definición de propiedades 1.2. *Diremos que una regla de reparto de costes ψ , satisface la propiedad de **monotonidad del coste**, si para todo par de $mcstp (N_0, C)$ y (N_0, C') para los que se verifica $C \leq C'$ con arreglo a $i \in N$, $j \in N_0$ y por lo demás $c_{kl} = c'_{kl}$, tenemos que :*

$$\sum_{i \in N} \psi_i(N_0, C) \leq \psi_i(N_0, C')$$

Esta propiedad contribuye a que los agentes no se encuentren en una posición más ventajosa en el caso que varíe el coste de conexión con respecto al agente i , manteniéndose las demás conexiones, con respecto a la cantidad a pagar que la regla le asigna. Es decir, impide que si algún coste se incrementa, ningún agente pueda pagar menos de lo que pagaba antes.

En relación a las reglas de reparto expuestas, Bird no satisface esta última propiedad, mientras que la regla de Dutta-Kar y Regla Folk a través del algoritmo de Kruskal, si que presenta monotonidad de costes. (Véase Dutta y Kar 2004 para profundizar en las demostraciones).

Capítulo 2

Árboles de expansión óptimos multicriterio

Los problemas de árboles de expansión de mínimo coste analizan las situaciones en las que agentes o individuos, ubicados en lugares diferentes, quieren conectarse a la fuente para obtener un bien o un servicio. En el capítulo anterior, se pone de manifiesto los distintos métodos de conexión de los agentes a la fuente, de manera que el coste de dicha red es mínimo (véase Borůvka 1926; Kruskal 1956; Prim 1957, entre otros). El reparto de los costes, una vez que se conoce el árbol de expansión de coste mínimo, fue un tema también tratado en donde se analizaron diferentes métodos propuestos en la literatura, como es el caso de: la regla de Bird (Bird 1976); regla de Dutta-Kar (Dutta y Kar 2004); regla Folk (Feltkamp et al. 1994, Bergantiños y Vidal-Puga 2007, entre otros).

Una vez planteados estos conceptos, se aborda una situación más realista en la que se considera varios atributos que definen la red de conexión, establecidos dentro de los problemas multicriterio de árbol de coste mínimo. Para la elaboración de este capítulo se ha realizado una revisión del trabajo de (Fernández et al. 2003), en donde el coste de los arcos, en lugar de números, son vectores.

El trabajo realizado por Fernández et al. (2003), se fundamenta en los problemas de árbol de expansión de coste mínimo (*mcstp*). Si bien estos juegos son el resultado de analizar la asignación de costes de un árbol de expansión entre los agentes del grafo, sin contar con la participación del nodo fuente en el reparto, las situaciones en las que el coste asociado a una arista es un vector en vez de un número, requieren de un mayor análisis.

2.1. Introducción

A la hora de trabajar con problemas de optimización, los modelos de investigación operativa constituyen la base por la que varios decisores analizan la manera de actuar de forma óptima. Por ello, si queremos contemplar situaciones más verosímiles, se considera pertinente estudiar el problema de árboles de expansión donde además del coste, los arcos pueden llevar asociadas otras magnitudes de interés.

Para contextualizar esta situación, tomemos el ejemplo proporcionado por Majumder et al. (2022), en el que se considera una empresa de transporte, la cual pretende conectar las principales ciudades de un país. La empresa debe planificar un horario que minimice los costes de los servicios así como el tiempo estimado del desplazamiento. Estos atributos, los cuales puede suceder que tengan una naturaleza conflictiva entre ellos, se consideran criterios de un problema multicriterio de mínimo coste.

Fernández et al. (2002) destacan la teoría de juegos cooperativos con valores vectoriales, como forma realista de modelar este tipo de problemas. La gran mayoría de las veces, se debe considerar simultáneamente varios criterios que no se pueden modelar de forma aislada, es decir, estudiar cada atributo por separado puede conducir a situaciones no resolutivas. De ahí que se trate de buscar soluciones que sean buenas conjuntamente para todos los escenarios en los que pueda plantearse el problema.

Definición 2.1. *Dado un problema de árbol de expansión multicriterio con un grafo completo (N_0, E) , donde $N_0 = N \cup \{0\}$, siendo N el conjunto de agentes y 0 la fuente. E es el conjunto de arcos y asociado a cada $(i, j) \in E$ hay un coste vectorial $e^{ij} = (e_1^{ij}, e_2^{ij}, \dots, e_k^{ij})$ asociado al arco $(ij) \in E$.*

Supongamos que existe un coste multicriterio asociado a un grafo que debe distribuirse entre los agentes del mismo. Esta situación se puede formular como un juego con N jugadores y una función característica que asocia a cada coalición S , un **conjunto** $v(S)$ que representa el coste mínimo de Pareto de construir una red de suministro entre los agentes de S a partir de la fuente 0 .

En particular, puede suceder que en un conjunto $v(S)$ con varios valores, no haya un caso en el que uno esté dominado por el otro.

Del mismo modo, en el cálculo de $v(S)$ se suman los costes de conexión pudiendo hacer uso de las ubicaciones de fuera de S . Es por ello que, como es el caso de los juegos monótonos, se puedan utilizar nodos que estén fuera del conjunto seleccionado. (Nótese la diferencia con el juego optimista mencionado previamente ya que en este caso, el agente se hace cargo del coste total de formar el camino hasta la fuente.)

