



UNIVERSIDADE DA CORUÑA

Universidade de Vigo

Traballo de Fin de Máster

Índices de Poder

Adrián Padín Romero

Máster en Técnicas Estatísticas

Curso 2020 – 2021

Proposta de Trabajo de Fin de Máster

Título en galego: Índices de Poder

Título en español: Índices de Poder

English title: Power Indices

Modalidade: A

Autor/a: Adrián Padín Romero

Director/a: Leticia Lorenzo Picado

Breve resumo: Preséntase unha revisión bibliográfica dos principais índices de poder tal e como se lles coñece na teoría de xogos cooperativos. Estes índices son o de Shapley-Shubik, Penrose-Banzhaf, Johnston, Deegan-Packel e Holler. Así mesmo, ó final deste traballo abordase unha aplicación práctica dos índices de poder a fin de exemplificar as variacións que estes poden sufrir ó forzar modificacións na circunscrición electoral empregada para as Eleccións Xerais de España de Novembro do 2019.

Dona Leticia Lorenzo Picado, profesora titular da Universidade de Vigo, informa que o Traballo de Fin de Máster titulado

Índices de Poder

foi realizado baixo a súa dirección por don Adrián Padín Romero para o Máster en Técnicas Estatísticas. Estimando que o traballo está rematado, dan a súa conformidade para a súa presentación e defensa ante un tribunal.

En Santiago de Compostela, a 6 de Setembro de 2021.

A directora:

Dona Leticia Lorenzo Picado

O autor:

Don Adrián Padín Romero

Índice de contidos

Resumo	IX
Introdución	1
Capítulo 1. O poder e a súa medición	2
A ciencia política e o poder.....	2
Os procesos electorais e a distribución do poder.....	3
Capítulo 2. Os principais índices de poder	8
Índice de Shapley-Shubik.....	9
Índice de Penrose-Banzhaf.....	11
Índice de Johnston.....	13
Índice de Deegan-Packel.....	14
Índice de Holler.....	15
Capítulo 3. Axiomatización e caracterización	17
Axiomatización dos índices de poder.....	18
Caracterización dos índices de poder.....	25
Capítulo 4. A circunscrición electoral e os índices de poder	27
Carga e recodificación dos datos.....	28
Obtención e presentación do reparto de escaños.....	32
Obtención e representación gráfica dos índices de poder.....	44
Análise dos resultados e conclusións.....	51
Listaxe de referencias	60
Bibliografía.....	60
Paquetes R.....	64

Resumo

Resumo en galego

Preséntase unha revisión bibliográfica dos principais índices de poder tal e como se lles coñece na teoría de xogos cooperativos. Estes índices son o de Shapley-Shubik, Penrose-Banzhaf, Johnston, Deegan-Packel e Holler. Así mesmo, ó final deste documento abórdase unha aplicación práctica dos índices de poder a fin de exemplificar as variacións que estes poden sufrir ó forzar modificacións na circunscrición electoral empregada para as Eleccións Xerais de España de novembro do 2019.

Resumen en español

Se presenta una revisión bibliográfica de los principales índices de poder tal y como se les conoce en la teoría de juegos cooperativos. Estos índices son el de Shapley-Shubik, Penrose-Banzhaf, Johnston, Deegan-Packel y Holler. Así mismo, finalizando este documento se aborda una aplicación práctica de los índices de poder a fin de ejemplificar las variaciones que estos pueden sufrir al forzarse modificaciones en la circunscripción electoral empleada para las Elecciones Generales de España de noviembre del 2019.

English abstract

A bibliographic review of the main power indices, as they are known in Cooperative Game Theory, is presented. These indices are Shapley-Shubik Power Index, Penrose-Banzhaf Power Index, Johnston Power Index, Deegan-Packel Power Index and Holler Power Index. In addition, a practical review of the power indices is addressed in order to exemplify variations that these may suffer by forcing changes in the electoral districts used for November 2019 General Elections in Spain.

Introdución

O exercicio do poder pode comprenderse coma a capacidade de influir nos resultados dun proceso de toma de decisións. A análise deste mesmo foi e é obxecto de estudo de numerosas disciplinas entre as que se atopan a ciencia política, a socioloxía ou a economía, sendo o principal nexo de unión entre todas elas as matemáticas, concretamente a teoría de xogos cooperativos.

Os índices de poder constitúen unha ferramenta especialmente útil á hora de comprender a forma, os efectos e as capacidades que un individuo presenta á hora de impor a súa opinión sobre diversas situacións nas que o peso que este pode exercer é cuantificable, é dicir, a cantidade de votos que un individuo pode emitir nun comité ou a cantidade de escaños cos que conta un partido político dentro dun parlamento logo dun proceso electoral.

Afondando nos procesos electorais, os índices de poder obtidos para cada partido poden verse afectados e variar en función de numerosas variables, como pode ser unha escisión interna dun grupo parlamentario previamente establecido, unha modificación ou selección dun algoritmo electoral diferente ou, tal e como se vai a estudar ó longo deste traballo, unha modificación das circunscricións electorais ás que está subordinada a asignación dos escaños. Para o caso que ocupa este documento, tomaranse tres posibles circunscricións electorais: provincial, autonómica e única, mantendo en todo caso o mesmo algoritmo electoral e supoñendo que non existen discrepancias internas dentro dos partidos, é dicir, que se respetará a disciplina de partido e os votos emitidos por cada parlamentario serán iguais dentro dos seus respectivos grupos.

Capítulo 1. O poder e a súa medición

A ciencia política e o poder

O estudo e conceptualización do poder foron e seguen a ser un dos principais suxeitos de investigación na ciencia política. Unha consideración común versa tal que «a ciencia política podería ser definida como o estudo do poder, as súas formas, as súas fontes, a súa distribución, a forma na que se exerce e os seus efectos.»(Partridge, 1963, p.117). Así mesmo, Lerner, Lasswell e Kaplan (1951) establecen que a ciencia política, observada como unha disciplina empírica, é o estudo sobre as formas e a distribución do poder.

Este poder (*Macht*), é o que Weber (2014) definiría coma as posibilidades que un individuo ten, dentro dunha relación social, de acadar os seus desexos incluso fronte á resistencia doutros e entendendo que esta resolución non depende única e exclusivamente da obediencia forzada daqueles que non contan con altas cotas de poder, senón da voluntariedade da mesma. Esta definición é facilmente observable nun caso real, como pode ser a formación dun goberno en minoría grazas á emisión de votos positivos por parte de partidos que poden ou non simpatizar co partido maioritario, de aí que en futuros exemplos e na práctica que se desenvolve no último capítulo deste traballo, se teñan en consideración coalicións de partidos que a priori non deberían colaborar por pura discrepancia ideolóxica. Outra definición sería a aportada por Hobbes no *Leviatán*, onde establece que o poder é a capacidade de asegurar un o benestar ou a vantaxe persoal para acadar un ben aparente no futuro.

En todo caso, na maioría dos estudos sobre o poder existe un problema á hora

de cuantificar esta capacidade de influír nos resultados das relacións sociais que así o contemplan. Johnston (1978) xa fala desta problemática e da complexidade que presentan as ciencias sociais á hora de presentar situacións reais en termos operacionais, pois, as relacións sociais están en todo caso subordinadas a intereses e comportamentos individuais impredecibles.

Seguindo o fío do comentado até agora, pode verse con claridade que unha das principais trabas que atopa a ciencia política e as ciencias sociais en xeral é a cuase forzada necesidade de estudar as características das relacións sociais *a posteriori*, sendo especialmente complexo prever as consecuencias dunha determinada interacción social *a priori*. Por sorte, a colaboración entre as ciencias sociais e as matemáticas permiten, asumindo uns altísimos marxes de erro, predicir en certo modo o resultado destas interaccións. Por exemplo, asumindo discrepancias ideolóxicas e puntos de encontro é posible predicir de forma moi sinxela aquelas formacións de goberno que teñen probabilidades máis altas de acadar os seus desexos de gobernar. Os índices de poder serven nestes casos para calcular as probabilidades que ten un partido ou individuo de ser decisivo no proceso de toma de decisións.

Os procesos electorais e a distribución do poder

Tomando como base o sistema electoral español, tal e como se recolle na *Lei Orgánica do Réxime Electoral Xeral*¹, compre sinalar que a distribución dos escanos por cada provincia ven determinada por:

1. O Congreso está formado por trescentos cincuenta deputados.

¹Ley Orgánica 5/1985, do 19 de xuño, do Réxime Electoral Xeral.

2. A cada provincia correspóndelle un mínimo inicial de dous deputados. Ceuta e Melilla están representadas por un deputado.
3. Os douscentos corenta e oito deputados restantes distribúense entre as provincias de forma proporcional á súa poboación.

Atendendo a isto, e logo da celebración das eleccións, distribúense os escanos asignados a cada provincia en base ó que se coñece coma o sistema D'Hondt, desenvolvido por Víctor D'Hondt (1882). Este establece que o reparto dos escanos ven determinado de forma que se ordenan de maior a menor as candidaturas en función da cantidade de votos percibidos, eliminando en primeiro lugar a aquelas candidaturas que non superen o umbral electoral². Unha vez ordenadas, procédese a dividir o total de votos de cada candidatura entre $(1, 2, 3, \dots, n)$ e unha vez dividida cada unha, tómanse aqueles valores máis altos e en orde descendente até completar a cantidade de deputados asignados a esa circunscrición. No caso de que se producise un empate, o escano sería designado ó partido cuxo total de votos recibidos sexa maior.

Unha vez rematado o proceso de asignación dos escanos, obtense unha clara imaxe da relación de forzas existente no parlamento, que requirirá de maioría absoluta para a conformación dun goberno, é dicir, superar os cento setenta e seis escanos nunha primeira votación. A día de hoxe a composición do congreso dos deputados lévanos a observar a democracia española coma un sistema multipartidista, fronte ás características de bipartidismo harmónico que amosaba dende os anos oitenta até o primeiro decenio do século XXI. Esta conclusión pode extraerse ó ver as necesidades que os partidos maioritarios presentaban á hora de formar gobernos estables, como

²Porcentaxe de voto baixo a cal son descartadas as candidaturas.

por exemplo a esixencia de chegar a acordos e concesións a cambio de votos favorables na investidura.

A continuación preséntanse diversos conceptos da teoría de xogos cooperativos que son precisos á hora de abordar a definición dos distintos índices de poder.

Un *xogo cooperativo* é un par (N, v) , sendo N un conxunto finito $N \subset \mathbb{N}$ e v unha función $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $v(\emptyset) = 0$. Os elementos de N son o que se coñece coma xogadores, os subconxuntos de N coalicións que se adoitan denotar por S e v a súa función característica, a cal indica o beneficio ou custo derivado da cooperación dos axentes que participan en S . A principal diferenza entre estes e os non-cooperativos é que os distintos axentes que participan do xogo poden obter beneficios ó establecer acordos vinculantes.

A *superaditividade* implica que o valor da unión de dúas coalicións disxuntas nun debería ser menor ó da suma dos valores das coalicións por separado. Esta propiedade ven determinada pola expresión $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ cando $S, T \subseteq N$ satisfacendo que $S \cap T = \emptyset$. Denotaranse os xogos simples superaditivos con conxunto de axentes N como SG_n .

Un *xogo simple* é un xogo cooperativo (N, v) no cal: $v(S) \in \{0, 1\}$. Este tipo de xogos son tamén monótonos, pois se $S \subset T$ e $v(S) = 1$, entón $v(T) = 1$. Isto leva a poder dividir as coalicións en gañadoras, $v(S) = 1$, e perdedoras en calquera outro caso.

