



Universidade de Vigo

Trabajo Fin de Máster

Estimación de soluciones en la teoría de juegos

Sergio Mejuto Vázquez

Máster en Técnicas Estadísticas

Curso 2021-2022

Propuesta de Trabajo Fin de Máster

Título en galego: Estimación de solucións na teoría de xogos
Título en español: Estimación de soluciones en la teoría de juegos
English title: Estimation of solutions in game theory
Modalidad: Modalidad A
Autor/a: Sergio Mejuto Vázquez, Universidade de Santiago de Compostela
Director/a: Paula Saavedra Nieves, Universidade de Santiago de Compostela; Alejandro Saavedra Nieves, Universidade de Santiago de Compostela
Breve resumen del trabajo: La teoría de juegos cooperativos busca hallar soluciones puntuales. Sin embargo, su determinación exacta puede complicarse si el número de agentes es grande. En este trabajo, se realizará una revisión bibliográfica de las técnicas de inferencia estadística que permiten abordar su estimación y, posteriormente, se aplicarán para proponer diferentes sistemas de cuotas de emisión de dióxido de carbono (por país) en 2030.
Recomendaciones:
Otras observaciones:

Doña Paula Saavedra Nieves, profesora de la Universidade de Santiago de Compostela, don Alejandro Saavedra Nieves, profesor de la Universidade de Santiago de Compostela, informan que el Trabajo Fin de Máster titulado

Estimación de soluciones en la teoría de juegos

fue realizado bajo su dirección por don Sergio Mejuto Vázquez para el Máster en Técnicas Estadísticas. Estimando que el trabajo está terminado, dan su conformidad para su presentación y defensa ante un tribunal.

En Santiago de Compostela, a 29 de enero de 2022.

La directora:

El director:

Doña Paula Saavedra Nieves

Don Alejandro Saavedra Nieves

El autor:

Don Sergio Mejuto Vázquez

Agradecimientos

Me gustaría agradecer a mis directores, Paula y Alejandro Saavedra Nieves, por su paciencia, su apoyo, sus consejos y por ayudarme en la revisión del presente texto, que sin ellos no habría sido posible.

Índice general

Resumen	XI
Preliminares	1
1. Introducción a la teoría de juegos	5
1.1. Soluciones de juegos TU	10
1.1.1. El valor de Shapley	10
1.1.2. El valor de Banzhaf	11
1.2. Soluciones de juegos con uniones a priori	13
1.2.1. El valor de Owen	13
1.2.2. El valor de Banzhaf-Owen	15
2. Estimación de soluciones para juegos TU y con uniones	17
2.1. Estimación de soluciones para juegos TU	18
2.1.1. Estimación del valor de Shapley	18
2.1.2. Estimación del valor de Banzhaf	21
2.2. Estimación de soluciones de juegos con uniones a priori	24
2.2.1. Estimación del valor de Owen	24
2.2.2. Estimación del valor de Banzhaf-Owen	26
3. Sistemas de cuotas para la emisión de dióxido de carbono	33
3.1. El problema de bancarrota	33
3.2. Resultados	35
4. Conclusiones	43
A. Resultados numéricos	45
A.1. Sistemas de cuotas estimadas para 2015	45
A.2. Sistemas de cuotas estimadas para 2030	51
A.3. Otros sistemas de cuotas para 2030	57
B. Código R para la estimación de soluciones	63
C. Código R para bancarrota	67
Bibliografía	71

Resumen

Resumen en español

La teoría de juegos cooperativos se centra en definir reglas de asignación que repartan el beneficio o coste total en situaciones multi-agente. Si el número de jugadores es relativamente grande, la obtención exacta muchas de estas reglas presenta una alta complejidad computacional, siendo necesario estimarlas. En este trabajo hemos revisado la literatura para la estimación de soluciones de tipo puntual (el valor de Shapley y el valor de Banzhaf) y en sus generalizaciones al caso en el que se consideran estructuras particionales (el valor de Owen y el valor de Banzhaf-Owen). Además, hemos estudiado, teórica y empíricamente, el uso de muestreo aleatorio simple con reemplazamiento en la estimación del valor de Banzhaf-Owen. Como aplicación, usando el software R, hemos estimado diferentes sistemas de cuotas de emisión de dióxido de carbono para 2030, al suponer una reducción del 55 % de las emisiones registradas en 1990. La consideración de un problema de establecimiento de cuotas como un problema de bancarrota justifica este planteamiento, lo que permite comparar los resultados obtenidos con los proporcionados por mecanismos de reparto clásicos (que se pueden determinar de forma exacta) en bancarrota.

English abstract

Cooperative game theory focuses on defining allocation rules that distribute the total benefit or cost in multi-agent situations. If the number of players is relatively large, the exact obtaining of many of these rules is computationally complex and requires estimation. In this paper we have reviewed the literature for the approximation of point solutions (the Shapley value and the Banzhaf value) and their generalisations to the case under the existence of partitional structures (the Owen value and the Banzhaf-Owen value). In addition, we have studied, theoretically and empirically, the use of simple random sampling with replacement in the Banzhaf-Owen value estimation. As an application, using R software, we have estimated different carbon dioxide emission quota systems for 2030, by assuming a 55 % reduction of the emissions recorded in 1990. The consideration of a quota-setting problem as a bankruptcy problem justifies this approach, which also allows us to compare the results obtained with those provided by classical bankruptcy allocation mechanisms (which can be exactly computed).

Preliminares

El calentamiento global es el aumento de la temperatura media de la tierra a largo plazo, como consecuencia del efecto invernadero producido por los denominados Gases de Efecto Invernadero (GEI). Cuando la luz solar incide sobre la tierra, ésta es absorbida y emitida hacia la atmósfera en forma de calor. Los GEI retienen parte de este calor, imitando las paredes de un invernadero.

Los niveles de GEI en la atmósfera terrestre han variado a lo largo de la historia de la Tierra, provocando variaciones en su temperatura. A pesar de ello, en los últimos miles de años, estos niveles se han mantenido relativamente constantes, aunque las elevadas emisiones de GEI a la atmósfera en décadas recientes están acentuando el calentamiento global y, como consecuencia, el cambio climático. En particular, la Figura 1 (izquierda) contiene la serie de tiempo de emisión global en megatonnes (Mt) de dióxido de carbono (uno de los principales GEI) de todos los países de mundo desde 1970 hasta 2019 representada a partir de los datos disponibles en European Commission et al. (2020). Los resultados obtenidos permiten detectar los valores máximo y mínimo de emisiones de dióxido de carbono en 2019 y 1970, respectivamente.

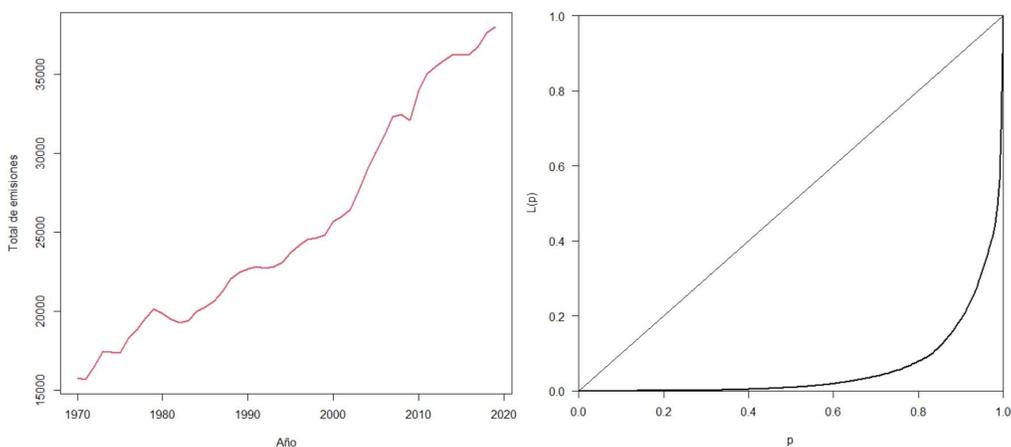


Figura 1: Serie de tiempo de la emisión global de dióxido de carbono entre 1970 y 2019 (izquierda). Curva de Lorenz de las emisiones de dióxido de carbono de cada país en 2019 (derecha).

La principales consecuencias del cambio climático son la desertificación (ya evidente, por ejemplo, en el sur de España), el aumento de la temperatura del Mar Mediterráneo que podría provocar cambios en los ecosistemas o la posible variación de las corrientes marinas por el deshielo que conllevaría un rápido enfriamiento de Europa en general. A partir de las emisiones de dióxido de carbono registradas por país en 2019 y disponibles en European Commission et al. (2020), se ha construido el mapa representado en la Figura 2. En gris, hemos representado regiones que son territorios de otro país porque no conocemos los valores de emisión desagregados y países cuyos registros aparecen agregados en la base de datos considerada. Los resultados obtenidos muestran una distribución de las emisiones no uniforme entre

países con China, Estados Unidos, India y Rusia representando a los mayores emisores de dióxido de carbono a nivel global. Por tanto, un número reducido de países acumulan la gran mayoría de las emisiones de dióxido de carbono. La curva de Lorenz elaborada a partir de los datos de emisiones de dióxido de carbono en 2019 contenida en la Figura 1 (derecha) refleja también una distribución de emisiones poco equitativa entre países.

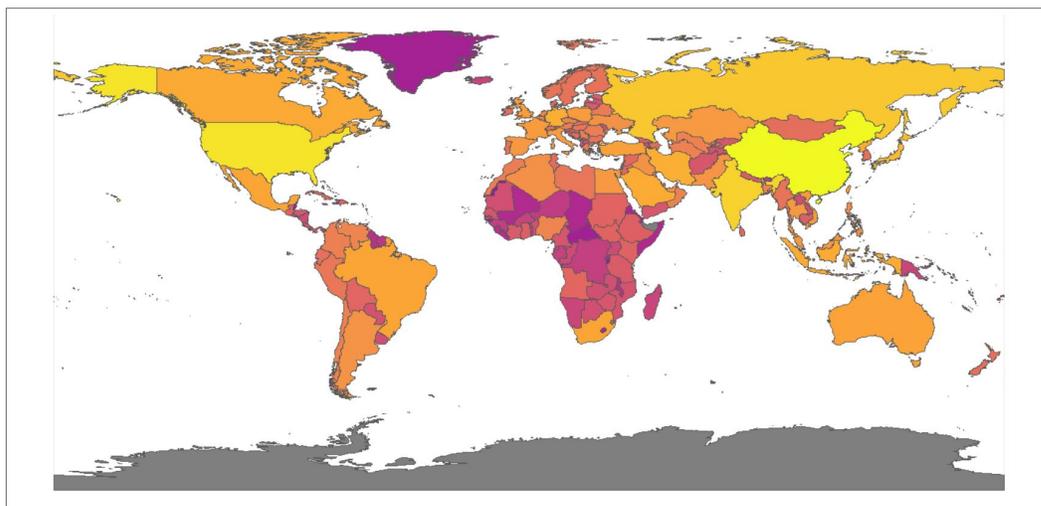


Figura 2: Mapa de emisiones de dióxido de carbono por país en 2019.

Los graves efectos del cambio climático han hecho que, durante el último tercio del siglo XX, se tomase conciencia a nivel internacional del peligro que suponía y de la necesidad de adoptar medidas para evitar el calentamiento del planeta. En 1988, se creó el Grupo Intergubernamental sobre el Cambio Climático. Dos años después, este grupo publicó su primera evaluación basada en estudios de 400 científicos donde se advertía a la comunidad internacional de un problema real que estaba modificando las condiciones de nuestro planeta insistiendo en la necesidad de reducir las emisiones de GEI entre un 60-80 % respecto de los niveles de 1990. Gracias a este organismo, los gobiernos pusieron en marcha la Convención Marco de las Naciones Unidas sobre el Cambio Climático, punto de partida del conocido como Protocolo de Kioto que entró en vigor en 2005.

Los países adheridos al Protocolo de Kioto se comprometieron a alcanzar diferentes objetivos, en algunos casos de reducción (como es el caso de Japón del 6%), en otros de estabilización (como es el caso de Rusia) o de incremento limitado (Australia). La UE, en conjunto, se comprometió a reducir las emisiones en un 8% para el 2012. El reparto entre los estados miembros de la Unión Europea (UE) se basó en criterios como el PIB y la población de cada país, quedando España comprometida a no aumentar sus emisiones por encima del 15% respecto de los niveles de 1990.

La solidez de este pacto se vio mermada debido a la retirada de Estados Unidos de los países firmantes. En 2001, tras haber firmado en un primer momento, Estados Unidos argumentó no estar de acuerdo con ciertas condiciones del Protocolo de Kioto acerca de las emisiones de países en desarrollo, y dejó el tratado sin el mayor emisor de GEI del mundo, lo cual comprometió seriamente la confianza en el pacto cuya vigencia finalizó en 2012. Desde entonces son muchas las reuniones y acuerdos internacionales como el de Copenhague o, más recientemente, el de París que han surgido para revertir la emisión de GEI.

La UE ha adoptado legislación ambiciosa en diferentes ámbitos de actuación para cumplir sus compromisos internacionales en materia de cambio climático. En diciembre de 2020, en consonancia con el compromiso de la UE de aumentar su ambición climática con arreglo al Acuerdo de París, sus dirigentes refrendaron un objetivo vinculante para la UE de reducción interna neta de las emisiones de GEI de al menos un 55% de aquí a 2030, con respecto a los valores de 1990. En abril de 2021,

el Consejo y el Parlamento alcanzaron un acuerdo provisional sobre la Ley Europea del Clima, cuyo objetivo es consagrar en la legislación el objetivo de reducción de emisiones para 2030. El acuerdo fue adoptado por los ministros de la UE en junio de 2021.

Matemáticamente, la situación descrita puede considerarse como un problema de bancarrota ya que el objetivo principal es reducir, hasta 2030, un 55 % las emisiones totales de GEI registradas en 1990. Bajo este enfoque, bastaría con asignar a cada país una cuota de producción de GEI (que, por supuesto, tenga en cuenta las emisiones actuales) de modo que se cumpla con el objetivo marcado para 2030. Los problemas de bancarrota han cobrado relevancia a lo largo de los años por sus múltiples aplicaciones en el mundo real. Su nombre se debe a un problema muy común en economía como es la bancarrota de una empresa. En concreto, se supone la existencia de varios acreedores que reclaman una parte del patrimonio total. El objetivo principal consiste en determinar cómo hay que repartir el recurso entre todos los agentes que lo reclaman. Gallástegui et al. (2002) usan este enfoque para discutir los sistemas de cuotas pesqueras en la UE. Recientemente, Saavedra-Nieves y Saavedra-Nieves (2020) propusieron un sistema de cuotas de producción lácteas como posible solución al conflicto de la leche en Galicia usando esta aproximación. Además, los problemas de bancarrota han sido considerados en la literatura desde la perspectiva de la teoría de juegos, ver Curiel et al. (1987). De hecho, cualquier problema de asignación multiagente bajo cooperación puede analizarse como un caso de bancarrota. Sólo es necesaria la existencia de un patrimonio a repartir en el que cada agente reclama una parte del total. Bajo este enfoque, la definición de reglas de asignación de los recursos disponibles es clave. En la literatura, se tienen en cuenta diferentes soluciones, ver Thomson (2015). Algunas de las alternativas más empleadas son la regla proporcional, que asigna proporcionalmente a las demandas; la regla Talmud introducida por Aumann y Maschler (1985); la regla de igual ganancia; la regla de pérdidas igualitarias y la regla de llegada aleatoria (O'Neill 1982). Aunque la regla de llegada aleatoria ha sido analizada ampliamente desde un punto de vista teórico en varios trabajos (véase Hwang (2015), por ejemplo), su cálculo exacto sigue siendo una tarea difícil.

Los principales inconvenientes computacionales relativos a la regla de llegada aleatoria para los problemas de bancarrota son los mismos a los descritos para la obtención exacta del valor de Shapley (Shapley 1953) como solución de los juegos de utilidad transferible (también conocidos como juegos TU). De hecho, esta regla puede obtenerse como el valor de Shapley de un juego de bancarrota (cf. O'Neill 1982). Otras soluciones o reglas de asignación específicas de los juegos TU como los valores de Banzhaf, Owen y de Banzhaf-Owen que, por supuesto pueden usarse en este contexto, presentan las limitaciones computacionales similares. Entonces, para problemas como el que presentamos donde el número de países es relativamente grande, la determinación exacta de este tipo de soluciones se complica sustancialmente. Esto se debe a que la complejidad de los cálculos aumenta exponencialmente con el número de agentes. Debido a las amplias aplicaciones de la quiebra en el mundo real, donde algunas de las propuestas de reparto mencionadas no pueden ser calculadas en la práctica en tiempo razonable, las técnicas de muestreo (Cochran 2007) se convierten en una herramienta alternativa para estimarlas y resolver este tipo de problemas.

A partir de los datos disponibles en European Commission et al. (2020) y para cumplir a nivel global con la propuesta de la UE marcada para 2030, el objetivo principal de este trabajo es asignar a cada país (no sólo a los que forman parte de la UE) una cuota de emisión de dióxido de carbono en 2030 que suponga una reducción de un 55 % de las emisiones de este gas registradas en 1990 (22683.3 Mt, según la información disponible en European Commission et al. (2020)). De acuerdo con los comentarios previos, se propondrán varios sistemas de cuotas diferentes a partir de la estimación del valor de Shapley, del valor de Banzhaf, del valor de Owen y del valor de Banzhaf-Owen de un juego TU. Debido a que los algoritmos de estimación no están implementados en ningún paquete de R, hemos desarrollado varias funciones en código R para poder aplicarlos en situaciones de bancarrota. Los resultados obtenidos serán comparados con las cuotas obtenidas a partir de la regla proporcional, la regla Talmud, la regla de igual ganancia y la regla de pérdidas igualitarias para el problema de bancarrota asociado y que pueden ser determinadas de forma exacta.

El trabajo se organiza como sigue. En el Capítulo 1, introduciremos las nociones básicas en teoría de juegos para definir con detalle las soluciones puntuales de los juegos TU (valor de Shapley y de

Banzhaf) y sus generalizaciones para juegos con estructuras de uniones a priori (valor de Owen y de Banzhaf-Owen). De acuerdo con los comentarios previos, su cómputo exacto presenta una alta complejidad computacional si el número de jugadores es muy elevado. En el Capítulo 2, para aproximar su valor, revisaremos los algoritmos (basados en muestreo) de estimación propuestos en la literatura. Además, hemos realizado un pequeño estudio de simulación para analizar el comportamiento práctico de la estimación del valor de Banzhaf-Owen utilizando muestreo con reemplazamiento. En el Capítulo 3, introduciremos primero el problema de bancarrota bajo la perspectiva de la teoría de juegos y, a continuación, emplearemos los algoritmos de estimación presentados en el capítulo anterior para proponer varios sistemas de cuotas de emisión de dióxido de carbono que supongan una reducción del 55% de los valores registrados en 1990. Las conclusiones del trabajo se exponen en el Capítulo 4.

El Apéndice A contiene los sistemas de cuotas por país establecidos a partir de las estimaciones de los valores de Shapley y de Owen, y a partir de reglas específicas basadas en las estimaciones de los valores de Banzhaf y de Banzhaf-Owen. También, muestra las cuotas calculadas de forma exacta a partir de la regla proporcional, la regla Talmud, la regla de igual ganancia y la regla de pérdidas igualitarias.

El Apéndice B contiene las funciones implementadas en código R para calcular las estimaciones de los valores de Shapley, de Banzhaf, de Owen y de Banzhaf-Owen, respectivamente. También incluye el código empleado en el estudio de simulación realizado. El Apéndice C contiene las funciones también desarrolladas en código R para calcular de manera exacta la regla proporcional, la regla Talmud, la regla de igual ganancia y la regla de pérdidas igualitarias.

Capítulo 1

Introducción a la teoría de juegos

La teoría de juegos se considera como la disciplina matemática centrada en el análisis de situaciones conflictivas donde la toma de decisiones adecuadas constituye la solución del problema. Tales decisiones se adoptan de forma interactiva y adaptándose al ámbito de aplicación. Dichos problemas quedan caracterizados por los siguientes aspectos:

- Existe un grupo de agentes que toman decisiones.
- Las decisiones adoptadas por los distintos agentes determinan los resultados obtenidos.
- Cada uno de esos agentes tiene sus propias preferencias a la hora de tomar decisiones dentro del conjunto de todas las posibles a tomar.

La terminología empleada para los distintos elementos involucrados en este tipo de situaciones es tomada de los primeros problemas de esta clase: los juegos de estrategia. Un juego es un problema de decisión interactivo en el que participan unos determinados agentes (*jugadores*) y en las que ciertas decisiones (*estrategias*) pueden ser tomadas. La teoría clásica de juegos es considerada como un mero ideal, explicando como un jugador racional debe actuar. La racionalidad se traduce en que los agentes saben lo que quieren, actúan para conseguirlo y saben cómo proceder para lograrlo. En este trabajo nos centraremos en la revisión de los juegos cooperativos, siguiendo lo expuesto en, por ejemplo, González-Díaz et al. (2010). La principal hipótesis que se supone es la cooperación de los agentes, actuando de un modo socialmente óptimo, para estudiar el reparto de los beneficios de la cooperación entre los distintos jugadores. En particular, consideraremos los juegos cooperativos con utilidad transferible, en los que dicho reparto se hace libremente entre ellos. Aunque habitualmente la caracterización de esta clase de juegos se realiza en términos de los beneficios asociados a la cooperación, también es posible la consideración de los juegos de utilidad en términos de los costes asociados a la misma.

En la teoría de los juegos cooperativos se supone que las posibilidades de cooperación entre los jugadores son difícilmente manejables, al tratarse de modelos complejos y diversos. En estos casos, la descripción de estos problemas utilizando modelos matemáticos resulta en la práctica poco operativo. En consecuencia, la principal suposición en los juegos cooperativos establece que todos los jugadores involucrados van a cooperar, actuando de un modo socialmente óptimo, para concentrarnos en cómo repartir los beneficios que obtienen entre los jugadores.

En este trabajo nos centraremos en el caso de juegos cooperativos, más específicamente en los juegos con utilidad transferible o juegos TU (*Transferable Utility*).

Definición 1.1. *Un juego coalicional con utilidad transferible o juego TU es un par (N, v) , con $N = \{1, \dots, n\}$ el conjunto de jugadores involucrados, y v una función*

$$v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que $v(\emptyset) = 0$.

Si $N = \{1, \dots, n\}$ denota el conjunto de n jugadores, el conjunto de todas sus posibles coaliciones se denotará por 2^N . La función v se conoce como la función característica del juego (N, v) que asigna a cada posible coalición S , con $S \subseteq N$, el valor de la cooperación de sus s miembros. Se denotará por G^N a la clase de todos los juegos de utilidad transferible que tienen por conjunto de jugadores a N .

Existen múltiples situaciones en la vida real que pueden ser modeladas mediante juegos de utilidad transferible. Véase el caso de juegos asociados a sistemas de votación (ver, por ejemplo, Alonso-Meijide y Bowles, 2002), juegos que permiten modelar los beneficios en la gestión de una quiebra bajo cooperación (ver O'Neill, 1982), o en situaciones de cooperación en las que se busca la minimización de los costes conjuntos. De esta forma, (N, c) denota habitualmente a los juegos asociados a situaciones de costes bajo cooperación.

Como ilustración, se presentan dos ejemplos clásicos en la literatura de los juegos cooperativos. El primero es un juego TU conocido como el *juego del guante*, y el segundo es un juego de costes.

Ejemplo 1.2 (Juego del guante). *Sea $N = \{1, \dots, n\}$ un conjunto de jugadores, de los cuales $l = |L|$ tienen un guante izquierdo y $r = |R|$ tienen un guante derecho. Para cada coalición S , con $S \subseteq N$, por cada pareja de guantes (derecho e izquierdo) que tengan a esta coalición se le asigna una unidad de utilidad. Más formalmente, tenemos que el conjunto de jugadores N puede desglosarse como*

$$N = L \cup R$$

y, por tanto, la función característica del juego asociado asigna, a cada coalición $S \subseteq N$, la cantidad:

$$v(S) = \min\{|S \cap L|, |S \cap R|\}.$$

En el caso particular del juego del guante con 3 jugadores, es decir, $N = \{1, 2, 3\}$ con $L = \{1, 2\}$ y $R = \{3\}$, la función característica es la detallada en el Cuadro 1.1.

S	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$v(S)$	0	0	0	0	1	1	1

Cuadro 1.1: Función característica del juego del guante.

A continuación se describe una situación de costes bajo cooperación en la gestión de la energía.

Ejemplo 1.3. *Tres países (Suecia, Noruega y Finlandia) están interesados en construir una presa para generar electricidad. El coste de construcción de la presa es de 180 millones de dólares. Hay un río en Suecia apropiado para construir una pequeña presa que puede abastecer a 2 países y el coste de construcción sería de 100 millones de dólares. Por otra parte, Finlandia y Noruega también tienen capacidad para construir una pequeña presa con un coste de 130 millones. Cada país que no entre en la negociación con cada par tiene la opción de construir una presa para ellos cuyo coste sería de 80 millones para Suecia, 90 para Noruega y 70 para Finlandia.*

Para modelar esta situación con un juego, establecemos como conjunto de jugadores $N = \{1, 2, 3\}$ donde el jugador 1 es Suecia, el jugador 2 es Noruega y el jugador 3 es Finlandia. La función característica del juego viene dada (en millones de dólares) en el Cuadro 1.2.

S	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$c(S)$	80	90	70	100	100	130	180

Cuadro 1.2: Función característica de un juego de costes.

Una vez definido qué es un juego TU, surgen de manera natural algunas preguntas. ¿Es siempre la cooperación ventajosa? De ser así, por ejemplo en contextos de beneficios, estos deberían aumentar

bajo la cooperación de los agentes. En lo que sigue, describiremos algunas de esas propiedades para un juego TU (N, v) . Sin embargo, dichas propiedades no son exclusivas de un contexto de beneficios, ya que pueden ser reescritas para el contexto de un juego de coste (N, c) .

Definición 1.4. (*Monotonía*) Sea $(N, v) \in G^N$ un juego TU. Diremos que (N, v) es monótono si para cualquier par de coaliciones $S, T \subseteq N$, con $S \subset T$, se cumple

$$v(S) \leq v(T).$$

La propiedad de superaditividad analiza lo beneficioso que resulta la fusión de coaliciones.

Definición 1.5. (*Superaditividad*) Sea $(N, v) \in G^N$ un juego TU. Diremos que (N, v) es un juego superaditivo si para cualquier par de coaliciones $S, T \subseteq N$ tales que $S \cap T = \emptyset$ se cumple

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T).$$

De satisfacerse esta propiedad, la coalición $S \cup T$ tiene claramente incentivos para actuar de manera conjunta, ya que se incrementan los beneficios con respecto a la actuación de las coaliciones S y T por separado. Además, si el juego (N, v) es superaditivo, la formación de la gran coalición N es razonable. Para el caso de un juego TU de coste (N, c) la propiedad equivalente se conoce como *subaditividad*.

Otra propiedad interesante de los juegos TU es la de convexidad.