Definición 2.2. *Un problema de árbol de expansión de mínimo coste de Pareto, asociado a un grafo $G = (N_0, E)$, es un par (N, v) donde N es el conjunto de agentes y v es la función característica. $E_{t_{s_0}}$ representa el conjunto de arcos del árbol de expansión (t_{s_0}) , que contiene $S_0 = S \cup \{0\}$ y $v - \text{mín}$ denota la minimización de Pareto. Definida como:*

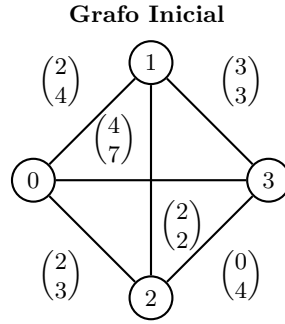
1. $v(\emptyset) = 0$
2. Para cada coalición no vacía $S \subseteq N$

$$v(S) = v - \text{mín}_{t_{s_0}} \sum_{(i,j) \in E_{t_{s_0}}} e^{ij}$$

En el contexto de juegos cooperativos, la minimización de Pareto implica buscar soluciones que reduzcan los desequilibrios y minimicen los perjuicios para los agentes, sin que ninguno de ellos empeore en comparación con la situación actual. Se considera conveniente mostrar un ejemplo en donde el coste asociado a la arista sea un vector, calculando así, el problema de árbol de expansión de coste mínimo de Pareto.

Ejemplo 2.1. Consideremos el siguiente $G = (N_0, E)$ donde $N = \{1, 2, 3\}$ y E el conjunto de aristas.

Nótese que el árbol de expansión resultante t_{s_0} contiene a los agentes de S_0 pese a que puede contener nodos adicionales. En $v(3)$ es $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ ya que el árbol de expansión mínimo de Pareto, que contiene los nodos 0 y 3 es el árbol inducido por los arcos $(0,2)$ y $(2,3)$. A diferencia del caso optimista, se debe pagar todos los costes de los arcos que lo conectan a la fuente, por ello se produce la suma de $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.



<i>Coalición</i>	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 3\}$	$\{N\}$
$v(S)$	$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$	$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$	$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$	$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$	$\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$	$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$	$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$

Figura 2.1: Coaliciones del juego de árbol de expansión multicriterio.

2.1.1. Concepto de núcleo

Tras un *mcstp* multicriterio, la cuestión sigue recayendo en cómo repartir justamente un vector que esté contenido en $v(N)$. Denotamos este vector como $z^N \in v(N)$.

En el caso de los juegos TU con un conjuntos de valores, una asignación consiste en una matriz $X \in \mathbb{R}^{k \times n}$. La columna $X^i = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_k^i)^t$ constituye los pagos o costes del i -ésimo jugador para cada criterio, mientras que la fila $X_j = (x_j^1, x_j^2, \dots, x_j^n)$ representa los pagos de cada jugador por un mismo criterio. La suma $X^S = \sum_{i \in S} X^i$ es el coste total obtenido por la coalición S .

Definición 2.3. *La matriz X es una asignación del juego (N, v) si $X^N = \sum_{i \in N} X^i \in v(N)$. Denotamos el conjunto de asignaciones de un juego como $I^*(N, v)$.*

Además de la eficiencia, se considera necesario establecer los conceptos de núcleo para problemas de árboles de mínimo coste multicriterio.

Ante una situación de *mcstp* multicriterio, comprobaremos que $v(S)$, en algunos casos, presenta diferentes alternativas, por lo que en función de la importancia que se le atribuya a cada una de las opciones, se determinarán distintos tipos de núcleo del juego. Nos centraremos en el **núcleo de preferencia** y el **núcleo de dominancia**.

Núcleo de preferencia

Es razonable suponer que una coalición sólo aceptará una asignación de pagos si los costes atribuidos a esa coalición, son menores o iguales que todos los costes que están en su conjunto característico. En consecuencia, los costes asignados no deben superar los costes que la coalición puede garantizar por su cuenta, sin colaborar con otros agentes.

Definición 2.4. *Se define como núcleo de preferencia de un juego (N, v) , al conjunto de asignaciones $X \in I^*(N, v)$ tal que $X^S \leq v(S) \forall S \subset N$. Denotamos este conjunto como $C(N, v; \leq)$.*

Con el objetivo de establecer una condición necesaria y suficiente para que el núcleo de preferencia sea no vacío, se considera un vector $\bar{z} \in \mathbb{R}^k$, no necesariamente en $v(N)$, siendo k el número de criterios que se estudian, y los juegos k escalares que se procede a definir.

Definición 2.5. *Un juego escalar l -componente ($l = 1, 2, \dots, k$) vinculado a \bar{z} , es un par $(N, v_l^{\bar{z}})$ donde N es el conjunto de agentes y $v_l^{\bar{z}}$ es la función característica definida como:*

1. $v_l^{\bar{z}}(\emptyset) = 0$
2. Para cada coalición no vacía $S \subset N$

$$v_l^{\bar{z}}(S) = \min_{t_S} \sum_{i,j \in E_{t_S}} e_l^{i,j}$$

donde E_{t_S} es el conjunto de arcos de un árbol de mínimo coste (t_S) en el grafo $G_S = (S_0, E_S)$, con $S_0 = S \cup \{0\}$.
3. $v_l^{\bar{z}}(N) = \bar{z}_l$

Se observa que para cada coalición S , el trabajar con componentes k escalares nos permite simplificar este tipo de problemas en donde la función característica denota un conjunto de vectores. En consecuencia, si la asignación X del juego (N, v) , verifica que $X^S \leq v(S)$, entonces $X^S \leq z^*(S)$, siendo $z^*(S) = (v_1^{\bar{z}}(S), v_2^{\bar{z}}(S), \dots, v_k^{\bar{z}}(S))$ un vector escalar k -dimensional del problema planteado. Análogamente, si $X^S \leq z^*(S)$ entonces $X^S \leq v(S)$. Como ya se ha mencionado, en Fernández et al. (2003) se demuestra esta condición de reciprocidad.

Núcleo de dominancia

La imposición de coaliciones en las que sólo se acepten asignaciones con un coste menor o igual, elemento a elemento, a todos los vectores de su conjunto característico es una situación demasiado fuerte (como es el caso del núcleo de preferencia). Se supone, por tanto, una condición menos restrictiva en la que las coaliciones S acepten una asignación que no necesariamente sea superior en todas las componentes de su conjunto característico $v(S)$.