Dada unha coalición S , defínese o *xogo de unanimidade* u_S como

$$u_S(T) = \begin{cases} 1 & \text{se } S \subseteq T \\ 0 & \text{se } S \not\subseteq T \end{cases}$$

Na teoría de xogos cooperativos é posible analizar as relacións de poder nun proceso de toma de decisión a través dos índices de poder, estes ofrecen unha imaxe clara das probabiliades de que un individuo sexa determinante nese mesmo proceso polo que son especialmente útiles en colaboración coas ciencias sociais para comprender e prever as accións que determinados axentes poden tomar respecto dos seus competidores e aliados.

Zuckerman *et al* (2012) presentan os *xogos de votación ponderada* como unha ferramenta útil que ofrece un modelo simple sobre os procesos de toma de decisión nas sociedades humanas e sistemas nos que están presentes múltiples axentes. Este tipo de xogos veñen determinados por tres factores, sendo estes, o número total de xogadores que interveñen no proceso, os pesos relativos a cada un deles e unha cuota predeterminada que estes deberán acadar se agardan que unha coalición sexa gañadora. Os xogos de votación ponderada son un caso particular de xogos simples.

Asúmase que se da un xogo en forma de función característica con $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$. Considérese un xogo simple que satisfai a relación $v(S) \in \{0, 1\} \forall S \subseteq N$. Dado un xogo v cun conxunto de xogadores $N = \{1, \dots, n\}$, definindo $w \in \mathbb{R}^N$ coma o vector no que se presenta o peso de cada xogador e q a cuota especificada. A súa función característica ven determinada por:

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{se } \sum_{j \in S} w_j \geq q \\ 0 & \text{outro caso} \end{cases}$$

Onde $v(S) = 1$ implica que se trata dunha coalición gañadora ó superar a cuota, fronte a $v(S) = 0$ que supón que esta é perdedora ó non superala. Este tipo de xogos son claramente monótonos ó satisfacer a seguinte relación:

$$[S \subseteq T] \Rightarrow v(S) \leq v(T)$$

Estes xogos, representados por $\{N, w, q\}$ coñécense coma xogos de votación ponderada, e serán os empregados á hora de calcular os índices de poder citados a continuación.

Capítulo 2. Os principais índices de poder

Neste capítulo apórtase unha revisión bibliográfica dos principais índices de poder e preséntase unha primeira achega ó uso do paquete `CoopGame` en R.

Un índice de poder é «*unha función $\Phi : SG_n \rightarrow R^n$ que lle asocia a cada xogo simple superaditivo v un poder $\Phi(v)$, no que cada compoñente i -ésima será interpretada coma a influencia que o xogador i pode exercer sobre o resultado da coalición.*» (Laruelle e Valenciano, 2000, p.6).

Procédese a definir aqueles conceptos precisos para comprender o desenvolvemento dos índices que se van a definir a continuación.

Dado un xogo en SG_n , considérese unha *coalición gañadora* toda coalición tal que $v(S) = 1$.

Coalicións mínimas gañadoras son todas aquelas coalicións $S \in 2^N$ tal que $v(S) = 1$ pero $v(S \setminus \{i\}) = 0$ para todo $i \in S$. Denotase por $\mathcal{M}(v)$ o conxunto de coalicións mínimas gañadoras de v , mentres que para $i \in N$, $\mathcal{M}_i(v)$ recolle o conxunto de coalicións mínimas gañadoras que conteñen ó xogador i . É dicir, unha coalición mínima gañadora é aquela que non presenta axentes irrelevantes. Cando polo menos un dos xogadores partícipes da coalición S é crítico, esta coñécese como unha coalición cuasi-mínima gañadora, mentres que cando todos os xogadores que forman son críticos esta é unha coalición mínima gañadora.

Un *xogador pivote* é aquel que ten a capacidade de transformar unha coalición perdedora nunha gañadora no momento no que pasa a formar parte da mesma. Esta nomenclatura está ligada ás coalicións secuenciais, nas que a orde na que se forman é importante. Formalmente, dise que $i \in N$ é un xogador pivote cando existe unha

coalición S tal que $i \notin S$, $v(S) = 0$ pero $v(S \cup \{i\}) = 1$.

Por outra banda, preséntase a figura do *xogador crítico*, o cal ó igual ca no caso anterior, ten a capacidade de influir no resultado dunha coalición en base á súa presenza na mesma. En termos xerais, considérase xogador crítico a aquel que ó modificar o seu apoio a unha coalición concreta fai que esta sexa unha coalición perdedora. Ó contrario ca no caso do xogador pivote, que só pode ser un, pode haber tantos xogadores críticos como xogadores forman parte dunha coalición.

Cando polo menos un dos xogadores partícipes da coalición S é crítico, esta coñécese como unha *coalición cuasi-mínima gañadora*, mentres que cando todos os xogadores que forman son críticos esta é unha coalición mínima gañadora.

Índice de Shapley-Shubik

Nunha publicación sobre teoría de xogos, Lloyd Shapley (1953) presentaría a caracterización axiomática do que se coñece coma o valor de Shapley. Un ano máis tarde, presentaríase a aplicación deste valor a xogos simples superaditivos, obténdose o índice de poder de Shapley-Shubik (Shapley e Shubik, 1954). Este índice toma consideración do número de veces que un xogador actúa como pivote así coma o número de permutacións dos xogadores.

A xustificación deste índice foi establecida por Shapley e Shubik (1954) ó considerar un proceso de votación suxeito a unha cuota preestablecida que determinaría a maioría precisa para a conformación dunha coalición gañadora. «Considerese un grupo de individuos dispostos a participar dunha votación. Votan en orde e en canto un dos resultados acada a maioría, considérase que a votación

rematou. Escollase unha orde de votación aleatoria. Entón obtense a frecuencia coa que cada individuo pertence a un grupo no que se emprega o seu voto e, máis importante, as veces que este é pivote» (Shapley, Shubik, 1954, p.788). Entón, nun xogo simple superaditivo (N, v) , o índice de Shapley-Shubik viría determinado por $\varphi(v) = (\varphi_1(v), \dots, \varphi_n(v))$, onde

$$\varphi_i(v) = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ S \ni i}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} [v(S) - v(S \setminus \{i\})].$$

Este índice de poder estivo suxeito a numerosas revisións e críticas ó longo da historia. Moitas destas foron recollidas por Johnston (1978) nunha publicación na que este defendía a utilidade do seu índice de poder fronte ás críticas presentadas por Laver (1978), quen consideraba máis axeitado o descrito por Shapley e Shubik (1954).

Unha das principais publicacións nas que se cuestiona o índice de Shapley-Shubik foi a presentada por Banzhaf (1965), na que este mesmo describiría o seu propio índice de poder tomando como referencia o método da raíz cadrada descrito por Penrose (1946).

O índice de Shapley-Shubik en R

O software estatístico R presenta unha gran variedade de paquetes orientados á análise dos xogos cooperativos. Entre estas capacidades tamén está a posibilidade de a partir dun xogo determinado, obter a súa función característica e os distintos índices de poder.

Ó longo deste apartado, así coma no resto dos casos que se tratarán a continuación,

empregarase o paquete `CoopGame` para a análise e obtención dos distintos índices de poder dun xogo de votación ponderada $\{N, w, q\}$.

A modo de exemplo para cada caso empregarase o seguinte xogo $[5; 3, 2, 1, 1]$, onde $N = 4$, $w = (3, 2, 1, 1)$ e $q = 5$. Comézase por obter a función característica do xogo:

```
library(CoopGame)

n<- 4

q<- 5

w<- c(3,2,1,1)

v<- weightedVotingGameVector(n,w,q); v
```

```
## [1] 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 1 1 0 1
```

Unha vez determinada a función característica, pode obterse directamente o índice de Shapley-Shubik empregando a seguinte función:

```
shapleyShubikIndex(v)
```

```
## [1] 0.58333333 0.25000000 0.08333333 0.08333333
```

Índice de Penrose-Banzhaf

Banzhaf (1965) considera que o índice de Shapley-Shubik erra ó depender do número de permutacións en vez do de combinacións nas que cada individuo que participa da votación pode emitir un voto crítico. A orde na que os participantes emiten

o seu voto carece de importancia para Banzhaf, por exemplo, á hora de considerar un proceso de votación electrónico no que a emisión dos mesmos é simultánea.

É por isto que Banzhaf (1965), presenta unha alternativa radicada na probabilidade de modificar o resultado dunha votación. Isto ven dado ó ter en consideración o número de coalicións gañadoras e o número de veces que un ou máis xogadores son críticos dentro delas. Dado un xogo simple superaditivo (N, v) , o índice de Banzhaf ven dado por $\beta(v) = (\beta_1(v), \dots, \beta_n(v))$, onde

$$\beta_i(v) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\substack{S \subseteq N \\ S \ni i}} [v(S) - v(S \setminus \{i\})].$$

Este índice non está normalizado³, o cal limita a posibilidade de comparar este co resto dos índices presentados. Motivo polo que se terá en consideración a seguinte normalización:

$$\tilde{\beta}_i(v) = \frac{\beta_i(v)}{\sum_{k \in N} \beta_k(v)}.$$

O índice de Banzhaf en R

Para este caso, a librería `CoopGame` permite obter o índice de Banzhaf e o índice de Banzhaf normalizado. Seguindo o procedemento amosado para o caso do índice de Shapley-Shubik, obtéñense os seguintes resultados:

³Para o caso que nos ocupa, a normalización dos índices implica a transformación dos mesmos para adecualos e acadar resultados de suma 1. Este proceso facilita a análise e comparación dos distintos índices.

```
banzhafValue(v)
```

```
## [1] 0.625 0.375 0.125 0.125
```

```
normalizedBanzhafIndex(v)
```

```
## [1] 0.5 0.3 0.1 0.1
```

Índice de Johnston

O índice de poder de Johnston parte dunha apreciación de Laver (1978) na que este sinala que o poder dun partido debería ser maior se este é o único coa capacidade de destruír a coalición fronte a unha situación na que este valor engadido fose común a máis partidos da propia coalición. Tal e como sinala Laruelle (1999), fronte a este comentario a resposta de Johnston (1978) foi presentar unha modificación do índice de Banzhaf normalizado na que se pon en valor precisamente esa capacidade de ser un xogador crítico.

Nun xogo simple superaditivo (N, v) , sendo $\kappa(S)$ o número de xogadores críticos nunha coalición gañadora S . Pódese calcular $\gamma(v) = (\gamma_1(v), \dots, \gamma_n(v))$, onde

$$\gamma_i(v) = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ S \ni i}} \frac{1}{\kappa(S)} [v(S) - v(S \setminus \{i\})].$$

Presentada esta expresión, o índice de Johnston $(\tilde{\gamma}_i(v))$ obtense a través da seguinte normalización:

$$\tilde{\gamma}(v) = \frac{\gamma_i(v)}{\sum_{S \subseteq NS \ni i} \gamma_k(v)}.$$

O índice de Johnston en R

A obtención do índice de Johnston segue o mesmo procedemento amosado nos casos anteriores:

```
johnstonIndex(v)
```

```
## [1] 0.56666667 0.30000000 0.06666667 0.06666667
```

Índice de Deegan-Packel

Deegan e Packel (1978) presentaron un índice de poder baseado nos argumentos expostos por Riker (1962), nos que este establecía que nun xogo de suma zero, de n -xogadores, onde están permitidos os pagos laterais⁴, os xogadores son racionais e contan con información perfecta, só se producen coalicións mínimas gañadoras.

O índice de Deegan-Packel basea o seu razonamento nunha serie de supostos concretos. Estes determinan que só as coalicións mínimas gañadoras sairán victoriosas, cada coalición mínima gañadora ten a mesma probabilidade de formarse e os xogadores dunha coalición gañadora mínima dividen os beneficios de forma equitativa.