Definición 1.6. (*Convexidad*) Sea $(N, v) \in G^N$ un juego TU. Diremos que (N, v) es convexo si para cualquier par de subconjuntos $S, T \subset N$,

$$v(S) + v(T) \leq v(T \cup S) + v(T \cap S).$$

Esta propiedad puede reescribirse como sigue. El juego (N, v) se dice convexo si para todo $i \in N$ y para todo $S \subset T \subseteq N \setminus \{i\}$ se tiene que

$$v(S \cup i) - v(S) \leq v(T \cup i) - v(T).$$

Si el juego (N, v) es convexo, entonces los jugadores obtendrán mayores incentivos por su colaboración cuanto más grande sea la coalición a la que se unen. En un contexto de costes, la propiedad análoga es la de concavidad. El juego TU (N, c) se dice *cóncavo* si cumple que

$$c(S \cup i) - c(S) \geq c(T \cup i) - c(T)$$

para todo $i \in N$ y para todo $S \subset T \subseteq N \setminus \{i\}$. Cabe mencionar que si un juego TU (N, v) es convexo entonces este será superaditivo (aunque el recíproco no es cierto).

La teoría de los juegos TU se centra en la definición de soluciones (reglas de asignación) y la selección de conjuntos de posibles asignaciones que permitan repartir los costes y que puedan ser admitidas por todos los jugadores. Con este propósito, pueden considerarse distintos enfoques. Una primera perspectiva queda determinada por la idea de estabilidad: se buscan asignaciones estables en el sentido de que el acuerdo resultante sea un elemento de dicho conjunto. A ésta responden, por ejemplo, soluciones en el núcleo, los conjuntos estables y el conjunto de negociación. Otro enfoque diferente es el de la ecuanimidad. La búsqueda de reglas que permitan repartir las asignaciones de una manera ecuánime entre los distintos jugadores involucrados en la coalición es su principal objetivo. El valor de Shapley, el nucleolus y el τ -valor son conceptos en los que la equidad está ligada a los repartos de costes que proponen. A continuación, se mencionan algunas de las soluciones más importantes en la literatura.

En general, el concepto de solución se puede definir formalmente como sigue.

Definición 1.7. Una solución sobre G^N es una aplicación Ψ ,

$$\Psi : G^N \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

que asocia a cada juego $(N, v) \in G^N$ le asigna un vector de \mathbb{R}^n , en el que cada componente representa el pago que recibe el jugador correspondiente.

De acuerdo con la cardinalidad de $\Psi(N, v)$ pueden establecerse dos grandes grupos. En el caso de que el conjunto $\Psi(N, v)$ sea un único punto estaremos ante una solución puntual y, en otro caso, estaremos ante una solución tipo conjunto. Tales soluciones proporcionan *repartos*, representados por un vector $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, donde la componente x_i indica la cantidad que se asigna al jugador i .

El siguiente ejemplo, siguiendo el Ejemplo 1.3, ilustra el cálculo de algunas de estas soluciones puntuales que son obtenidas de forma natural.

Ejemplo 1.8. *Consideremos el juego $(N, c) \in G^N$ tal que $N = \{1, 2, 3\}$ (1 representa a Suecia, 2 a Noruega y 3 a Finlandia) y cuya función característica viene dada (en millones de dólares) por el Cuadro 1.2 que repetimos a continuación.*

S	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$c(S)$	80	90	70	100	100	130	180

Cuadro 1.3: Función característica de un juego de costes.

Una vez determinados los costes de la cooperación de todos los posibles grupos de jugadores, algunos posibles repartos del coste de cooperación de todos los jugadores, $c(N) = 180$, son los mostrados a continuación.

- *El reparto igualitario asigna a todos los jugadores la misma cantidad:*

$$x_1 = x_2 = x_3 = 60.$$

Sin embargo, Suecia podría colaborar únicamente con Noruega o Finlandia y construir una presa más pequeña pero suficiente para dos países con un coste de 100, mientras que con este reparto estamos adjudicando un coste de 120 a las mismas coaliciones, por lo que Suecia no estaría dispuesta a formar parte de la coalición.

- *El reparto proporcional a los costes individuales tiene en cuenta cuanto le costaría individualmente a los países construir una presa:*

$$x_1 = \frac{80}{240} 180 = 60$$

$$x_2 = \frac{90}{240} 180 = 67.5$$

$$x_3 = \frac{70}{240} 180 = 52.5$$

Sin embargo, presenta el mismo problema que el reparto igualitario.

El ejemplo anterior ilustra la necesidad de imponer condiciones sobre las soluciones de juegos TU que se ajusten de forma adecuada a la situación en la que se aplican. Algunas de esas condiciones, descritas en términos de propiedades, se enumeran a continuación.

Sea $(N, v) \in G^N$ un juego TU y sea $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ un reparto de $v(N)$. Entonces,

- *Eficiencia.* Un reparto $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se dirá que es eficiente si reparte el valor de la cooperación de la gran coalición N , es decir, si se cumple que

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = v(N)$$

- *Racionalidad individual.* Un reparto $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se dirá que verifica la propiedad de racionalidad individual si todos los jugadores reciben un pago mayor de lo que se pueden garantizar por sí solos, es decir, si se cumple

$$x_i \geq v(i), \forall i \in N.$$

Bajo la óptica de un juego de beneficios, un jugador obtendrá siempre mayor beneficio bajo cooperación. En el caso de un juego de costes, un reparto cumplirá la racionalidad individual si todos los jugadores pagan más por sí mismos que colaborando, es decir, $x_i \leq c(i), \forall i \in N$

Estas dos propiedades permiten introducir el concepto de imputación para una coalición en la Definición 1.9.

Definición 1.9. Una imputación de un juego $(N, v) \in G^N$ es un reparto $x = (x_1, \dots, x_n)$ que satisface la eficiencia, $\sum_{i \in S} x_i = v(N)$, y la racionalidad individual, $x_i \geq v(i), \forall i \in N$.

Dado un juego $(N, v) \in G^N$, se denota por $I(N, v)$ el conjunto de imputaciones de dicho juego. El conjunto $I(N, v)$, distinto del vacío si el juego es superaditivo, incluye a todas las asignaciones eficientes e individualmente racionales. El núcleo (o *core*) queda determinado por el conjunto de las imputaciones que además cumplen la racionalidad coalicional, esto es, para cada coalición $S \subset N$, además se satisface que $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$. Esto se traduce en que, para cualquier coalición $S \subset N$, los jugadores que participan en dicha coalición ganen en total más de lo que ganarían por su cuenta.

Formalmente, el núcleo será definido en la Definición 1.10.

Definición 1.10. Sea $(N, v) \in G^N$. Se define el núcleo $C(N, v)$ de (N, v) como el conjunto

$$C(N, v) = \{x \in I(N, v) : \text{para cada } S \subset N, \sum_{i \in S} x_i \geq v(S)\}.$$

De acuerdo con lo expuesto, las asignaciones del núcleo se caracterizan por lo siguiente. Los elementos de $C(N, v)$ asignan a cada coalición unos costes mayores o iguales que los garantizados a cada coalición por sí misma. Así, dichos repartos se consideran estables, en el sentido de que no dejan insatisfecha a ninguna coalición. Además, en caso de no formarse la coalición total, los agentes pagarán más si actúan por separado que si lo hacen unidos.

Un ejemplo muy común de solución tipo conjunto es el *core* o *núcleo*, el cual se basa en la idea de añadir a las condiciones que ya hemos visto la racionalidad coalicional, es decir, que para cualquier coalición $S \subset N$, los jugadores que participan en dicha coalición ganen en total más de lo que ganarían por su cuenta, o lo que es lo mismo, que

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S).$$

En el caso de un juego de costes (N, c) , un reparto cumplirá la racionalidad coalicional si

$$\sum_{i \in S} x_i \leq c(S).$$

Si un reparto pertenece al núcleo se le denominará *estable* pues ninguna coalición S tendrá motivos para salirse de la coalición ya que por su cuenta obtendrían algo peor que con dicho reparto.

En lo que sigue, nos centraremos en las soluciones de juegos de utilidad transferible de tipo puntual y, más concretamente, en su cómputo. Consideraremos el valor de Shapley (Shapley 1953) y el valor de Banzhaf (Banzhaf 1964), así como sus extensiones a aquellas situaciones en las que exista una estructura coalicional que restringe la cooperación de los jugadores involucrados.

1.1. Soluciones de juegos TU

Para empezar, hablaremos sobre los valores de Shapley y Banzhaf. Estos valores se pueden aplicar en cualquier juego con las características que acabamos de describir y nos devuelven un reparto.

1.1.1. El valor de Shapley

Una de las soluciones puntuales más conocidas, es el valor de Shapley de un juego TU $(N, v) \in G^N$, en Shapley (1953).

Definición 1.11 (Shapley 1953). *El valor de Shapley se define, para cada juego TU $(N, v) \in G^N$ y para cada jugador $i \in N$, por $Sh_i(N, v)$, donde*

$$Sh_i(N, v) = \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} (v(S \cup \{i\}) - v(S)).$$

El valor de Shapley se define formalmente como la regla de reparto que asigna a cada jugador una suma ponderada de las contribuciones que produce con las distintas coaliciones. Sin embargo, existe otra definición alternativa del valor de Shapley. Para ello, es necesaria la definición del concepto de vector de contribución marginal.

Definición 1.12. *Sea $\pi : N \rightarrow \{1, \dots, n\}$ una ordenación de los jugadores de N . Se define el reparto de contribuciones marginales asociado al orden π , $x(\pi) = (x(\pi)_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}^n$, como*

$$x(\pi)_i = v(\text{Pre}^\pi(i) \cup \{i\}) - v(\text{Pre}^\pi(i)),$$

para todo $i \in N$ y siendo $\text{Pre}^\pi(i) = \{j \in N : \pi(j) < \pi(i)\}$ el conjunto de jugadores que preceden a i en la ordenación π .

En la práctica, cada vector marginal $x(\pi)$ constituye un reparto de $v(N)$ que asigna a cada jugador su contribución a los predecesores de acuerdo con el orden π . No es complicado probar que el valor de Shapley asigna a cada jugador su valor esperado si se supone que los jugadores han llegado a un punto de negociación y a cada uno de ellos se le reclama su coste a la coalición de jugadores que llega antes que él. Además, se asume que el orden de llegada es aleatorio y todos los órdenes son igualmente probables. Por tanto, el valor de Shapley puede ser definido también como:

$$Sh(N, v) = \frac{1}{|\Pi^N|} \sum_{\pi \in \Pi^N} x(\pi). \quad (1.1)$$

En realidad, Shapley (1953) introdujo esta regla de asignación como la única que verificaba un conjunto de propiedades “razonables”. Entre otras, es sencillo comprobar que este valor cumple la propiedad de eficiencia, es decir, que la suma de las componentes del valor de Shapley es igual a la cantidad que queremos repartir, i.e.,

$$\sum_{i=1}^n Sh_i = v(N).$$

A continuación se establece un resultado que establece la relación entre la asignación propuesta por el valor de Shapley y el núcleo de un juego TU $(N, v) \in G^N$ (ver Definición 1.10).

Teorema 1.13. *Sea $(N, v) \in G^N$ un juego TU convexo. Entonces, $Sh(N, v) \in C(N, v)$.*

Para ilustrar el cómputo del valor de Shapley, se considera el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.14. Sea $(N, v) \in G^N$ el juego TU con 3 jugadores definido en el Cuadro 1.4.

S	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$v(S)$	0	3	1	2	6	9	10

Cuadro 1.4: Función característica del juego TU (N, v) .

Para calcular su valor de Shapley, se consideran todas las permutaciones de $N = \{1, 2, 3\}$ y, para cada una de ellas, calculamos su vector de contribuciones marginales asociado. Así, obtenemos el Cuadro 1.5.

	Jug. 1	Jug. 2	Jug. 3
(123)	0	2	8
(132)	0	4	6
(213)	-1	3	8
(231)	1	3	6
(312)	5	4	1
(321)	1	8	1
$Sh(N, v)$	6/6	24/6	30/6

Cuadro 1.5: Cálculo del valor de Shapley de (N, v) .

Al promediar los vectores de contribuciones marginales, se tiene que

$$Sh(N, v) = (1, 4, 5).$$

1.1.2. El valor de Banzhaf

El valor de Banzhaf, introducido en Banzhaf (1964), es una solución para juegos TU, alternativa al valor de Shapley.

Definición 1.15 (Banzhaf 1964). El valor de Banzhaf se define, para cada juego TU $(N, v) \in G^N$ y para cada jugador $i \in N$, por $Bz_i(N, v)$, donde

$$Bz_i(N, v) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{S \subseteq N, i \in S} (v(S) - v(S \setminus \{i\})).$$

La interpretación natural de esta solución de juegos TU es la siguiente. Fijado un jugador $i \in N$, el valor de Banzhaf asociado a i le asigna el promedio de sus contribuciones marginales a coaliciones que no lo contienen. Para el valor de Shapley los pesos asignados a cada coalición dependen de su tamaño, mientras que en el valor de Banzhaf todas las coaliciones son equiprobables.

Generalmente, este valor se aplica en situaciones de votación y pueden ser interpretados como índices de poder de cada jugador dentro del juego TU asociado ($v(S) \in \{0, 1\}$, para todo $S \subseteq N \setminus \{i\}$). Sin embargo, su uso en juegos TU generales (no sólo en situaciones de votación) queda justificada. Cabe mencionar que el valor de Banzhaf no es eficiente, es decir, $\sum_{j=1}^n Bz_j \neq v(N)$. Sin embargo, el valor de Banzhaf permite la definición de reglas de asignación eficientes para un juego TU $(N, v) \in G^N$. Por

ejemplo, se puede definir la regla $\Gamma : G^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ que, a cada $(N, v) \in G^N$ y a cada $i \in N$, le asigna

$$\Gamma_i(N, v) = \frac{Bz_i(N, v)}{\sum_{j=1}^n Bz_j(N, v)} v(N). \quad (1.2)$$

Sin embargo, en contextos de votación, es habitual el uso del vector normalizado de Banzhaf del juego $(N, v) \in G^N$. Esto es,

$$\overline{Bz}_i(N, v) = \frac{Bz_i(N, v)}{\sum_{j=1}^n Bz_j(N, v)},$$

para cada $i \in N$.

El siguiente ejemplo ilustra el cálculo del valor de Banzhaf de un juego $(N, v) \in G^N$.

Ejemplo 1.16. Sea $(N, v) \in G^N$ el juego TU definido en el Cuadro 1.6.

S	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$v(S)$	0	3	1	2	6	9	10

Cuadro 1.6: Función característica de (N, v) .

Para calcular el valor de Banzhaf de (N, v) , fijado un jugador $i \in N$, consideramos todas las posibles coaliciones $S \subseteq N \setminus \{i\}$. Para cada jugador, calculamos su contribución marginal a cada coalición como las mencionadas. Es decir, se calcula

$$v(S \cup i) - v(S),$$

para cada $S \subseteq N \setminus \{i\}$. Aplicando ésto a nuestro ejemplo, obtenemos el Cuadro 1.7.

	Jug. 1	Jug. 2	Jug. 3
{1}	0	-	-
{2}	-	3	-
{3}	-	-	1
{1, 2}	-1	2	-
{1, 3}	5	-	6
{2, 3}	-	8	6
{1, 2, 3}	1	4	8
$Bz(N, v)$	5/4	17/4	21/4

Cuadro 1.7: Cálculo del valor de Banzhaf de (N, v) .

De esta forma, el valor de Banzhaf de (N, v) es

$$Bz(N, v) = (1.25, 4.25, 5.25).$$

Es fácil comprobar que, en este caso, dicha solución no es eficiente, por lo que su normalización

$$\overline{Bz}(N, v) = (0.116, 0.395, 0.488)$$

puede usarse para plantear un reparto de $v(N)$ como el descrito en la Expresión 1.2, dado por el vector,

$$\Gamma(N, v) = (1.163, 3.954, 4.883).$$

1.2. Soluciones de juegos con uniones a priori

En esta sección se describen los modelos de juegos cooperativos con utilidad transferible en los que se supone la existencia de una estructura de uniones a priori, establecida a partir de una partición del conjunto de jugadores. En general, esto se traduce en que aquellos jugadores pertenecientes a una misma unión tienen más posibilidades de colaboración entre sí que con aquellos jugadores fuera de la unión.

En primer lugar, se introducen los juegos con uniones a priori.

Definición 1.17. *Un juego TU con un sistema de uniones es una terna (N, v, P) , donde $(N, v) \in G^N$ es un juego TU y $P = \{P_1, \dots, P_s\}$ es una partición de N que proporciona el sistema de uniones asociados.*

Denotaremos por G_P^N a la clase de juegos con uniones a priori P con N jugadores. En este contexto de cooperación, es posible redefinir el concepto de solución en este caso para juegos TU con uniones a priori.

Definición 1.18. *Una solución sobre G_P^N es una aplicación Ψ ,*

$$\Psi : G_P^N \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

que asocia a cada juego $(N, v, P) \in G_P^N$ un vector de \mathbb{R}^n , en el que cada componente representa el pago que recibe el jugador correspondiente.

En esta sección describiremos las adaptaciones de los valores de Shapley y Banzhaf al contexto de juegos TU con uniones a priori. Antes, introducimos el concepto de juego cociente asociado a un juego con uniones a priori.

Definición 1.19. *Dado un juego con coaliciones a priori $(N, v, P) \in G_P^N$, se define el juego cociente como $(M, v_P) \in G^M$ con $M = \{1, \dots, s\}$ y*

$$v_P(T) = v \left(\bigcup_{k \in T} P_k \right)$$

para todo $T \subseteq M$.

Vemos como en el juego cociente existe un jugador por cada coalición "a priori" y el valor de cada subconjunto es el valor en la función original de la coalición de los jugadores que pertenecen a dichas particiones.

Para calcular un reparto en este tipo de juegos, podríamos utilizar el valor de Shapley o el valor de Banzhaf, pero estos valores no aprovechan la información que nos aporta el sistema de uniones a priori. Por ello utilizaremos el valor de Owen y de Banzhaf-Owen, adaptaciones a este tipo de juegos de los valores de Shapley y Banzhaf respectivamente.

1.2.1. El valor de Owen

El valor de Owen, introducido en Owen (1977), puede entenderse como una modificación del valor de Shapley para juegos TU con uniones a priori.

Definición 1.20 (Owen 1977). *El valor de Owen se define, para cada juego con uniones a priori $(N, v, P) \in G_P^N$ y para cada jugador $i \in N$, por $O_i(N, v, P)$, donde*

$$O_i(N, v, P) = \sum_{Q \subseteq P \setminus \{P^i\}} \sum_{T \subseteq P^i \setminus \{i\}} \frac{t!(p^i - t - 1)!q!(s - q - 1)!}{p^i!s!} \left(v \left(\bigcup_{P_a \in Q} P_a \cup T \cup \{i\} \right) - v \left(\bigcup_{P_a \in Q} P_a \cup T \cup \{i\} \right) \right)$$

donde P^i denota el elemento de la partición P al cual pertenece el jugador i .

Para cada $(N, v, P) \in G_P^N$, el valor de Owen suele considerarse un procedimiento de asignación en dos etapas, que usa el valor de Shapley y el juego cociente asociado. En primer lugar, se hace un primer reparto entre las coaliciones utilizando el juego cociente y, en una segunda etapa, se distribuye la cantidad asignada a cada unión a priori entre sus participantes, teniendo en cuenta sus posibilidades de abandonar esa unión y entrar a formar parte de otras uniones. Nótese que si $P = \{\{i\} : i \in N\}$ o $P = \{N\}$ el valor de Shapley y el valor de Owen coinciden, de forma que el valor de Owen se considera como una extensión del valor de Shapley a juegos con uniones a priori.

El valor de Owen de un juego con uniones a priori $(N, v, P) \in G_P^N$ puede ser expresado también en términos de permutaciones. Sin embargo, a diferencia del valor de Shapley, el valor de Owen requiere la introducción del concepto de permutaciones compatibles con la partición P . Una ordenación $\pi \in \Pi^N$ se dice *compatible con la partición P* si en ella, todos los jugadores de una misma unión *a priori* aparecen de manera consecutiva. Formalmente, si denotamos por P^i la partición a la cual pertenece el jugador i , una permutación π es compatible con una partición P si y solo si para todo $i, j, k \in N$ se cumple que

$$P^i = P^j \text{ y } \pi(i) < \pi(k) < \pi(j) \Rightarrow P^k = P^i = P^j$$

Al conjunto de ordenaciones compatibles con la partición P se denota por Π_P^N . Por tanto, el valor de Owen del juego $(N, v, P) \in G_P^N$ se puede reescribir como

$$O(N, v, P) = \frac{1}{|\Pi_P^N|} \sum_{\pi \in \Pi_P^N} x(\pi)$$

donde Π_P^N denota el conjunto de las ordenaciones de N jugadores admisibles respecto a P y $x(\pi) = (x(\pi)_i)_{i \in N}$ es el vector de contribuciones marginales asociado a π , con $\pi \in \Pi^N$.

Al igual que el valor de Shapley, el valor de Owen para $(N, v, P) \in G_P^N$ proporciona asignaciones eficientes. Desde su introducción en Owen (1977), el valor de Owen ha sido estudiado ampliamente en la literatura, de forma teórica centrándose en sus caracterizaciones, como de manera más práctica a través de aplicaciones de esta solución para juegos TU.

El siguiente ejemplo ilustra el cómputo del valor de Owen para un juego TU con uniones a priori con 3 jugadores.

Ejemplo 1.21. Sea $(N, v, P) \in G_P^N$ el juego TU con uniones a priori definido por el juego TU (N, v) usado a lo largo de este capítulo (y detallado en el Cuadro 1.8), y por la partición del conjunto de jugadores N P determinada por $P = \{P_1, P_2\}$, con $P_1 = \{1, 3\}$ y $P_2 = \{2\}$.

S	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$v(S)$	0	3	1	2	6	9	10

Cuadro 1.8: Función característica.

A continuación se muestra el Cuadro 1.9 con las contribuciones marginales asociadas a cada una de las permutaciones compatibles con la partición P considerada.

	Jug. 1	Jug. 2	Jug. 3
(132)	0	4	6
(213)	-1	3	8
(231)	1	3	6
(312)	5	4	1
O(N,v)	5/4	14/4	21/4

Cuadro 1.9: Cálculo del valor de Owen de (N, v, P) .

Si comparamos el valor de Owen, $O(N, v) = (1.25, 3.5, 5.25)$, con el valor de Shapley para el mismo juego, $Sh(N, v) = (1, 4, 5)$, las utilidades de los jugadores 1 y 3 (ambos miembros del mismo elemento de P) aumentan a costa de reducir la utilidad del jugador 2.

1.2.2. El valor de Banzhaf-Owen

De forma similar al valor de Owen, Owen (1981) extendió el valor de Banzhaf para la familia de juegos TU con un sistema de uniones.

Definición 1.22 (Owen 1981). *El valor de Banzhaf-Owen se define, para cada juego con uniones a priori $(N, v, P) \in G_P^N$ y para cada jugador $i \in N$, por $BzO_i(N, v, P)$, donde*

$$BzO_i(N, v, P) = \sum_{Q \subseteq P \setminus \{P^i\}} \frac{1}{2^{s-1}} \sum_{T \subseteq P^i \setminus \{i\}} \frac{1}{2^{p^i-1}} \left(v \left(\bigcup_{P_a \in Q} P_a \cup T \cup \{i\} \right) - v \left(\bigcup_{P_a \in Q} P_a \cup T \cup \{i\} \right) \right). \quad (1.3)$$

Utilizando esta definición, podemos definir el valor de Banzhaf-Owen del jugador i en el juego con uniones a priori $(N, v, P) \in G_P^N$ como el promedio de las contribuciones marginales de i en el conjunto de coaliciones compatibles con la partición P . Fijado $i \in N$, una coalición $T \subseteq N \setminus \{i\}$ es compatible con la partición P si $T = \cup_{P_l \in R} P_l \cup S$, con $R \subseteq P \setminus P^i$ y $S \subseteq P^i \setminus \{i\}$.

Sin embargo, y siguiendo lo expuesto en Saavedra-Nieves y Fiestras-Janeiro (2021), usaremos la interpretación del valor de Banzhaf-Owen de un juego TU con uniones a priori $(N, v, P) \in G_P^N$ como el valor de Banzhaf de un juego TU alternativo a este, expuesta en Laruelle y Valenciano (2004). Sea $(N, v, P) \in G_P^N$ juego TU con uniones a priori y sea $i \in N$ un jugador tal que $i \in P^i \in P$. Entonces, si consideramos el conjunto $N_i^* = \{k : P_k \in P \setminus \{P^i\}\} \cup \{j : j \in P^i\}$, es posible la definición del juego TU (N_i^*, v_i^*) para cada $i \in N$. Este asigna a cada coalición $T \subseteq N_i^*$

$$v_i^*(T) = v \left(\bigcup_{k \in T \setminus P^i} P_k \cup (T \cap P^i) \right).$$

Como consecuencia inmediata, el valor de Banzhaf-Owen de i para $(N, v, P) \in G_P^N$, coincide con el valor de Banzhaf de i para (N_i^*, v_i^*) , es decir, se cumple que

$$BzO_i(N, v, P) = Bz_i(N_i^*, v_i^*).$$

El siguiente ejemplo ilustra el cómputo del valor de Banzhaf-Owen siguiendo esta propuesta.

Ejemplo 1.23. *Sea $(N, v, P) \in G_P^N$ el juego TU con uniones a priori considerado en el Ejemplo 1.21, siendo P la partición $P = \{P_1, P_2\}$ tal que $P_1 = \{1, 3\}$ y $P_2 = \{2\}$. Para el cómputo del valor de*

Banzhaf-Owen de cada jugador $i \in N$, debemos obtener el juego (N_i^*, v_i^*) para cada jugador y obtener su valor de Banzhaf.

Tomemos $i = \{2\}$. Entonces, $N_2^* = \{1\} \cup \{2\}$ y

$$\begin{aligned} v_2^*(\{1\}) &= v(\{1, 3\}) = 6, \\ v_2^*(\{2\}) &= v(\{2\}) = 3, \\ v_2^*(\{1, 2\}) &= v(\{1, 2, 3\}) = 10. \end{aligned}$$

Obtenida la función característica de (N_2^*, v_2^*) , calculamos el valor de Banzhaf de este juego, i.e. $Bz(N_2^*, v_2^*)$, que podemos ver en el Cuadro 1.10.

	Jug. 1	Jug. 2
$\{1\}$	6	-
$\{2\}$	-	3
$\{1, 2\}$	7	4
$Bz(N_2^*, v_2^*)$	13/2	7/2

Cuadro 1.10: Cálculo del valor de Banzhaf-Owen para el jugador 2.

A la vista de los resultados obtenidos, el valor de Banzhaf-Owen del jugador $\{2\}$ (o equivalentemente, el valor de Banzhaf para P_2) es igual a $7/2$. Repitiendo el procedimiento para el resto de jugadores, se obtiene que

$$BzO(N, v) = (1.25, 3.5, 5.25)$$

Al igual que en el caso de Banzhaf, este valor suele no satisfacer la propiedad de eficiencia, esto es, $\sum_{j=1}^n BzO_j \neq v(N)$. En un contexto general, sin embargo, el valor de Banzhaf-Owen permite la definición de reglas de asignación eficientes para cualquier juego TU con uniones a priori $(N, v, P) \in G_P^N$. Por ejemplo, podemos considerar la regla $\Gamma^P : G_P^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ que, a cada $(N, v, P) \in G_P^N$ y a cada $i \in N$, le asigna

$$\Gamma_i^P(N, v, P) = \frac{BzO_i(N, v, P)}{\sum_{j=1}^n BzO_j(N, v, P)} v(N). \quad (1.4)$$

En el caso de juegos simples con uniones a priori $(N, v, P) \in G_P^N$, donde $v(S) \in \{0, 1\}$ para cada $S \subseteq N$, es habitual considerar la normalización del vector de reparto propuesto por el valor de Banzhaf-Owen para (N, v, P) dado por

$$\overline{BzO}_i(N, v, P) = \frac{BzO_i(N, v, P)}{\sum_{j=1}^n BzO_j(N, v, P)},$$

para cada $i \in N$.