Definición 2.6. *Se define como núcleo de dominancia de un juego (N, v) , al conjunto de asignaciones $X \in I^*(N, v)$ tal que $X^S \not\leq v(S) \forall S \subset N$. Denotamos este conjunto como $C(N, v; \not\leq)$.*

En el caso de este núcleo de dominancia, no se aprecia esta misma relación de reciprocidad a través de los juegos escalares l -componente.

2.2. Reparto de costes multicriterio mediante juegos cooperativos

Una de las posibles reglas de asignación de costes podría ser la ya mencionada por Bird (1976), en la que asignamos a cada agente, el vector de la arista incidente del único camino que lo conecta a la fuente.

Ejemplo 2.2. Situación con más de un árbol de expansión de coste mínimo de Pareto. (Tomamos el ejemplo 2.1).

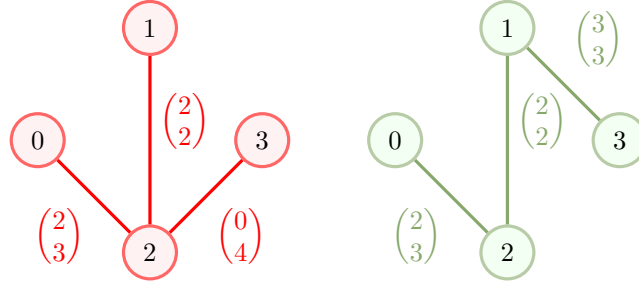


Figura 2.2: Árboles de coste mínimo de Pareto

En el ejemplo empleado anteriormente, se obtienen dos árboles de expansión de mínimo coste de Pareto asociados al grafo G para la coalición total N .

El primero se corresponde con el pago $\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} \in v(N)$, y el segundo atiende al pago $\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} \in v(N)$.

A través del juego escalar l -componente $(N, v_l^{z^N})$, $l = 1, 2$, dado por:

Coalición	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{N}
$v_1^{z^N}(S)$	2	2	2	4	4	2	4
$v_2^{z^N}(S)$	4	3	7	5	7	7	9

podemos verificar que el vector $z^N = (4, 9)^t$ puede ser repartido entre los agentes por medio de asignaciones en el núcleo de preferencia.

Una de las distribuciones que pueden ser obtenidas aplicando la regla de Bird, para uno de los árboles asociados al grafo G , $(4, 9)^t \in v(N)$ es la matriz $X \in C(N, v; \leq)$, la cual pertenece al núcleo de preferencia. Siendo:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, el vector $z^N = (7, 8)^t \in v(N)$ no se puede dividir mediante una asignación que pertenezca al núcleo de preferencia a través de la regla de Bird $X' \notin C(N, v; \leq)$. En el caso expuesto, la coalición $\{2, 3\}$ dispondría de un gasto asociado de $X'^{\{2,3\}} = (5, 6)^t$, por tanto no se verifica que $X'^{\{2,3\}} \leq v(\{2, 3\})$, siendo $v(\{2, 3\}) = (2, 7)^t$.

Paralelamente, como se demuestra en Fernández et al. (2002), la regla de asignación de costes de Bird es una asignación del núcleo de dominancia. Por lo que el vector $(7, 8)^t \in v(N)$, a pesar de no ser dividido entre los agentes por una asignación que perteneciera al núcleo de preferencia, $X' \in C(N, v; \preceq)$ es un elemento del núcleo de dominancia. Siendo:

$$X' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

La adopción de los juegos cooperativos en la distribución de costes es un tema ampliamente estudiado en donde el terreno multicriterio induce a considerar los repartos de manera que se aborde la totalidad de los componentes. Ahora bien, la extensión natural de los resultados de la teoría de juegos, y de ahí la problemática en su reparto, es la de disponer de una **estructura decisiva** que permita subsanar esta diferencia entre criterios para su asignación de costes.

Como hemos podido constatar, la generalización en el caso escalar refleja que atender al reparto de costes elemento a elemento induce a una situación profundamente restrictiva. Si no se dispone de una elección en los atributos expuestos para los responsables de la toma de decisiones, la solución obtenida puede no ser la adecuada. En el próximo capítulo se abordará el estudio de una clase de problemas de árboles de mínimo coste multicriterio en el que se dará preferencia a un atributo frente al otro.

Capítulo 3

Árboles de expansión óptimos multicriterio con variables binarias

Dentro de los árboles de expansión óptimos multicriterio, existen situaciones en la que se presentan variables dicotómicas. Este tipo de variables sirven para modelar grafos en las que intervienen parámetros que pueden contribuir a incluir o excluir ciertos elementos de un problema. Para la elaboración de este capítulo se ha realizado una revisión del trabajo de Subiza y Peris (2020), en donde se analiza una situación de árbol de expansión multiobjetivo a través de un caso de una red de abastecimiento de agua.

En el ejemplo empleado por Subiza y Peris (2020), el agua debe ser suministrada a un conjunto de individuos desde la fuente. Estas conexiones tienen asociado un coste, así como un parámetro de calidad debido a las características del terreno en donde se construyen las posibles conexiones. Ante este contexto, el objetivo radica en la conexión de todos los individuos a la fuente, proporcionando conexión de alta calidad entre el mayor número de agentes, al mínimo coste posible.

3.1. Introducción

Si bien el modelo clásico formulado para árboles de expansión de mínimo coste facilita la modelización de este nuevo escenario, es imprescindible presentar ciertos conceptos para su entera aclaración. A diferencia de los problemas de árboles de mínimo coste, en los problemas de árboles de expansión multiobjetivo, así como se indicó en el anterior capítulo, los arcos presentan más de un atributo (coste de conexión, costes de mantenimiento, calidad de la conexión, por ejemplo).

Consideremos que cada arista del modelo tiene un coste no negativo y un nivel de calidad, representado por un valor binario. Una calidad baja constituye un 0, mientras que una calidad alta un 1. Para cada par $i, j \in N_0$, $i \neq j$, $c_{ij} \in \mathbb{R}^+$ y $q_{ij} = \{0, 1\}$, siendo q_{ij} la calidad del arco de $A = \{(i, j) \mid i, j \in N\}$.