Todas estas suposicións poden considerarse axeitadas a diversas situacións, especialmente en procesos de votación.

⁴A redistribución dos beneficios obtidos entre os membros dunha coalición a fin de consolidala.

Dacordo a estas características, Deegan e Packel (1978) definirían o que se coñece coma o índice de Deegan-Packel. Dado un xogo simple superaditivo (N, v) , o índice de Deegan-Packel ven dado por $\rho(v) = (\rho_1(v), \dots, \rho_n(v))$, onde

$$\rho_i(v) = \frac{1}{|\mathcal{M}(v)|} \sum_{S \in \mathcal{M}_i(v)} \frac{1}{|S|} [v(S) - v(S \setminus \{i\})].$$

Nesta expresión pode observarse que, en efecto, están presentes os tres supostos descritos por Deegan e Packel. Só se teñen en conta as coalicións minimais gañadoras que inclúen ó xogador i e cada coalición é tratada de igual maneira dentro do sumatorio, cumprindo co primeiro e o segundo suposto. Ademais, para cada $S \in \mathcal{M}(v)$, o termo $\frac{1}{|S|}$ indica que o xogador i reparte o pago de maneira equitativa co resto de xogadores. Finalmente $\frac{1}{|\mathcal{M}(v)|}$ emprégase para normalizar a expresión e obter un poder total de suma 1.

O índice de Deegan-Packel en R

Este índice de poder é tamén sinxelo de obter mediante a seguinte función:

```
deeganPackelIndex(v)
```

```
## [1] 0.4166667 0.2500000 0.1666667 0.1666667
```

Índice de Holler

Courtin e Tchantcho (2019) sinalan que o índice de Deegan-Packel asume que só as coalicións minimais gañadoras poden formarse de forma intencionada. Holler (1982)

argumenta que estas medidas son inadecuadas, pois o valor dunha coalición, unha vez formada, debe deixar de ser visto coma un ben privado para ser comprendido coma un ben público. A formación dunha coalición non trata sobre compartir unha serie de beneficios, senón de asumir que o valor destas radica na capacidade das mesmas para producir bens que non serían acadables de forma individual.

Holler (1982) introduciría o índice do ben público, baseado nos principios de non-rivalidade na formación, non-exclusividade no acceso e a non-parasitación da propiedade. O *PGI*⁵ presenta unha medida alternativa asignando a influencia de forma proporcional ó número de coalicións mínimas gañadoras ás que pertence un individuo.

Nun xogo simple superaditivo (N, v) , chámese $\sigma(v) = (\sigma_1(v), \dots, \sigma_n(v))$ ó índice de poder de Holler non-normalizado, onde

$$\sigma_i(v) = \frac{1}{|\mathcal{M}(v)|} \sum_{S \in \mathcal{M}_i(v)} [v(S) - v(S \setminus \{i\})] = \frac{|\mathcal{M}_i(v)|}{|\mathcal{M}(v)|}.$$

O índice de Holler, denotado $\tilde{\sigma}_i(v)$, obtense aplicando a seguinte normalización:

$$\tilde{\sigma}_i(v) = \frac{\sigma_i(v)}{\sum_{k \in N} \sigma_k(v)} = \frac{|\mathcal{M}_i(v)|}{\sum_{k \in N} |\mathcal{M}_k(v)|}.$$

O índice de Holler en R

O índice de Holler, ou do ben público, obtense da seguinte maneira:

⁵*Public Good Index*

```
publicGoodIndex(v)
```

```
## [1] 0.4 0.2 0.2 0.2
```

Capítulo 3. Axiomatización e caracterización

Os índices de poder previamente presentados contan cunha serie de características que os diferencian dos outros e que poden levar a escoller un ou outro en función do suxeito de investigación que se presente. Brams (2011) sinala que é especialmente complexo escoller un ou outro índice que reflecta mellor a realidade das relacións de poder, polo que a presentación dun argumentario que permita a xustificación da escolla dun que se poida considerar superior sobre outros é limitada. Os avances nas ciencias sociais son lentos, tal e como versa Johnston (1978), quen considera que é sinxelo establecer un marco conceptual para moitas das situacións que xorden da interacción social pero enormemente complexo abordalos en termos operacionais. Isto lévanos a procurar unha serie de caracterizacións que permitan, a priori, contemplar as virtudes e defectos que poidan xurdir á hora de empregar os índices de poder como espello da realidade.

Laruelle (1999) considera que unha forma natural de avaliar a idoneidade dunha medida axiomatizada e a discusión da plausibilidade dos propios axiomas. Atendendo a isto, procédese a presentar os axiomas subxacentes ós distintos índices de poder e a súa xustificación.

Axiomatización dos índices de poder

O axioma da anonimidade

Este axioma establece que a medida do poder dun xogador non depende do seu nome, tamén se coñece coma o axioma da simetría. Para todo $v \in SG_n$, calquera permutación π de N , e calquera $i \in N$,

$$\Phi_i(\pi v) = \Phi_{\pi(i)}(v), \text{ onde } (\pi v)(S) := v(\pi(S)).$$

«A xustificación deste axioma é que os nomes dos xogadores non deberían importar á hora de medir o poder, no sentido de que, no caso de que se intercambien os nomes dos xogadores non varíe a distribución de poder. En particular, isto implica que se dous xogadores son críticos na mesma coalición, o seu poder é o mesmo. » (Laruelle, 1999, p.8)

Este axioma é común a tódolos índices de poder.

O axioma do xogador nulo

Un xogador que nunca é crítico na formación de calquera coalición presenta un poder igual a cero.

$$\text{Se } v(S) = v(S \setminus \{i\}) \forall S \text{ onde } i \in S, \text{ entón } \Phi_i(v) = 0$$

Laruelle (1999) xustifica este axioma establecendo que o realmente importante na medición do poder é a capacidade de exercer unha posición de presión dentro da

coalición, é dicir, de ser un xogador crítico.

O axioma do xogador nulo é común a tódolos índices de poder.

O axioma da eficiencia

Tamén chamado o axioma do poder total de Shapley ou o axioma do poder relativo (Laruelle, Valenciano, 2000). A principal característica deste axioma é que a suma do poder dos xogadores é un.

$$\sum_{i \in N} \Phi_i(v) = 1.$$

Este axioma pode xustificarse ó abordalo dende a perspectiva do cálculo de probabilidades. A medida do poder é a probabilidade de que un xogador sexa determinante á hora de establecer coalicións co resto de xogadores. Outra posible xustificación é abordada por Laruelle (1999), quen considera que a medida do poder só importa en termos relativos, é dicir, na posición de cada xogador respecto do resto.

Como xa se considerou con anterioridade, o cumprimento do axioma do poder relativo facilita a comparación e a análise dos distintos índices de poder.

Este axioma é común a tódolos índices de poder, a excepción do índice de Banzhaf non-normalizado, motivo polo que en apartados anteriores se fai referencia á alternativa normalizada deste mesmo.

O axioma do poder absoluto

Este axioma é característico do índice de Banzhaf non-normalizado, polo que tamén se coñece coma o axioma do poder absoluto de Banzhaf. A premisa do mesmo, é que «A medida do poder dun xogador obtense tomando o número de situacións nas que un xogador é crítico dividido polo número de coalicións ás que pertence calquera xogador.» (Laruelle, 1999, p.9).

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \Phi_i(v) &= \frac{1}{2^n - 1} \bar{\eta}(v), \text{ onde } \bar{\eta}(v) = \\ &= \sum_{i=1}^n \eta_i(v) \text{ e } \eta_i(v) = \sum_{S \subseteq NS \ni i} [v(S) - v(S \setminus \{i\})]. \end{aligned}$$

A principal diferenza salientable entre o axioma do poder absoluto e o do poder relativo é a interpretación que estos fan do poder. Os índices que satisfán o axioma do poder relativo distribúen unha unidade de poder, é dicir, a suma da medida de poder de tódolos xogadores é un. Para o caso do axioma do poder absoluto esta distribución do poder depende da regra de decisión empregada, por exemplo, tal e como presenta Laruelle (1999), o índice de Banzhaf aporta valores máis altos en xogos suxeitos a unha regra de maioría simple que en xogos de unanimidade, é dicir, a probabilidade de que un xogador sexa determinante na formación dunha coalición gañadora é maior en xogos de maioría simple.

O axioma da transferibilidade

Shapley e Dubey (1979) definen que para calquera $v, w \in SG_n$ tal que $v \vee w \in SG_n$,

$$\Phi(v) + \Phi(w) = \Phi(v \wedge w) + \Phi(v \vee w),$$

onde $(v \wedge w)(S) := \min\{v(S), w(S)\}$ e $(v \vee w)(S) := \max\{v(S), w(S)\}$

Este axioma é común ó índice de Shapley-Shubik e o de Banzhaf. Laruelle (1999) entende que esta definición presentada por Shapley e Dubey (1979) non é transparente no contexto dos procesos de toma de decisións, polo que propón unha alternativa que remarca o estado dunha coalición ó pasar esta de ser mínima gañadora a máxima perdedora.

«A eliminación dunha coalición mínima dun conxunto de coalicións gañadoras ten o mesmo efecto na medida do poder de calquera xogo no que esta coalición actúa como mínima gañadora.» (Laruelle, 1999, p.11). Dados (N, v) e (N, w) , dous xogos simples superaditivos, se $S \in \mathcal{M}(v) \cap \mathcal{M}(w)$ entón,

$$\Phi(v) - \Phi(\bar{v}^S) = \Phi(w) - \Phi(\bar{w}^S)$$

O axioma da DP-fusionabilidade

Deegan e Packel (1978) definiron o axioma da fusionabilidade de forma que dados (N, v) e (N, w) dous xogos simples superaditivos entón,

$$(v \vee w)(S) = \begin{cases} 1 & \text{se } v(S) = 1 \text{ ou } w(S) = 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Dise que $v, w \in SG_n$ satisfán o axioma da fusionabilidade se

$$\forall S \in \mathcal{M}(v) \text{ e } T \in \mathcal{M}(w) \Rightarrow S \not\subseteq T \text{ e } T \not\subseteq S.$$

Esta condición de fusionabilidade é equivalente a requirir que $|\mathcal{M}(v \vee w)| = |\mathcal{M}(v)| + |\mathcal{M}(w)|$.

Laruelle (1999) explica a proposta de Deegan e Packel (1978), tal que, dous xogos definidos por (N, v) e (N, w) son fusionables se ningunha coalición mínima gañadora do xogo (N, v) inclúe ou está incluída nunha coalición mínima gañadora de (N, w)

O axioma da PGI-fusionabilidade

Laruelle (1999) presenta unha reformulación da propiedade da PGI-fusionabilidade, a cal foi inicialmente formulada por Holler e Packel (1983).

«A eliminación dunha coalición mínima gañadora dun conxunto de coalicións mínimas gañadoras ten un efecto similar na medida do poder dun par de xogos nos que esta coalición era mínima gañadora.» (Laruelle, 1999, p.11) Dados (N, v) e (N, w) dous xogos simples superaditivos. Se $S \in \mathcal{M}(v) \cap \mathcal{M}(w)$, entón

$$\sum_{i \in N} \mathcal{M}_i(v) \Phi(v) - \sum_{i \in N} \mathcal{M}(\hat{v}^S) \Phi(\hat{v}^S) = \sum_{i \in N} \mathcal{M}_i(w) \Phi(w) - \sum_{i \in N} \mathcal{M}(\hat{w}^S) \Phi(\hat{w}^S)$$

O axioma da fusionabilidade crítica

En Lorenzo-Freire *et al.* (2007), preséntase unha caracterización do índice de Johnston, da cal xorde unha nova propiedade. Dado un xogo $(N, v) \in SG_n$ onde $\mathcal{M}(v) = \{S_1, \dots, S_m\}$ e $M = \{1, \dots, m\}$, dise que para todo xogador $i \in N$

$$f_i(n, v) = \sum_{S \in \mathcal{F}} \frac{|G(S, v)|}{|G(v)|} f_i(N, u_S), \text{ onde } \mathcal{F} = \{\cap_{j \in R} S_j : \cap_{j \in R} S_j \neq \emptyset, R \subseteq M\}$$

Esta propiedade establece que, o poder nun xogo (N, v) é a media ponderada do poder do xogo de unanimidade das coalicións minimais gañadoras. O peso dun compoñente do xogo de unanimidade, atendendo á coalición mínima gañadora S , é a proporción de coalicións cuasi-mínimas onde S é mínima gañadora.