Capítulo 2

Estimación de soluciones para juegos TU y juegos con uniones a priori

En general, la obtención exacta de soluciones de juegos TU, como el valor de Shapley (Shapley 1953) o el valor de Banzhaf (Banzhaf 1964), presenta una alta complejidad computacional en caso de conjuntos de jugadores muy grandes. En esos casos, el número de elementos a evaluar se incrementa de forma exponencial. Por ejemplo, Deng y Papadimitriou (1994) se centra en el análisis del coste computacional del cómputo de soluciones en la teoría de juegos cooperativos como las aquí consideradas. Sin embargo, para clases específicas de juegos, existen procedimientos que permiten su cómputo exacto que minimiza estas dificultades. Entre otros, Littlechild y Owen (1973) y Vázquez-Brage et al. (1997) obtiene las expresiones exactas del valor de Shapley y del valor de Owen para juegos del aeropuerto. En Fragnelli et al. (2000) se proporciona el valor de Shapley para juegos de mantenimiento de infraestructuras ferroviarias. En Alonso-Meijide et al. (2009), se establecieron rankings de los miembros de la UE de acuerdo con el poder que estas soluciones asignan a cada país y en Lucchetti et al. (2010) se caracteriza el valor de Banzhaf en contextos genéticos. Sin embargo, en general, el cómputo exacto de estas soluciones no es siempre posible mediante métodos alternativos y se complica cuando el número de jugadores aumenta.

Una alternativa a esta problemática pasa por el uso de técnicas de muestreo (Cochran 2007) para la estimación de las soluciones de juegos TU. Tal y como se ha mencionado, el valor de Shapley, el valor de Banzhaf, el valor de Owen y el valor de Banzhaf-Owen son vistos como medias poblacionales de las contribuciones marginales bajo diferentes distribuciones de probabilidad. De esta forma, resulta natural el uso de técnicas estadísticas para la estimación de medias poblacionales de una variable aleatoria. Su empleo se ha iniciado en Mann y Shapley (1960), que sugiere el empleo de muestreo en la estimación del valor de Shapley en juegos de votación ponderados. Más recientemente, Fernández-García y Puerto-Albandoz (2006) y Castro et al. (2009) proponen métodos para la estimación del valor de Shapley para juegos TU en general mediante el uso de muestreo aleatorio con reemplazamiento. En Bachrach et al. (2010) se propone un método similar, basado en el muestreo de coaliciones, para estimar el valor de Banzhaf de juegos simples. En Saavedra-Nieves et al. (2018) y Saavedra-Nieves y Fiestras-Janeiro (2021) se introducen las técnicas de muestreo para estimar el valor de Owen y de Banzhaf-Owen de un juego TU bajo la presencia de una estructura de coaliciones a priori, respectivamente.

Este capítulo se estructura como sigue. En la Sección 2.1, se describen los procedimientos propuestos en la literatura para la estimación del valor de Shapley y el valor de Banzhaf que se aplican a juegos (N, v) . Como extensión, la Sección 2.2 trata el problema de las estimaciones del valor de Owen y del valor de Banzhaf-Owen, respectivamente, en aquellas situaciones en las que se asume la existencia de una partición P que describa las afinidades y/o restricciones en la cooperación entre los jugadores.

Además, se muestran los resultados de un pequeño estudio de simulación realizado para chequear el comportamiento práctico de la estimación del valor de Banzhaf-Owen cuando se usa muestreo con reemplazamiento.

2.1. Estimación de soluciones para juegos TU

En esta sección se abordan los procedimientos propuestos en la literatura y basados en muestreo para la estimación del valor de Shapley y del valor de Banzhaf en aquellos contextos en los que surgen problemas computacionales para su cómputo exacto.

2.1.1. Estimación del valor de Shapley

En esta sección, revisaremos el procedimiento para la aproximación del valor de Shapley de un juego TU $(N, v) \in G^N$ (Shapley 1953) mediante el empleo de técnicas de muestreo. De acuerdo con la Expresión 1.1, el valor de Shapley de un juego TU $(N, v) \in G^N$ se define como

$$Sh(N, v) = \frac{1}{|\Pi^N|} \sum_{\pi \in \Pi^N} x(\pi),$$

donde Π^N es el conjunto de todas las ordenaciones posibles de N jugadores y $x(\pi)$ el vector de contribuciones marginales asociadas a la permutación $\pi \in \Pi^N$. A la vista de la expresión del valor de Shapley, parece clara la complejidad computacional asociada a su cálculo exacto. Dicha complejidad se incrementa de forma exponencial con el número de jugadores.

A continuación, se describen los procedimientos basados en muestreo aleatorio simple sobre el conjunto de permutaciones de N que Fernández-García y Puerto-Albandoz (2006) y Castro et al. (2009) proponen para la estimación del valor de Shapley de un juego TU (N, v) .

Algoritmo de aproximación del valor de Shapley

Sea $(N, v) \in G^N$ un juego TU en el que el valor $v(S)$ pueda ser obtenido en tiempo polinomial para cualquiera coalición $S \subseteq N$. El procedimiento para la estimación del valor de Shapley propuesto en Fernández-García y Puerto-Albandoz (2006) y Castro et al. (2009) se describe a continuación.

1. La población de muestreo está determinada por el conjunto de las posibles ordenaciones de N , es decir, Π^N .
2. El parámetro a estimar es la componente i -ésima del valor de Shapley del juego (N, v) , i.e. $Sh_i(N, v)$.
3. Se extrae una muestra M de m permutaciones de la población con reemplazamiento, considerando que todas las ordenaciones son equiprobables con probabilidad $\frac{1}{n!}$.
4. La característica objeto de estudio es, para cada permutación $\pi \in M$, la contribución marginal del jugador i , $x(\pi)_i$, es decir,

$$x(\pi)_i = v(Pre^\pi(i) \cup \{i\}) - v(Pre^\pi(i)).$$

5. Para cada ordenación $\pi \in M$ que muestreemos, calculamos la contribución marginal de todos los jugadores $x(\pi) = (x(\pi)_1, \dots, x(\pi)_n)$.
6. La estimación del valor de Shapley del jugador i , $Sh_i(N, v)$, se obtiene como la media muestral, componente a componente, de las contribuciones marginales obtenidas sobre la muestra M . Es decir,

$$\widehat{Sh}_i = \frac{1}{m} \sum_{\pi \in M} x(\pi)_i,$$

para cada $i \in N$.

Finalizado el procedimiento, la estimación del valor de Shapley del juego (N, v) , $Sh(N, v)$, queda determinada por $\widehat{Sh} = (\widehat{Sh}_1, \dots, \widehat{Sh}_n)$. El pseudocódigo del algoritmo para la estimación del valor de Shapley se detalla a continuación (ver Algoritmo 1).

Algoritmo 1 Algoritmo de aproximación del valor de Shapley de (N, v) .

Require: $m \geq 0$

$Cont = 0$

$\widehat{Sh}_i = 0, \forall i \in N$

while $Cont < m$ **do**

Se elige, aleatoriamente, $\pi \in \Pi^N$ con probabilidad $1/n!$

for $i \in N$ **do**

Obtenemos $Pre^\pi(i)$

Calculamos $x(\pi)_i = v(Pre^\pi(i) \cup \{i\}) - v(Pre^\pi(i))$

$\widehat{Sh}_i = \widehat{Sh}_i + x(\pi)_i$

end for

$Cont = Cont + 1$

end while

$\widehat{Sh}_i = \frac{\widehat{Sh}_i}{m}$

El problema de estimar el valor de Shapley se reduce, en la práctica, a un problema de estimación de una media en una población finita. En Fernández-García y Puerto-Albandoz (2006) y Castro et al. (2009) se analizan las propiedades estadísticas del estimador resultante. Fijado $i \in N$, el estimador del valor de Shapley \widehat{Sh}_i es insesgado, es decir,

$$\mathbb{E}(\widehat{Sh}_i) = Sh_i(N, v).$$

En cuanto a su variabilidad, la varianza del estimador viene dada por

$$Var(\widehat{Sh}_i) = \frac{Var(x(\pi)_i)}{m} = \frac{\sigma^2}{m},$$

donde

$$\sigma^2 = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi^N} (x(\pi)_i - Sh_i)^2$$

es la varianza poblacional de las contribuciones marginales con respecto a la media poblacional (la componente i -ésima del valor de Shapley). Aunque se omiten los detalles, estas y otras propiedades pueden seguirse en Fernández-García y Puerto-Albandoz (2006) y Castro et al. (2009). Por ejemplo, el estimador sigue proporcionando asignaciones eficientes. Fijada una $\pi \in \Pi^N$, el vector de contribuciones marginales asociadas a π es eficiente, y por construcción, el estimador del valor de Shapley se contruye como promedio de éstas.

Un aspecto fundamental en problemas como este se centra en el establecimiento de cotas para el error absoluto en la estimación. Dado que el error no es a menudo posible de cuantificar, es necesario la definición de una acotación probabilística. Esto es, se garantiza que el error de estimación es mayor que un cierto ε fijado con una cierta probabilidad α como máximo. Matemáticamente, esto es equivalente a decir que

$$\mathbb{P}(|\widehat{Sh}_i - Sh_i| \geq \varepsilon) \leq \alpha.$$

Por tanto, es fácil comprobar que el valor estimado se presenta a menudo como una buena aproximación

del valor de Shapley cuando los tamaños de muestra son lo suficientemente grandes. A continuación, se enuncian una colección de resultados estadísticos que pueden resultar de utilidad para determinar los tamaños de muestra adecuados.

Cabe mencionar que, aunque Castro et al. (2009) proponen resultados para la determinación del tamaño muestral, estos no pueden basarse en las aproximaciones por la distribución normal que el Teorema Central del Límite nos llevaría de forma errónea a establecer. Tal y como se desprende, por ejemplo, de la expresión exacta del valor de Shapley, el número de permutaciones es finito. Por ese motivo, resultados acerca de la acotación del error en el muestreo en poblaciones finitas como en Maleki (2015) queda justificado.

En concreto, Maleki (2015) establece resultados basados en algunas desigualdades sobre variables aleatorias bien conocidas, algunas de ellas exclusivas de contextos de poblaciones finitas. En primer lugar, la *desigualdad de Tchebyshev* asegura que, si X es una variable aleatoria con varianza finita se cumple que

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2} \quad (2.1)$$

para todo $a > 0$. Utilizando esta desigualdad, Maleki (2015) prueba el siguiente resultado.

Proposición 2.1. (Maleki, 2015). *Sea $(N, v) \in G^N$ un juego TU. Fijados $\varepsilon > 0$ y $\alpha \in (0, 1)$ se cumple*

$$m \geq \frac{\text{Var}(x(\pi)_i)}{\alpha \varepsilon^2} \Rightarrow \mathbb{P}\left(\left|\widehat{Sh}_i - Sh_i\right| \geq \varepsilon\right) \leq \alpha$$

para todo $i \in N$.

Sin embargo, la desigualdad de la proposición anterior incluye la varianza de las contribuciones marginales, la cual no tiene que ser conocida. Para obtener una cota de esta varianza podemos utilizar la desigualdad de Popoviciu. Esta asegura que, si M y m son una cota superior y una cota inferior de una variable aleatoria acotada X que tiene por varianza $\text{Var}(X)$, entonces

$$\text{Var}(X) \leq \frac{1}{4}(M - m)^2 \quad (2.2)$$

En nuestro contexto, se requiere por tanto el establecimiento de cotas sobre las contribuciones marginales para la determinación de tamaños muestrales en la estimación del valor de Shapley. En casos muy específicos, bajo el cumplimiento de ciertas propiedades de los juegos TU pueden obtenerse una expresión explícita de los valores de dichas cotas. Por ejemplo, en Saavedra-Nieves et al. (2018) se establece que si (N, v) es un juego cóncavo o convexo, fijado un jugador $i \in N$, el rango en el que toman valores las contribuciones marginales de i queda determinado por

$$r_i = |v(N) - v(N \setminus \{i\}) - v(i)|$$

Por tanto, la desigualdad de Popoviciu permite obtener el siguiente corolario.

Corolario 2.1.1. *Sea $(N, v) \in G^N$ un juego TU. Fijados $\varepsilon > 0$ y $\alpha \in (0, 1)$, se cumple que si*

$$m \geq \frac{r_i^2}{4\alpha \varepsilon^2} \Rightarrow \mathbb{P}\left(\left|\widehat{Sh}_i - Sh_i\right| \geq \varepsilon\right) \leq \alpha$$

Alternativamente, se puede proponer otra cota probabilística del error de estimación basada en la desigualdad de Hoeffding. La *desigualdad de Hoeffding* (Hoeffding 1963) asegura que si $\sum_{j=1}^r X_j$ es la suma de r variables independientes tales que $a_j \leq X_j \leq b_j \forall j \in \{1, \dots, r\}$, entonces se cumple que

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{j=1}^r X_j - \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^r X_j\right)\right| \geq t\right) \leq 2 \exp\left(\frac{-2t^2}{\sum_{j=1}^r (b_j - a_j)^2}\right). \quad (2.3)$$

A partir de esta desigualdad, podemos establecer el siguiente resultado probabilístico para acotar el error en la estimación del valor de Shapley.

Proposición 2.2. (Maleki 2015) Sea $(N, v) \in G^N$ un juego TU. Fijados $i \in N$, $\varepsilon > 0$ y $\alpha \in (0, 1)$, si denotamos por

$$r_i = \max_{\pi, \pi' \in \Pi^N} \{x(\pi)_i - x(\pi')_i\}$$

el rango de las contribuciones marginales del jugador i , entonces se cumple que si

$$m \geq \frac{\ln(2/\alpha)r_i^2}{2\varepsilon^2} \Rightarrow \mathbb{P}\left(\left|\widehat{Sh}_i - Sh_i\right| \geq \varepsilon\right) \leq \alpha.$$

Combinando las desigualdades del Corolario 2.1.1 y la Proposición 2.2, se obtiene el siguiente resultado probabilístico para aproximar el error en la estimación del valor de Shapley como corolario.

Corolario 2.2.1. Sea $(N, v) \in G^N$ un juego TU. Fijados $i \in N$, $\varepsilon > 0$ y $\alpha \in (0, 1)$,

$$m \geq \min\left\{\frac{1}{4\alpha\varepsilon^2}, \frac{\ln(2/\alpha)}{2\varepsilon^2}\right\} r_i^2 \Rightarrow \mathbb{P}\left(\left|\widehat{Sh}_i - Sh_i\right| \geq \varepsilon\right) \leq \alpha,$$

siendo $r_i = \max_{\pi, \pi' \in \Pi^N} \{x(\pi)_i - x(\pi')_i\}$ el rango de las contribuciones marginales del jugador i .

A la vista de la desigualdad resultante en el corolario anterior, se pueden hacer algunos comentarios más específicos sobre su uso.

- Si $(N, v) \in G^N$ es un juego convexo (o cóncavo, en el caso de un juego de coste), se tiene que

$$r_i = (v(N) - v(N \setminus \{i\}) - v(i))$$

para todo $i \in N$.

- En general, los valores de α más habituales son $\alpha = 0.1$, $\alpha = 0.05$ y $\alpha = 0.01$. Maleki (2015) prueba que si $\alpha < 0.23$, se cumple que

$$\min\left\{\frac{1}{4\alpha\varepsilon^2}, \frac{\ln(2/\alpha)}{2\varepsilon^2}\right\} = \frac{\ln(2/\alpha)}{2\varepsilon^2}.$$

El funcionamiento de esta metodología ha sido validado a través de un exhaustivo estudio de simulación en Castro et al. (2009). En concreto, se considera una batería de juegos TU en los que el valor de Shapley exacto puede ser obtenido en tiempo polinomial. De esta forma, se analiza la calidad de las estimaciones obtenidas en términos del error cometido.

2.1.2. Estimación del valor de Banzhaf

En esta sección, proponemos un procedimiento general para la estimación del valor de Banzhaf de un juego $(N, v) \in G^N$ siguiendo las ideas expuestas en Bachrach et al. (2010) y Saavedra-Nieves y Fiestras-Janeiro (2021). Sin embargo, la principal diferencia entre las metodologías anteriormente mencionadas está en que la extracción de los elementos de la población se hace en Bachrach et al. (2010) considerando la hipótesis de reemplazamiento en el muestreo.

En lo que sigue, se describe exhaustivamente el algoritmo de estimación del valor de Banzhaf. Sea $(N, v) \in G^N$ un juego TU. El valor de Banzhaf de (N, v) (Banzhaf (1964)) se define

$$Bz_i(N, v) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{S \subseteq N, i \in S} (v(S) - v(S \setminus \{i\})),$$

para cada $i \in N$.

Al igual que lo expuesto en el caso del valor de Shapley, su cómputo exacto se complica cuando el número de jugadores se incrementa de forma substancial, ya que el número de coaliciones a evaluar

para la obtención del valor de Banzhaf crece de forma exponencial.

Algoritmo de aproximación del valor de Banzhaf

Sea $(N, v) \in G^N$ un juego TU en el que el valor $v(S)$ pueda ser obtenido en tiempo polinomial para cualquiera coalición $S \subseteq N$. El procedimiento de estimación del valor de Banzhaf para un cierto jugador $i \in N$ en Bachrach et al. (2010) se describe a continuación.

1. La población de muestreo está determinada por todo el conjunto de las coaliciones que no contienen al jugador i , que denotaremos por C_i .
2. El parámetro a estimar es la componente i -ésima del valor de Banzhaf del juego (N, v) , i.e. $Bz_i(N, v)$.
3. Se extrae una muestra M de tamaño m de la población de coaliciones, considerando que todas ellas pueden ser extraídas con probabilidad $\frac{1}{2^{n-1}}$.
4. La característica objeto de estudio es, para cada coalición $S \in M$, la contribución marginal del jugador i , $x(S)_i$. Esto es, fijado $i \in N$ y para una cierta $S \subset N \setminus \{i\}$,

$$x(S)_i = v(S \cup \{i\}) - v(S).$$

5. La estimación del valor de Banzhaf del jugador i , $Bz_i(N, v)$, queda determinada como la media muestral de las contribuciones marginales obtenidas sobre la muestra M . Es decir,

$$\widehat{Bz}_i = \frac{1}{m} \sum_{S \in M} x(S)_i.$$

Una vez repetido el procedimiento para cada jugador $i \in N$, la estimación del valor de Banzhaf del juego (N, v) , $Bz(N, v)$, se define como $\widehat{Bz} = (\widehat{Bz}_1, \dots, \widehat{Bz}_n)$. El pseudocódigo del algoritmo para la estimación del valor de Banzhaf se detalla a continuación (ver Algoritmo 2).

Algoritmo 2 Algoritmo de aproximación de la componente i del valor de Banzhaf de (N, v) .

Require: $m \geq 0$

$Cont = 0$

$\widehat{Bz}_i = 0, \forall i \in N$.

while $Cont < m$ **do**

for $i \in N$ **do**

 Se elige, aleatoriamente, $S \in N \setminus \{i\}$ con probabilidad $1/2^{n-1}$.

 Calculamos $x(S)_i = v(S \cup \{i\}) - v(S)$.

$\widehat{Bz}_i = \widehat{Bz}_i + x(S)_i$.

end for

$Cont = Cont + 1$

end while

$\widehat{Bz}_i = \frac{\widehat{Bz}_i}{m}$

En el caso del valor de Shapley, el procedimiento empleado para su estimación permitía la obtención de dicha aproximación para todos los jugadores simultáneamente, debido a que, por cada unidad de muestreo, es posible obtener un vector de contribuciones marginales. Sin embargo, en el caso del valor de Banzhaf, el número de unidades de muestreo requeridas alcanza la cantidad de m por componente, haciendo un total de $m \cdot n$ coaliciones para la estimación de todas las componentes del valor de Banzhaf.

Dado que el estimador del valor de Banzhaf aquí expuesto se corresponde, para cada jugador $i \in N$, con el estimador muestral para una media poblacional, es natural el análisis desde un punto de vista estadístico. De esta forma, el estimador \widehat{Bz}_i es insesgado, ya que

$$\mathbb{E}(\widehat{Bz}_i) = Bz_i(N, v)$$

y la varianza del estimador viene dada por

$$\text{Var}(\widehat{Bz}_i) = \frac{\text{Var}(x(S)_i)}{m} = \frac{\sigma^2}{m}$$

donde

$$\sigma^2 = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{S \in C^N} (x(S)_i - Bz_i)^2$$

denota la varianza poblacional de las contribuciones marginales con respecto a la media teórica. Cuando el tamaño de muestra aumenta, sesgo y varianza tienden a cero haciendo que el estimador del valor de Banzhaf considerado sea consistente. Más detalles pueden seguirse de Bachrach et al. (2010).

Introducido el procedimiento de estimación, de nuevo, la pregunta natural que surge al intentar estimar el valor de Banzhaf pasa por acotar el error de estimación para cada $i \in N$. Esto es, el objetivo es el establecimiento de una cota como la siguiente.

$$\mathbb{P}(|\widehat{Bz}_i - Bz_i| \geq \varepsilon) \leq \alpha, \text{ con } \varepsilon > 0 \text{ y } \alpha \in (0, 1).$$

Con este propósito, la desigualdad de Hoeffding en la Expresión 2.3 debe aplicarse, a diferencia de lo que ocurría en la estimación del valor de Shapley, sobre las contribuciones marginales reescritas ahora en términos de coaliciones. Esta interpretación ha permitido el establecimiento de resultados similares a la Proposición 2.2 para nuestro contexto.

Proposición 2.3. *Sea $(N, v) \in G^N$ un juego TU. Sea $\varepsilon > 0$, $\alpha \in (0, 1)$ y $(N, v) \in G^N$ y sea r_i el rango de las contribuciones marginales para un cierto $i \in N$ dado por*

$$r_i = \max_{T, T' \subseteq N \setminus \{i\}} (x(T)_i - x(T')_i).$$

Entonces, si

$$m \geq \frac{\ln(2/\alpha)r_i^2}{2\varepsilon^2}, \text{ se cumple que } \mathbb{P}(|\widehat{Bz}_i - Bz_i| \geq \varepsilon) \leq \alpha.$$

Tal y como mencionamos, el uso del valor de Banzhaf no es exclusivo de juegos de votación, sino que puede emplearse en un contexto general. De esta forma, aquellas consideraciones planteadas sobre la acotación de las contribuciones marginales en la sección anterior son también aplicables aquí. Como ejemplo, en el caso de juegos de votación, $r_i = 1$ para cada $i \in N$.

Aunque en esta sección describimos la propuesta basada en muestreo para estimar el valor de Banzhaf de un juego TU, cabe mencionar que su buen funcionamiento ha sido chequeado en Bachrach et al. (2010) a través de un estudio de simulación.

Además, cabe recordar que el valor de Banzhaf (y su estimador) no son eficientes, es decir, las cantidades que asigna el reparto a los jugadores no siempre será igual a $v(N)$. En primer lugar, proponemos como estimación del valor de Banzhaf normalizado, la normalización del vector \widehat{Bz} obtenido. Formalmente, sea \widehat{Bz} el valor de Banzhaf estimado para (N, v) . La estimación del valor de Banzhaf normalizado de un juego $(N, v) \in G^N$ queda determinada por el vector $(\widehat{Bz}_i)_{i \in N}$, donde

$$\widehat{Bz}_i = \frac{\widehat{Bz}_i}{\sum_{j=1}^n \widehat{Bz}_j},$$

para cada $i \in N$. A partir de este estimador, es posible la aproximación de la regla $\Gamma(N, v)$ en la Expresión 1.2, que era eficiente para juegos TU en general. Así, para cada $i \in N$, $\Gamma_i(N, v)$ puede aproximarse como

$$\widehat{\Gamma}_i(N, v) = \frac{\widehat{Bz}_i}{\sum_{j=1}^n \widehat{Bz}_j} v(N). \quad (2.4)$$

2.2. Estimación de soluciones de juegos con uniones a priori

En esta sección se describen alternativas basadas en el muestreo para la estimación del valor de Owen y para la estimación del valor de Banzhaf-Owen para juegos con uniones a priori. Dado que sendas soluciones se consideran extensiones del valor de Shapley y del valor de Banzhaf a este contexto, los procedimientos de muestreo aquí descritos pueden interpretarse también como extensión de las propuestas de Castro et al. (2009) y Bachrach et al. (2010), respectivamente.

2.2.1. Estimación del valor de Owen

En primer lugar abordaremos el problema de estimar el valor de Owen en aquellas situaciones en las que el número de jugadores sea suficientemente grande. El valor de Owen de un juego $(N, v, P) \in G_P^N$ queda determinado por

$$O(N, v) = \frac{1}{|\Pi_P^N|} \sum_{\pi \in \Pi_P^N} x(\pi)$$

donde Π_P^N el conjunto de las ordenaciones del conjunto de jugadores N compatible con la partición P y $x(\pi)$ es el vector de contribuciones marginales asociado a una permutación $\pi \in \Pi_P^N$. Esta definición justifica la propuesta en Saavedra-Nieves et al. (2018) basada en muestreo para la estimación del valor de Owen.

Algoritmo de aproximación del valor de Owen

Sea $(N, v, P) \in G_P^N$ un juego TU con uniones a priori. El siguiente procedimiento nos permite obtener una estimación del valor de Owen.

1. La población de muestreo es el conjunto de todas las permutaciones de N que son compatibles con la partición P , i.e. Π_P^N .
2. El parámetro a estimar es la componente i -ésima del valor de Owen del juego (N, v, P) , i.e. $O_i(N, v, P)$.
3. Se toma una muestra M con m permutaciones de Π_P^N con reemplazamiento. Para este fin, se toma aleatoriamente una permutación de los elementos de cada P_k , con $k = 1, \dots, s$, así como una permutación sobre el conjunto de índices $\{1, \dots, s\}$. La combinación de las $s + 1$ permutaciones resulta en una ordenación de N compatible con P .
4. La característica objeto de estudio es, para cada permutación $\pi \in M$, la contribución marginal del jugador i , $x(\pi)_i$, es decir,

$$x(\pi)_i = v(\text{Pre}^\pi(i) \cup \{i\}) - v(\text{Pre}^\pi(i)).$$

5. Para cada ordenación $\pi \in M$ que muestreemos, calculamos la contribución marginal de todos los jugadores $x(\pi) = (x(\pi)_1, \dots, x(\pi)_n)$.

6. La estimación del valor de Owen del jugador i , $O_i(N, v, P)$, se obtiene como la media muestral, componente a componente, de las contribuciones marginales obtenidas sobre la muestra M . Es decir,

$$\widehat{O}_i = \frac{1}{m} \sum_{\pi \in M} x(\pi)_i,$$

para cada $i \in N$.

Una vez terminado el procedimiento, la estimación del valor de Owen del juego (N, v, P) , $O(N, v, P)$, queda determinada por $\widehat{O} = (\widehat{O}_1, \dots, \widehat{O}_n)$. Por construcción, la estimación del valor de Owen también es eficiente, esto es,

$$\sum_{i=1}^n \widehat{O}_i = v(N)$$

ya que se obtiene como resultado de promediar los vectores de contribuciones marginales resultantes en la muestra M . El pseudocódigo del algoritmo para la estimación del valor de Owen se detalla a continuación (ver Algoritmo 3).