Definición 3.1. *Un problema de árbol de expansión de coste mínimo de calidad (qmcstp) es representado por (N_0, C, Q) , donde $C = (c_{ij})_{i, j \in N_0}$ y $Q = (q_{ij})_{i, j \in N_0}$ son matrices simétricas que equivalen, respectivamente, al coste y a la calidad de cada conexión en el grafo.*

Al igual que en el problema clásico, vamos a denotar por G_0^N , al conjunto de árboles que conectan a todos los agentes con la fuente.

Para cualquier árbol de expansión, la calidad que cada agente obtiene depende de todas las conexiones entre los agentes y la fuente, es decir, dado un árbol t , si se dispone de un arco con calidad baja, no sólo el agente vinculado a ese arco tiene una conexión de baja calidad, sino todos los agentes que dependen de dicho arco para obtener el recurso.

Definición 3.2. Por cada agente i y dado un árbol de expansión $t \in G_0^N$ denotamos la calidad que el agente i recibe, donde $Q^i(t) \in \{0, 1\}$, como:

$$Q^i(t) = \prod_{k=0}^{t(i)-1} q_{t^k(i)t^{k+1}(i)}$$

donde $\{(t^k(i), t^{k+1}(i))\}_{k=0}^{t(i)-1}$ es el único camino en t que une al agente i con la fuente.

Así pues, el objetivo en un árbol de expansión de coste mínimo de calidad es establecer un árbol de expansión con la mayor calidad posible, en la medida en que el mayor número de agentes disponen del recurso con máxima calidad. Y de entre estos árboles, se selecciona el de menor coste.

Definición 3.3. Un árbol de expansión óptimo de calidad en un $qmcstp (N_0, C, Q)$ es un árbol de expansión $M_t \in G_0^N$, siendo $m(M_t)$ el coste de $M_t \in G_0^N$, que satisfice:

1. $Q(M_t) \geq Q(t) \forall t \in G_0^N$
2. $m(M_t) \leq m(t) \forall t \in G_0^N$, tal que $Q(M_t) = Q(t)$

Ejemplo 3.1. Dado un $qmcstp$ siendo $N = \{1, 2, 3\}$, el par en cada arista denota, respectivamente, el coste y la calidad de dicha arista.

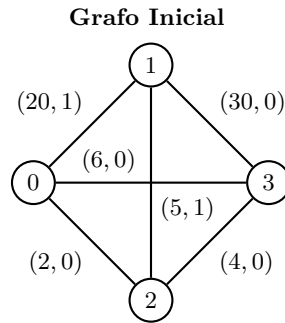


Figura 3.1: Árbol de expansión de coste mínimo de calidad.

A través de este ejemplo podemos observar que sólo el agente 1 recibe una calidad alta directamente de la fuente, ahora bien el agente 2 puede disponer de alta calidad conectándose con el agente 1, con tal de que este agente esté ligado a la fuente. Nótese que el clásico $mcstp$ puede ser considerado como un problema multicriterio con variables binarias, considerando una matriz con calidades, todas iguales a $[0]$. Los problemas (N_0, C) son equivalentes a $(N_0, C, [0])$.

3.2. Construcción de árboles óptimos de máxima calidad

Para la construcción de árboles óptimos de máxima calidad se debe considerar la partición en el conjunto de agentes debido a los requisitos de calidad. Es por ello que aquellos agentes que son capaces

de recibir alta calidad $Q^i(t) = 1$, en un árbol de expansión $t \in G_0^N$ se denotan por N^1 , mientras que el resto de los agentes que reciben una baja calidad se denotan por N^0 .

Definición 3.4. Se definen los conjuntos de N^1 y N^0 como:

$$N^1 = \{i \in N : Q^i(t) = 1 \text{ para algún } t \in G_0^N\}$$

$$N^0 = \{i \in N : Q^i(t) = 0 \text{ para todo } t \in G_0^N\}$$

De esta manera, se expone que la presencia de conexiones de alta calidad entre los agentes de N^0 y N^1 no es posible ya que en el caso de que existiera una vinculación de alta calidad, el agente de N^0 podría disponer de esta conexión, y por lo tanto pertenecería a N^1 .

3.2.1. Algoritmo de Prim modificado

En base al algoritmo de Prim (1975), anteriormente expuesto, Subiza y Peris (2020) modifican el método para árboles de expansión de coste mínimo de calidad. En esta nueva adaptación, proporcionar una alta calidad al mayor número de agentes es el fundamento para encontrar el árbol de expansión óptimo. La idea general del algoritmo es la siguiente:

- **Etapa 1:** Se identifican los agentes en N^1 . Análogamente los agentes $N^0 = N \setminus N^1$ también se definen
- **Etapa 2:** Se modifican los costes de conexión entre los agentes de N_0 de la siguiente forma;

$$c'_{ij} = \begin{cases} +\infty & \text{si } i, j \in N_0^1 \text{ y } q_{ij} = 0 \\ c_{ij} & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Como podemos observar, esta nueva matriz de costes C' hace hincapié en los arcos de conexión con calidad alta, asignando un valor fuera de rango a aquellas conexiones que no cumplen esta condición.

- **Etapa 3:** Se aplica el algoritmo de Prim clásico para encontrar el árbol de expansión de coste mínimo de $(N_0^1, C'|_{N_0^1})$, restringido únicamente a los agentes de N^1 y con los costes dados de C' . En consecuencia, los agentes de N^1 están conectados a la fuente con calidad alta.
- **Etapa 4:** El agente de N^0 con menor coste de conexión se vincula a N_0^1 . Se repite el proceso empleando el clásico algoritmo de Prim para conectar los agentes restantes de N^0 .