Alternativas na axiomatización dos índices de poder

Existen variacións na axiomatización dos índices de poder que engaden ou substitúen algunhas das propiedades aquí citadas, por exemplo, Young (1985) propuxo a propiedade da monotonicidade forte. Esta versa que unha solución f satisfai a monotonicidade forte se $f_i(N, v) \geq f_i(N, w)$ para cada par de xogos (N, v) e $(N, w) \in SG_n$ para todo $i \in N$ tal que $v(S \cup i) - v(S) \geq w(S \cup i) - w(S)$ para todo $S \subseteq N \setminus i$.

Outra propiedade alternativa sería a da DP-monotonicidade mínima, proposta por Lorenzo-Freire *et al* (2007) a fin de remprazar o axioma da DP-fusionabilidade. Esta consideraba que un índice de poder $f \in SG_n$ satisfai a propiedade da DP-monotonicidade mínima para calquera par de xogos $(N, v), (N, w)$, cando para todo xogador $i \in N$ tal que $M_i(v) \subseteq M_i(w)$,

$$f_i(N, w)|M(w)| \geq f_i(N, v)|M(v)|$$

Unha explicación a esta propiedade sería que «se un conxunto de coalicións mínimas gañadoras que conteñen ó xogador $i \in N$ no xogo (N, v) é un subconxunto de coalicións mínimas gañadoras contendo a ese xogador no xogo (N, w) , entón o poder do xogador i no xogo (N, w) non é menor ca o poder do xogador i en (N, v) .» (Alonso-Meijide *et al*, 2008).

Finalmente, en Alonso-Meijide *et al* (2008), preséntase a propiedade da PGI-monotonicidade mínima como alternativa á PGI-fusionabilidade. Esta parte dunha premisa similar á proposta por Young (1985) para a monotonicidade forte. Un índice de poder $f \in SG_n$ satisfai a propiedade da PGI-monotonicidade mínima para calquera par de xogos $(N, v), (N, w) \in SG_n$, cando para todo xogador $i \in N$ tal que $M_i(v) \subseteq M_i(w)$

$$f_i(N, w) \sum_{j \in N} |M_j(w)| \geq f_i(N, v) \sum_{j \in N} |M_j(v)|$$

A xustificación desta propiedade é a mesma que a presentada para a propiedade da DP-monotonicidade mínima.

Caracterización dos índices de poder

Unha vez rematada a axiomatización dos índices de poder, pódese proceder coa caracterización dos mesmos. O proceso de caracterización dos índices de poder levouse a cabo ó longo dos anos e da man de diversos autores.

- Shapley e Dubey (1979) estableceron que o único índice de poder que satisfai os axiomas de anonimidade, xogador nulo, eficiencia e transferibilidade é o de Shapley-Shubik (φ). Young (1985) substituiría a propiedade da transferibilidade pola da monotonicidade forte.
- Shapley e Dubey (1979) determinan tamén que o único índice de poder que satisfai os axiomas de anonimidade, xogador nulo, poder absoluto e transferibilidade é o índice de Penrose-Banzhaf (β). Lorenzo-Freire *et al* (2007) substituiría a propiedade da transferibilidade pola da monotonicidade forte.
- Para atopar unha caracterización do índice de Johnston habería que agardar até a establecida por Lorenzo-Freire *et al* (2007). Esta consideraba que o único índice de poder que satisfai os axiomas de anonimidade, xogador nulo, eficiencia e fusionabilidade crítica é o índice de poder de Johnston ($\tilde{\gamma}$)
- Deegan e Packel (1978) presentaron unha caracterización do índice de Deegan-Packel. O único índice de poder que satisfai os axiomas de anonimidade, xogador nulo, eficiencia e DP-fusionabilidade é o índice de Deegan-Packel (ρ). Lorenzo-Freire *et al* (2007) substituiría a DP-fusionabilidade pola DP-monotonicidade mínima.
- Unha caracterización axiomática do índice de Holler pode ser atopada

en Holler e Packel (1983), esta versa da seguinte maneira. O único índice de poder que satisfai os axiomas de anonimidade, xogador nulo, eficiencia e PGI-fusionabilidade é o índice de Holler ou índice do ben público ($\tilde{\sigma}$). Alonso-Meijide *et al* (2008) substituiría a PGI-fusionabilidade pola PGI-monotonicidade mínima.

Atendendo ás caracterizacións axiomáticas presentadas neste apartado constrúese a seguinte táboa.

Táboa 1.

Caracterización dos Índices de Poder

	φ	β	$\tilde{\gamma}$	ρ	$\tilde{\sigma}$
Anonimidade	Si	Si	Si	Si	Si
Xogador nulo	Si	Si	Si	Si	Si
Eficiencia	Si	Non	Si	Si	Si
Poder absoluto	Non	Si	Non	Non	Non
Transferibilidade	Si	Si	Non	Non	Non
DP-fusion	Non	Non	Non	Si	Non
DP-monot.mínima	Non	Non	Non	Si	Non
PGI-fusion	Non	Non	Non	Non	Si
PGI-monot.mínim	Non	Non	Non	Non	Si
Fusion.Crítica	Non	Non	Si	Non	Non
Monoton.Forte	Si	Si	Non	Non	Non

Capítulo 4. A circunscrición electoral e os índices de poder

A circunscrición electoral empregada para o cómputo do reparto de escaños afecta á distribución do poder dentro das cámaras de representantes até o punto de supoñer a desaparición nas mesmas de formacións políticas con máis ou menos representación, así coma variacións na asignación de escaños a partidos con maior presenza. Na actualidade, a circunscrición electoral nos procesos electorais ó Congreso dos Deputados en España é a provincia, e esta, tal e como sinala Cervera (2014) favorece ós partidos maioritarios que se presentan a nivel nacional e a aqueles que, pese a contar con poucos votos a nivel nacional sí presentan un peso bastante alto en devanditas circunscricións.

Un claro exemplo disto, e tal e como se verá a continuación son os resultados obtidos polo Partido Socialista Obrero Español (PSOE) e Partido Popular (PP), que perden representación conforme medra a circunscrición electoral empregada en detrimento de forzas de peso intermedio como Unidas Podemos (UP), Vox (VOX) e Ciudadanos (Cs) que se ven favorecidas. por exemplo, nos casos nos que se toman como punto de referencia a circunscrición autonómica e única. Históricamente é sinxelo ver como os partidos menos favorecidos pola circunscrición provincial son aqueles que presentan candidaturas a nivel estatal con boa acollida en termos absolutos, pero que non acadan cotas elevadas nas circunscricións pequenas. Un claro exemplo desta desigualdade no reparto de escaños é a que presentou Izquierda Unida (IU) ó longo da súa historia, vendo como a súa porcentaxe de voto sobre o total se via infrarrepresentada nas institucións.

Dito isto, e partindo da base de que o uso dunha ou outra circunscrición afecta ó reparto de escaños, posto que consideramos un xogo de votación ponderada, os pesos dos partidos variarán afectando tamén á distribución de poder que se pode analizar a partires dos índices de poder. Procédese polo tanto, a estudar os efectos das circunscricións electorais sobre os índices de poder que foron tratados ó longo deste documento.

Carga e recodificación dos datos

Nun primeiro lugar, execútanse os paquetes precisos para a execución desta práctica, que se realizará empregando o software estatístico R.

```
library(readxl);library(electoral);library(cowplot)
library(CoopGame);library(data.table);library(ggplot2)
library(ggparliament);library(dplyr)
```

Procédese agora coa carga dos datos precisos para levar a cabo a análise. Tómanse os resultados das decimoquintas eleccións xerais en España, celebradas o 10 de novembro do ano 2019.

CIRCUNSCRICIÓN PROVINCIAL

```
RES.PROV<-as.data.frame(read_excel("CIRCUNSC_PROV.xlsx"))
rownames(RES.PROV)<- RES.PROV[,1]; RES.PROV[,1]<- NULL
ESCANOS.PROV<- c(6, 9, 6, 7, 5, 5, 11, 12, 3, 3, 7,
                 7, 8, 8, 7, 5, 4, 5, 3, 3, 6, 3, 4,
                 4, 3, 4, 3, 2, 5, 3, 32, 6, 4, 6, 6, 4,
                 8, 4, 4, 7, 37, 5, 4, 6, 8, 10, 4, 12,
                 5, 15, 1, 1) # Reparto de escaños
```

CIRCUNSCRICIÓN AUTONÓMICA

```
RES.AUTO<-as.data.frame(read_excel("CIRCUNSC_AUTONOMIAS.xlsx"))
rownames(RES.AUTO)<- RES.AUTO[,1]; RES.AUTO[,1]<- NULL
ESCANOS.AUTO<- c(61, 13, 7, 8, 15, 5, 21, 31,
                 48, 10, 23, 37, 5, 18, 10, 4,
                 32, 1, 1) # Reparto de escaños
```

CIRCUNSCRICIÓN ÚNICA

```
RES.UNICA<- data.frame(t(colSums(RES.AUTO))); rownames(RES.UNICA)<- "TOTAL"
ESCANOS.UNICA<- 350 # Reparto de escaños
```

Para o caso da circunscrición única, é preciso agrupar os votos das candidaturas para poder aplicar o umbral electoral. No caso de UP, súmanse tódalas candidaturas, comunmente coñecidas como *mareas*. Para Más País (MP) realízase a mesma acción e finalmente para o caso de Navarra Suma (NA+), divídense os votos a partes iguais entre os membros da coalición (PP e Cs) obviando a Union del Pueblo Navarro (UPN).