Algoritmo 3 Algoritmo de aproximación del valor de Owen de (N, v, P) .

Require: $m \geq 0$

$Cont = 0$

$\widehat{O}_i = 0, \forall i \in N$

while $Cont < m$ **do**

Se elige, aleatoriamente, $\pi \in \Pi_P^N$ con probabilidad $1/(s!p_1! \dots p_s!)$

for $i \in N$ **do**

Obtenemos $Pre^\pi(i)$

Calculamos $x(\pi)_i = v(Pre^\pi(i) \cup \{i\}) - v(Pre^\pi(i))$

$\widehat{O}_i = \widehat{O}_i + x(\pi)_i$

end for

$Cont = Cont + 1$

end while

$\widehat{O}_i = \frac{\widehat{O}_i}{m}$

De nuevo, la interpretación del valor de Owen como la media de un subconjunto específico de contribuciones marginales permite el análisis del problema de su estimación desde un enfoque estadístico. Fijado $i \in N$, el estimador del valor de Owen \widehat{O}_i es también insesgado ya que

$$\mathbb{E}(\widehat{O}_i) = O_i(N, v, P)$$

y la varianza del estimador viene dada por

$$Var(\widehat{O}_i) = \frac{Var(x(\pi)_i)}{m} = \frac{\sigma^2}{m},$$

donde

$$\sigma^2 = \frac{1}{|\Pi_P^N|} \sum_{\pi \in \Pi_P^N} (x(\pi)_i - O_i)^2$$

es la varianza poblacional de las contribuciones marginales con respecto a la media poblacional (la componente i -ésima del valor de Owen).

Como en el caso de las estimaciones del valor de Shapley y del valor de Banzhaf, la determinación de una cota teórica para el error absoluto en la estimación del valor de Owen resulta de interés. Es decir, fijado $\varepsilon > 0$ y una probabilidad α , $\alpha \in (0, 1)$, se obtiene como cota

$$\mathbb{P}(|\widehat{O}_i - O_i| \geq \varepsilon) \leq \alpha.$$

En situaciones como estas, es interesante que la aproximación por muestreo no diste en exceso del valor de Owen exacto y que esa distancia se reduzca con tamaños de muestra lo suficientemente grandes. En lo que sigue, se enuncian brevemente una colección de resultados estadísticos de utilidad, siguiendo lo expuesto en la Sección 2.1.1 centrado en la estimación del valor de Shapley.

Concretamente, en Saavedra-Nieves et al. (2018) se reescriben los resultados propuestos por Maleki (2015) para el caso de la estimación del valor de Owen. De nuevo, bajo un contexto de muestreo en poblaciones finitas, el uso de la *desigualdad de Tchebyshev* (ver en la Expresión 2.1) conjuntamente con la desigualdad de Popoviciu (ver en la Expresión 2.2), así como la *desigualdad de Hoeffding* (ver en la Expresión 2.3), permiten establecer un resultado probabilístico conjunto para acotar el error en la estimación del valor de Owen.

Proposición 2.4. (Saavedra-Nieves et al. 2018) Sea $(N, v, P) \in G_P^N$ un juego TU con uniones a priori. Fijados $i \in N$, $\varepsilon > 0$ y $\alpha \in (0, 1)$,

$$m \geq \min \left\{ \frac{1}{4\alpha\varepsilon^2}, \frac{\ln(2/\alpha)}{2\varepsilon^2} \right\} r_i^2 \Rightarrow \mathbb{P} \left(\left| \widehat{O}_i - O_i \right| \geq \varepsilon \right) \leq \alpha,$$

siendo $r_i = \max_{\pi, \pi' \in \Pi_P^N} \{x(\pi)_i - x(\pi')_i\}$ el rango de las contribuciones marginales del jugador i asociadas a permutaciones compatibles.

El resto de consideraciones hechas sobre la cota del error para la estimación del valor de Shapley en la Sección 2.1.1, en cuanto a r_i o a la discusión sobre α , también son aplicables ahora bajo la presencia de una estructura de coaliciones a priori. En Saavedra-Nieves et al. (2018) se ha realizado un exhaustivo estudio de simulación, en el que se han comparado las estimaciones del valor de Owen con el correspondiente exacto en ejemplos bien conocidos en la literatura, como el juego del aeropuerto bajo la consideración de una estructura de particiones en Vázquez-Brage et al. (1997).

2.2.2. Estimación del valor de Banzhaf-Owen

En esta subsección, analizamos el procedimiento para la estimación del valor de Banzhaf-Owen considerando muestreo aleatorio simple con reemplazamiento. Cabe recordar que, dado un juego TU con uniones a priori $(N, v, P) \in G_P^N$, el valor de Banzhaf-Owen de (N, v, P) se define, para cada $i \in N$, como

$$BzO_i(N, v, P) = \sum_{Q \subseteq P \setminus \{P^i\}} \frac{1}{2^{s-1}} \sum_{T \subseteq P^i \setminus \{i\}} \frac{1}{2^{p^i-1}} \left(v \left(\bigcup_{P_a \in Q} P_a \cup T \cup \{i\} \right) - v \left(\bigcup_{P_a \in Q} P_a \cup T \cup \{i\} \right) \right).$$

Bajo la presencia de una partición P que establezca una estructura de coaliciones a priori, diremos que una coalición $T \subseteq N \setminus \{i\}$ es compatible con P para un jugador i si podemos escribir T como

$$T = \bigcup_{P_l \in R} P_l \cup S$$

siendo $R \subseteq P \setminus P^i$ una coalición de uniones que no continene a i y $S \subseteq P^i \setminus \{i\}$ una coalición de jugadores en la unión P^i que no contienen a i .

De acuerdo con lo expuesto en la Sección 1.2.2, el valor de Banzhaf-Owen del jugador $i \in N$ en un juego TU con uniones a priori $(N, v, P) \in G_P^N$ se puede obtener como el valor de Banzhaf del juego TU (N_i^*, v_i^*) , para cada $i \in N$, propuesto en Laruelle y Valenciano (2004). Específicamente, $N_i^* = \{k : P_k \in P \setminus \{P^i\}\} \cup \{j : j \in P^i\}$ y v_i^* asigna a cada coalición $T \subseteq N_i^*$

$$v_i^*(T) = v \left(\bigcup_{k \in T \setminus P^i} P_k \cup (T \cap P^i) \right),$$

de tal forma que se cumple que

$$BzO_i(N, v, P) = Bz_i(N_i^*, v_i^*).$$

Esta interpretación es la que justifica la propuesta de muestreo aquí considerada para la estimación del valor de Banzhaf-Owen. Sin embargo, a diferencia de la propuesta en Saavedra-Nieves y Fiestras-Janeiro (2021), la hipótesis de reemplazamiento en el muestro se considera ahora formalmente.

Algoritmo de aproximación del valor de Banzhaf-Owen

Sea $(N, v, P) \in G_P^N$ un juego TU con uniones a priori y sea (N_i^*, v_i^*) el correspondiente juego TU asociado a cada $i \in N$ de acuerdo con la caracterización del valor de Banzhaf-Owen en Laruelle y Valenciano (2004). El procedimiento para la estimación del valor de Banzhaf-Owen de (N, v, P) del jugador i , con $i \in N$, se detalla a continuación.

1. La población de muestreo está determinada por todo el conjunto de las coaliciones en N_i^* que no contienen al jugador i , que denotaremos por C_i .
2. El parámetro a estimar es la componente i -ésima del valor de Banzhaf del juego (N_i^*, v_i^*) , i.e. $Bz_i(N_i^*, v_i^*) = BzO_i(N, v)$.
3. Se extrae una muestra M de tamaño m de la población de coaliciones compatibles con P con reemplazamiento en N_i^* , considerando que todas ellas pueden ser extraídas con probabilidad $\frac{1}{2^{|N_i^*|-1}}$.
4. La característica objeto de estudio es, para cada coalición $T \in M$, la contribución marginal del jugador i , $x(R, S)_i$. Esto es, fijado $i \in N$ y para una cierta $T \subset \{i\}$,

$$x(R, S)_i = v(\cup_{P_l \in R} P_l \cup S \cup \{i\}) - v(\cup_{P_l \in R} P_l \cup S),$$

siendo R y S las coaliciones que cumplen que $T = \cup_{P_l \in R} P_l \cup S$.

5. La estimación del valor de Banzhaf-Owen del jugador i , $BzO_i(N, v, P)$, queda determinada como la media muestral de las contribuciones marginales obtenidas sobre la muestra M . Es decir,

$$\widehat{BzO}_i = \frac{1}{m} \sum_{(R, S) \in M} x(R, S)_i.$$

Cabe destacar que este procedimiento se reduce al propuesto para la estimación del valor de Banzhaf de un juego $(N, v) \in G^N$. Al repetirlo para cada jugador $i \in N$, la estimación del valor de Banzhaf-Owen de juego (N, v, P) , $BzO(N, v, P)$, queda determinada por $\widehat{BzO} = (\widehat{BzO}_1, \dots, \widehat{BzO}_n)$. El pseudocódigo de la estimación del valor de Banzhaf-Owen se detalla en el Algoritmo 4.

Algoritmo 4 Algoritmo de aproximación de la componente i del valor de Banzhaf-Owen de (N, v, P) .

Require: $m \geq 0$

$\widehat{BzO}_i = 0$

$\widehat{BzO}_i = 0, \forall i \in N$.

while $Cont < m$ **do**

for $i \in N$ **do**

 Se elige, aleatoriamente, $T \in N_i^* \setminus \{i\}$ con probabilidad $1/2^{s+p^i-1}$.

 Calculamos $x(R, S)_i = v(\cup_{P_l \in R} P_l \cup S \cup \{i\}) - v(\cup_{P_l \in R} P_l \cup S)$, siendo R y S tal que $T =$

$\cup_{P_l \in R} P_l \cup S$.

$\widehat{BzO}_i = \widehat{BzO}_i + x(R, S)_i$.

end for

$Cont = Cont + 1$

end while

$\widehat{BzO}_i = \frac{\widehat{BzO}_i}{m}$

Además, como el valor de Banzhaf, el valor de Banzhaf-Owen no es eficiente por lo que, de buscar repartos basados en la versión eficiente del valor Banzhaf-Owen, un estimador de la normalización de este valor queda determinado de forma natural por

$$\widehat{BzO}_i = \frac{\widehat{BzO}_i}{\sum_{j=1}^n \widehat{BzO}_j},$$

para cada $i \in N$. Usando el estimador anterior, la regla $\Gamma^P(N, v, P)$ en la Expresión 1.4 puede aproximarse de forma natural, para cada $i \in N$, por

$$\widehat{\Gamma}^P_i(N, v, P) = \frac{\widehat{BzO}_i}{\sum_{j=1}^n \widehat{BzO}_j} v(N). \quad (2.5)$$

Al igual que en las secciones previas, la interpretación del valor de Banzhaf-Owen en términos de una media poblacional permite el análisis del problema de su estimación desde un punto de vista estadístico. Para cada jugador $i \in N$, el estimador del valor de Banzhaf-Owen \widehat{BzO}_i es también insesgado ya que

$$\mathbb{E}(\widehat{BzO}_i) = BzO_i(N, v, P)$$

y la varianza del estimador viene dada por

$$Var(\widehat{BzO}_i) = \frac{Var(x(R, S)_i)}{m} = \frac{\sigma^2}{m},$$

donde

$$\sigma^2 = \frac{1}{2^{s-1}2^{p^i-1}} \sum_{(R, S) \in R \subseteq P \setminus P^i, S \subseteq P^i \setminus \{i\}} (x(R, S)_i - BzO_i)^2$$

es la varianza poblacional de las contribuciones marginales con respecto a la media poblacional (la componente i -ésima del valor de Banzhaf-Owen).

La pregunta natural que surge es, en analogía con lo expuesto en las secciones anteriores, si es posible acotar el error en la estimación del valor de Banzhaf-Owen de $(N, v, P) \in G_P^N$ para cada $i \in N$. Matemáticamente, lo que se pretende es fijar una cota como la siguiente:

$$\mathbb{P}(|\widehat{BzO}_i - BzO_i| \geq \varepsilon) \leq \alpha, \text{ con } \varepsilon > 0 \text{ y } \alpha \in (0, 1).$$

Al igual que en los casos anteriores, las desigualdades de Tchebyshev y Hoeffding proporcionan sendas cotas del error. Aunque los resultados son similares a los expuestos en las secciones previas, en este caso (no abordado como tal en la literatura) formalizamos sus demostraciones.

El primer resultado que enunciamos se basa en la desigualdad de Tchebyshev.

Proposición 2.5. *Sea $(N, v, P) \in G_P^N$ un juego con uniones a priori. Sea $\varepsilon > 0$ y $\alpha \in (0, 1)$. Entonces,*

$$m \geq \frac{\sigma^2}{\alpha \varepsilon^2} \Rightarrow \mathbb{P}(|\widehat{BzO}_i - BzO_i| \geq \varepsilon) \leq \alpha,$$

donde σ^2 denota la varianza de las contribuciones marginales.

Demostración. Claramente, se tiene que

$$\mathbb{P}(|\widehat{BzO}_i - BzO_i| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(|\widehat{BzO}_i - \mathbb{E}(\widehat{BzO}_i)| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}\left(|\widehat{BzO}_i - \mathbb{E}(\widehat{BzO}_i)| \geq \frac{\varepsilon \sqrt{\text{Var}(\widehat{BzO}_i)}}{\sqrt{\text{Var}(\widehat{BzO}_i)}}\right).$$

Aplicando la desigualdad de Tchebyshev en la Expresión 2.1, se cumple que

$$\mathbb{P}\left(|\widehat{BzO}_i - \mathbb{E}(\widehat{BzO}_i)| \geq \frac{\varepsilon \sqrt{\text{Var}(\widehat{BzO}_i)}}{\sqrt{\text{Var}(\widehat{BzO}_i)}}\right) \leq \frac{\text{Var}(\widehat{BzO}_i)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{m\varepsilon^2} \leq \alpha,$$

donde σ^2 es la varianza de las contribuciones marginales. Esto concluye la prueba. \square

Dado que la hipótesis de muestreo se fija sobre la población finita de coaliciones compatibles con una partición P dada, la desigualdad de Hoeffding para la suma de variables aleatorias (Expresión 2.3) puede aplicarse también a la hora de establecer una cota del error en la estimación de la componente i -ésima del valor de Banzhaf-Owen de un juego $(N, v, P) \in G_P^N$.

Proposición 2.6. *Sea $(N, v, P) \in G_P^N$ un juego TU con uniones a priori. Sea $\varepsilon > 0$, $\alpha \in (0, 1)$ y sea r_i el rango de las contribuciones marginales para un cierto $i \in N$ dado por*

$$r_i = \max_{T, T' \subseteq N \setminus \{i\}} (x(T)_i - x(T')_i).$$

Entonces, si

$$m \geq \frac{\ln(2/\alpha)r_i^2}{2\varepsilon^2}, \text{ se cumple que } \mathbb{P}(|\widehat{BzO}_i - BzO_i| \geq \varepsilon) \leq \alpha.$$

Demostración. Sea $\widehat{BzO}_i = \frac{1}{m} \sum_{(R,S) \in M} x(R, S)_i$ el estimador de la componente i -ésima del valor de Banzhaf-Owen de $(N, v, P) \in G_P^N$ para una muestra de m elementos,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\widehat{BzO}_i - BzO_i| \geq \varepsilon) &= \mathbb{P}(|\widehat{BzO}_i - \mathbb{E}(\widehat{BzO}_i)| \geq \varepsilon) \\ &= \mathbb{P}\left(\left|\sum_{(R,S) \in M} x(R, S)_i - \mathbb{E}\left(\sum_{(R,S) \in M} x(R, S)_i\right)\right| \geq \varepsilon m\right) \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Hoeffding (Expresión 2.3), se cumple que

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{(R,S) \in M} x(R, S)_i - \mathbb{E}\left(\sum_{(R,S) \in M} x(R, S)_i\right)\right| \geq \varepsilon m\right) \leq 2 \exp\left(\frac{-2\varepsilon^2 m}{r_i^2}\right) \leq \alpha,$$

como queríamos ver. \square

Como corolario de la Proposición 2.5, conjuntamente con la desigualdad de Popoviciu en la Expresión 2.2, y de la Proposición 2.6, surge el siguiente resultado que establece una cota general para el error de estimación del valor de Banzhaf-Owen.

Corolario 2.6.1. *Sea $\varepsilon > 0$, $\alpha \in (0, 1)$ y $(N, v, P) \in G_P^N$ un juego TU con uniones a priori. Entonces,*

$$m \geq \min \left\{ \frac{1}{4\alpha\varepsilon^2}, \frac{\ln(2/\alpha)}{2\varepsilon^2} \right\} r_i^2 \Rightarrow \mathbb{P}(|\widehat{BzO}_i - BzO_i| \geq \varepsilon) \leq \alpha.$$

Por último, cabe recordar algunas de las consideraciones sobre las cotas del error presentadas en este capítulo. Por ejemplo, la convexidad (o concavidad) del juego asegurarían que

$$r_i = (v(N) - v(N \setminus \{i\}) - v(\{i\}))$$

para todo $i \in N$. Además, para valores de α menores que 0.23,

$$\min \left\{ \frac{1}{4\alpha\varepsilon^2}, \frac{\ln(2/\alpha)}{2\varepsilon^2} \right\} = \frac{\ln(2/\alpha)}{2\varepsilon^2}.$$

A continuación, estudiamos el funcionamiento de esta propuesta basada en muestreo sobre un ejemplo concreto.

Estudio de simulación: el poder de Austria en el FMI

El comportamiento práctico de la estimación del valor de Banzhaf-Owen con muestreo con reemplazamiento ha sido chequeado a partir de un pequeño estudio de simulación. En línea con el realizado en Saavedra-Nieves y Fiestras-Janeiro (2021), usaremos esta propuesta para estimar el valor de Banzhaf-Owen de uno de los jugadores del juego de mayoría ponderada que modela el *Board of Governors* del Fondo Monetario Internacional (FMI, www.imf.org).

Un juego de mayoría ponderada permite la modelización de situaciones de votación con varios agentes que tengan asociados pesos diferentes. En general, se establece un umbral $q > 0$ que impone la *quota* que marca la mayoría en una votación y se denotan por h_1, h_2, \dots, h_n la colección de pesos asociados a los miembros de N . Entonces, un juego de mayoría ponderada es un juego simple $(N, v) \in G^N$ que, a cada coalición $S \subseteq N$, asigna

$$v(S) = 1, \text{ si } \sum_{j \in S} h_j \geq q, \text{ y } 0 \text{ en otro caso.}$$

En esta clase juegos TU, las soluciones aquí consideradas, y en particular el valor de Banzhaf-Owen, pueden ser obtenidas de forma exacta sin necesidad de recurrir a sus formulaciones, como la presentada en la Expresión 1.3, usando técnicas alternativas (ver, por ejemplo, funciones generatrices).

Específicamente, consideramos el juego de mayoría ponderada en Alonso-Meijide y Bowles (2002) para modelar el *Board of Governors* del FMI en enero de 2002. Incluye a 179 países organizados en 24 grupos (o circunscripciones). Los pesos en la votación de cada país pueden visualizarse a través de www.imf.org. El juego de mayoría ponderada con uniones a priori que modela esta situación se denota por $(N, v, P) \in G_P^N$.

Por simplicidad, escogemos a Austria ($i = 6$) con un peso asociado $h_6 = 0.87$ y $BzO_6(N, v, P) = 0.0248$. Empleando el procedimiento descrito en el Algoritmo 4, estimaremos el valor de Banzhaf-Owen. El código R implementado está contenido en el Apéndice B.

El Cuadro 2.1 muestra las medias y varianzas de los errores absolutos de estimación obtenidos a partir de 100 estimaciones diferentes del valor de Banzhaf-Owen para seis tamaños muestrales ($m = 250$, $m = 500$, $m = 1000$, $m = 2000$, $m = 5000$ y $m = 10000$). Los resultados expuestos permiten observar que tanto el error absoluto medio como la varianza se reducen a medida que aumenta el tamaño muestral.

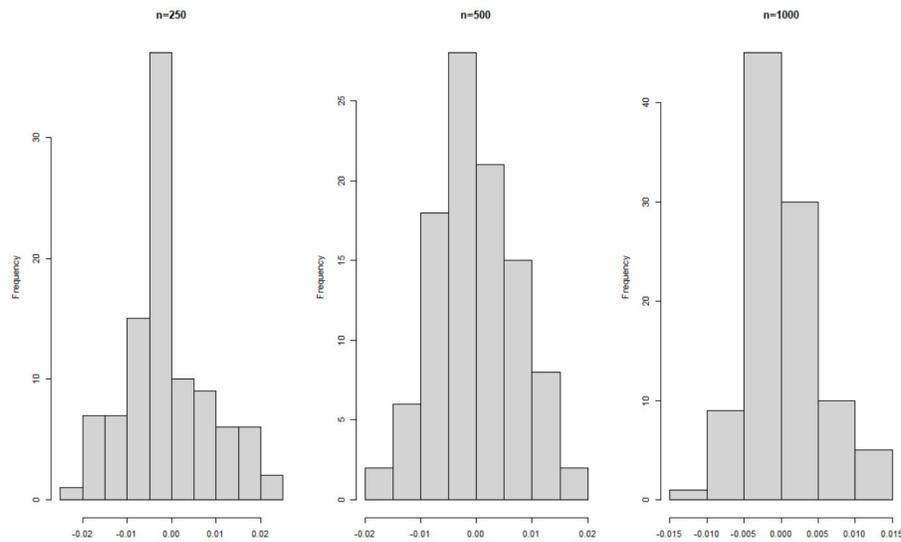


Figura 2.1: Histogramas de los errores cometidos al estimar el valor de Banzhaf-Owen para Austria, con $m = 250$ (izquierda), $m = 500$ (centro) y $m = 1000$ (derecha).

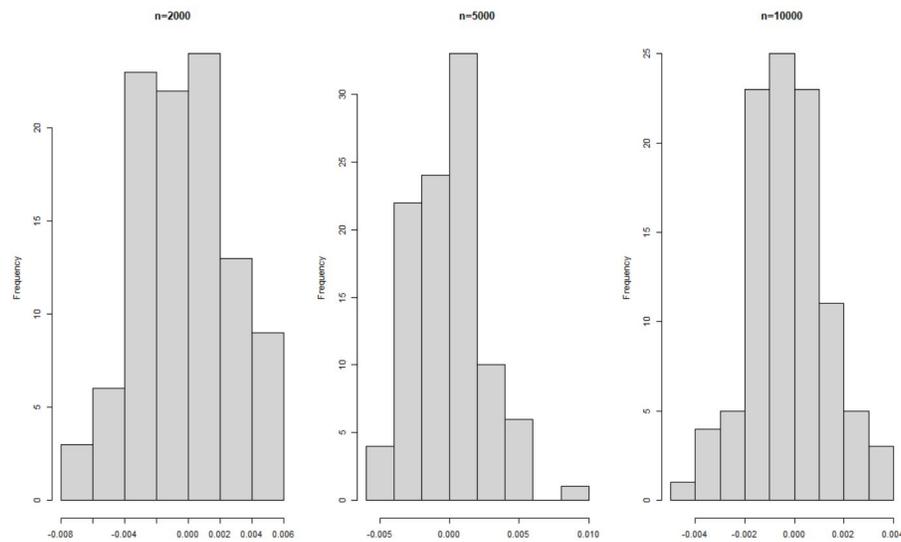


Figura 2.2: Histogramas de los errores cometidos al estimar el valor de Banzhaf-Owen para Austria, con $m = 2000$ (izquierda), $m = 5000$ (centro) y $m = 10000$ (derecha).

Tamaño muestral	$m = 250$	$m = 500$	$m = 1000$	$m = 2000$	$m = 5000$	$m = 10000$
Error abs. medio	$7.959 \cdot 10^{-3}$	$5.786 \cdot 10^{-3}$	$3.852 \cdot 10^{-3}$	$2.431 \cdot 10^{-3}$	$1.966 \cdot 10^{-3}$	$1.216 \cdot 10^{-3}$
Varianza error abs.	$3.273 \cdot 10^{-5}$	$1.850 \cdot 10^{-5}$	$9.092 \cdot 10^{-6}$	$3.075 \cdot 10^{-6}$	$2.573 \cdot 10^{-6}$	$8.654 \cdot 10^{-7}$

Cuadro 2.1: Media y varianza de los errores absolutos en la estimación del valor de Banzhaf-Owen para Austria.

Una vez obtenidas las estimaciones, debemos chequear el buen funcionamiento práctico del método de muestreo empleado. Para ello, el Corolario 2.6.1 proporciona una cota del error máximo en el que se incurriría bajo nuestras hipótesis en el muestreo para cada valor de m . Cabe recordar, que en el contexto de juegos simples como el juego de mayoría ponderadas, el rango de las contribuciones marginales para cada jugador $i \in N$ es $r_i = 1$. Al substituirlo en la correspondiente expresión, se obtienen los resultados que aparecen en el Cuadro 2.2. Puede comprobarse que, para los diferentes tamaños de muestra, el error medio obtenido en las simulaciones es siempre inferior a las cotas teóricas establecidas que, al menos en este contexto, son bastante conservadoras.

	$m = 250$	$m = 500$	$m = 1000$	$m = 2000$	$m = 5000$	$m = 10000$
$\alpha = 0.1$	0.0774	0.0547	0.0387	0.0274	0.0173	0.0122
$\alpha = 0.05$	0.0859	0.0607	0.0429	0.0304	0.0192	0.0136
$\alpha = 0.01$	0.1030	0.0728	0.0515	0.0364	0.0230	0.0163

Cuadro 2.2: Errores absolutos ε obtenidos para los distintos tamaños muestrales m y diferentes α

Para completar el análisis, representamos los histogramas de los errores de estimación asociados a cada tamaño muestral en las Figuras 2.1 y 2.2. A la vista de los resultados expuestos, los errores se distribuyen normalmente en torno al 0, presentando menor variabilidad a medida que aumenta el tamaño de muestra.

Capítulo 3

Sistemas de cuotas para la emisión de dióxido de carbono

A partir de los datos disponibles en European Commission et al. (2020), el objetivo principal de este capítulo es asignar a todos los países del mundo (no solo a los que forman parte de la UE) una cuota de emisión de dióxido de carbono acorde al nivel de emisión registrado en 2019 pero que cumpla con el objetivo marcado para 2030 de reducir un 55 % los 22683.3 Mt emitidos en 1990. Varios sistemas de cuotas diferentes serán establecidos, bajo la perspectiva de la teoría de juegos, a partir de la consideración de los problemas de bancarrota. En la Sección 3.1 revisaremos formalmente el problema de bancarrota. Finalmente, en la Sección 3.2 mostraremos y compararemos los sistemas de cuotas obtenidos a partir de las reglas de reparto consideradas.

3.1. El problema de bancarrota

Un problema de bancarrota modela una situación multi-agente en la que estos reclaman porciones de un bien que no permite satisfacer completamente todas sus demandas. Este problema, que se define a continuación, fue inicialmente introducido por O'Neill (1982).