En el trabajo de Subiza y Peris (2020), se demuestra que el algoritmo de Prim modificado proporciona un árbol de expansión óptimo de máxima calidad para cualquier $qmcstp(N_0, C, Q)$

Consideremos el ejemplo anterior en el que se presenta un grafo completo con dos variables o atributos; el coste de conexión y la calidad. Este último se presenta a través de variables binarias, representando con un 0 una baja calidad, y por un 1, una conexión de calidad alta. A continuación, se aplica las etapas del algoritmo de Prim modificado.

Ejemplo 3.2. Ejemplo de ejecución del algoritmo de Prim modificado. (Tomamos el *ejemplo 3.1*). Tal como se obtuvo $\bullet N^1 = \{1, 2\}$ y $\circ N^0 = \{3\}$.

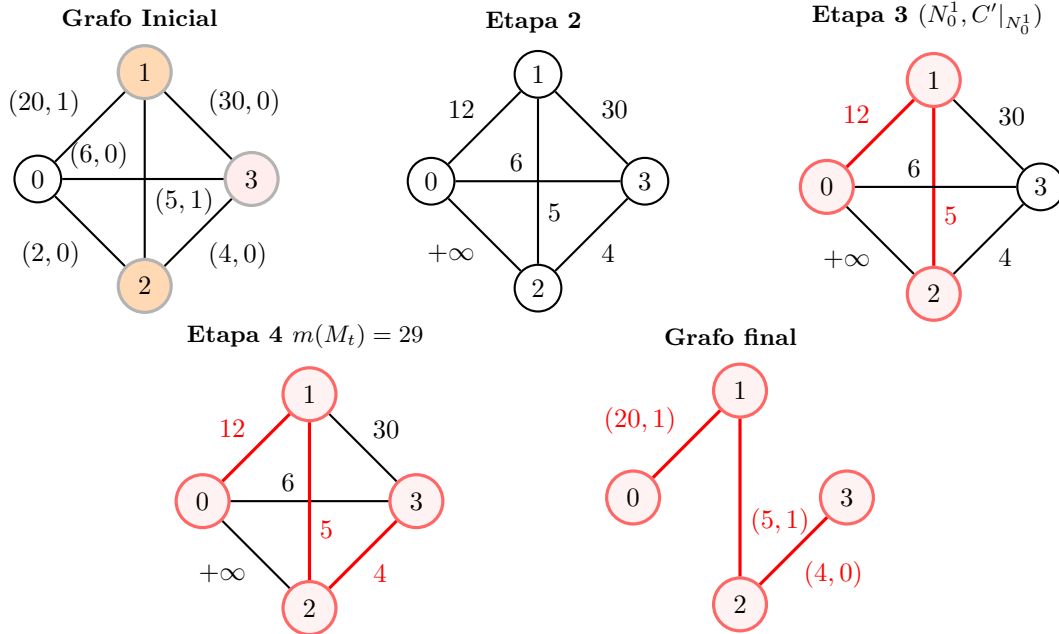


Figura 3.2: Etapas del algoritmo de Prim modificado.

Para obtener el árbol de expansión óptimo de máxima calidad, se comienza conectando los agentes de N^1 , siendo el agente 1 aquel que presenta el menor coste efectivo para conectarse a la fuente. Posteriormente el agente 2 se conecta al agente 1. Una vez que tenemos todos los agentes de N^1 conectados a la fuente, se procede a vincular el agente de N^0 con el menor coste de conexión a N_0^1 , contando con un coste de $m(M_t) = 29$ y recibiendo una alta calidad los agentes 1 y 2.

3.3. Reparto del coste de los árboles de expansión óptimos de máxima calidad

Una vez que se obtiene un árbol de expansión, el desafío vuelve a recaer en el reparto de los costes entre los agentes. Para ello se debe adaptar la regla de asignación de costes para cualquier árbol de expansión óptimo de calidad $M_t \in S(N_0)$.

Definición 3.5. Una regla de asignación de costes es una función ψ que asigna a cada $qmcstp(N_0, C, Q)$, el vector $\psi(N_0, C, Q) = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) \in \mathbb{R}^N$ tal que:

$$\sum_{i \in N} \psi_i(N_0, C, Q) = m(M_t)$$

En este tipo de problemas, la cooperación entre los agentes sigue siendo necesaria para poder alcanzar una red eficiente. No obstante, en el presente problema con variables de calidad, los agentes sí que estarían interesados en pagar más que su coste mínimo, si esto les asegura una conexión de calidad.

Es por ello que ahora, la distribución del coste no sólo depende del coste de las aristas, sino también de la calidad que estos agentes perciben en el árbol de expansión.

La optimización de la calidad en los árboles de expansión conduce a una modificación en la función característica, teniendo en cuenta únicamente aquellos árboles de expansión que aseguren una máxima calidad. Es decir, cuando se tiene una coalición S , para calcular este tipo de juegos, podemos emplear las conexiones de los demás agentes T , que no tienen por qué estar en S , con el fin de mejorar su calidad. El uso de estas conexiones, así como se indicó anteriormente, acarrea el pago de las mismas.

Por tanto, de entre todos los posibles árboles que maximizan la calidad, lo que se busca es minimizar su coste.

Definición 3.6. *Dado un qmcstp (N_0, C, Q) , para cada coalición $S \subseteq N$, la función característica v_q se define como:*

$$v_q(S, C, Q) = m(M_t(T_0, C|_T, Q|_T)) : S \subseteq T \subseteq N$$

donde $m(M_t(T_0, C|_T, Q|_T))$ indica el mínimo coste de conexión de árbol óptimo de calidad.

El núcleo de calidad (q -core) sigue manteniendo los principios clásicos, en cuanto a que en las asignaciones del coste obtenido, ningún agente o conjunto de agentes tiene incentivos para interrumpir o ir por su cuenta, ya que no pueden mejorar en calidad ni reducir su coste.