Este paso é exclusivo do exemplo no que se toma como referencia a circunscrición única, pois as candidaturas serían unitarias a fin de maximizar beneficios. Un proceso semellante será aplicado ós casos nos que se traballa coas circunscricións provincial e autonómica, pero nese momento, sumaranse os escanos das candidaturas e non os votos pois só se procurará unha mellor representación gráfica dos resultados.

```
## UNIDAS PODEMOS ##
```

```
RES.UNICA$UP<- sum(RES.UNICA$UP.CT, RES.UNICA$UP.GA, RES.UNICA$UP.VC,  
                  RES.UNICA$UP)
```

```
RES.UNICA$UP.CT<- NULL; RES.UNICA$UP.GA<- NULL; RES.UNICA$UP.VC<- NULL
```

```
## MÁS PAÍS ##
```

```
RES.UNICA$MP<- sum(RES.UNICA$MP, RES.UNICA$MP.AR, RES.UNICA$MP.CTIB)
```

```
RES.UNICA$MP.AR<- NULL; RES.UNICA$MP.CTIB<- NULL
```

```
## NAVARRA SUMA ##
```

```
RES.UNICA$PP<- RES.UNICA$PP+(RES.UNICA$NA./2)
```

```
RES.UNICA$Cs<- RES.UNICA$Cs+(RES.UNICA$NA./2)
```

Unha vez recollidos todos os datos precisos sobre as eleccións, o seguinte paso é a aplicación do umbral electoral coa conseguinte eliminación das candidaturas que se atopan por debaixo deste. O umbral electoral para tódolos casos é do 3% do total de votos válidos, é dicir, os votos emitidos favorables ós partidos e os votos en branco. Os votos nulos non se teñen en conta para o cálculo do umbral electoral.

```
## UMBRAL ELECTORAL CIRCUNSCRICIÓN PROVINCIAL ##
```

```
UE_P<- rowSums(RES.PROV)*0.03
```

```
## Elimínase a columna de votos en branco ##
```



```

RES.PROV$VBRANCO<- NULL

## Recodifícanse os datos en base ó umbral ##

for (i in 1:nrow(RES.PROV)){

  RES.PROV[i,][RES.PROV[i,]<UE_P[i]]<- NA

}

RES.PROV<- RES.PROV[, colSums(is.na(RES.PROV)) != nrow(RES.PROV)]

## UMBRAL ELECTORAL CIRCUNSCRICIÓN AUTONÓMICA ##

UE_A<- rowSums(RES.AUTO)*0.03

RES.AUTO$VBRANCO<- NULL

for (i in 1:nrow(RES.AUTO)){

  RES.AUTO[i,][RES.AUTO[i,]<UE_A[i]]<- NA

}

RES.AUTO<- RES.AUTO[, colSums(is.na(RES.AUTO)) != nrow(RES.AUTO)]

## UMBRAL ELECTORAL CIRCUNSCRICIÓN ÚNICA ##

UE_U<- rowSums(RES.UNICA)*0.03

RES.UNICA$VBRANCO<- NULL

RES.UNICA[RES.UNICA < UE_U]<- NA

RES.UNICA<- RES.UNICA[ , colSums(is.na(RES.UNICA)) == 0]

```

Obtención e presentación do reparto de escaños

O reparto de escaños lévase a cabo empregando o sistema D'Hondt, que foi exposto no Capítulo 1 do presente traballo. En R pode atoparse unha librería que permite a obtención desta distribución, esta é `electoral`. Prográmase un bucle en conxunto coa función `seats_ha()` do paquete previamente sinalado a fin de obter a distribución de escaños para cada unha das circunscricións que se van a analizar.

Reparto de escaños para a circunscrición provincial

```
ESC.PROV.DHONDT<-list()

for (i in 1:nrow(RES.PROV)){

  OUT.DHONDT<- seats_ha(colnames(RES.PROV[i,][,colSums(is.na(RES.PROV[i,])<
    nrow(RES.PROV[i,]))), as.numeric(RES.PROV[i,][,colSums(is.na(RES.PROV[i,
    ]))<nrow(RES.PROV[i,]))), ESCANOS.PROV[i], "dhondt")

  ESC.PROV.DHONDT[[i]]<- OUT.DHONDT
}

PROV.DHONDT<-sort(as.data.frame(t(tapply(unlist(ESC.PROV.DHONDT),
  names(unlist(ESC.PROV.DHONDT)), sum))), decreasing = T)

PROV.DHONDT<- PROV.DHONDT[, colSums(PROV.DHONDT != 0) > 0]
```

Unha vez realizado o reparto, procédese a sumar os resultados obtidos polas distintas candidaturas dun mesmo partido en solitario ou en coalición, da mesma forma que se fixo en apartados anteriores para o caso da circunscrición única, máis sumando os escaños e non os votos totais.

```
## UNIDAS PODEMOS ##
```

```
PROV.DHONDT$UP<- PROV.DHONDT$`UP-CT` + PROV.DHONDT$`UP-GA` +  
  PROV.DHONDT$`UP-VC` + PROV.DHONDT$UP
```

```
PROV.DHONDT$`UP-CT`<- NULL
```

```
PROV.DHONDT$`UP-GA`<- NULL
```

```
PROV.DHONDT$`UP-VC`<- NULL
```

```
## NAVARRA SUMA ##
```

```
PROV.DHONDT$PP <- PROV.DHONDT$PP + (PROV.DHONDT$`NA+`/2)
```

```
PROV.DHONDT$Cs <- PROV.DHONDT$Cs + (PROV.DHONDT$`NA+`/2)
```

```
PROV.DHONDT$`NA+`<- NULL
```

O resultado final quedaría tal e como se recolle na seguinte táboa:

Táboa 2.

Reparto de escaños para a circunscrición provincial

Partido	Escanos	Partido	Escanos
PSOE	120	EHB	5
PP	90*	CCa	2
VOX	52	CUP	2
UP	36*	MP	2
ERC	13	BNG	1
Cs	11*	PRC	1
JxCAT	8	TE	1
PNV	6		

Só con observar o presentado na táboa, pode verse a diferenza existente entre os reparto real das eleccións xerais de novembro do 2019 e os achegados aquí. Isto débese a que, posto que para o caso da circunscrición única se optou por xuntar os resultados de Compromís ós de UP e dividir os de NA+ entre o PP e Cs, decidiuse manter esas coalicións a priori. Desta forma non existen discrepancias entre as sumas de votos nas distintas circunscricións.

Para presentar dunha forma máis visual esta distribución preséntase o seguinte gráfico:

```
dhondt_prov<- data.frame(  
  Partido = colnames(PROV.DHONDT),  
  Escanos = as.numeric(PROV.DHONDT),  
  Cores = c("red", "blue", "forestgreen", "purple",  
           "orangered","yellow", "firebrick1", "brown1",  
           "green", "firebrick4", "lightblue", "greenyellow",  
           "seagreen1", "yellow4", "skyblue"))  
dhondt_prov<- dhondt_prov %>%  
  mutate(Partido = as.character(Partido), Cores = as.character(Cores)) %>%  
  parliament_data(election_data = .,  
                 parl_rows = 10,  
                 party_seats = .$Escanos,  
                 type= "semicircle")  
dt_prov<- ggplot(data = dhondt_prov) +  
  geom_parliament_seats(aes(x = x, y = y, color = Partido)) +  
  draw_majoritythreshold(n = 176,
```

```

      label = F,

      linesize = 1.25,

      type = 'semicircle') +

theme_ggparliament() +

scale_color_manual(values = dhondt_prov$Cores,

                   limits= dhondt_prov$Partido) +

labs(title= "Figura 1.",

      subtitle = "Reparto de escaños, circunscripción electoral provincial")+

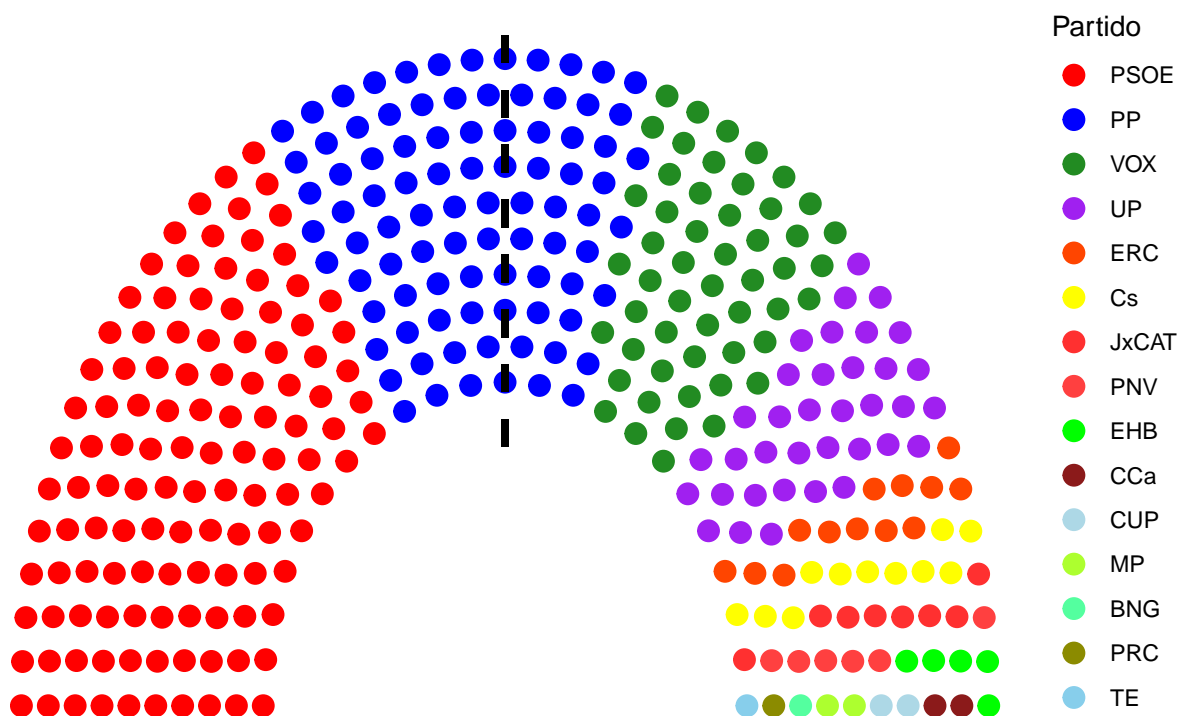
theme(plot.title = element_text(face="bold"))

dt_prov

```

Figura 1.

Reparto de escaños, circunscripción electoral provincial



Nota: A figura presenta a distribución dos escaños no Congreso dos Deputados para as eleccións xerais de novembro do 2019 tomando como referencia a circunscripción electoral provincial. Empréganse os paquetes ggparliament, ggplot2 e dplyr.

Reparto de escaños para a circunscrición autonómica

```
ESC.AUTO.DHONDT<-list()

for (i in 1:nrow(RES.AUTO)){

  OUT.DHONDT<- seats_ha(colnames(RES.AUTO[i,][,colSums(is.na(RES.AUTO[i,
    ]))<nrow(RES.AUTO[i,])]), as.numeric(RES.AUTO[i,
    ][,colSums(is.na(RES.AUTO[i,])<
    nrow(RES.AUTO[i,])]), ESCANOS.AUTO[i], "dhondt")

  ESC.AUTO.DHONDT[[i]]<- OUT.DHONDT
}

AUTO.DHONDT<-sort(as.data.frame(t(tapply(unlist(ESC.AUTO.DHONDT),
    names(unlist(ESC.AUTO.DHONDT)), sum))),
    decreasing = T)

AUTO.DHONDT<- AUTO.DHONDT[, colSums(AUTO.DHONDT != 0) > 0]
```

Ó igual ca no caso anterior, súmanse as candidaturas a fin de amosar un reparto de escaños máis acorde á realidade da cámara de representantes.

```
## UNIDAS PODEMOS ##

AUTO.DHONDT$UP<- AUTO.DHONDT$`UP-CT` + AUTO.DHONDT$`UP-GA` +
  AUTO.DHONDT$`UP-VC` + AUTO.DHONDT$UP

AUTO.DHONDT$`UP-CT`<- NULL

AUTO.DHONDT$`UP-GA`<- NULL

AUTO.DHONDT$`UP-VC`<- NULL

## NAVARRA SUMA ##
```

```
AUTO.DHONDT$PP <- AUTO.DHONDT$PP + (AUTO.DHONDT$`NA+`/2)
AUTO.DHONDT$Cs <- AUTO.DHONDT$Cs + (AUTO.DHONDT$`NA+`/2)
AUTO.DHONDT$`NA+`<- NULL
```

Os resultados obtidos amósanse na seguinte táboa:

Táboa 3.