Definición 3.1 (O'Neill, 1982). *Un problema de bancarrota está determinado por la terna (N, d, E) , con N el conjunto de acreedores, $d \in \mathbb{R}^N$ es el vector con sus demandas y $E \in \mathbb{R}$ la cantidad disponible a repartir.*

Se denota por B^N la clase de problemas de bancarrota, siendo N el conjunto de agentes. Entre otras hipótesis, todo problema de bancarrota ha de cumplir que $E < \sum_{i \in N} d_i$, de tal forma que el estado E no permita cubrir todas las demandas y existir así bancarrota. Este problema ha sido ampliamente estudiado en la literatura desde un punto de vista teórico, centrándose en el análisis de propiedades, pero también práctico. Mayoritariamente, todas las propuestas basadas en bancarrota en la literatura se centran en el reparto de bienes de acuerdo a las demandas de los agentes involucrados. Sin embargo, mencionamos la referencia Gallástegui et al. (2002) como la primera en la que se modelan problemas de cuotas, como el aquí considerado, bajo el enfoque de la bancarrota. En concreto, se analizan las políticas seguidas por la UE para el establecimiento de las cuotas pesqueras de los países miembros.

En este contexto, la definición de procedimientos para repartir el estado E entre los acreedores es clave.

Definición 3.2. *Una regla de reparto de bancarrota es una función f que a cada problema $(N, d, E) \in B^N$ le asigna un valor $f(N, d, E) \in \mathbb{R}^N$, cumpliendo*

- $0 \leq f_i(N, d, E) \leq d_i, \forall i \in N,$

$$\blacksquare \sum_{i \in N} f_i(N, d, E) = E.$$

En este sentido, diferentes reglas de reparto han sido consideradas en la literatura asociada a los problemas de bancarrota. Algunas de ellas, se mencionan a continuación:

- La regla de igual ganancia (*CEA*, *Constraint Equal Award*) se define para cada agente $i \in N$ en el problema de bancarrota $(N, d, E) \in B^N$ como

$$CEA_i(N, d, E) = \min\{\alpha, d_i\} \quad (3.1)$$

con α tal que $E = \sum_{j \in N} \min\{\alpha, d_j\}$. Esta solución pretende repartir E siguiendo el siguiente proceso: reparte de forma igualitaria poco a poco, eliminando del proceso aquellos agentes que tengan sus demandas satisfechas, hasta que se haya repartido E .

- La solución de pérdidas igualitarias, (*CEL*, *Constraint Equal Loss*) se define para cada agente $i \in N$ en el problema de bancarrota $(N, d, E) \in B^N$ como

$$CEL_i(N, d, E) = \max\{0, d_i - \beta\} \quad (3.2)$$

con β tal que $E = \sum_{j \in N} \max\{0, d_j - \beta\}$. Esta solución realiza el mismo proceso que la anterior, pero en lugar de repartir E , estaríamos repartiendo $\sum_{j \in N} d_j - E$. La idea es seguir el mismo procedimiento que antes repartiendo las pérdidas en lugar de la ganancia.

- El Talmud, que recoge un conjunto de discusiones rabínicas relacionadas con la ley, la ética, las costumbres y la historia bajo un criterio judío, incluye varias alternativas de división en la quiebra. Aumann y Maschler (1985) analiza esta regla, que puede interpretarse como una combinación de las dos anteriores. Sea $(N, d, E) \in B^N$ un problema de bancarrota. La regla *Talmud* $T = (T_i)_{i \in N}$ asigna a cada demandante $i \in N$,

$$T_i(N, d, E) = \begin{cases} \min\left\{\frac{d_i}{2}, \lambda\right\}, & \text{si } E \leq \sum_{l \in N} \frac{d_l}{2}, \\ d_i - \min\left\{\frac{d_i}{2}, \lambda\right\}, & \text{si } E \geq \sum_{l \in N} \frac{d_l}{2}, \end{cases} \quad (3.3)$$

donde λ cumple que $\sum_{l \in N} T_l(N, d, E) = E$. Por su definición, si E coincide con la mitad de las demandas $\sum_{j \in N} \frac{d_j}{2}$, entonces cada jugador recibe la mitad de su demanda. Sin embargo, si E es menor se aplica la regla CEA y si es mayor aplicamos se aplica la regla CEL, en ambos casos, considerando la mitad de las demandas.

- Otra opción es la aportada por la *regla proporcional*, denotada por $P = (P_i)_{i \in N}$. Este procedimiento asigna a cada agente i en $(N, d, E) \in B^N$, la porción de E proporcional a su demanda. Formalmente, queda determinado por

$$P_i(N, d, E) = \frac{d_i}{\sum_{l \in N} d_l} E, \text{ para cada } i \in N. \quad (3.4)$$

- Por último, la *regla de llegadas aleatorias (o random arrival rule)* (O'Neill 1982) asigna a $(N, d, E) \in B^N$ el vector de asignación $RA = (RA_i)_{i \in N}$ tal que, para cada $i \in N$,

$$RA_i(N, c, E) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi^N} \min\left\{d_i, \max\left\{0, E - \sum_{j \in Pre^\pi(i)} d_j\right\}\right\}. \quad (3.5)$$

Esta regla se basa en lo siguiente. Asumimos que cada agente reclaman cuando llega, y recibe el mínimo entre su demanda y el resto, dependiendo la división final de la regla de llegada de los demandantes. Se asume también que todos los órdenes de llegada son equiprobables.

Un problema de bancarrota puede ser analizado desde el enfoque de la teoría de juegos. Por ejemplo, O'Neill (1982) asigna a cada problema de bancarrota un juego TU.

Definición 3.3 (O'Neill 1982). *Cualquier problema de bancarrota (N, d, E) tiene asociado un juego (N, v) cuya función característica para un subconjunto $S \subset N$ definimos como*

$$v(S) = \max \left\{ 0, E - \sum_{i \in N \setminus S} d_i \right\}.$$

Como vemos, el juego asociado a un problema de bancarrota asocia a cada coalición lo que sobra de E una vez que el resto de jugadores han satisfecho sus demandas. Este juego ha sido estudiado y, entre otras propiedades, satisface la de convexidad de un juego TU (ver Definición 1.6).

A continuación, ilustramos con un ejemplo la definición del juego de bancarrota.

Ejemplo 3.4. *Supongamos que una empresa se declara en bancarrota con un patrimonio de 10000 euros. Tres acreedores reclaman las cantidades (3000, 6000, 7000). Su juego asociado vendrá dado por $N = \{1, 2, 3\}$ y v la función característica determinada por*

$$\begin{aligned} v(\{1\}) &= v(\{2\}) = 0, v(\{3\}) = 1000, \\ v(\{1, 2\}) &= 3000, v(\{1, 3\}) = 4000, v(\{2, 3\}) = 7000, \\ v(N) &= 10000. \end{aligned}$$

En este contexto, el empleo de soluciones de los juegos TU permite, por tanto, dividir un bien entre todos los agentes con derecho a reclamar sobre él. Algunas de las reglas de bancarrota previamente presentadas tienen interesantes propiedades desde este enfoque, el de la teoría de los juegos cooperativos. Por ejemplo, Aumann y Maschler (1985) prueban que la regla del Talmud coinciden con el nucleolo del juego de bancarrota. Esta solución de juegos TU busca la minimización de la insatisfacción de los jugadores en las coaliciones menos favorables. O'Neill (1982) también prueba que la regla de llegadas aleatorias y el valor de Shapley del juego de bancarrota asociado a un problema $(N, d, E) \in B^N$ también coinciden. De esta forma, los problemas computacionales que justifican el empleo de metodologías de muestreo para la estimación del valor de Shapley también surgen, en general, en el cómputo de la regla de llegadas aleatorias (así como las restantes soluciones propuestas en el Capítulo 1). Por ejemplo, puede plantearse una regla de reparto basado en el valor de Banzhaf de un juego de bancarrota, tal y como se describe en la Expresión 1.2.

En esta clase de problemas, la existencia de un sistema de uniones a priori aporta información sobre la cooperación de los agentes involucrados.

Definición 3.5. *Un problema de bancarrota con sistema de uniones queda determinada por (N, d, E, P) , donde $(N, d, E) \in B^N$ es un problema de bancarrota y $P = \{P_1, \dots, P_s\}$ es una partición de N que proporciona el sistema de uniones asociado.*

Borm et al. (2005) consideran este enfoque para la extensión de reglas de reparto en problemas de bancarrota, como las mencionadas en esta sección, describiendo un procedimiento bi-etápico. Además, estudian la relación de tales reglas con, por ejemplo, el valor de Owen de los correspondientes juegos de bancarrota con uniones a priori. Por tanto, parece lógico el empleo de soluciones para juegos TU con uniones a priori como el valor de Owen, o el valor de Banzhaf-Owen (para la construcción de una regla eficiente como la descrita en la Expresión 1.4).

3.2. Resultados

El establecimiento de sistemas de cuotas para la emisión de dióxido de carbono en 2030 es un problema de bancarrota $(N, d, E) \in B^N$, donde el conjunto de agentes asociado N está formado por

los 210 países del mundo (incluyendo, por separado, el transporte marítimo y el transporte aéreo) registrados en European Commission et al. (2020), la cantidad que queremos repartir E es el 45 % de los 22683.3 Mt de dióxido de carbono emitidos en 1990 y el vector de demandas d consideradas se corresponde con la producción de dicho gas de cada uno de los países en 2019. Nótese que E es claramente inferior que el total de emisiones registradas en el año 2019 (máximo de la serie temporal representada en la Figura 1, izquierda).

Específicamente, se emplearán los enfoques proporcionados por los diferentes procedimientos de reparto en bancarrota mencionados en la sección anterior (la regla proporcional, la regla Talmud, la regla de igual ganancia o la regla de pérdidas igualitarias) para determinar nuevos sistemas de cuotas asociados. Desde el enfoque de la teoría de juegos, las soluciones del juego de bancarrota asociado (N, v) (los valores de Shapley, de Banzhaf, de Owen y de Banzhaf-Owen) serán también considerados para proponer cuotas de emisión de dióxido de carbono adicionales. Al suponer la existencia de una estructura de particiones, usaremos los enfoques basados en el valor de Owen $O(N, v, P)$ y en los repartos obtenidos con el valor de Banzhaf-Owen $BzO(N, v, P)$ del juego de bancarrota con uniones a priori (N, v, P) . En concreto, bajo los enfoques de Banzhaf, usaremos las reglas de asignación eficientes basadas en las respectivas normalizaciones de los valores de Banzhaf, denotada por $\Gamma(N, v)$ (Expresión 1.2), y de Banzhaf-Owen, denotada por $\Gamma^P(N, v, P)$ (en la Expresión 1.4). Dado que en nuestro problema el número países es lo suficientemente grande, se requerirá el empleo de las técnicas de estimación mencionadas en el Capítulo 2 para su aproximación.

Antes de obtener las cuotas de emisión de dióxido de carbono para 2030, hemos realizado algunas pruebas preliminares para chequear si las cuotas propuestas empleando los algoritmos de estimación son o no realistas. Concretamente, tomando como cantidad a repartir E , el total de gas emitido en 2015 (36247.49 Mt) y como vector de demandas d , las emisiones de gas de cada país en 2019, hemos estimado un sistema de cuotas para 2015. Dichas estimaciones han sido comparadas con las emisiones reales de cada país en 2015. De nuevo, el valor máximo de emisión registrado en 2019 permite garantizar que se trata de un problema de bancarrota. Como tamaño muestral hemos utilizado $m = 10^6$. Gracias a la propiedad de convexidad de un juego de bancarrota, sabemos que el rango de las contribuciones marginales r_i , para cada $i \in N$, puede escribirse como

$$r_i = d_i.$$

En el Cuadro 3.1 se detallan los valores máximos del error absoluto ε en la estimación de soluciones de los juegos TU que la desigualdad de Hoeffding asegura para distintos α .

α	ε
0.01	18.775
0.05	15.666
0.1	14.118

Cuadro 3.1: Cotas del error absoluto en la estimación de las cuotas.

La Figura 3.1 (izquierda) muestra el logaritmo de los sistemas de cuotas estimados para 2015 (eje OY) proporcionados por las aproximaciones del valor de Shapley (rojo) y de $\Gamma(N, v)$ (verde) para cada uno de los 210 países considerados (eje OX). Para facilitar la visualización, los 210 países han sido etiquetados con valores desde 1 hasta 210 por orden creciente de emisiones reales en el año 2015. De acuerdo con los resultados obtenidos, las cuotas estimadas se ajustan con precisión relativamente alta a las emisiones reales registradas en 2015 (negro).

Para realizar una comparativa análoga usando el valor de Owen y $\Gamma^P(N, v, P)$, antes debemos definir cual será la estructura particional a considerar en el juego de bancarrota con uniones a priori (N, v, P) asociado. Para ello, debemos establecer una estructura de grupos de países que describa aquellas

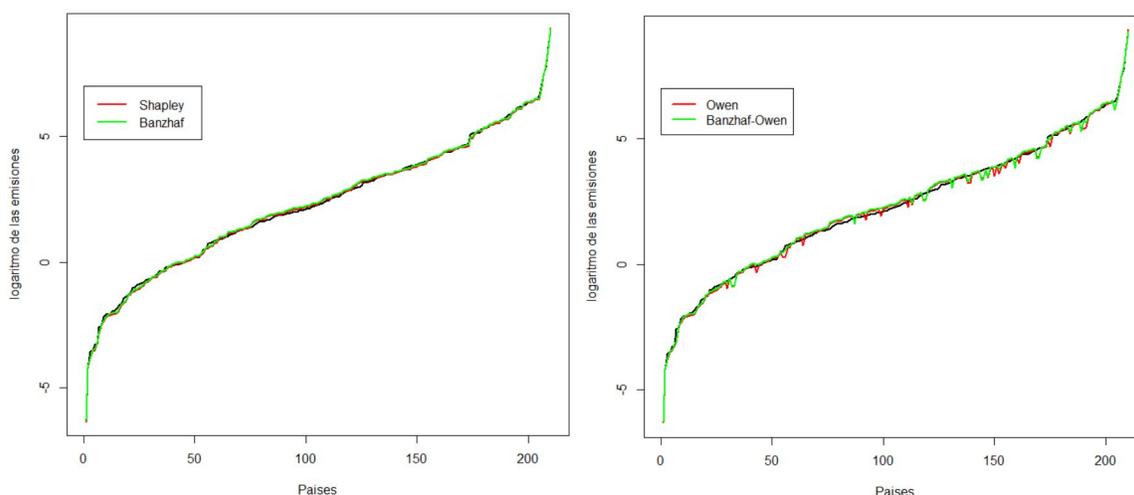


Figura 3.1: En la parte izquierda, logaritmo de los sistemas de cuotas estimados para 2015 utilizando el valor de Shapley (rojo) y $\Gamma(N, v)$ (verde) comparados con las emisiones reales registradas en 2015 (negro). En la parte derecha, logaritmo de los sistemas de cuotas estimados para 2015 utilizando el valor de Owen (rojo) y $\Gamma^P(N, v, P)$ (verde) comparados con las emisiones reales registradas en 2015 (negro) agrupando los países según su pertenencia o no a la UE.

posibles restricciones en su cooperación. La primera partición que consideramos fue separar los países que pertenecen a la UE y los que no, teniendo en cuenta que tanto el transporte marítimo como el aéreo fueron considerados como países no miembros de la UE. Los resultados obtenidos se representan en la Figura 3.1 (derecha). Aunque las cuotas estimadas por país toman valores en la misma escala que las emisiones reales registradas en 2015, se observan fluctuaciones puntuales considerables tanto para el valor de Owen estimado (rojo) como los repartos proporcionados por la aproximación de $\Gamma^P(N, v, P)$ (verde).

Otra posible partición pasa por agrupar a los 210 países de acuerdo con su pertenencia o no al denominado *Grupo de los Veinte*, también conocido como G20. El G20 es un foro internacional de gobernantes y presidentes de bancos centrales fundado en 1999. Su principal objetivo es discutir políticas relacionadas con la promoción de la estabilidad financiera internacional, siendo el principal espacio de deliberación política y económica del mundo. Está formado por diecinueve países industrializados y emergentes de todos los continentes (Alemania, Arabia Saudita, Argentina, Australia, Brasil, Canadá, China, Corea del Sur, Estados Unidos, Francia, India, Indonesia, Italia, Japón, México, Reino Unido, Rusia, Sudáfrica, Turquía) y la UE. Países con un gran PIB como Tailandia, Taiwán, Irán, Polonia, Egipto, Países Bajos, Pakistán, Nigeria o Malasia no pertenecen al G20 por razones ajenas a las económicas o porque se emplea un sistema de medición del PIB a precios nominales en lugar de a Paridad de Poder Adquisitivo. En conjunto, las entidades políticas representadas en el G20 reúnen el 66% de la población mundial y el 85% del producto bruto mundial. La Figura 3.2 (izquierda) muestra los sistemas de cuotas obtenidos, de nuevo, en escala logarítmica. En este caso, el valor de Owen (rojo) proporciona estimaciones para las emisiones que, además de ser bastante similares a los valores reales para 2015, presentan menos fluctuaciones que los repartos obtenidos a través de la estimación de $\Gamma^P(N, v, P)$ (verde).

Finalmente, hemos considerado la partición que clasifica a los países según su continente de pertenencia. Específicamente, hemos agrupado los 210 países disponibles en la base de datos en siete grupos: África, América del Norte, América del Sur, Asia, Europa, Oceanía y transporte marítimo/aéreo. Los resultados son comparados en la Figura 3.2 (derecha). De nuevo, los sistemas de cuotas obtenidos a partir de los valores de Owen (rojo) y $\Gamma^P(N, v, P)$ (verde) son relativamente similares a los datos reales registrados en 2015 y, además, presentan niveles de fluctuación moderados y parecidos.

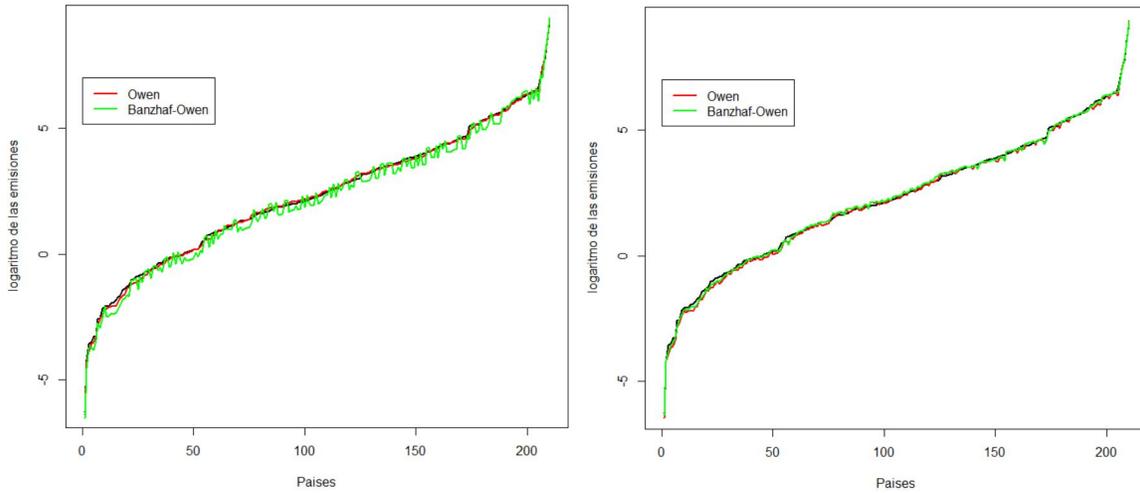


Figura 3.2: En la parte izquierda, logaritmo de los sistemas de cuotas estimados para 2015 utilizando el valor de Owen (rojo) y $\Gamma^P(N, v, P)$ (verde) comparados con las emisiones reales registradas en 2015 (negro) agrupando los países según su pertenencia o no al G20. En la parte derecha, logaritmo de los sistemas de cuotas estimados para 2015 utilizando el valor de Owen (rojo) y $\Gamma^P(N, v, P)$ (verde) comparados con las emisiones reales registradas en 2015 (negro) agrupando los países según el continente de pertenencia.

			UE		G20		Continente	
2015	\widehat{Sh}	$\widehat{\Gamma}$	\widehat{O}	$\widehat{\Gamma}^P$	\widehat{O}	$\widehat{\Gamma}^P$	\widehat{O}	$\widehat{\Gamma}^P$
China	China	China	China	China	China	China	China	China
Estados Unidos	Estados Unidos	Estados Unidos	Estados Unidos	Estados Unidos	Estados Unidos	Estados Unidos	Estados Unidos	Estados Unidos
India	India	India	India	India	India	India	India	India
Rusia	Rusia	Rusia	Rusia	Rusia	Rusia	Rusia	Rusia	Japón
Japón	Japón	Japón	Japón	Japón	Japón	Japón	Japón	Rusia
Alemania	Trans. mar.**	Trans. mar.	Trans. mar.	Trans. mar.	Irán	Irán	Trans. mar.	Alemania
Trans. mar.	Alemania	Alemania	Irán	Irán	Alemania	Alemania	Alemania	Corea del Sur
Corea del Sur	Irán	Irán	Corea del Sur	Corea del Sur	Corea del Sur	Trans. mar.	Irán	Indonesia
Irán	Corea del Sur	Corea del Sur	Trans. aéreo***	Trans. aéreo	Indonesia	Corea del Sur	Corea del Sur	Arabia Saudí
Arabia Saudí	Trans. aéreo	Trans. aéreo	Indonesia	Indonesia	Trans. mar.	Indonesia	Indonesia	Canadá

** Transporte marítimo. *** Transporte aéreo.

Cuadro 3.2: Top-10 de países con mayores valores de emisión y cuotas estimadas en 2015.

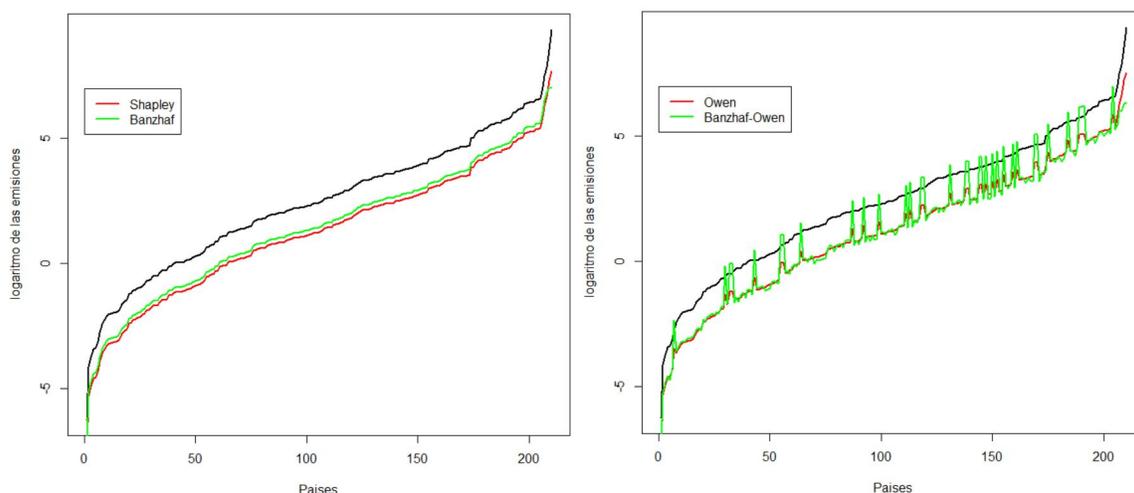


Figura 3.3: En la parte izquierda, logaritmo de los sistemas de cuotas estimados para 2030 utilizando el valor de Shapley (rojo) y $\Gamma(N, v)$ (verde) comparados con las emisiones reales registradas en 2019 (negro). En la parte derecha, logaritmo de los sistemas de cuotas estimados para 2030 utilizando el valor de Owen (rojo) y $\Gamma^P(N, v, P)$ (verde) comparados con las emisiones reales registradas en 2019 (negro) agrupando los países según su pertenencia o no a la UE.

El Cuadro A.1 en el Apéndice A.1 contiene los ocho sistemas de cuotas estimados por país representados en las Figuras 3.1 y 3.2. El Cuadro 3.2 permite realizar un análisis de estos resultados. Para cada método de estimación considerado, muestra (en orden decreciente) los 10 países con mayores cuotas estimadas con el objetivo de compararlas con el top-10 de países emisores de dióxido de carbono en 2015 (primera columna). Los resultados obtenidos muestran que los sistemas de cuotas asociados al valor de Shapley y a $\Gamma(N, v)$ mantienen el orden de las demandas pero, con respecto a los datos reales registrados en 2015, incorporan el transporte aéreo en el top-10 y eliminan a Arabia Saudí. Al introducir las estructuras de uniones a priori, las posiciones se modifican. En el caso de la partición de la UE, vemos que Alemania desaparece del top-10 tanto para el valor de Owen como para $\Gamma^P(N, v, P)$. Dado que los países que más dióxido de carbono producen no están en la UE, las cuotas estimadas son inferiores para este conjunto de países. Además, el transporte aéreo e Indonesia se incorporan a estos top-10 con respecto a 2015. Conclusiones similares se repiten al considerar la partición del G20. Como el transporte marítimo y aéreo no pertenecen a dicho grupo, sus cuotas se ven reducidas respecto al caso sin particiones. Si se consideran los resultados para la partición por continentes, es interesante observar que Canadá (que está en el puesto 13 de las demandas consideradas) aparece en la décima posición por primera vez. Este ascenso se debe a que se encuentra dentro del grupo de América del Norte junto con Estados Unidos y, como es un grupo poco numeroso, sus cuotas se incrementan.

Una vez chequeado que las cuotas estimadas de dióxido de carbono para 2015 son relativamente realistas, estimaremos las cuotas de emisión para 2030. La Figura 3.3 (izquierda) muestra el logaritmo de los sistemas de cuotas estimados para 2030 (eje OY) utilizando el valor de Shapley (rojo) y $\Gamma(N, v)$ (verde) para cada uno de los 210 países considerados (eje OX). Como antes, para facilitar la visualización, los 210 países han sido etiquetados con valores desde 1 hasta 210 por orden creciente de emisiones reales en el año 2019. Las cuotas obtenidas son comparadas con las emisiones reales más recientes registradas en 2019 (negro). Las emisiones asignadas a cada país son claramente inferiores a los niveles de emisión registrados en 2019. Además, las cuotas establecidas por país cuando se usa el valor de Shapley estimado son, en general, ligeramente inferiores a las proporcionadas por la aproximación de $\Gamma(N, v)$. Ambas, presentan un patrón prácticamente paralelo.