Definición 3.7. *El núcleo de un problema de árbol de expansión de coste mínimo de calidad (N_0, C, Q) , se define como:*

$$q\text{-core}(N_0, C, Q) = \left\{ \psi \in \mathbb{R}^N : \sum_{i \in N} \psi_i = v_q(N) \text{ y } \sum_{i \in S} \psi_i \leq v_q(S), \forall S \subseteq N \right\}$$

Dentro de las propiedades habituales que una solución en problemas de árbol de expansión de mínimo coste debe cumplir (véase Bogomolnaia y Moulin 2010 para monotonicidad del coste y continuidad, entre otros) debemos introducir una serie de propiedades relativas a los requisitos de calidad. En este caso, y sin ánimo de adentrarnos en las propiedades asociadas, se describe aquella más importante: la coherencia o consistencia de la calidad (*quality consistency* en inglés).

La coherencia de calidad es una propiedad que implica que el coste adicional por obtener una máxima calidad no perjudicará a los agentes que no se beneficien de esta alta calidad. Parece razonable considerar que aquellos que estén dispuestos a incrementar su coste para obtener una conexión de alta calidad, se hagan cargo del mismo.

Definición 3.8. *Para cualquier qmcstp (N_0, C, Q) , una regla ψ verifica la coherencia de la calidad para todo $i \in N^0(Q)$, si:*

$$\psi_i(N_0, C, Q) \leq \psi_i(N_0, C, [0])$$

A continuación, se procede a contemplar la regla propuesta por Bird (1976) para este caso multicriterio.

Definición 3.9. *Dado un qmcstp (N_0, C, Q) , la regla de Bird proporciona un reparto en el que cada agente paga por el coste de conexión que usa directamente. Para el árbol de expansión óptimo de calidad $M_t \in S(N_0)$:*

$$B_i^q(N_0, C, Q) = c_{iM_t(i)}$$

La propuesta de Bird (1976) proporciona una solución que pertenece al núcleo del juego, tal como se contempló con los problemas de árboles de expansión multicriterio, así como en el problema clásico. No obstante, la solución obtenida puede incumplir la **coherencia de la calidad**. Como se muestra en este nuevo ejemplo, la solución puede asignar a un agente en N_0 un pago superior al que asumiría en el *mcstp*, aunque obtenga baja calidad.

Ejemplo 3.3. Asignación de costes asociado al siguiente *qmcstp* siguiendo la regla de Bird. Dado $N = \{1, 2, 3\}$ y tal como se obtuvo $N^1 = \{3\}$ y $N^0 = \{1, 2\}$.

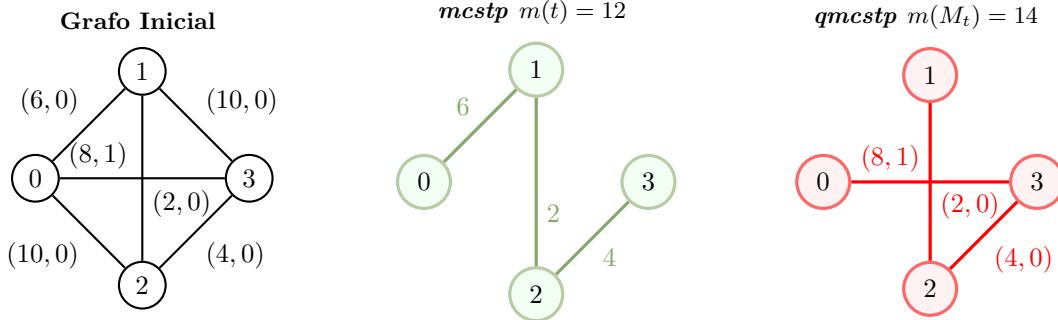


Figura 3.3: Reparto de asignación de costes según la regla de Bird para un *qmcstp*.

La solución que presenta la regla de Bird en los *mcstp* es una asignación $B^q(N_0, C, \{[0]\}) = (6, 2, 4)$, mientras que en el problema de calidad $B^q(N_0, C, Q) = (2, 4, 8)$. El agente 3 está dispuesto a asumir un coste adicional para obtener una conexión de alta calidad, si bien al agente 2 se le asigna un mayor pago sin que se vea alterada su calidad de conexión.

3.3.1. Extensión de la Regla Folk

A la hora de buscar un reparto de costes con mejores propiedades, la regla Folk vuelve a surgir como una posible solución. Subiza y Peris (2020) fundamentan su distribución a través de la matriz de costes irreducible, la cual minimiza los costes de cada arista, sin comprometer la eficiencia global del problema.

Definición 3.10. Dado un *qmcstp* (N_0, C, Q) , la matriz de costes *q-irreducible* se define como la matriz más reducida C^* , de tal forma que $C^* \leq C$ y que $v_q(S, C^*, Q) = v_q(S, C, Q)$.

Para la obtención de la matriz de costes *q-irreducible* (C^*), los autores proporcionan los pasos que se exponen a continuación (con el objeto de simplificar las etapas empleadas, el árbol de expansión obtenido se extrae mediante el algoritmo de Prim modificado):

- **Paso 1:** Para todo $i, j \in N_0^1$, se identifica la matriz de coste *q-irreducible* como:

$$c_{ij}^* = \begin{cases} \max_{(k,l \in M_{t_1}(i,j))} \{c_{kl}\} & \text{si } q_{i,j} = 1 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Como podemos observar, $M_{t_1}(i, j) \in N_0^1$ es el único camino que conecta los nodos i y j .

- **Paso 2:** Para todo $i, j \in N_0^0$, se identifica la matriz de coste *q-irreducible* como:

$$c_{ij}^* = \max_{(k,l \in M_{t_2}(i,j))} \{c_{kl}\}$$

Siendo $M_{t_2}(i, j) \in N_0^0$ el único camino que conecta i y j .

- **Paso 3:** Para todo $i \in N^0$, y $j \in N^1$ se identifica la matriz de coste q -irreducible como:

$$c_{ij}^* = c_{i0}^*$$

Siendo c_{i0}^* el coste de conectar el agente de N^0 con el agente de N_0^1 .