Reparto de escanos para a circunscrición autonómica

Partido	Escanos	Partido	Escanos
PSOE	106	PNV	6
PP	83	EHB	5
VOX	55	CUP	3
UP	46	BNG	2
ERC	20	CCa	2
Cs	12	MP	2
JxCAT	7	PRC	1

Seguindo o realizado para os casos anteriores, preséntase o seguinte gráfico:

```
dhondt_auto<- data.frame(
  Partido = colnames(AUTO.DHONDT),
  Escanos = as.numeric(AUTO.DHONDT),
  Cores = c("red", "blue", "forestgreen", "purple",
            "orangered","yellow", "firebrick1", "brown1",
            "green", "firebrick4", "lightblue", "greenyellow",
```

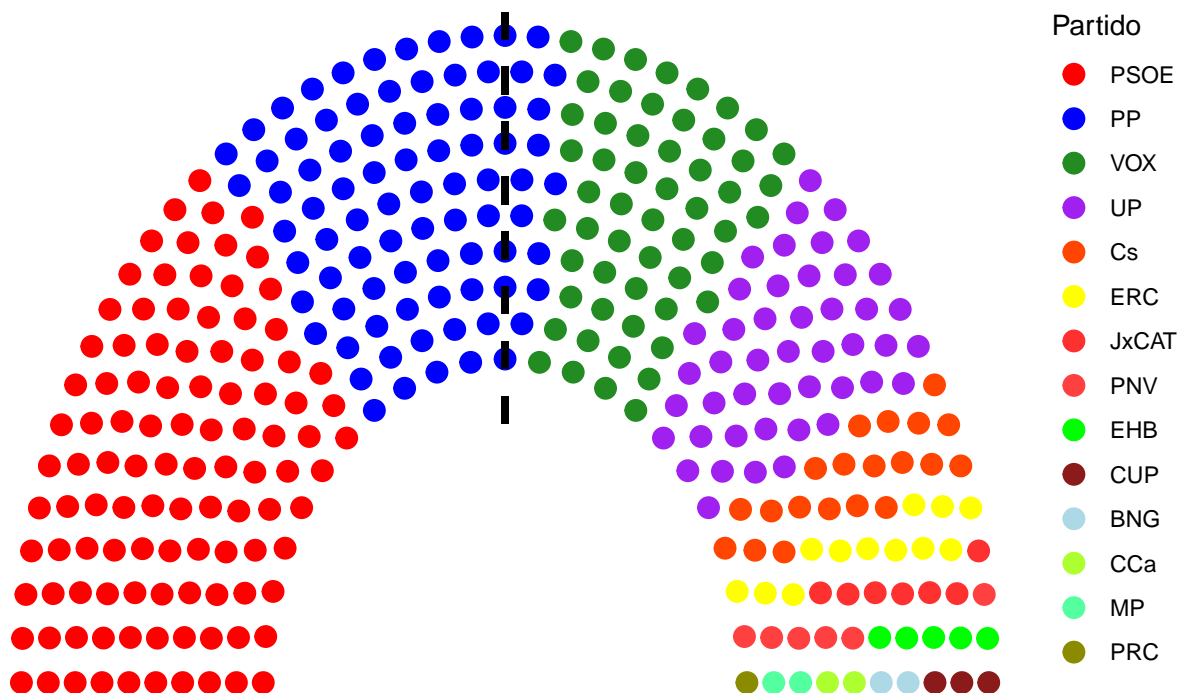
```

      "seagreen1", "yellow4"))
dhondt_auto<- dhondt_auto %>%
  mutate(Partido = as.character(Partido), Cores = as.character(Cores)) %>%
  parliament_data(election_data = .,
                 parl_rows = 10,
                 party_seats = .$Escanos,
                 type= "semicircle")
dt_auto<- ggplot(data = dhondt_auto) +
  geom_parliament_seats(aes(x = x, y = y, color = Partido)) +
  draw_majoritythreshold(n = 176,
                        label = F,
                        linesize = 1.25,
                        type = 'semicircle') +
  theme_ggparliament() +
  scale_color_manual(values = dhondt_auto$Cores,
                    limits= dhondt_auto$Partido) +
  labs(title= "Figura 2",
       subtitle = "Reparto de escaños, circunscripción electoral autonómica")+
  theme(plot.title = element_text(face="bold"))
dt_auto

```


Figura 2

Reparto de escaños, circunscripción electoral autonómica



Nota: A figura presenta a distribución dos escaños no Congreso dos Deputados para as eleccións xerais de novembro do 2019 tomando como referencia a circunscripción electoral autonómica. Empréganse os paquetes `ggparliament`, `ggplot2` e `dplyr`.

Pode observarse que os pesos dos partidos dentro do Congreso dos Deputados variou dunha forma considerable respecto da distribución para a circunscripción provincial. Os partidos maioritarios viron reducida a súa presenza na cámara fronte ó crecemento de partidos intermedios como UP e VOX. Outros partidos adscritos ó ámbito autonómico como poden ser o BNG ou a CUP tamén medrarían en un escano se comparamos os resultados cos amosados na *Táboa 1*. Isto permite observar os efectos da circunscripción, pois tal e como se sinala en numerosas críticas, a escolla da circunscripción electora provincial é especialmente valiosa para manter un sistema

de bipartidismo harmónico só subordinado a apoios puntiais por parte de partidos de ámbito autonómico.

Podese afirmar, a priori, que os índices de poder variarán respecto dos que se obterán tomando a circunscrición electoral provincial polo simple feito de que os pesos cos que se construírá o xogo de votación ponderada serán diferentes para ámbolos dous casos. En todo caso, será en apartados posteriores nos que se analice o verdadeiro efecto da circunscrición electoral sobre os distintos índices de poder.

Reparto de escaños para a circunscrición única

```
UNI.DHONDT<- sort(as.data.frame(t(seats_ha(colnames(RES.UNICA),
  as.numeric(RES.UNICA), ESCANOS.UNICA, "dhondt")),
  row.names = "TOTAL"), decreasing = T)
```

Neste caso non é preciso sumar candidaturas, pois xa se realizou esa tarefa en apartados anteriores. Os resultados para o caso da circunscrición única preséntanse a continuación nunha táboa.

Táboa 4.

Reparto de escaños para a circunscrición única

Partido	Escaños
PSOE	111
PP	83
VOX	60
UP	54
Cs	28
ERC	14

A distribución do poder dentro da cámara de representantes difire respecto das amosadas en apartados anteriores ó darse un cambio moi brusco no tamaño da circunscrición, a fin de facelo máis claro e observable, preséntase o seguinte gráfico.

```
dhondt_unica<- data.frame(  
  Partido = colnames(UNI.DHONDT),  
  Escaños = as.numeric(UNI.DHONDT),  
  Cores = c("red", "blue", "forestgreen", "purple", "orangered",  
            "yellow"))  
dhondt_unica<- dhondt_unica %>%  
  mutate(Partido = as.character(Partido), Cores = as.character(Cores)) %>%  
  parliament_data(election_data = .,  
                 parl_rows = 10,  
                 party_seats = .$Escaños,
```

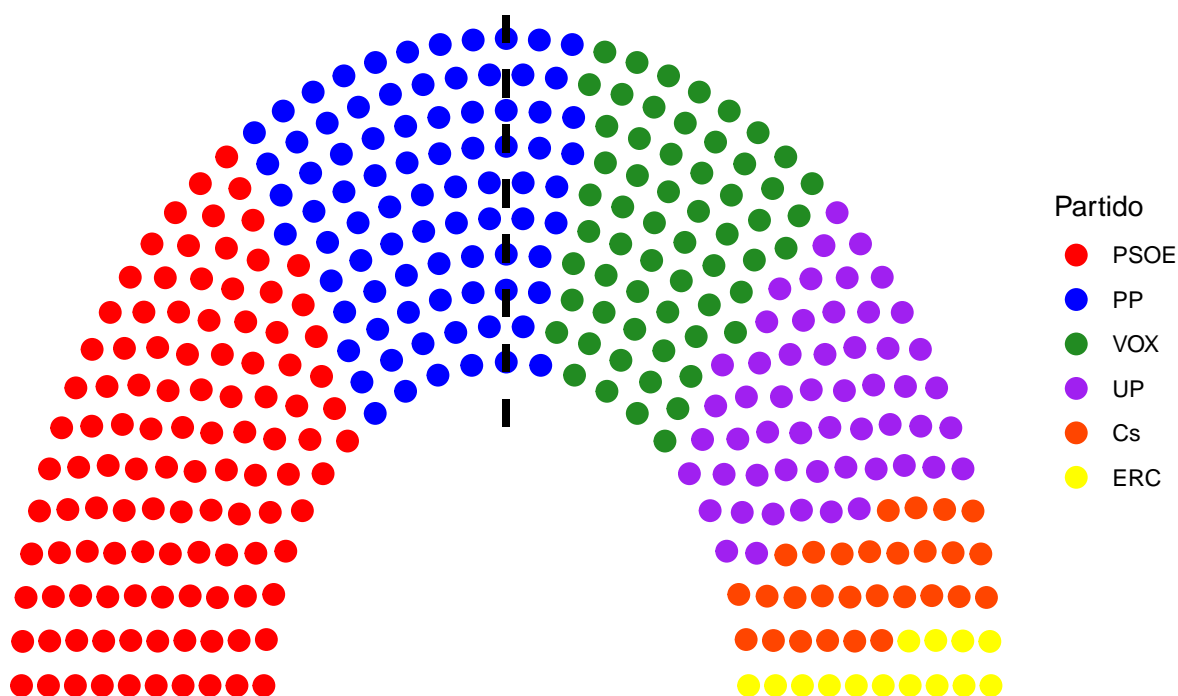
```

        type= "semicircle")
dt_unica<- ggplot(data = dhondt_unica) +
  geom_parliament_seats(aes(x = x, y = y, color = Partido)) +
  draw_majoritythreshold(n = 176,
                        label = F,
                        linesize = 1.25,
                        type = 'semicircle') +
  theme_ggparliament() +
  scale_color_manual(values = dhondt_unica$Cores,
                    limits= dhondt_unica$Partido) +
  labs(title= "Figura 3",
       subtitle = "Reparto de escaños, circunscripción electoral única")+
  theme(plot.title = element_text(face="bold"))
dt_unica

```

Figura 3

Reparto de escaños, circunscripción electoral única



Nota: A figura presenta a distribución dos escaños no Congreso dos Deputados para as eleccións xerais de novembro do 2019 tomando como referencia a circunscripción electoral única. Empréganse os paquetes `ggparliament`, `ggplot2` e `dplyr`.

Neste caso os efectos da circunscripción electoral son moito máis claros ca no anterior. Pode observarse que a composición do parlamento é moito máis reducida no que refire á cantidade de partidos que del forman parte. Esta circunscripción tamén afecta negativamente ós partidos maioritarios, favorecendo a aqueles partidos cunha cantidade salientable de votos no conxunto do territorio. Ó tratarse esta dunha circunscripción tan grande, os partidos pouco votados ou que só se presentan en determinadas comunidades perden case completamente a súa representación, a excepción de Esquerra Republicana de Catalunya (ERC). Isto débese principalmente

ó umbral electoral, que ó ser aplicado sobre a totalidade dos votos válidos da circunscrición que neste caso é a totalidade do territorio, elimina da ecuación a moitas candidaturas.

Esta escolla de circunscrición favorece enormemente ós partidos cunha gran base de electores das zonas máis poboadas dun país, en detrimento daquelas cunha menor densidade poboacional.

En definitiva, pode observarse que o principal efecto dos cambios na circunscrición electoral é a concentración dos escaños, existindo unha clara tendencia á redución do número de partidos con representación nas cámaras canto máis ampla é a propia circunscrición.

Obtención e representación gráfica dos índices de poder

Neste apartado obteranse os índices de poder para os resultados obtidos tomando como punto de partida unha circunscrición electoral ou outra. Así mesmo tamén se revisarán as variacións existentes entre eles para cada caso.