La Figura 3.3 (derecha) contiene los resultados obtenidos para 2030 con las estimaciones del valor de Owen (rojo) y de $\Gamma^P(N, v, P)$ (verde), al considerar como partición los países que pertenecen a

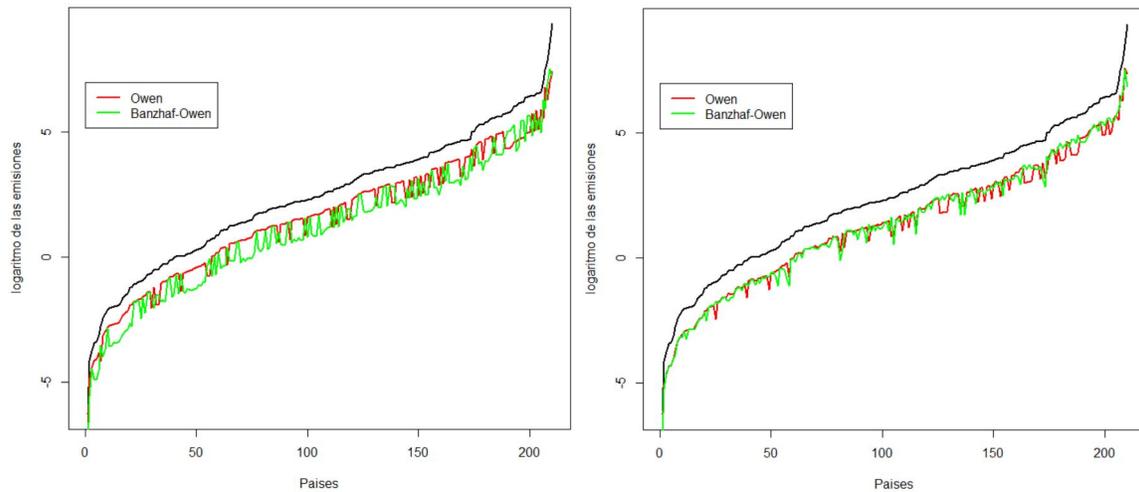


Figura 3.4: En la parte izquierda, logaritmo de los sistemas de cuotas estimados para 2030 utilizando el valor de Owen (rojo) y $\Gamma^P(N, v, P)$ (verde) comparados con las emisiones reales registradas en 2019 (negro) agrupando los países según su pertenencia o no al G20. En la parte derecha, logaritmo de los sistemas de cuotas estimados para 2030 utilizando el valor de Owen (rojo) y $\Gamma^P(N, v, P)$ (verde) comparados con las emisiones reales registradas en 2019 (negro) agrupando los países según el continente de pertenencia.

la UE y los que no. El enfoque de Owen proporciona cuotas claramente inferiores a los niveles de emisión registrados en 2019. Sin embargo, la estimación de $\Gamma^P(N, v, P)$ presenta mayores fluctuaciones provocando que para todos los países de la UE, las cuotas de emisión estimadas superen los valores reales registrados en 2019, probablemente debido a la normalización que hacemos del valor de Banzhaf-Owen para que sea eficiente. La Figura 3.4 contiene los mismos resultados pero para las particiones seleccionadas según la pertenencia o no al G20 (izquierda) y por continente (derecha). En ambos casos, el valor de Owen (rojo) y $\Gamma^P(N, v, P)$ (verde) proporcionan sistemas de cuotas por país claramente inferiores a los valores reales correspondientes a 2019. El nivel de fluctuación de las curvas verde y roja elaboradas a partir de las estimaciones obtenidas por país es relativamente elevado indicando cambios en las emisiones de varios países con respecto a los registros de 2019.

Además, hemos comparado las cuotas estimadas para 2030 con los repartos (obtenidos de manera exacta) proporcionados por las reglas CEA, CEL, Talmud y proporcional (ver Cuadro A.3 en el Apéndice A.3). En la Figura 3.5 (izquierda), se han representado los resultados proporcionados por las reglas CEA (rojo) y CEL (verde). Los resultados obtenidos al emplear la regla CEA muestran como las demandas son satisfechas en general repartiendo de manera igualitaria las emisiones entre los países con mayores demandas. La regla CEL asigna cuota de emisión cero a todos los países salvo a China y Estados Unidos. Los resultados de las reglas Talmud (rojo) han sido representados en la Figura 3.5 (derecha). En este caso, debido a que $E < \sum_{j \in N} \frac{d_j}{2}$, estamos aplicando la regla CEA a la mitad de las demandas. Por último, el reparto proporcional establecido en 3.4 ha sido también representado en la Figura 3.5 (derecha, color verde). Para la mayoría de los 210 países considerados, asigna cuotas de emisión de dióxido de carbono inferiores a las establecidas por la regla Talmud.

El Cuadro A.2 en el Apéndice A.2 contiene las estimaciones obtenidas para cada país representadas en las Figuras 3.3 y 3.4. En este caso, no es posible comparar los sistemas de cuotas calculados para 2030 con los registros reales. Sin embargo, es posible comparar los valores entre sí y ver cuales son los países que obtienen mayores cuotas en cada caso. El Cuadro 3.3 contiene (en orden decreciente), para cada uno de los métodos considerados, los 10 países con mayores cuotas asignadas. Nótese que, en este caso, hemos considerado también el ranking de las reglas Talmud y proporcional. Se han descartado

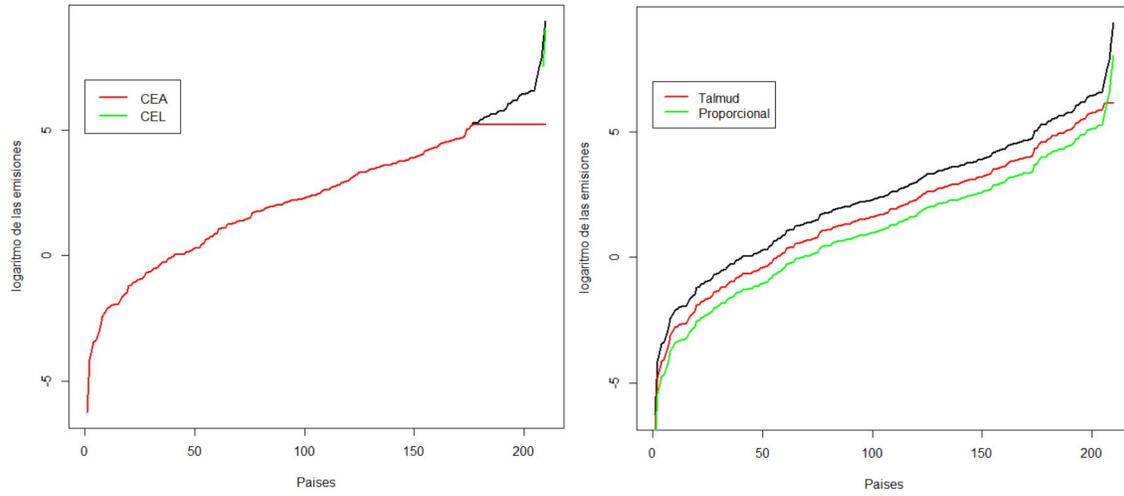


Figura 3.5: En la parte izquierda, logaritmo de los sistemas de cuotas para 2030 obtenidos de manera exacta utilizando la regla CEA (rojo) y la regla CEL (verde) comparados con las emisiones reales registradas en 2019 (negro). En la parte derecha, logaritmo de los sistemas de cuotas para 2030 obtenidos de manera exacta utilizando la regla de Talmud (rojo) y regla proporcional (verde) comparados con las emisiones reales registradas en 2019 (negro).

		UE		G20		Continente		Exactas	
\widehat{Sh}	$\widehat{\Gamma}$	\widehat{O}	$\widehat{\Gamma^P}$	\widehat{O}	$\widehat{\Gamma^P}$	\widehat{O}	$\widehat{\Gamma^P}$	T	P
China	China	China	Alemania	Estados Unidos	Estados Unidos	China	Estados Unidos	China	China
Estados Unidos	Estados Unidos	Estados Unidos	China	China	China	Estados Unidos	China	India	Estados Unidos
India	India	India	Estados Unidos	Rusia	India	Rusia	India	Japón	India
Rusia	Rusia	Rusia	Italia*	India	Rusia	India	Japón	Rusia	Rusia
Japón	Japón	Alemania	Polonia	Trans. mar.**	Japón	Trans. mar.	Rusia	Estados Unidos	Japón
Trans. mar.	Trans. mar.	Japón	Francia y Mónaco	Alemania	Trans. mar.	Irán	Corea del Sur	Trans. mar.	Trans. mar.
Alemania	Alemania	Trans. mar.	Rusia	Trans. aéreo***	Corea del Sur	Trans. aéreo	Indonesia	Alemania	Alemania
Irán	Irán	Irán	India	Japón	Trans. aéreo	Japón	Arabia Saudí	Irán	Irán
Corea del Sur	Corea del Sur	Corea del Sur	España y Andorra	Canadá	Alemania	Alemania	Alemania	Corea del Sur	Corea del Sur
Trans. aéreo	Indonesia	Indonesia	Países Bajos	Sudáfrica	Canadá	Corea del Sur	Sudáfrica	Trans. aéreo	Trans. aéreo

* Italia, San Marino y Ciudad del Vaticano. ** Transporte marítimo. *** Transporte aéreo.

Cuadro 3.3: Top-10 de países con mayores cuotas estimadas para 2030.

los resultados de las reglas CEA y CEL porque la primera asigna la misma cuota a los países con las mayores demandas y la segunda asigna únicamente dos valores distintos de 0. Además, como el orden de emisiones en 2019 se corresponde con el establecido por la regla proporcional, la última columna del Cuadro 3.3 puede usarse con fines comparativos.

Los resultados obtenidos permiten observar que los sistemas de cuotas establecidos a partir de la estimación del valor de Shapley y de $\Gamma(N, v)$ mantienen el mismo orden que las demandas correspondientes a 2019. De hecho, sólo se modifica la décima posición en las cuotas obtenidas a partir de $\Gamma(N, v)$ donde Indonesia reemplaza al transporte aéreo. Al considerar la partición de la UE, $\Gamma^P(N, v, P)$ aumenta las cuotas de los países pertenecientes a la UE (al contrario de lo que ocurría en 2015), haciendo que muchos de estos países formen parte del top-10 de emisores de dióxido de carbono. Nótese que Alemania es, en este caso, el país del mundo con la cuota más alta, por encima de China y Estados Unidos. La partición del G20 hace que Canadá y Sudáfrica (pertenecientes al G20) sean favorecidos incorporándolos a la lista de mayores emisores contenida en el Cuadro 3.3. Por último, la partición por continente de pertenencia vuelve a ser algo más caótica que el resto, lo que hace más difícil su interpretación. En el caso del valor de Owen, podemos ver que aparecen en la lista países como China, India, Irán, Japón y Corea del Sur, lo que nos puede indicar que esta partición favorece a los países del continente asiático. Por definición, la regla Talmud mantendrá el orden de las demandas excepto para los países con mayores demandas a los que adjudicará la misma cantidad a todos. Por eso, sus resultados coinciden en los últimos puestos con los registrados en 2019, mientras que China, India, Japón, Rusia y Estados Unidos (en orden alfabético) tienen la misma cuota asignada.

Los resultados obtenidos permiten concluir que los sistemas de cuotas de emisión de dióxido de carbono para 2030 pueden ser diferentes según el valor o regla considerados. Sin embargo, todos ellos alcanzarían el objetivo de reducir un 45 % las emisiones de dióxido de carbono registradas en 1990.

Capítulo 4

Conclusiones

La teoría de los juegos TU tiene como uno de sus objetivos fundamentales la definición de reglas de asignación (o soluciones) que permitan repartir los beneficios/costes resultantes de la cooperación. Si el número de jugadores es relativamente grande, la obtención exacta de algunas de esas soluciones para juegos TU presenta una alta complejidad computacional siendo necesaria su aproximación. En este trabajo, hemos revisado distintos enfoques introducidos en la literatura, centrándonos principalmente en la estimación de dos soluciones de juegos TU de tipo puntual bien conocidas, como son el valor de Shapley y el valor de Banzhaf, y en sus generalizaciones para situaciones donde exista una estructura coalicional restringiendo la cooperación de los jugadores, el valor de Owen y el valor de Banzhaf-Owen. Dado que todos ellos pueden interpretarse en términos de una media, el problema de su estimación se reduce a un problema estadístico bien conocido, como es el de aproximar la media de una población finita. En tales contextos, las desigualdades de Tchebyshev y Hoeffding permiten el establecimiento de cotas del error, entre otros, en la estimación del valor de Banzhaf-Owen de un juego con uniones a priori si se asume muestreo con reemplazamiento sobre la población de coaliciones compatibles con la partición. Desde un punto de vista práctico, el comportamiento de la estimación de Banzhaf-Owen empleando muestreo con reemplazamiento ha sido chequeado a través de un breve estudio de simulación.

Además, hemos aplicado (e implementado en código R) para asignar a cada país del mundo (incluyendo el transporte marítimo y aéreo) una cuota de emisión de dióxido de carbono para 2030 que suponga una reducción del 55 % de las emisiones globales registradas en 1990. Para ello, hemos justificado que este problema de cuotas puede considerarse como un problema de bancarrota y hemos utilizado diferentes propuestas de estimación de soluciones para el juego TU de bancarrota asociado. Las cuotas de emisión obtenidas han sido comparadas con los resultados proporcionados por mecanismos de reparto clásicos en problemas de bancarrota (que se pueden determinar de forma exacta) como las reglas *CEA*, *CEL*, Talmud o proporcional. Los resultados obtenidos justifican, bajo criterios variados, sistemas de cuotas de emisión muy distintos entre sí. Eso sí, todos ellos cumplen el objetivo de reducir un 45 % las emisiones de dióxido de carbono registradas en 1990.

Finalmente, discutimos posibles extensiones de este trabajo. Recientemente, alrededor de 103 países entre los que están Estados Unidos, Brasil, Indonesia, Canadá, Arabia Saudí o el Reino Unido acordaron en la cumbre del clima de Glasgow reducir las emisiones de metano a finales de esta década un 30 % respecto a los niveles de 2020. De nuevo, puede interpretarse como un problema de bancarrota. Siguiendo la aproximación presentada en este trabajo, podrían proponerse sistemas de cuotas distintos para reducir las emisiones de metano o incluso de otros GEI. Además, sería natural generalizar la implementación en R de las funciones diseñadas para poder estimar soluciones de cualquier juego TU, sin limitarse simplemente a situaciones de bancarrota. Las funciones desarrolladas podrían ser utilizadas para crear un paquete de R que permitiese determinar de forma exacta las distintas reglas de asignación y/o estimarlas cuando el número de jugadores es alto.

Apéndice A

Sistemas de cuotas para la emisión de dióxido de carbono. Resultados numéricos

En este apéndice se presentan los resultados numéricos obtenidos en la estimación de cuotas para la emisión de dióxido de carbono en los dos escenarios considerados: el año 2015, en la Sección A.1 y el año 2030, en la Sección A.2. Para este último, la Sección A.3 también detalla los sistemas de cuotas proporcionados por las reglas de bancarrota vistas en la Sección 3.1 que pueden ser calculadas de forma exacta.

A.1. Sistemas de cuotas estimadas para 2015

En esta sección, presentamos los sistemas de cuotas estimados de emisiones de dióxido de carbono (en megatonnes, Mt) para 2015, basados en la estimación del valor de Shapley \widehat{Sh} y en $\widehat{\Gamma}$, el reparto eficiente de E usando la normalización de la estimación del valor de Banzhaf para el juego de bancarrota (N, v) en la Expresión 2.4. Al suponer la existencia de una estructura de particiones, estimaremos el valor de Owen \widehat{O} y los repartos eficientes basados en la normalización de la estimación del valor de Banzhaf-Owen \widehat{BzO} en el juego de bancarrota con uniones a priori (N, v, P) , dados por $\widehat{\Gamma^P}$ (ver Expresión 2.5).

En concreto, se consideran tres posibles estructuras particionales sobre el conjunto de los 210 países disponibles en la base de datos. La primera y segunda clasifican a los 210 países en dos grupos según su pertenencia o no a la UE y al G20, respectivamente. La tercera partición considerada a los países según su continente de origen. Específicamente, hemos agrupado los 210 países disponibles en la base de datos en siete grupos: África, América del Norte, América del Sur, Asia, Europa, Oceanía y transporte marítimo/aéreo. El Cuadro A.1 contiene los resultados obtenidos.

Cuadro A.1: Estimaciones de las cuotas de emisión para 2030.

País (en inglés)	UE				G20		Continente	
	\widehat{Sh}	$\widehat{\Gamma}$	\widehat{O}	$\widehat{\Gamma^P}$	\widehat{O}	$\widehat{\Gamma^P}$	\widehat{O}	$\widehat{\Gamma^P}$
Afghanistan	10.031	10.487	10.446	10.904	10.582	10.64	9.832	11.482
Albania	5.162	5.396	5.375	5.611	5.308	5.46	5.059	5.908
Algeria	165.23	172.167	171.688	179.015	147.656	167.66	161.898	188.424

Angola	23.565	24.618	24.517	25.597	21.114	24.058	23.089	26.952
Anguilla	0.021	0.022	0.022	0.023	0.019	0.022	0.021	0.024
Antigua and Barbuda	0.465	0.486	0.485	0.506	0.456	0.48	0.456	0.532
Argentina	182.456	190.134	189.72	197.697	162.725	185.161	185.513	208.236
Armenia	5.403	5.646	5.624	5.871	5.7	5.729	5.294	6.179
Aruba	0.715	0.747	0.744	0.777	0.735	0.756	0.701	0.818
Australia	398.199	413.212	413.034	429.647	345.867	396.473	404.2	452.595
Austria	66.115	68.996	50.979	46.458	67.913	69.599	67.299	75.576
Azerbaijan	32.843	34.309	34.202	35.674	34.632	34.81	32.189	37.448
Bahamas	2.235	2.335	2.325	2.428	2.188	2.302	2.189	2.55
Bahrain	32.352	33.789	33.661	35.133	34.103	34.283	31.696	36.878
Bangladesh	100.727	105.037	104.731	109.215	106.072	106.57	98.603	114.591
Barbados	3.493	3.649	3.635	3.794	3.418	3.596	3.421	3.985
Belarus	60.562	63.248	63.038	65.764	62.222	63.833	59.348	69.018
Belgium	95.392	99.556	73.482	67.684	98.024	100.451	97.085	109.05
Belize	0.338	0.354	0.352	0.368	0.331	0.348	0.332	0.386
Benin	7.44	7.773	7.745	8.082	6.666	7.599	7.289	8.479
Bermuda	0.319	0.334	0.332	0.347	0.286	0.326	0.313	0.364
Bhutan	1.938	2.025	2.018	2.106	2.043	2.055	1.899	2.209
Bolivia	22.386	23.371	23.283	24.301	20.003	22.868	21.912	25.494
Bosnia and Herzegovina	30.581	31.937	31.829	33.207	31.431	32.233	29.965	34.831
Botswana	6.423	6.712	6.687	6.979	5.755	6.563	6.293	7.321
Brazil	439.705	455.897	455.956	474.03	393.303	447.302	446.085	499.383
British Virgin Islands	0.111	0.116	0.115	0.12	0.114	0.117	0.109	0.126
Brunei	6.407	6.694	6.668	6.96	5.742	6.472	6.278	7.253
Bulgaria	39.54	41.298	30.536	28.769	40.631	41.689	40.269	45.239
Burkina Faso	3.325	3.474	3.461	3.612	2.979	3.355	3.257	3.762
Burundi	0.308	0.322	0.321	0.335	0.276	0.311	0.302	0.349
Cabo Verde	0.933	0.976	0.972	1.014	0.837	0.943	0.914	1.057
Cambodia	15.05	15.721	15.662	16.346	15.864	15.95	14.738	17.023
Cameroon	9.218	9.632	9.596	10.015	8.263	9.303	9.03	10.43
Canada	538.555	557.63	557.865	579.81	525.653	549.557	546.193	610.836
Cayman Islands	0.368	0.384	0.383	0.399	0.329	0.366	0.36	0.409
Central African Rep.	0.451	0.471	0.469	0.49	0.404	0.448	0.442	0.502
Chad	0.815	0.852	0.849	0.886	0.731	0.811	0.799	0.908
Chile	82.112	85.706	85.431	89.115	73.363	84.267	80.474	91.166
China	11438.047	10998.414	11478.311	10665.912	11495.611	11160.439	11449.273	12047.841
Colombia	79.031	82.522	82.246	85.804	70.635	66.35	77.457	66.62
Comoros	0.195	0.204	0.203	0.212	0.175	0.193	0.191	0.165
Congo	5.296	5.533	5.512	5.754	4.746	5.25	5.189	4.475

Cook Islands	0.04	0.042	0.042	0.043	0.036	0.04	0.039	0.034
Costa Rica	8.192	8.561	8.529	8.902	8.018	8.515	8.029	6.915
Côte d'Ivoire	12.38	12.924	12.882	13.438	11.084	12.256	12.13	10.435
Croatia	17.456	18.23	13.476	12.854	17.935	18.408	17.767	19.969
Cuba	28.326	29.599	29.495	30.776	27.715	29.432	27.752	23.918
Curaçao	5.398	5.639	5.618	5.863	5.546	5.693	5.284	4.561
Cyprus	6.763	7.068	5.226	4.968	6.952	7.136	6.889	7.743
Czechia	96.551	100.775	74.389	69.133	99.169	101.701	98.271	110.39
Dem. Rep. of the Congo	2.723	2.845	2.835	2.958	2.44	2.698	2.667	2.299
Denmark	28.419	29.67	21.912	20.887	29.185	29.956	28.919	32.502
Djibouti	0.958	1	0.997	1.04	0.858	0.948	0.938	0.808
Dominica	0.094	0.098	0.098	0.102	0.092	0.098	0.092	0.08
Dominican Republic	24.897	26.007	25.896	27.041	24.355	25.864	24.387	21.001
Ecuador	37.141	38.806	38.676	40.349	33.215	31.268	36.415	31.341
Egypt	234.006	243.485	242.956	253.17	208.705	230.726	229.149	195.785
El Salvador	6.52	6.814	6.789	7.085	6.384	6.775	6.389	5.505
Equatorial Guinea	3.172	3.313	3.3	3.445	2.842	3.16	3.107	2.676
Eritrea	0.681	0.712	0.709	0.74	0.611	0.68	0.667	0.575
Estonia	16.89	17.642	13.06	12.513	17.358	17.815	17.194	19.325
Eswatini	1.043	1.09	1.086	1.133	0.935	1.039	1.022	0.88
Ethiopia	16.664	17.403	17.343	18.095	14.93	16.584	16.318	14.061
Falkland Islands	0.029	0.03	0.03	0.031	0.026	0.029	0.028	0.024
Faroese	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.001
Fiji	1.241	1.297	1.292	1.349	1.102	1.265	1.217	1.047
Finland	39.644	41.395	30.586	29.449	40.723	41.8	40.327	45.344
France and Monaco	288.54	300.09	220.531	199.539	296.05	302.669	293.178	328.723
French Guiana	0.557	0.582	0.431	0.419	0.573	0.588	0.567	0.638
French Polynesia	0.547	0.572	0.423	0.411	0.562	0.577	0.557	0.626
Gabon	3.18	3.323	3.311	3.455	2.85	3.168	3.116	2.681
Georgia	12.298	12.847	12.8	13.358	12.966	13.036	12.048	10.364
Germany	648.373	669.905	484.767	466.506	663.874	676.977	656.954	733.825
Ghana	15.368	16.054	16	16.692	13.766	15.306	15.052	12.71
Gibraltar	0.633	0.661	0.658	0.688	0.567	0.63	0.62	0.524
Greece	59.862	62.517	46.155	55.186	61.512	63.342	60.945	68.482
Greenland	0.49	0.512	0.379	0.46	0.503	0.519	0.499	0.561
Grenada	0.209	0.218	0.217	0.227	0.204	0.217	0.204	0.172
Guadeloupe	1.709	1.786	1.32	1.606	1.757	1.81	1.741	1.956
Guatemala	19.352	20.21	20.131	21.013	18.93	20.094	18.96	15.984
Guinea	2.665	2.785	2.774	2.896	2.389	2.651	2.611	2.204
Guinea-Bissau	0.399	0.417	0.415	0.433	0.357	0.397	0.391	0.33

Guyana	1.389	1.452	1.446	1.509	1.242	1.168	1.361	1.149
Haiti	3.265	3.41	3.397	3.546	3.195	3.392	3.199	2.7
Honduras	9.452	9.875	9.839	10.267	9.249	9.818	9.258	7.816
Hong Kong	40.188	41.968	41.826	43.637	42.369	42.586	39.378	33.148
Hungary	48.565	50.708	37.464	45.358	49.88	51.383	49.407	55.546
Iceland	3.582	3.743	3.728	3.892	3.68	3.793	3.508	2.958
India	2499.986	2476.493	2540.28	2574.141	2557.461	2512.99	2511.29	2712.79
Indonesia	576.825	596.548	597.221	620.27	605.211	605.34	584.621	653.468
Iran	647.661	669.319	670.563	695.937	679.581	679.183	634.596	470.968
Iraq	180.831	188.416	187.976	195.909	190.436	191.193	177.126	135.024
Ireland	33.354	34.847	25.755	31.598	34.283	34.203	33.952	38.172
Israel and Palestine, State of	62.436	65.149	64.923	67.741	65.775	66.109	61.138	46.969
Italy, San Marino and the Holy See	304.074	316.134	232.577	287.389	311.889	310.007	308.998	346.298
Jamaica	6.791	7.095	7.069	7.377	6.647	7.052	6.654	5.066
Japan	1074.708	1100.029	1107.167	1143.749	1121.12	1116.241	1085.425	1204.99
Jordan	25.862	27.021	26.927	28.096	27.277	27.419	25.341	18.411
Kazakhstan	254.012	264.458	264.059	274.975	267.48	268.355	248.947	178.634
Kenya	18.082	18.891	18.821	19.642	16.201	17.991	17.711	12.891
Kiribati	0.031	0.032	0.032	0.033	0.027	0.031	0.03	0.022
Kuwait	90.383	94.348	94.061	98.1	95.268	95.738	88.605	64.236
Kyrgyzstan	10.88	11.367	11.327	11.819	9.749	10.832	10.65	7.745
Laos	6.187	6.468	6.443	6.725	6.528	6.563	6.064	4.418
Latvia	7.645	7.989	5.913	7.886	7.861	7.868	7.786	8.752
Lebanon	25.028	26.16	26.08	27.201	26.406	26.546	24.546	17.845
Lesotho	0.688	0.719	0.716	0.748	0.617	0.685	0.674	0.491
Liberia	1.102	1.151	1.147	1.197	0.987	1.097	1.08	0.787
Libya	47.504	49.624	49.438	51.598	42.559	47.214	46.567	33.835
Lithuania	12.571	13.131	9.703	12.916	12.917	12.928	12.797	14.384
Luxembourg	8.886	9.287	6.868	9.14	9.134	9.146	9.05	10.173
Macao	1.16	1.212	1.207	1.26	1.224	1.23	1.137	0.827
Madagascar	3.833	4.003	3.986	4.163	3.434	3.814	3.754	2.734
Malawi	1.474	1.541	1.535	1.602	1.322	1.467	1.444	1.052
Malaysia	227.883	237.253	236.804	246.69	239.818	240.75	223.219	160.51
Maldives	0.833	0.87	0.867	0.905	0.878	0.883	0.816	0.594
Mali	0.941	0.983	0.979	1.022	0.844	0.931	0.922	0.672
Malta	0.952	0.995	0.735	0.981	0.979	0.98	0.97	1.09
Martinique	1.783	1.863	1.377	1.836	1.832	1.835	1.815	2.041
Mauritania	6.991	7.303	7.276	7.593	6.264	6.91	6.845	4.99
Mauritius	3.951	4.13	4.113	4.294	3.542	3.909	3.873	2.823