Una vez se construye la matriz de coste q -irreducible (C^*), con el proceso expuesto previamente, se define la regla de reparto q -Folk, ejerciendo el valor de Shapley del juego cooperativo (N_0, C^*, Q) .

Definición 3.11. Dado un $qmcstp (N_0, C, Q)$, el reparto de q -Folk distribuye para cada $i \in N$ y un $v_q^*(S) = v_q(S, C^*, Q)$ la cantidad:

$$Folk_i^q(N_0, C, Q) = Sh(N, v_q^*)$$

Cabe mencionar que la solución de q -Folk, además de mantener las propiedades de la regla Folk convencional, satisface la coherencia de calidad. (Véase Subiza y Peris 2020 para las demás propiedades que cumple, entre otros.)

Como en el *ejemplo 3.2* ya se seleccionó el árbol de expansión mínimo de calidad a través del algoritmo de Prim modificado etapa por etapa, nos serviremos de estos resultados para calcular el reparto de los costes con la solución de q -Folk.

Ejemplo 3.4. Aplicación según caso práctico de la regla q -Folk, teniendo en cuenta el *ejemplo 3.1*.

Matriz q -irreducible del problema de árboles de mínimo coste de calidad:

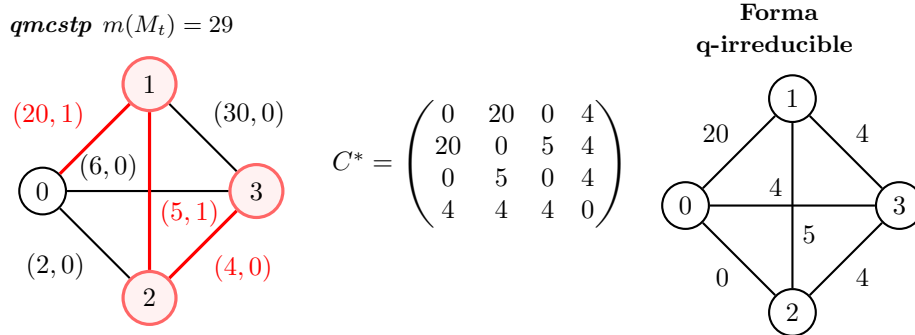


Figura 3.4: Matriz de costes q -irreducible del $qmcstp$

A continuación, a través de la forma q -irreducible (N_0, C^*, Q) , se obtiene el juego v_q^* asociado al problema.

Coalición	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{N}
$v_q^*(S)$	20	25	4	25	24	29	29

La regla de q -Folk, la cual se obtiene mediante el valor Shapley del juego cooperativo definido a lo largo de los costes irreducibles, para este juego:

$$Folk^q(N_0, C^*, Q) = (10, 15, 4) \text{ para un } m(M_t) = 29$$

<i>Orden</i>	Jugador 1	Jugador 2	Jugador 3
(1, 2, 3)	20	5	4
(1, 3, 2)	20	5	4
(2, 1, 3)	0	25	4
(2, 3, 1)	0	25	4
(3, 1, 2)	20	5	4
(3, 2, 1)	0	25	4
Media	10	15	4

Después de haber calculado la regla Folk para un problema de árboles de mínimo coste de calidad, se comprueba que el resultado es $Folk^q = (10, 15, 4)$. Lo que se desprende de los repartos obtenidos es que los tres jugadores obtienen el reparto más favorable, maximizando el número de agentes que consiguen máxima calidad y minimizando su coste. Concretamente, se verifica la selección de aquel árbol de menor coste entre los que presentan una alta calidad. Si comparamos la asignación obtenida para el *mcstp* (sin considerar las restricciones de calidad), $Folk = (3.67, 3.67, 4.67)$, los agentes que obtuvieron una alta calidad se reparten el coste adicional. A diferencia de lo que sucedió con el reparto asignado con la regla de Bird, la extensión de este problema a través de la solución de Folk, mantiene las propiedades principales, así como las extensiones en relación a los rasgos de calidad.

Capítulo 4


Conclusiones y futuras líneas de desarrollo

El objetivo del presente estudio se basa en realizar un análisis de uno de los problemas clásicos de la investigación de operaciones. Para ello, se considera pertinente introducir una serie de notaciones y definiciones para contextualizar los problemas de árboles de mínimo coste. De esta manera, se ha procurado que este estudio sirviera para aquellos lectores, con independencia de sus conocimientos previos, como manual detallado y sintético de este tipo de problemas.

Tras contextualizar los problemas de árboles de mínimo coste, se ha tratado de desarrollar de manera coherente los diferentes apartados del trabajo, tratando que la explicación fuese accesible sin que perdiera su rigurosidad matemática. A tal efecto, se han incluido grafos tras cada aplicación práctica de algoritmos, reglas de reparto o cálculos de los juegos cooperativos, con el fin de facilitar su interpretación.

La parte principal del trabajo se centra en la revisión y presentación de un enfoque adicional mediante la conexión de varios nodos a la fuente a un coste mínimo. Se plantea la situación en la que haya más de un criterio, como es el caso de los problemas multiobjetivo. En el trabajo de Subiza y Peris (2020), se añade un nuevo elemento que indica la calidad de las conexiones en la red, a través de variables binarias. Se presenta, por tanto, una prolongación de los problemas de árboles de mínimo coste, en donde se otorga una mayor importancia a la calidad que estos agentes reciben. Asimismo, Subiza y Peris (2020) proponen una solución basada en la regla Folk, la cual mantiene las propiedades clásicas de la selección del núcleo; ya que a través de esta regla de reparto, ningún agente, ni coalición de agentes tienen incentivos para salirse de la gran coalición.

La aplicación de esta regla *q-Folk* nos aporta una asignación que asegura que todos los agentes que puedan disponer de una calidad alta, la obtendrán. Además, todos los agentes que no se beneficien de una conexión de alta calidad, no se verán obligados a asumir el coste adicional del árbol de calidad óptima aplicado.