Os índices de poder para a circunscrición provincial

Para este caso, comezase por obter a función característica do xogo de votación ponderada tomando como pesos os escaños de cada partido e unha vez obtida, executanse as seguintes funcións recollidas no paquete `CoopGame`.

```
## CIRCUNSCRICIÓN PROVINCIAL
```

```
v_prov<- weightedVotingGameVector(n= 15, w= as.numeric(PROV.DHONDT), q= 176)
```

```

bpi_prov<- normalizedBanzhafIndex(v_prov) # Penrose-Banzhaf
sspi_prov<- shapleyShubikIndex(v_prov) # Shapley-Shubik
jpi_prov<- johnstonIndex(v_prov) # Johnston
dppi_prov<- deeganPackelIndex(v_prov) # Deegan-Packel
hpi_prov<- publicGoodIndex(v_prov) # Holler

names(bpi_prov)<- colnames(PROV.DHONDT)
names(sspi_prov)<- colnames(PROV.DHONDT)
names(jpi_prov)<- colnames(PROV.DHONDT)
names(dppi_prov)<- colnames(PROV.DHONDT)
names(hpi_prov)<- colnames(PROV.DHONDT)

perc_prov<- PROV.DHONDT/sum(PROV.DHONDT)

prov_dhondt<- rbind(jpi_prov, sspi_prov, bpi_prov,
                    dppi_prov, hpi_prov, perc_prov)

```

Preséntase a continuación unha comparativa gráfica dos índices de poder.

```

Indice<- c("Johnston", "ShapleyShubik", "PenroseBanzhaf", "DeeganPackel",
           "Holler", "%Escanos")

prov_dhondt<- cbind(prov_dhondt, Indice)

prov_dhondt<- melt(setDT(prov_dhondt), id.vars= "Indice")

colnames(prov_dhondt)<- c("Indice", "Partido", "Valor")

```

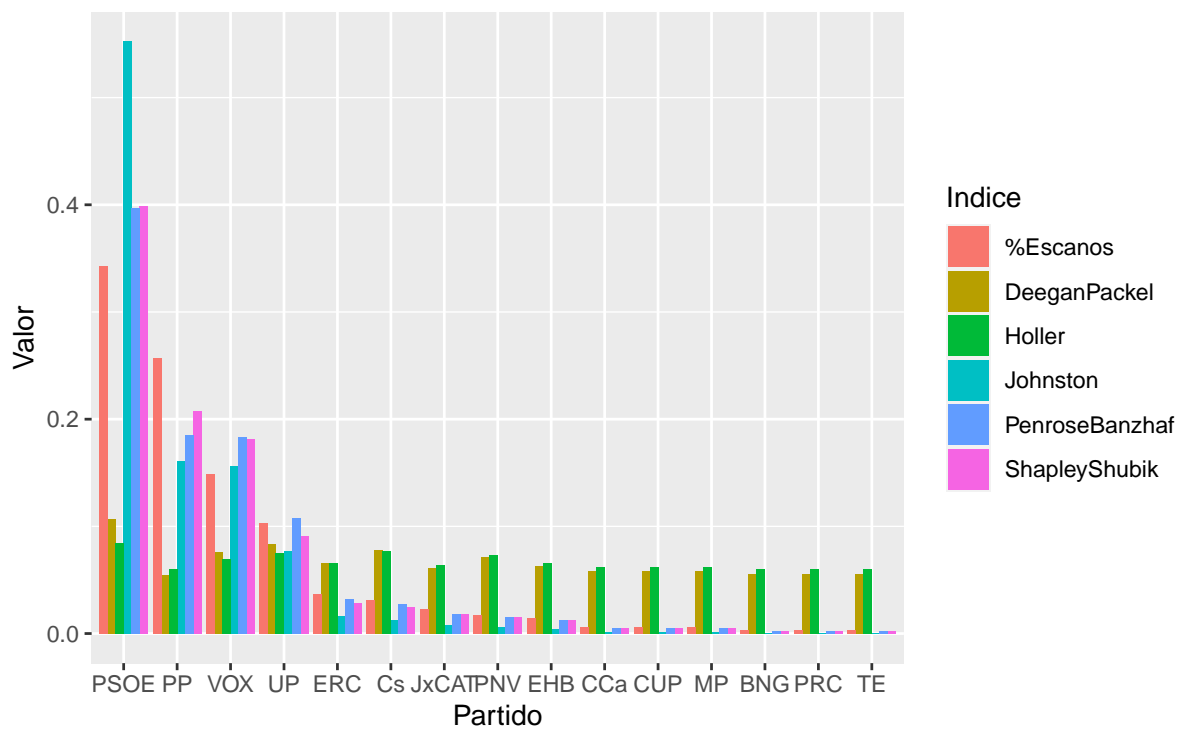
```

bar_prov<- ggplot(prov_dhondt, aes(x = Partido , y= Valor, fill = Indice)) +
  geom_bar(position= "dodge", stat = "identity") +
  labs(title= "Figura 4",
        subtitle = "Índices de poder, circunscripción electoral provincial")+
  theme(plot.title = element_text(face="bold"))
bar_prov

```

Figura 4

Índices de poder, circunscripción electoral provincial



Os índices de poder para a circunscrición autonómica

Replícase o feito no partado anterior, de forma que obtemos os valores de tódolos índices de poder para o caso autonómico.

```
v_auto<- weightedVotingGameVector(n= 14, w= as.numeric(AUTO.DHONDT),
q= 176)

bpi_auto<- normalizedBanzhafIndex(v_auto) # Penrose-Banzhaf
sspi_auto<- shapleyShubikIndex(v_auto)   # Shapley-Shubik
jpi_auto<- johnstonIndex(v_auto)         # Johnston
dppi_auto<- deeganPackelIndex(v_auto)    # Deegan-Packel
hpi_auto<- publicGoodIndex(v_auto)       # Holler

names(bpi_auto)<- colnames(AUTO.DHONDT)
names(sspi_auto)<- colnames(AUTO.DHONDT)
names(jpi_auto)<- colnames(AUTO.DHONDT)
names(dppi_auto)<- colnames(AUTO.DHONDT)
names(hpi_auto)<- colnames(AUTO.DHONDT)

perc_auto<- AUTO.DHONDT/sum(AUTO.DHONDT)

auto_dhondt<- rbind(jpi_auto, sspi_auto, bpi_auto,
                    dppi_auto, hpi_auto, perc_auto)
```

Unha vez obtidos, realízase unha representación gráfica dos mesmos:

```

auto_dhondt<- cbind(auto_dhondt, Indice)

auto_dhondt<- melt(setDT(auto_dhondt), id.vars= "Indice")

colnames(auto_dhondt)<- c("Indice", "Partido", "Valor")

```

```

bar_auto<- ggplot(auto_dhondt, aes(x = Partido , y= Valor, fill = Indice)) +

  geom_bar(position= "dodge", stat = "identity") +

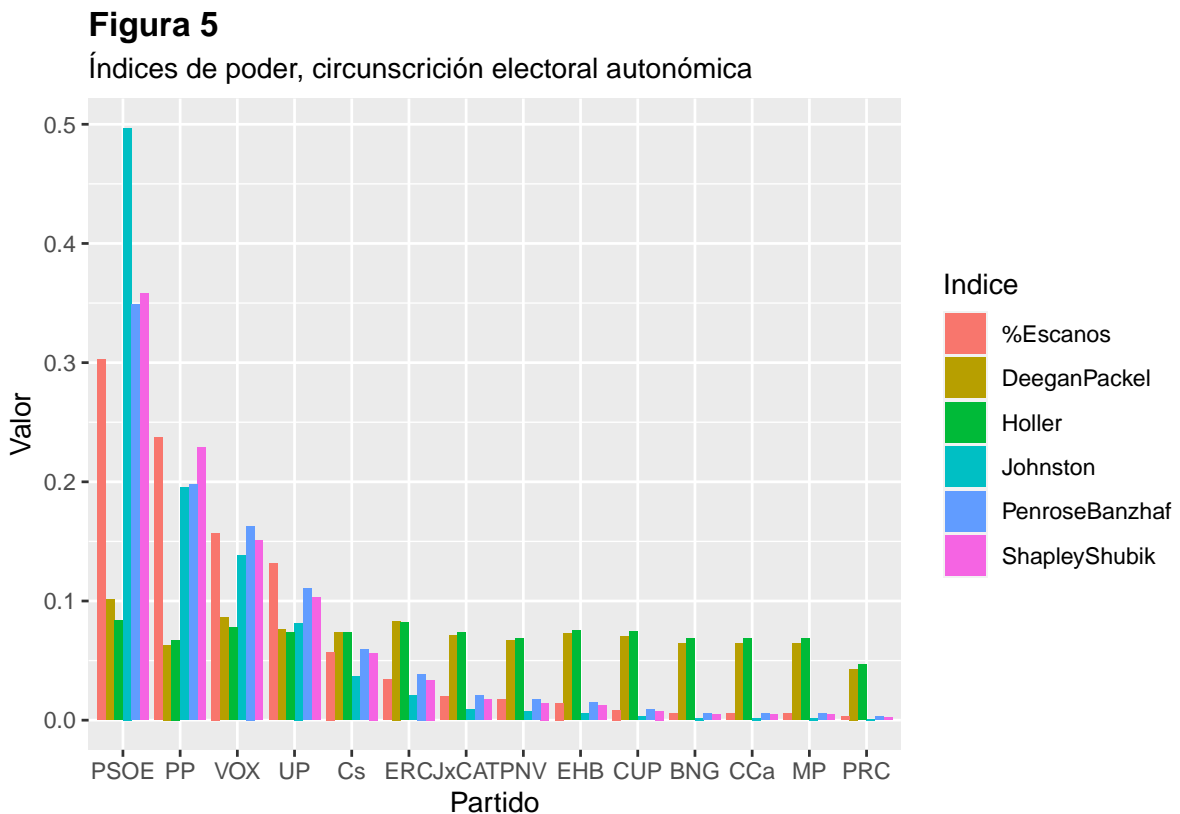
  labs(title= "Figura 5",

        subtitle = "Índices de poder, circunscripción electoral autonómica")+

  theme(plot.title = element_text(face="bold"))

bar_auto

```



Os índices de poder para a circunscrición única

```
v_unica<- weightedVotingGameVector(n= 6, w= as.numeric(UNI.DHONDT), q= 176)

bpi_unica<- normalizedBanzhafIndex(v_unica) # Penrose-Banzhaf
sspi_unica<- shapleyShubikIndex(v_unica)   # Shapley-Shubik
jpi_unica<- johnstonIndex(v_unica)         # Johnston
dppi_unica<- deeganPackelIndex(v_unica)    # Deegan-Packel
hpi_unica<- publicGoodIndex(v_unica)       # Holler

names(bpi_unica)<- colnames(UNI.DHONDT)
names(sspi_unica)<- colnames(UNI.DHONDT)
names(jpi_unica)<- colnames(UNI.DHONDT)
names(dppi_unica)<- colnames(UNI.DHONDT)
names(hpi_unica)<- colnames(UNI.DHONDT)

perc_unica<- UNI.DHONDT/sum(UNI.DHONDT)

unica_dhondt<- rbind(jpi_unica, sspi_unica, bpi_unica,
                    dppi_unica, hpi_unica, perc_unica)

unica_dhondt
```