Mexico	445.772	462.434	462.519	480.826	435.345	450.486	452.451	506.558
Moldova	8.423	8.8	8.769	9.15	8.654	8.667	8.255	5.902
Mongolia	32.785	34.258	34.142	35.62	34.579	34.762	32.141	22.936
Morocco	67.513	70.474	70.246	73.277	60.437	65.939	66.183	47.081
Mozambique	8.451	8.829	8.792	9.18	7.573	8.279	8.278	5.919
Myanmar/ Burma	44.115	46.063	45.879	47.895	46.493	46.741	43.206	30.82
Namibia	4.016	4.195	4.179	4.362	3.598	3.93	3.932	2.812
Nepal	13.714	14.32	14.269	14.89	14.454	14.531	13.434	9.588
Netherlands	143.102	149.136	109.873	147.019	146.856	146.862	145.483	163.366
New Caledonia	14.288	14.928	14.877	15.522	12.801	13.98	14.003	9.94
New Zealand	35.315	36.869	36.735	38.336	31.308	35.667	34.593	24.537
Nicaragua	5.344	5.586	5.564	5.808	5.234	5.465	5.236	3.715
Niger	2.152	2.25	2.241	2.339	1.93	2.106	2.109	1.498
Nigeria	91.562	95.559	95.275	99.36	81.977	89.177	89.683	63.397
North del Sur	38.483	40.21	40.082	41.81	40.588	40.803	37.724	26.75
North Macedonia	8.139	8.509	8.473	8.847	8.368	8.39	7.978	5.671
Norway	43.849	45.758	45.599	47.577	45.006	45.101	42.938	30.416
Oman	84.779	88.463	88.189	91.981	89.334	89.767	83.037	58.763
Pakistan	204.703	213.22	212.71	221.699	215.479	216.362	200.566	141.003
Palau	1.213	1.268	1.263	1.318	1.076	1.229	1.188	0.845
Panama	10.614	11.092	11.05	11.533	10.389	10.853	10.399	7.393
Papua New Guinea	3.718	3.885	3.871	4.04	3.3	3.766	3.645	2.588
Paraguay	7.726	8.072	8.043	8.393	6.909	6.486	7.567	5.383
Peru	51.406	53.667	53.487	55.801	45.934	43.081	50.341	35.704
Philippines	137.806	143.63	143.286	149.343	145.114	145.747	134.918	95.253
Poland	291.245	302.872	222.597	309.743	298.781	298.35	295.889	331.771
Portugal	44.272	46.216	34.151	48.054	45.47	45.677	45.065	50.626
Puerto Rico	3.568	3.728	3.713	3.876	3.198	3.484	3.495	2.456
Qatar	97.327	101.57	101.219	105.609	102.575	103.067	95.337	66.659
Réunion	2.757	2.881	2.131	2.996	2.835	2.85	2.807	3.156
Romania	71.824	74.972	55.353	77.949	73.787	74.078	73.084	82.126
Russia	1694.247	1708.625	1735.238	1776.582	1724.951	1643.98	1674.974	1126.612
Rwanda	1.052	1.1	1.095	1.143	0.943	1.026	1.031	0.774
Saint Helena, Ascension and Tristan da Cunha	0.014	0.015	0.015	0.016	0.015	0.015	0.014	0.011
Saint Kitts and Nevis	0.177	0.185	0.184	0.192	0.173	0.181	0.173	0.13
Saint Lucia	0.271	0.283	0.282	0.295	0.265	0.277	0.266	0.2
St Pierre and Miquelon	0.057	0.059	0.044	0.046	0.058	0.058	0.058	0.065
Saint Vincent and the Grenadines	0.133	0.139	0.139	0.145	0.13	0.136	0.131	0.098
Samoa	0.127	0.133	0.132	0.138	0.113	0.129	0.124	0.094

São Tomé and Príncipe	0.145	0.152	0.151	0.158	0.13	0.141	0.142	0.107
Saudi Arabia	566.138	586.007	586.771	609.315	594.458	594.643	574.166	641.921
Senegal	8.95	9.353	9.317	9.725	8.022	8.625	8.765	6.439
Serbia and Montenegro	64.5	67.398	67.147	70.079	66.342	66.668	63.253	46.346
Seychelles	0.959	1.002	0.998	1.041	0.859	0.921	0.939	0.691
Sierra Leone	1.279	1.335	1.33	1.388	1.145	1.229	1.252	0.919
Singapore	48.755	50.882	50.694	52.906	51.371	51.632	47.755	34.983
Slovakia	32.844	34.311	25.373	26.758	33.748	33.979	33.441	37.584
Slovenia	14.03	14.65	10.828	11.428	14.41	14.51	14.276	16.048
Solomon Islands	0.127	0.133	0.132	0.138	0.113	0.129	0.124	0.092
Somalia	0.883	0.923	0.92	0.96	0.792	0.849	0.866	0.636
South Africa	455.172	471.834	471.917	490.601	405.361	430.29	461.729	516.855
South Korea	601.224	621.536	622.284	646.257	630.611	630.695	609.346	680.84
Spain and Andorra	237.574	247.243	181.936	192.747	243.809	244.926	241.567	270.834
Sri Lanka	25.17	26.283	26.187	27.329	26.524	26.671	24.646	17.748
Sudan and South Sudan	20.594	21.522	21.446	22.378	18.46	19.588	20.18	14.524
Suriname	1.879	1.963	1.955	2.041	1.68	1.574	1.84	1.327
Sweden	40.839	42.666	31.527	33.244	41.989	42.388	41.586	46.737
Switzerland and Liechtenstein	35.947	37.539	37.39	39.032	36.932	37.291	35.214	25.362
Syria	26.612	27.804	27.708	28.91	28.067	28.213	26.074	18.774
Taiwan	253.497	263.905	263.371	274.402	266.863	267.794	248.401	176.464
Tajikistan	8.136	8.504	8.475	8.842	8.581	8.629	7.974	5.753
Tanzania	12.183	12.722	12.674	13.228	10.911	11.592	11.932	8.593
Thailand	252.014	262.265	261.751	272.696	265.332	266.13	246.891	175.421
The Gambia	0.54	0.565	0.563	0.587	0.485	0.513	0.53	0.382
Timor-Leste	0.351	0.367	0.365	0.381	0.37	0.372	0.344	0.248
Togo	2.605	2.722	2.712	2.83	2.335	2.469	2.552	1.841
Tonga	0.117	0.122	0.122	0.127	0.104	0.118	0.114	0.083
Trinidad and Tobago	29.901	31.22	31.098	32.462	29.245	30.537	29.293	21.095
Tunisia	29.264	30.579	30.474	31.796	26.22	27.749	28.689	20.647
Turkey	381.976	396.435	396.142	412.203	391.525	393.868	387.642	434.261
Turkmenistan	82.673	86.311	86.013	89.744	87.157	87.583	81.006	57.525
Turks and Caicos Islands	0.123	0.129	0.128	0.134	0.11	0.116	0.121	0.086
Uganda	4.872	5.091	5.072	5.294	4.366	4.598	4.775	3.395
Ukraine	179.684	187.262	186.902	194.71	184.566	186.787	176.031	124.097
United Arab Emirates	203.81	212.253	211.818	220.696	214.586	215.381	199.701	140.587
United Kingdom	334.777	347.926	347.536	361.765	343.616	346.935	340.122	381.123
United States	5010.239	4869.597	5050.112	5050.832	4916.93	4889.852	5021.264	5334.235
Uruguay	5.99	6.259	6.234	6.508	5.358	5.025	5.868	4.119

Uzbekistan	86.809	90.571	90.296	94.174	91.467	91.906	85.003	59.402
Vanuatu	0.079	0.082	0.082	0.086	0.07	0.08	0.077	0.054
Venezuela	100.542	104.936	104.588	109.11	89.826	83.96	98.52	68.838
Vietnam	279.582	291.045	290.595	302.621	294.398	295.334	273.912	189.424
Western Sahara	0.271	0.283	0.282	0.295	0.243	0.255	0.266	0.186
Yemen	9.938	10.382	10.347	10.795	10.479	10.535	9.738	6.831
Zambia	6.848	7.153	7.125	7.438	6.134	6.446	6.705	4.704
Zimbabwe	9.906	10.356	10.316	10.768	8.883	9.328	9.715	6.811
International Aviation	578.091	598.277	599.021	622.073	512.259	580.413	566.361	384.15
International Shipping	673.949	696.28	697.867	723.975	597.063	674.288	660.79	444.855

A.2. Sistemas de cuotas estimadas para 2030

En esta sección, repetimos nuestro estudio para obtener las cuotas estimadas de emisiones de dióxido de carbono (en megatonnes, Mt) para 2030, basadas en la estimación del valor de Shapley \widehat{Sh} y de la normalización de la estimación del valor de Banzhaf \widehat{Bz} para el juego de bancarrota (N, v) . Además, usaremos las estimaciones del valor de Owen \widehat{O} y los repartos basados en la estimación normalizada del valor de Banzhaf-Owen \widehat{BzO} en el juego de bancarrota con uniones a priori (N, v, P) . De nuevo, consideramos las estructuras particionales usadas en la Sección A.1.

Cuadro A.2: Estimaciones de las cuotas de emisión para 2030.

País (en inglés)	UE		G20		Continente			
	\widehat{Sh}	$\widehat{\Gamma}$	\widehat{O}	$\widehat{\Gamma^P}$	\widehat{O}	$\widehat{\Gamma^P}$		
Afghanistan	3.398	4.115	3.294	3.646	2.433	1.702	5.496	5.333
Albania	1.741	2.122	1.693	1.887	2.171	1.962	2.828	2.746
Algeria	55.57	67.634	53.934	58.463	74.166	76.717	90.223	87.619
Angola	7.952	9.722	7.712	8.607	10.582	11.005	12.901	12.509
Anguilla	0.007	0.009	0.007	0.008	0.01	0.01	0.012	0.011
Antigua and Barbuda	0.158	0.191	0.153	0.17	0.202	0.208	0.255	0.247
Argentina	61.448	74.189	59.612	64.022	81.507	83.63	48.316	31.896
Armenia	1.826	2.223	1.771	1.964	1.309	0.918	2.959	2.877
Aruba	0.241	0.294	0.235	0.26	0.301	0.268	0.392	0.38
Australia	132.954	161.614	129.277	132.39	174.474	175.144	103.206	70.47
Austria	22.332	27.149	36.127	110.149	27.726	24.048	17.657	12.099
Azerbaijan	11.096	13.471	10.791	11.829	7.947	5.564	17.979	17.45
Bahamas	0.757	0.916	0.732	0.808	0.97	0.984	1.224	1.189
Bahrain	10.943	13.261	10.621	11.65	7.835	5.514	17.707	17.199
Bangladesh	33.939	41.234	32.928	35.678	24.317	16.914	55.044	53.434

Barbados	1.179	1.436	1.146	1.266	1.516	1.528	1.912	1.856
Belarus	20.386	24.723	19.791	21.546	25.417	22.117	33.145	32.189
Belgium	32.183	39.06	52.129	159.054	39.995	34.705	25.381	17.47
Belize	0.114	0.139	0.111	0.12	0.147	0.148	0.185	0.18
Benin	2.51	3.062	2.435	2.64	3.342	3.475	4.074	3.947
Bermuda	0.108	0.131	0.105	0.114	0.143	0.149	0.175	0.17
Bhutan	0.656	0.795	0.633	0.686	0.47	0.331	1.061	1.032
Bolivia	7.568	9.202	7.332	7.911	9.993	10.343	12.247	11.862
Bosnia and Herzegovina	10.349	12.548	10.018	10.832	12.841	11.223	16.736	16.256
Botswana	2.17	2.639	2.109	2.272	2.885	3.005	3.517	3.414
Brazil	146.984	178.895	142.225	141.58	196.218	202.992	113.426	80.551
British Virgin Islands	0.037	0.046	0.036	0.039	0.047	0.041	0.061	0.059
Brunei	2.168	2.621	2.102	2.271	2.877	2.936	3.508	3.403
Bulgaria	13.371	16.202	21.625	65.859	16.597	14.519	10.591	7.56
Burkina Faso	1.126	1.359	1.091	1.18	1.493	1.516	1.82	1.766
Burundi	0.104	0.126	0.101	0.109	0.139	0.141	0.169	0.164
Cabo Verde	0.315	0.384	0.307	0.329	0.419	0.427	0.511	0.496
Cambodia	5.085	6.181	4.931	5.32	3.653	2.569	8.238	7.98
Cameroon	3.117	3.788	3.023	3.242	4.141	4.217	5.048	4.9
Canada	179.346	220.235	173.807	169.025	232.118	234.824	137.722	102.087
Cayman Islands	0.124	0.151	0.12	0.129	0.165	0.161	0.201	0.195
Central African Rep.	0.152	0.185	0.148	0.159	0.202	0.197	0.247	0.24
Chad	0.276	0.334	0.267	0.286	0.366	0.357	0.446	0.433
Chile	27.711	33.525	26.878	28.417	36.662	38.734	44.913	43.657
China	2174.04	1133.378	1880.112	578.72	1575.101	954.843	1691.59	1400.729
Colombia	26.737	32.492	25.869	27.406	35.293	18.673	43.245	20.985
Comoros	0.066	0.08	0.064	0.069	0.088	0.085	0.107	0.052
Congo	1.79	2.176	1.735	1.86	2.378	2.312	2.9	1.409
Cook Islands	0.013	0.016	0.013	0.014	0.018	0.017	0.022	0.011
Costa Rica	2.765	3.355	2.69	2.884	3.557	3.7	4.486	2.18
Côte d'Ivoire	4.186	5.082	4.059	4.362	5.555	5.38	6.773	3.283
Croatia	5.898	7.161	9.545	29.103	7.325	6.443	4.665	6.908
Cuba	9.554	11.601	9.269	9.981	12.302	12.776	15.511	7.496
Curaçao	1.825	2.207	1.768	1.904	2.266	1.984	2.955	1.434
Cyprus	2.288	2.781	3.701	11.281	2.84	2.491	1.81	2.677
Czechia	32.582	39.7	52.767	160.895	40.477	35.341	25.642	37.792
Dem. Rep. of the Congo	0.92	1.114	0.896	0.965	1.223	1.187	1.491	0.723
Denmark	9.606	11.718	15.536	47.352	11.922	10.459	7.604	11.209
Djibouti	0.324	0.394	0.314	0.336	0.43	0.417	0.524	0.254
Dominica	0.032	0.039	0.031	0.033	0.041	0.043	0.052	0.025

Dominican Republic	8.398	10.218	8.154	8.762	10.804	11.265	13.629	6.623
Ecuador	12.519	15.266	12.176	12.995	16.596	8.818	20.336	9.866
Egypt	78.728	95.74	76.187	78.192	105.022	101.245	127.596	61.829
El Salvador	2.202	2.688	2.137	2.297	2.831	2.946	3.571	1.734
Equatorial Guinea	1.072	1.298	1.038	1.112	1.424	1.399	1.736	0.84
Eritrea	0.23	0.28	0.223	0.239	0.306	0.301	0.373	0.181
Estonia	5.702	6.908	9.238	28.208	7.093	6.221	4.512	6.68
Eswatini	0.352	0.426	0.342	0.365	0.469	0.459	0.571	0.277
Ethiopia	5.644	6.842	5.464	5.821	7.483	7.332	9.12	4.434
Falkland Islands	0.01	0.012	0.009	0.01	0.013	0.013	0.016	0.008
Faroese	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0
Fiji	0.419	0.509	0.407	0.436	0.548	0.562	0.68	0.329
Finland	13.417	16.336	21.675	66.038	16.633	14.625	10.58	15.69
France and Monaco	96.748	116.895	157.132	479.028	120.479	104.152	75.651	111.434
French Guiana	0.189	0.229	0.305	0.929	0.234	0.206	0.149	0.221
French Polynesia	0.185	0.224	0.299	0.913	0.23	0.203	0.146	0.217
Gabon	1.075	1.302	1.044	1.11	1.428	1.4	1.741	0.844
Georgia	4.153	5.068	4.031	4.261	2.975	4.146	6.732	3.263
Germany	215.524	262.673	350.772	1069.206	268.097	236.965	163.872	254.564
Ghana	5.191	6.326	5.042	4.671	6.899	6.77	8.413	4.087
Gibraltar	0.213	0.26	0.207	0.193	0.284	0.28	0.347	0.168
Greece	20.174	24.678	32.735	99.617	25.125	23.284	16.015	24.809
Greenland	0.166	0.201	0.268	0.817	0.206	0.191	0.131	0.204
Grenada	0.07	0.086	0.069	0.063	0.091	0.094	0.114	0.055
Guadeloupe	0.576	0.701	0.935	2.851	0.719	0.667	0.459	0.71
Guatemala	6.547	7.978	6.343	5.783	8.393	8.745	10.591	5.133
Guinea	0.902	1.095	0.875	0.802	1.197	1.168	1.459	0.709
Guinea-Bissau	0.135	0.163	0.131	0.12	0.179	0.175	0.218	0.106
Guyana	0.469	0.569	0.456	0.417	0.62	0.328	0.761	0.37
Haiti	1.102	1.344	1.069	0.982	1.417	1.473	1.787	0.87
Honduras	3.199	3.89	3.103	2.865	4.102	4.274	5.175	2.514
Hong Kong	13.589	16.506	13.161	12.055	9.711	12.718	21.993	10.675
Hungary	16.397	19.854	26.551	80.855	20.369	18.915	12.974	20.18
Iceland	1.21	1.469	1.174	1.072	1.504	1.401	1.961	0.951
India	781.215	931.673	753.835	399.867	530.866	744.203	541.438	1016.455
Indonesia	191.896	234.161	186.303	149.244	136.542	201.608	146.936	289.696
Iran	215.326	262.019	208.159	165.768	152.773	225.362	350.752	161.904
Iraq	61.013	74.034	59.095	51.625	43.512	66.017	98.738	46.397
Ireland	11.279	13.707	18.246	55.621	14.004	11.519	8.939	16.743
Israel and Palestine, State of	21.082	25.501	20.436	18.422	15.1	23.13	34.141	16.103

Italy, San Marino and the Holy See	102.165	124.181	165.532	504.769	126.994	104.55	79.636	152.204
Jamaica	2.295	2.787	2.222	1.904	2.949	3.063	3.718	1.745
Japan	352.23	428.209	340.958	230.372	247.901	376.309	257.082	544.181
Jordan	8.755	10.597	8.481	7.268	6.259	10.258	14.16	6.22
Kazakhstan	85.44	103.87	82.899	66.916	60.846	97.635	138.587	60.186
Kenya	6.113	7.412	5.939	5.054	8.122	7.935	9.9	4.354
Kiribati	0.01	0.013	0.01	0.009	0.014	0.014	0.017	0.007
Kuwait	30.451	37.209	29.599	24.952	21.85	35.876	49.442	21.704
Kyrgyzstan	3.682	4.462	3.564	3.072	4.886	4.786	5.957	2.617
Laos	2.096	2.541	2.034	1.744	1.499	2.488	3.389	1.487
Latvia	2.586	3.124	4.183	12.75	3.213	2.696	2.05	4.047
Lebanon	8.463	10.248	8.228	7.044	6.057	10.03	13.709	6.04
Lesotho	0.232	0.282	0.225	0.195	0.309	0.303	0.377	0.166
Liberia	0.372	0.454	0.36	0.312	0.495	0.484	0.603	0.266
Libya	16.061	19.428	15.572	13.285	21.338	20.792	26.005	11.447
Lithuania	4.256	5.162	6.876	20.977	5.28	4.422	3.368	6.666
Luxembourg	3.007	3.645	4.863	14.8	3.735	3.12	2.383	4.71
Macao	0.392	0.477	0.38	0.326	0.281	0.466	0.635	0.279
Madagascar	1.297	1.573	1.256	1.077	1.721	1.681	2.098	0.927
Malawi	0.498	0.607	0.484	0.415	0.662	0.648	0.808	0.355
Malaysia	76.599	93.134	74.384	60.982	54.784	91.308	124.331	54.019
Maldives	0.281	0.342	0.273	0.234	0.202	0.345	0.456	0.201
Mali	0.317	0.386	0.308	0.265	0.423	0.408	0.515	0.227
Malta	0.322	0.39	0.521	1.588	0.4	0.336	0.256	0.505
Martinique	0.602	0.732	0.975	2.972	0.749	0.626	0.478	0.946
Mauritania	2.365	2.865	2.291	1.967	3.139	3.027	3.827	1.686
Mauritius	1.335	1.627	1.29	1.116	1.775	1.712	2.164	0.954
Mexico	149.065	181.499	144.413	112.37	192.382	184.357	114.985	235.236
Moldova	2.854	3.472	2.764	2.38	3.538	2.97	4.611	1.97
Mongolia	11.091	13.485	10.724	9.234	7.937	13.587	17.952	7.663
Morocco	22.765	27.741	22.058	18.761	30.308	28.002	36.932	15.748
Mozambique	2.849	3.468	2.771	2.386	3.794	3.531	4.627	1.976
Myanmar/ Burma	14.918	18.109	14.479	12.298	10.673	18.158	24.139	10.287
Namibia	1.357	1.66	1.318	1.133	1.803	1.67	2.199	0.94
Nepal	4.633	5.64	4.488	3.833	3.313	5.701	7.504	3.216
Netherlands	48.194	58.635	78.09	238.159	59.92	50.126	37.829	76.094
New Caledonia	4.825	5.862	4.689	3.898	6.416	5.931	7.823	3.32
New Zealand	11.946	14.506	11.6	9.603	15.567	15.92	19.321	8.139
Nicaragua	1.808	2.205	1.751	1.467	2.321	2.285	2.927	1.242
Niger	0.727	0.886	0.707	0.592	0.967	0.896	1.179	0.499

Nigeria	30.918	37.524	29.951	24.393	41.114	37.516	50.077	21.056
North Korea	12.995	15.829	12.612	10.432	9.322	15.707	21.072	8.925
North Macedonia	2.752	3.358	2.665	2.228	3.421	2.882	4.459	1.886
Norway	14.818	18.039	14.362	11.897	18.392	15.465	23.979	10.122
Oman	28.673	34.642	27.662	22.718	20.49	34.755	46.358	19.615
Pakistan	68.952	83.77	66.758	53.556	49.22	82.238	111.736	46.658
Palau	0.41	0.496	0.397	0.332	0.535	0.55	0.664	0.281
Panama	3.581	4.353	3.486	2.904	4.607	4.542	5.813	2.465
Papua New Guinea	1.256	1.521	1.218	1.018	1.64	1.682	2.036	0.861
Paraguay	2.613	3.166	2.534	2.125	3.451	1.831	4.23	1.793
Peru	17.402	21.097	16.863	13.954	22.955	12.146	28.124	11.876
Philippines	46.562	56.438	44.972	36.569	33.252	56.941	75.268	31.712
Poland	97.834	118.937	158.589	482.567	121.682	101.994	76.305	154.473
Portugal	14.948	18.069	24.2	73.836	18.568	15.809	11.829	23.642
Puerto Rico	1.204	1.459	1.171	0.913	1.602	1.474	1.954	0.812
Qatar	32.82	39.933	31.839	24.271	23.455	39.543	53.227	21.954
Réunion	0.933	1.133	1.509	4.602	1.158	0.989	0.739	1.47
Romania	24.237	29.455	39.257	119.389	30.125	25.686	19.124	38.282
Russia	544.031	665.829	525.757	405.089	675.907	523.563	895.391	380.406
Rwanda	0.355	0.432	0.344	0.377	0.473	0.43	0.576	0.272
Saint Helena, Ascension and Tristan da Cunha	0.005	0.006	0.005	0.005	0.006	0.005	0.008	0.004
Saint Kitts and Nevis	0.06	0.073	0.058	0.064	0.077	0.076	0.097	0.046
Saint Lucia	0.092	0.111	0.089	0.097	0.118	0.116	0.148	0.07
St Pierre and Miquelon	0.019	0.023	0.031	0.094	0.024	0.02	0.015	0.029
Saint Vincent and the Grenadines	0.045	0.055	0.044	0.048	0.058	0.057	0.073	0.034
Samoa	0.043	0.052	0.042	0.045	0.056	0.057	0.07	0.033
São Tomé and Príncipe	0.049	0.06	0.048	0.052	0.065	0.059	0.079	0.037
Saudi Arabia	188.63	230.348	182.462	176.467	134.499	229.32	144.575	284.806
Senegal	3.032	3.677	2.934	3.201	4.019	3.405	4.901	2.244
Serbia and Montenegro	21.739	26.286	21.121	22.832	27.076	23.088	35.32	16.212
Seychelles	0.324	0.393	0.314	0.342	0.43	0.361	0.525	0.241
Sierra Leone	0.431	0.525	0.419	0.455	0.574	0.482	0.7	0.32
Singapore	16.432	20.032	15.956	17.176	11.793	21.516	26.664	12.216
Slovakia	11.093	13.505	17.966	54.779	13.795	11.86	8.783	17.206
Slovenia	4.748	5.728	7.671	23.391	5.887	5.075	3.752	7.347
Solomon Islands	0.043	0.052	0.042	0.045	0.056	0.058	0.07	0.032
Somalia	0.299	0.362	0.289	0.313	0.397	0.331	0.484	0.222
South Africa	152.131	185.542	147.117	145.753	204.174	158.233	117.447	236.52
South Korea	200.315	243.919	193.205	186.346	142.28	262.774	153.099	309.651

Spain and Andorra	79.858	96.91	129.46	394.548	99.211	85.596	62.596	124.976
Sri Lanka	8.502	10.375	8.231	8.463	6.107	11.729	13.774	6.136
Sudan and South Sudan	6.964	8.486	6.742	6.914	9.252	7.024	11.278	5.024
Suriname	0.636	0.771	0.617	0.64	0.839	0.442	1.029	0.46
Sweden	13.819	16.823	22.341	67.922	17.141	14.967	10.919	21.712
Switzerland and Liechtenstein	12.182	14.758	11.793	12.075	15.087	13.19	19.672	8.793
Syria	8.994	10.958	8.719	8.982	6.437	12.411	14.57	6.479
Taiwan	85.197	103.781	82.454	81.032	60.966	113.43	138.297	60.928
Tajikistan	2.746	3.33	2.675	2.754	1.968	3.812	4.456	1.991
Tanzania	4.116	4.988	3.989	4.117	5.469	4.177	6.667	2.971
Thailand	84.708	102.552	81.935	80.357	60.391	116.963	137.438	60.216
The Gambia	0.183	0.223	0.177	0.183	0.243	0.178	0.296	0.132
Timor-Leste	0.119	0.144	0.115	0.118	0.085	0.171	0.192	0.086
Togo	0.883	1.07	0.853	0.885	1.17	0.857	1.426	0.638
Tonga	0.04	0.048	0.038	0.04	0.052	0.053	0.064	0.028
Trinidad and Tobago	10.11	12.243	9.8	10.05	12.965	12.788	16.361	7.289
Tunisia	9.869	11.941	9.606	9.931	13.144	9.629	16.025	7.124
Turkey	128.172	156.116	123.925	117.539	159.045	138.866	99.181	201.819
Turkmenistan	27.893	33.821	27.063	27.556	20.006	40.083	45.231	19.661
Turks and Caicos Islands	0.042	0.051	0.04	0.042	0.055	0.038	0.067	0.029
Uganda	1.652	1.994	1.596	1.657	2.189	1.509	2.668	1.164
Ukraine	60.593	73.677	58.789	58.263	75.241	66.977	98.133	42.236
United Arab Emirates	68.405	83.214	66.472	65.81	48.977	100.024	111.23	47.982
United Kingdom	112.426	136.283	108.988	105.208	139.732	124.336	87.372	179.12
United States	1486.892	1123.734	1396.607	531.007	1951.41	1830.99	1084.067	1841.516
Uruguay	2.026	2.461	1.967	2.027	2.676	1.411	3.28	1.398
Uzbekistan	29.229	35.529	28.411	28.848	20.974	41.747	47.463	20.027
Vanuatu	0.027	0.032	0.026	0.027	0.035	0.036	0.043	0.018
Venezuela	33.883	41.218	32.885	33.225	44.895	23.565	54.991	23.273
Vietnam	93.756	114.115	91.108	88.694	67.053	136.061	152.52	63.355
Western Sahara	0.092	0.111	0.089	0.092	0.122	0.081	0.148	0.063
Yemen	3.363	4.08	3.256	3.372	2.404	5.074	5.44	2.306
Zambia	2.318	2.803	2.247	2.314	3.075	2.054	3.749	1.593
Zimbabwe	3.352	4.079	3.245	3.372	4.451	2.965	5.427	2.306
International Aviation	192.175	233.766	186.204	170.563	257.572	262.444	313.522	126.102
International Shipping	223.74	273.52	216.953	194.991	300.58	304.747	364.88	145.856

A.3. Otros sistemas de cuotas para 2030

En este apéndice veremos las cuotas de emisiones de dióxido de carbono (en megatonnes, Mt) para 2030, obtenidas utilizando las reglas CEA, CEL, Talmud y Proporcional que pueden ser calculadas de forma exacta para el problema de bancarrota asociado.