Con respecto a futuras líneas de desarrollo, sería interesante estudiar el caso con valores continuos de calidad, para lo cual se podría proporcionar otros algoritmos de búsqueda, o bien abordar en detalle los juegos cooperativos para analizar sus propiedades. Asimismo, podría plantearse, en el ámbito de la programación , realizar la implementación del reparto del coste de los árboles de expansión óptimos de máxima calidad, a través de los contenidos descritos en el trabajo.

Bibliografía

- [1] Aarts H, Driessen T (1993) The irreducible Core of a minimum cost spanning tree game. *Zeitschrift für Operations Research* volume 38:163–174.
- [2] Aumann RJ, Maschler M (1985) Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from Talmud. *J Econom Theory* 36:195-213.
- [3] Bergantiños G, Lorenzo L (2004) A non-cooperative approach to the cost spanning tree problem. *Mathematical Methods of Operations Research*, 2004, vol. 59, 393-403.
- [4] Bergantiños G, Lorenzo-Freire S (2008) A characterization of optimistic weighted Shapley rules in minimum cost spanning trees problems. *Econ Theor* 35(3):523-538.
- [5] Bergantiños G, Vidal-Puga J (2005) Optimal equilibria in the non-cooperative game associated with cost spanning tree problems. *Ann Operat Res* 137(1):101-115.
- [6] Bergantiños G, Vidal-Puga J (2007a) The Optimistic TU game in minimum cost spanning tree problems. *Int J Game Theory* 36(2):223-239.
- [7] Bergantiños G, Vidal-Puga J (2007b) A fair rule in minimum cost spanning tree problems. *J Econom Theory* 137(1):326-352.
- [8] Bergantiños G, Vidal-Puga J (2021) A review of cooperative rules and their associated algorithms for minimum-cost spanning tree problems. *SERIES* 12: 73-100.
- [9] Bogomolnaia A, Moulin H (2010) Sharing a minimal cost spanning tree: beyond the folk solution. *Games and Econom Behav* 69(2):238–248.
- [10] Borůvka O, (1926) About a certain minimal problem. *Práce moravské přírodovědecké společnosti v Brne* 3:37–58, In Czech.
- [11] Bird C (1976) On cost allocation for a spanning tree: a game theoretic approach. *Networks* 6(4):335-350.
- [12] Dutta B, Kar A (2004) Cost monotonicity, consistency and minimum cost spanning tree games. *Games Econom Behav* 48(2):223-248.
- [13] Feltkamp V, Tijs S, Muto S (1994) On the irreducible core and the equal remaining obligation rule of minimum cost extension problems. Technical Report 106, CentER DP 1994, Tilburg University.
- [14] Fernández F.R, Hinojosa M.A, Puerto J (2002) Core Solutions in Vector-Valued Games. *Journal of Optimization Theory and Applications* 112(2):331-360.
- [15] Fernández F.R, Hinojosa M.A, Puerto J (2003) Multi-criteria minimum cost spanning tree games. *Eur J Oper Res* 158(2):399-408.
- [16] Fraga Canosa M.C, (2022) Cooperation on minimum cost arborescence problems. Repositorio Máster en Técnicas Estadísticas - USC.

- [17] Granot D, Huberman G (1981) Minimum cost spanning tree Games, *Mathematical Programming* 21:1-18.
- [18] Kruskal, J.B. (1956) On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 7:48-50.
- [19] Majumder S, Barma P.S, Biswas A, Banerjee P, Mandal B.K, Kar S, Ziemba P (2022) On Multi-Objective Minimum Spanning Tree Problem under Uncertain Paradigm. *Symmetry*. 2022; 14(1):106.
- [20] Meca A, García-Jurado I, Borm P (2003) Cooperation and competition in inventory games. *Mathematical Methods of OR* 57:481–493.
- [21] O’Neill B (1982) A problem of rights arbitration from Talmud. *Math Soc Sci* 2(4):345-371.
- [22] Prim R.C. (1957) Shortest Connection Networks And Some Generalizations. *Bell System Technical Journal*.
- [23] Shapley LS (1953) A Value for n-person Games. En Kuhn HW, Tucker AW (eds) *Contributions to the Theory of Games II*. Princeton University Press, Princeton, pp 307-317.
- [24] Subiza B, Peris J.E (2020) Sharing the cost of maximum quality optimal spanning trees. *Official Journal of the Spanish Society of Statistics and Operations Research* 29(2):470-493.
- [25] Shapley LS (1953) Tijs S, Branzei R, Moretti S, Norde H (2006) Obligation rules for minimum cost spanning tree situations and their monotonicity properties. *Eur J Oper Res* 175(1):121–134.

Índice de figuras

1.1. Matriz de costes y grafo asociado	3
1.2. Árboles de mínimo coste.	3
1.3. Etapas del algoritmo de Prim	5
1.4. Etapas del algoritmo de Kruskal	6
1.5. Etapas del algoritmo de Borůvka	8
1.6. Coaliciones del juego pesimista, optimista y su forma irreducible.	10
1.7. Reparto de asignación de costes según la regla de Bird	12
1.8. Reparto de asignación de costes según la regla de Bird para varios <i>mcst</i>	12
1.9. Representación de un <i>mcstp</i> para la asignación de costes según la regla de Dutta-Kar	13
1.10. Reparto de asignación de costes según la regla de Dutta-Kar para múltiples <i>mcst</i>	14
1.11. Juego optimista para cada coalición.	16
1.12. Juego pesimista de la forma irreducible para cada coalición.	17
1.13. Etapas del algoritmo de Kruskal para el cálculo de la regla Folk	19
2.1. Coaliciones del juego de árbol de expansión multicriterio.	23
2.2. Árboles de coste mínimo de Pareto	25
3.1. Árbol de expansión de coste mínimo de calidad.	28
3.2. Etapas del algoritmo de Prim modificado.	30
3.3. Reparto de asignación de costes según la regla de Bird para un <i>qmcstp</i>	32
3.4. Matriz de costes <i>q-irreducible</i> del <i>qmcstp</i>	33