Cuadro A.3: Cuotas de emisión para 2030.

País (en inglés)	CEA	CEL	Talmud	Prop.
Afghanistan	10.999	0	5.499	2.953
Albania	5.659	0	2.83	1.52
Algeria	180.57	0	90.285	48.483
Angola	25.819	0	12.91	6.932
Anguilla	0.023	0	0.012	0.006
Antigua and Barbuda	0.51	0	0.255	0.137
Argentina	182.043	0	99.707	53.543
Armenia	5.922	0	2.961	1.59
Aruba	0.784	0	0.392	0.21
Australia	182.043	0	216.689	116.363
Austria	72.363	0	36.182	19.43
Azerbaijan	35.984	0	17.992	9.662
Bahamas	2.449	0	1.225	0.658
Bahrain	35.438	0	17.719	9.515
Bangladesh	110.164	0	55.082	29.579
Barbados	3.827	0	1.914	1.028
Belarus	66.335	0	33.168	17.811
Belgium	104.415	0	52.207	28.036
Belize	0.371	0	0.185	0.1
Benin	8.153	0	4.076	2.189
Bermuda	0.35	0	0.175	0.094
Bhutan	2.124	0	1.062	0.57
Bolivia	24.512	0	12.256	6.581
Bosnia and Herzegovina	33.496	0	16.748	8.994
Botswana	7.039	0	3.52	1.89
Brazil	182.043	0	239.073	128.383
British Virgin Islands	0.122	0	0.061	0.033
Brunei	7.02	0	3.51	1.885
Bulgaria	43.314	0	21.657	11.63
Burkina Faso	3.643	0	1.822	0.978
Burundi	0.338	0	0.169	0.091
Cabo Verde	1.023	0	0.512	0.275
Cambodia	16.488	0	8.244	4.427

Cameroon	10.102	0	5.051	2.712
Canada	182.043	0	292.423	157.032
Cayman Islands	0.403	0	0.201	0.108
Central African Rep.	0.494	0	0.247	0.133
Chad	0.894	0	0.447	0.24
Chile	89.889	0	44.944	24.135
China	182.043	8317.712	458.395	3097.212
Colombia	86.55	0	43.275	23.239
Comoros	0.214	0	0.107	0.057
Congo	5.804	0	2.902	1.558
Cook Islands	0.044	0	0.022	0.012
Costa Rica	8.979	0	4.49	2.411
Côte d'Ivoire	13.555	0	6.778	3.64
Croatia	19.119	0	9.56	5.134
Cuba	31.043	0	15.522	8.335
Curaçao	5.914	0	2.957	1.588
Cyprus	7.413	0	3.707	1.99
Czechia	105.693	0	52.847	28.379
Dem. Rep. of the Congo	2.984	0	1.492	0.801
Denmark	31.119	0	15.559	8.355
Djibouti	1.049	0	0.525	0.282
Dominica	0.103	0	0.052	0.028
Dominican Republic	27.276	0	13.638	7.324
Ecuador	40.7	0	20.35	10.928
Egypt	182.043	0	127.684	68.567
El Salvador	7.146	0	3.573	1.919
Equatorial Guinea	3.475	0	1.737	0.933
Eritrea	0.747	0	0.373	0.201
Estonia	18.503	0	9.251	4.968
Eswatini	1.143	0	0.572	0.307
Ethiopia	18.252	0	9.126	4.901
Falkland Islands	0.032	0	0.016	0.009
Faroese	0.002	0	0.001	0.001
Fiji	1.361	0	0.68	0.365
Finland	43.415	0	21.707	11.657
France and Monaco	182.043	0	157.368	84.507
French Guiana	0.61	0	0.305	0.164
French Polynesia	0.599	0	0.3	0.161
Gabon	3.485	0	1.742	0.936
Georgia	13.474	0	6.737	3.618

Germany	182.043	0	351.3	188.649
Ghana	16.837	0	8.419	4.521
Gibraltar	0.694	0	0.347	0.186
Greece	65.568	0	32.784	17.605
Greenland	0.537	0	0.268	0.144
Grenada	0.229	0	0.114	0.061
Guadeloupe	1.873	0	0.937	0.503
Guatemala	21.196	0	10.598	5.691
Guinea	2.921	0	1.46	0.784
Guinea-Bissau	0.437	0	0.219	0.117
Guyana	1.522	0	0.761	0.409
Haiti	3.577	0	1.788	0.96
Honduras	10.356	0	5.178	2.781
Hong Kong	44.016	0	22.008	11.818
Hungary	53.183	0	26.591	14.28
Iceland	3.925	0	1.963	1.054
India	182.043	0	458.395	697.394
Indonesia	182.043	0	312.832	167.991
Iran	182.043	0	350.993	188.484
Iraq	182.043	0	98.806	53.059
Ireland	36.548	0	18.274	9.813
Israel and Palestine, State of	68.329	0	34.164	18.346
Italy, San Marino and the Holy See	182.043	0	165.781	89.025
Jamaica	7.441	0	3.721	1.998
Japan	182.043	0	458.395	309.774
Jordan	28.34	0	14.17	7.609
Kazakhstan	182.043	0	138.682	74.473
Kenya	19.813	0	9.907	5.32
Kiribati	0.034	0	0.017	0.009
Kuwait	98.953	0	49.476	26.569
Kyrgyzstan	11.921	0	5.961	3.201
Laos	6.783	0	3.392	1.821
Latvia	8.379	0	4.19	2.25
Lebanon	27.437	0	13.719	7.367
Lesotho	0.754	0	0.377	0.203
Liberia	1.208	0	0.604	0.324
Libya	52.046	0	26.023	13.975
Lithuania	13.772	0	6.886	3.698
Luxembourg	9.74	0	4.87	2.615
Macao	1.271	0	0.636	0.341

Madagascar	4.199	0	2.099	1.127
Malawi	1.616	0	0.808	0.434
Malaysia	182.043	0	124.416	66.812
Maldives	0.913	0	0.456	0.245
Mali	1.031	0	0.516	0.277
Malta	1.044	0	0.522	0.28
Martinique	1.954	0	0.977	0.525
Mauritania	7.659	0	3.83	2.057
Mauritius	4.332	0	2.166	1.163
Mexico	182.043	0	242.502	130.224
Moldova	9.229	0	4.615	2.478
Mongolia	35.93	0	17.965	9.647
Morocco	73.914	0	36.957	19.846
Mozambique	9.259	0	4.63	2.486
Myanmar/Burma	48.311	0	24.155	12.971
Namibia	4.4	0	2.2	1.181
Nepal	15.019	0	7.51	4.033
Netherlands	156.415	0	78.207	41.998
New Caledonia	15.657	0	7.828	4.204
New Zealand	38.669	0	19.334	10.383
Nicaragua	5.859	0	2.929	1.573
Niger	2.36	0	1.18	0.634
Nigeria	100.223	0	50.112	26.91
North Korea	42.173	0	21.086	11.323
North Macedonia	8.924	0	4.462	2.396
Norway	47.991	0	23.995	12.886
Oman	92.781	0	46.39	24.912
Pakistan	182.043	0	111.813	60.044
Palau	1.33	0	0.665	0.357
Panama	11.634	0	5.817	3.124
Papua New Guinea	4.075	0	2.037	1.094
Paraguay	8.466	0	4.233	2.273
Peru	56.286	0	28.143	15.113
Philippines	150.64	0	75.32	40.447
Poland	182.043	0	158.827	85.29
Portugal	48.472	0	24.236	13.015
Puerto Rico	3.91	0	1.955	1.05
Qatar	106.528	0	53.264	28.603
Réunion	3.022	0	1.511	0.811
Romania	78.631	0	39.316	21.113

Russia	182.043	0	458.395	481.158
Rwanda	1.153	0	0.577	0.31
Saint Helena, Ascension and Tristan da Cunha	0.016	0	0.008	0.004
Saint Kitts and Nevis	0.194	0	0.097	0.052
Saint Lucia	0.297	0	0.149	0.08
St Pierre and Miquelon	0.062	0	0.031	0.017
Saint Vincent and the Grenadines	0.146	0	0.073	0.039
Samoa	0.139	0	0.07	0.037
São Tomé and Príncipe	0.159	0	0.08	0.043
Saudi Arabia	182.043	0	307.304	165.023
Senegal	9.809	0	4.905	2.634
Serbia and Montenegro	70.688	0	35.344	18.98
Seychelles	1.051	0	0.525	0.282
Sierra Leone	1.4	0	0.7	0.376
Singapore	53.365	0	26.683	14.329
Slovakia	35.985	0	17.993	9.662
Slovenia	15.365	0	7.683	4.126
Solomon Islands	0.139	0	0.07	0.037
Somalia	0.968	0	0.484	0.26
South Africa	182.043	0	247.431	132.871
South Korea	182.043	0	325.935	175.028
Spain and Andorra	182.043	0	129.655	69.625
Sri Lanka	27.566	0	13.783	7.402
Sudan and South Sudan	22.572	0	11.286	6.061
Suriname	2.059	0	1.029	0.553
Sweden	44.749	0	22.374	12.015
Switzerland and Liechtenstein	39.371	0	19.685	10.571
Syria	29.161	0	14.58	7.83
Taiwan	182.043	0	138.392	74.317
Tajikistan	8.919	0	4.459	2.395
Tanzania	13.343	0	6.672	3.583
Thailand	182.043	0	137.532	73.855
The Gambia	0.592	0	0.296	0.159
Timor-Leste	0.385	0	0.192	0.103
Togo	2.855	0	1.427	0.767
Tonga	0.128	0	0.064	0.034
Trinidad and Tobago	32.744	0	16.372	8.792
Tunisia	32.072	0	16.036	8.611
Turkey	182.043	0	207.891	111.638
Turkmenistan	90.523	0	45.262	24.306

Turks and Caicos Islands	0.135	0	0.067	0.036
Uganda	5.34	0	2.67	1.434
Ukraine	182.043	0	98.201	52.734
United Arab Emirates	182.043	0	111.306	59.772
United Kingdom	182.043	0	182.453	97.978
United States	182.043	1889.773	458.395	1371.304
Uruguay	6.565	0	3.282	1.763
Uzbekistan	94.992	0	47.496	25.505
Vanuatu	0.086	0	0.043	0.023
Venezuela	110.057	0	55.029	29.55
Vietnam	182.043	0	152.625	81.96
Western Sahara	0.297	0	0.149	0.08
Yemen	10.888	0	5.444	2.924
Zambia	7.503	0	3.751	2.014
Zimbabwe	10.862	0	5.431	2.916
International Aviation	182.043	0	313.738	168.478
International Shipping	182.043	0	365.131	196.076

Apéndice B

Código R para las estimación de soluciones para juegos TU y con uniones

En este apéndice se presenta el código de R con las funciones utilizadas para obtener las estimaciones de las soluciones para juegos TU y para juegos TU con uniones a priori consideradas en el Capítulo 3. Este código está adaptado a juegos de bancarrota para una mayor eficiencia, pero sería fácilmente adaptable a cualquier caso en el que conozcamos de manera explícita la función característica de un juego TU $(N, v) \in G^N$, o su obtención posible en tiempo polinomial.

Dado un problema de bancarrota $(N, d, E) \in B^N$, los argumentos comunes a la mayor parte de las funciones son:

- **myseed**: el punto inicial para la generación aleatoria de una colección de elementos. Fijados esa semilla y el resto de parámetros involucrados en el problema, es posible la réplica exacta de resultados en cualquier otro ordenador.
- **E**: el estado a repartir entre los agentes involucrados.
- **claims**: el correspondiente vector de demandas individuales $d \in \mathbb{R}^n$.
- **nitmax**: el tamaño de muestra que queremos utilizar.
- **index**: el vector de dimensión igual al número de jugadores que, en cada componente, indica el índice del elemento de la partición P considerada a la que pertenece. Se usa en aquellas soluciones que consideran sistemas de uniones a priori.

A continuación, se muestra el código R asociado a cada una de las funciones implementadas.

Estimación del valor de Shapley

En esta subsección se presenta la función `estimating_Sh()` que permite estimar el valor de Shapley del juego de bancarrota asociado (o regla de llegadas aleatorias) asociado al problema de bancarrota $(N, d, E) \in B^N$.

```
estimating_Sh <-function(myseed, nitmax, E, claims){
  set.seed(myseed)
  n <-length(claims)
  Sh <-rep(0, n)
```

```

it=0
while(it<nitmax){
  it=it+1
  sigma <-sample(1:n,n,replace=FALSE)
  for(l in 1:n){
    pred <-c()
    if(l>1){pred<-sigma[1:(l-1)]}
    xi <-min(claims[sigma[l]],
            max(0,E-sum(claims[pred])))
    Sh[sigma[l]] <-Sh[sigma[l]]+xi
  }
}
return(Sh/nitmax)
}

```

Estimación del valor de Banzhaf

De forma análoga, la función `estimating_Bz()` permite estimar el valor de Banzhaf de un juego de bancarota (N, v) , utilizando los mismos argumentos que la función anterior.

```

estimating_Bz <-function(myseed, nitmax, E, claims){
  set.seed(myseed)
  n <-length(claims)
  Bz <-rep(0,n)
  for(l in 1:n){
    it=0
    while(it<nitmax){
      it=it+1
      s <-c(sample(c(TRUE,FALSE),l-1,replace=TRUE),
            FALSE,
            sample(c(TRUE,FALSE),n-1,replace=TRUE))
      xi <-min(claims[l],max(0,E-sum(claims[s])))
      Bz[l] <-Bz[l]+xi
    }
  }
  return((Bz/nitmax)/sum(Bz/nitmax))
}

```

Estimación del valor de Owen

Tal y como se ha mencionado al inicio de este apéndice, la estimación de soluciones para juegos con uniones a priori requiere información sobre la estructura particional asociada a través del vector `index`.

Para la estimación del valor de Owen, se requiere el empleo de la función `permutacion_particion()` que, en cada ejecución, nos devuelve una permutación compatible con la partición P considerada (indicada con `index`).

```

permutacion_particion <-function(index){
  m <-max(index)
  mind <-sample(1:m)
  vpermutation <-c()
  lista <-list()
}

```

```

for (i in 1:m){
  indexP <-mind[i]
  agentsP <-which(index==indexP)
  if (length(agentsP)==1){
    permutai <-agentsP
  } else {
    permutai <-sample(agentsP)
  }
  vpermutation <-c(vpermutation , permutai)
}
return(vpermutation)
}

```

La función `estimating_0()` permite la estimación del valor de Owen de un juego TU con uniones a priori $(N, v, P) \in G_P^N$, con los argumentos anteriormente mencionados.

```

estimating_0 <-function(myseed, nitmax, E, claims, index){
  set.seed(myseed)
  n <-length(claims)
  O <-rep(0, n)
  it=0
  while(it<nitmax){
    it=it+1
    sigma <-permutacion_particion(index)
    for(l in 1:n){
      pred <-c()
      if(l>1){pred <-sigma[1:(l-1)]}
      xi <-min(claims[sigma[l]],
              max(0, E-sum(claims[pred])))
      O[sigma[l]] <-O[sigma[l]]+xi
    }
  }
  return(O/nitmax)
}

```

Estimación del valor de Banzhaf-Owen

En esta última sección, se presenta la función `estimating_Bz0()` que permite aproximar el valor de Banzhaf-Owen de un juego TU con uniones a priori $(N, v, P) \in G_P^N$.

```

estimating_Bz0 <-function(myseed, nitmax, E, claims, index){
  set.seed(myseed)
  m <-max(index)
  n <-length(claims)
  BzO <-rep(0, n)
  for(l in 1:n){
    it=0
    s=index[l]
    index_l=index[-l]
    claims_l=claims[-l]
    claims_l=claims_l[index_l==index[l]]
    n_l=length(claims_l)

```

```

while(it < nitmax){
  it=it+1
  s_P <-c(sample(c(TRUE,FALSE),s-1,replace=TRUE),
          FALSE,
          sample(c(TRUE,FALSE),m-s,replace=TRUE))
  s_l <-sample(c(TRUE,FALSE),n_l,replace=TRUE)
  xi <-min(claims[1],max(0,E-sum(
  c(claims[index%n % (1:m)[s_P]], claims_l[s_l])))
  BzO[1]<-BzO[1]+xi
}
}
return((BzO/nitmax)/sum(BzO/nitmax))
}

```

La función `estimating_BzO_voting()` en R permite la estimación de la componente j -ésima del valor de Banzhaf-Owen para juegos de mayoría ponderada como los considerados en el estudio de simulación en la Sección 2.2.2. Un juego de mayoría ponderada es un juego simple $(N, v) \in G^N$ que, a cada coalición $S \subseteq N$, asigna

$$v(S) = 1, \text{ si } \sum_{j \in S} h_j \geq q, \text{ y } 0 \text{ en otro caso.}$$

En estas situaciones, $q > 0$ es la *quota* que marca la mayoría en una votación y h_1, h_2, \dots, h_n los pesos asociados a los n miembros de N .

```

estimating_BzO_voting <-function(nitmax, h, q, j, index){
  m <-max(index)
  n <-length(pesos)
  Co=0
  it=0
  s=index[j]
  h_j=h[j]
  index_j=index[-j]
  h_j=h[-j]
  h_j=h_j[index_j==index[j]]
  n_j=length(h_j)
  while(it < nitmax){
    it=it+1
    sigma_P <-c(sample(c(TRUE,FALSE),s-1,replace=TRUE),
                FALSE,
                sample(c(TRUE,FALSE),m-s,replace=TRUE))
    sigma_j <-sample(c(TRUE,FALSE),n_j,replace=TRUE)
    xi <-((sum(c(h[index%n % (1:m)[sigma_P]], h_j[sigma_j]))
          +h_j-q >= 0)
          - (sum(c(h[index%n % (1:m)[sigma_P]], h_j[sigma_j]))
          -q >= 0))
    Co<-Co+xi
  }
  return(Co/nitmax)
}

```

Apéndice C

Código R para las reglas de bancarrota

En este apéndice se detalla el código R utilizado para el cómputo exacto de las reglas de reparto en un problema de bancarrota $(N, d, E) \in B^N$ descritas en la Sección 3.1. En concreto, se muestran las funciones para el cómputo de la regla CEA (ver en la Expresión 3.1), la regla CEL (Expresión 3.2), la regla Talmud (Expresión 3.3) y la regla proporcional (Expresión 3.4).

Dado un problema de bancarrota $(N, d, E) \in B^N$, los dos argumentos de las funciones, comunes a todas ellas, son:

- **E**: el estado a repartir entre los agentes involucrados.
- **claims**: el correspondiente vector de demandas individuales.

A continuación, se describen las funciones existentes para cada una de las propuestas de reparto en bancarrota.

Regla CEA

En esta sección, se describe el código necesario para el cómputo de $CEA(N, d, E)$ para todo $i \in N$ (ver Expresión 3.1). Este código aparece en Saavedra-Nieves (2012).

En primer lugar, tenemos una función auxiliar que nos ayuda en el cálculo de los valores.

```
REGLAceaAUXILIAR<-function(E, claims){
  d<-claims
  n<-length(d)
  c=E/n
  dordenado=min(d)
  indice=which.min(d)
  if(c<=dordenado){
    return(rep(c, times=n))
  }else{
    salida=dordenado
  }
  return(salida)
}
```

La función `REGLAcea()`, haciendo uso de la función anterior, permite el cálculo de la regla CEA.

```

REGLAcea<-function(E, claims){
  d<-claims
  n<-length(d)
  naux=n
  daux=d

  salida=rep(Inf, times=naux)
  i=1
  while(i<=naux){
    CEA=REGLAceaAUXILIAR(E, daux)
    if(length(CEA)==n){
      i=naux+1
      salida[which(salida==Inf)]=CEA
    } else {
      E=E-daux[which.min(daux)]
      daux=daux[-which.min(daux)]
      n<-length(daux)
      salida[which(d==CEA)]=CEA
      i=i+1
    }
  }
  return(salida)
}

```

Regla CEL

El cómputo de la regla CEL de un problema de bancarrota, $CEL(N, d, E)$, puede verse con como un caso especial de regla CEA sobre un problema de bancarrota derivado del original. Basándonos en esto, es muy sencillo obtener la regla CEL usando la función `REGLAcel()`.

```

REGLAcel<-function(E, claims){
  d<-claims
  NuevaE=sum(d)-E
  return(d-REGLAcea(NuevaE, d))
}

```

Regla Talmud

Tal y como se ha descrito en la Sección 3.1, la regla Talmud involucra la regla CEA y la regla CEL. Este hecho se refleja en la función `REGLAtalmud()` que permite su cómputo exacto al combinarlas.

```

REGLAtalmud<-function(E, claims){
  d<-claims
  if(E<=(sum(d/2))){
    return(REGLAcea(E, d/2))
  } else {
    NuevaE=sum(d)-E
    return(d-REGLAcea(NuevaE, d/2))
  }
}

```

Regla proporcional

Por último, la regla proporcional para un problema de bancarrota $(N, d, E) \in B^N$ se obtiene con la siguiente función.

```
REGLApro<-function(E, claims){  
  d<-claims  
  return(d*E/sum(d))  
}
```


Bibliografía

- [1] Alonso-Meijide JM, Bilbao JM, Casas-Méndez B, Fernández JR (2009). Weighted multiple majority games with unions: Generating functions and applications to the European Union. *European Journal of Operational Research* 198(2): 530–544.
- [2] Alonso-Meijide JM, Bowles, C (2005). Generating functions for coalitional power indices: An application to the IMF. *Annals of Operations Research* 137(1): 21–44.
- [3] Aumann RJ, Maschler M (1985). Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the talmud. *Journal of Economic Theory* 36(2): 195–213.
- [4] Bachrach Y, Markakis E, Resnick E, Procaccia AD, Rosenschein JS, Saberi A (2010). Approximating power indices: theoretical and empirical analysis. *Autonomous Agents and Multi-Agent Systems* 20(2): 105-122.
- [5] Banzhaf JF (1964). Weighted voting doesn't work: A mathematical analysis. *Rutgers Law Reviews* 19: 317.
- [6] Castro J, Gómez D, Tejada J (2009). Polynomial calculation of the Shapley value based on sampling. *Computers & Operations Research* 36(5): 1726-1730.
- [7] Cochran WG (2007). *Sampling techniques*. Wiley, Hoboken.
- [8] Curiel IJ, Maschler M y Tijs SH (1987). Bankruptcy games. *Zeitschrift für operations research* 31(5): A143-A159.
- [9] Deng X, Papadimitriou CH (1994). On the complexity of cooperative solution concepts. *Mathematics of Operations Research* 19(2): 257–266.
- [10] European Commission, Joint Research Centre, Crippa M, Guizzardi D, Muntean M (2020) Fossil CO2 and GHG emissions of all world countries : 2020 report, Publications Office. <https://data.europa.eu/doi/10.2760/56420>. Accedido 24 de enero de 2022.
- [11] Fernández-García F, Puerto-Albandoz J (2006). *Teoría de Juegos Multiobjetivo*. Imagraf Impresores SA, Sevilla.
- [12] Fragnelli V, García-Jurado I, Norde H, Patrone F, Tijs S (2000). How to share railways infrastructure costs? *Game practice: Contributions from applied game theory*: 91–101. Springer.
- [13] González-Díaz J, García-Jurado I, Fiestras-Janeiro MG (2010). *An Introductory Course on Mathematical Game Theory*, Vol. 115, Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society and RSME.
- [14] Gallástegui MC, Iñarra E, Prellezo R (2002). Bankruptcy of Fishing Resources: The Northern European Anglerfish Fishery. *Marine Resource Economics* 17(4): 291–307 .

- [15] Hoeffding W (1963). Probability inequalities for sums of bounded random variables. *Journal of the American Statistical Association* 58(301): 13–30.
- [16] Hwang YA (2015). Two characterizations of the random arrival rule. *Economic Theory Bulletin* 3 (1): 43–52 .
- [17] Laruelle A, Valenciano F (2004). On the meaning of Owen–Banzhaf coalitional value in voting situations. *Theory and Decision* 56(1): 113–123.
- [18] Littlechild SC, Owen G (1973). A simple expression for the Shapley value in a special case. *Management Science* 20(3): 370–372.
- [19] Lucchetti R, Moretti S, Patrone F, Radrizzani P (2010). The Shapley and Banzhaf values in microarray games. *Computers & Operations Research* 37(8): 1406–1412.
- [20] Maleki S (2015). Addressing the computational issues of the Shapley value with applications in the smart grid. Tesis Doctoral, University of Southampton.
- [21] Mann I, Shapley LS (1960). Values of large games, IV: Evaluating the electoral college by Monte Carlo techniques. The RAND Corporation, Santa Mónica.
- [22] O’Neill B (1982). A problem of rights arbitration from the Talmud. *Mathematical Social Sciences* 2 (4): 345–371.
- [23] Owen G (1977). Values of games with a priori unions. In *Mathematical economics and game theory*: 76–88. Springer, Berlin, Heidelberg.
- [24] Owen G (1981). Modification of the Banzhaf-Coleman index for games with a priori unions. In *Power, voting, and voting power*: 232–238. Physica, Heidelberg.
- [25] Saavedra-Nieves A (2012). O Nucleolus dos Xogos Cooperativos. Trabajo Fin de Grao, Universidade de Santiago de Compostela.
- [26] Saavedra-Nieves A, Fiestras-Janeiro MG (2021). Sampling methods to estimate the Banzhaf-Owen value. *Annals of Operations Research* 301(1): 199–223.
- [27] Saavedra-Nieves A, García-Jurado I, Fiestras-Janeiro MG (2018). Estimation of the Owen value based on sampling. *The Mathematics of the Uncertain*: 347–356. Springer, Cham.
- [28] Saavedra-Nieves A, Saavedra-Nieves P (2020). On systems of quotas from bankruptcy perspective: the sampling estimation of the random arrival rule. *European Journal of Operational Research* 285(2): 655–669.
- [29] Shapley LS (1953). A value for n-person games. *Contributions to the Theory of Games* 2(28): 307–317.
- [30] Thomson W (2015). Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: an update. *Mathematical Social Sciences* 74: 41–59 .
- [31] Vázquez-Brage M, van den Nouweland A, García-Jurado I (1997). Owen’s coalitional value and aircraft landing fees. *Mathematical Social Sciences* 34(3): 273–286.