Unha vez obtidos e para facilitar a súa comparación cos resultados obtidos e presentados nas *Figuras 4 e 5* obtéñese unha representación gráfica da distribución do poder para os distintos índices.

```

unica_dhondt<- cbind(unica_dhondt, Indice)

unica_dhondt<- melt(setDT(unica_dhondt), id.vars= "Indice")

colnames(unica_dhondt)<- c("Indice", "Partido", "Valor")

bar_unica<- ggplot(unica_dhondt, aes(x = Partido , y= Valor, fill = Indice)) +

  geom_bar(position= "dodge", stat = "identity") +

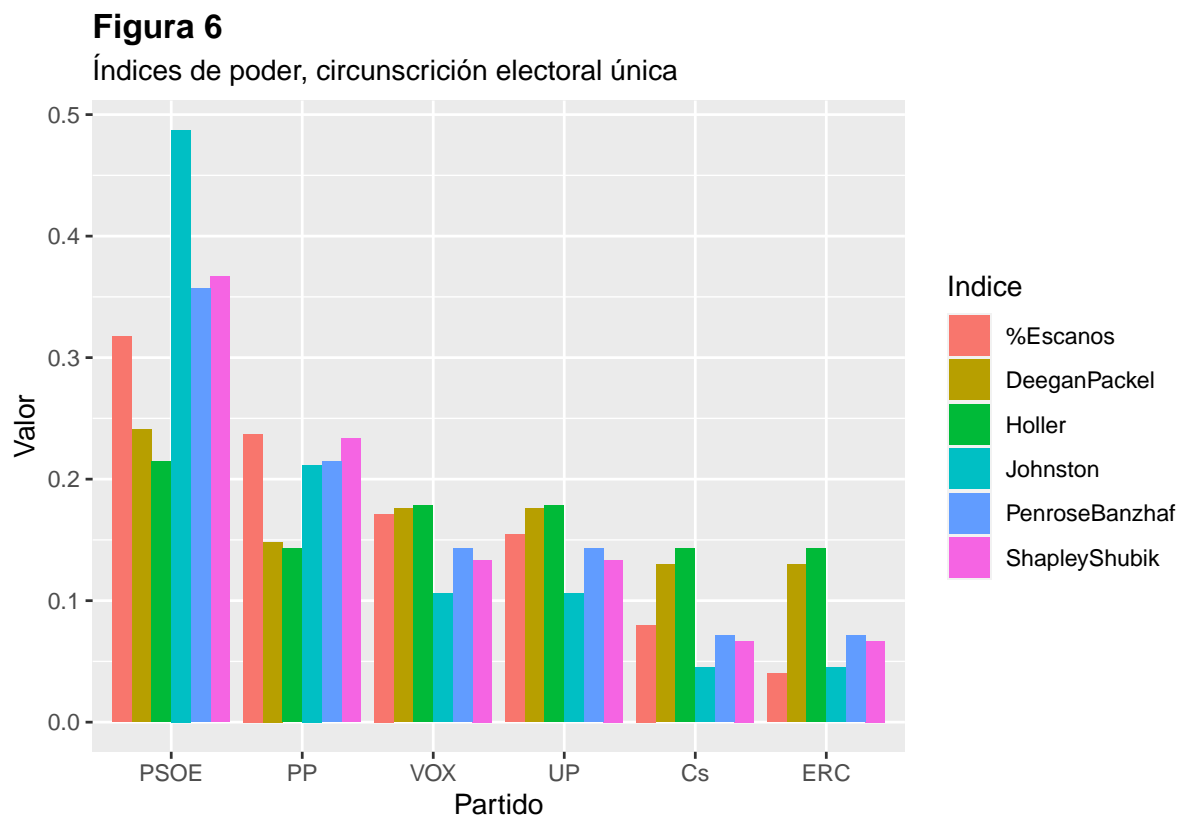
  labs(title= "Figura 6",

        subtitle = "Índices de poder, circunscripción electoral única")+

  theme(plot.title = element_text(face="bold"))

bar_unica

```



Análise dos resultados e conclusións

Para concluír co presentado no *Capítulo 4*, tomaranse como referencia varios partidos políticos situados en distintos niveis da distribución de escaños sendo estes o Partido Socialista Obrero Español (PSOE) e Partido Popular como referencias dos partidos maioritarios, Unidas Podemos (UP) e Vox (VOX) para os partidos cunha cota de poder intermedia, Esquerra Republicana de Catalunya (ERC) e Ciudadanos (Cs) para cotas inferiores. O caso de ERC e Cs servirá para representar como as circunscricións electorais favorecen a partidos cunha base de votantes ampla a nivel estatal e a partidos cunha ampla base de votantes a nivel autonómico. A selección destes partidos débese á súa presenza en tódolos casos que son obxecto de estudo.

Análise dos índices de poder

En base á información amosada nas *Figuras 4, 5, e 6* podemos observar dous grupos definidos de índices. Por un lado os índices de Shapley-Shubik, Penrose-Banzhaf e Johnston presentan valores que, en xeral, non difiren en exceso da porcentaxe de escaños sobre o total. Por outra banda, os índices de Deegan-Packel e Holler tenden a presentar valores moi semellantes en xeral para case tódolos partidos independentemente do peso dos mesmos á hora de confeccionar o xogo de votación ponderada.

Táboa 5.

Comparativa dos índices para o PSOE

Índice	PSOE(PROV)	PSOE(AUTO)	PSOE(UNICA)
φ	0.398	0.358	0.367
β	0.397	0.349	0.357
$\tilde{\gamma}$	0.552	0.497	0.487
ρ	0.106	0.101	0.241
$\tilde{\sigma}$	0.084	0.084	0.214

Pódese observar como o grupo de índices composto polo de Shapley-Shubik, Banzhaf e Johnston presentan valores semellantes para tódalas circunscricións, máis disto pode considerarse cal delas é a máis beneficiosa para os intereses do PSOE. Para estes tres casos a circunscrición que máis favorece a este partido é a provincial, pois presenta valores menores no resto dos casos. Os índices de Shapley-Shubik e Banzhaf amosan os valores máis baixos para o caso no que se toma como referencia a circunscrición autonómica e en contraposición a isto, o índice de Johnston presenta este valor mínimo para o caso da circunscrición única.

En canto ós índices de Deegan-Packel e Holler, os valores difiren enormemente dos presentados para o resto dos índices. Tal e como se comentou no *Capítulo 2*, a distribución de poder plantexada por estes índices pode chegar a parecer contraintuitiva ó repartir esta cota dunha forma moi igualada entre os distintos actores participes no xogo de votación. Isto non é así en situacións reais nas que un partido non conta coa maioría absoluta dunha cámara de representantes. O peso que poden acadar partidos que contan con menos representantes pode chegar a ser crucial

para a formación de gobernos de coalición, especialmente se se ten en conta que as diferenzas ideolóxicas entre partidos supoñen claras limitacións á hora de construílas.

En definitiva, atendendo ós valores amosados pódese considerar que:

- Para os índices de Shapley-Shubik, Penrose-Banzhaf e Johnston, a circunscrición máis favorable ós intereses do PSOE é a provincial.
- Para os índices de Deegan-Packel e Holler, a máis favorable sería a circunscrición única.

Táboa 6.

Comparativa dos índices para o PP

Índice	PP(PROV)	PP(AUTO)	PP(UNICA)
φ	0.207	0.229	0.233
β	0.185	0.198	0.214
$\tilde{\gamma}$	0.161	0.195	0.212
ρ	0.055	0.063	0.148
$\tilde{\sigma}$	0.060	0.067	0.142

Neste caso, compre sinalar que tódolos índices de poder levan a considerar as mesmas conclusións. O PP ó non ser un partido maioritario en circunscricións pequenas perde peso nos repartos de escanos, máis isto non se produce en circunscricións máis grandes, onde atendendo ó total de votos emitidos en favor deste partido si se ve favorecido.

O índice que máis valora a posición do PP respecto do resto dos partidos para tódalas circunscricións que se toman en consideración é o de Shapley-Shubik.

Dito isto, pode achegarse a seguinte conclusión:

- Para tódolos índices de poder analizados neste traballo, a circunscrición única é a máis favorable para o PP.

Táboa 7.

Comparativa dos Índices para VOX

Índice	VOX(PROV)	VOX(AUTO)	VOX(UNICA)
φ	0.181	0.151	0.133
β	0.183	0.163	0.143
$\tilde{\gamma}$	0.156	0.138	0.106
ρ	0.076	0.086	0.176
$\tilde{\sigma}$	0.070	0.078	0.179

Os índices de poder neste caso presentan características similares ás do PSOE. Como pode observarse, o grupo de índices composto polo índice de Shapley-Shubik, Penrose-Banzhaf e Johnston coinciden á hora de sinalar que a circunscrición única é a menos favorable para VOX, mentres que os índices de Deegan-Packel e Holler sinalan xusto o contrario.

Pode parecer contraproducente se atendemos ós escanos deste partido para cada unha das circunscricións, pois VOX acadaría os seus mellores resultados se as eleccións se celebrasen tomando como referencia a circunscrición única. Unha

posible explicación a este fenómeno é que a presenza de VOX dentro das coalicións gañadoras sería máis limitada.

Pódese chegar ás seguintes conclusións:

- Para os índices de poder de Shapley-Shubik, Penrose-Banzhaf e Johnston, a circunscrición electora máis favorable para VOX é a provincial.
- Para os índices de poder de Deegan-Packel e Holler prodúcese a situación contraria, sendo a circunscrición única a que dota a este partido dunha mellor posición.

Táboa 8.

Comparativa dos índices para UP

Índice	UP(PROV)	UP(AUTO)	UP(UNICA)
φ	0.091	0.103	0.133
β	0.108	0.111	0.143
$\tilde{\gamma}$	0.077	0.081	0.106
ρ	0.083	0.076	0.176
$\tilde{\sigma}$	0.075	0.073	0.179

O caso de UP é moi similar ó do PP. Pode observarse que para tódolos casos a circunscrición electoral que menos favorece ós intereses deste partido é a provincial. Isto débese a que UP en circunscricións pequenas acadaría unha posición de terceira, cuarta ou quinta forza, mentres que a nivel estatal mantén unha posición cómoda.

Atendendo ó reparto de escanos pode verse como os resultados de UP melloran en case vinte escanos canto maior é a circunscrición.

Isto pode levarnos a sinalar que a presenza de UP é xeneralizada pero non acada os votos precisos nalgunhas circunscricións.

Atendendo á información presentada pode considerarse que:

- Tódolos índices de poder coinciden en sinalar que a circunscrición electoral que máis favorece a UP é a circunscrición única.

Táboa 9.

Comparativa dos índices para ERC

Índice	ERC(PROV)	ERC(AUTO)	ERC(UNICA)
φ	0.029	0.034	0.067
β	0.032	0.039	0.071
$\tilde{\gamma}$	0.016	0.021	0.045
ρ	0.066	0.083	0.130
$\tilde{\sigma}$	0.066	0.082	0.143

Neste caso, pode observarse que a circunscrición que presenta valores mínimos para tódolos índices é a provincial. Se atendemos ás características de ERC como partido que só se presenta en Catalunya, nun primeiro momento non tería sentido considerar que este non se vise favorecido pola circunscrición provincial ou autonómica, máis isto é así debido á súa posición de forza. ERC foi o partido maioritario dunha das comunidades cunha densidade poboacional máis alta do

Estado, polo que consegue evitar o umbral electoral e participar do reparto de escanos.

Que tódolos índices coincidan na análise da situación de ERC débese na práctica totalidade dos casos ó número de partidos que participan do xogo de votación, pois a menor cantidade de xogadores, maior é a cota de poder que acadan partidos intermedios e pouco representados.

Dito isto pódese concluír que:

- Para tódolos índices de poder, a circunscrición máis favorable para ERC é a circunscrición única.

Táboa 10.

Comparativa dos índices para Cs

Índice	Cs(PROV)	Cs(AUTO)	Cs(UNICA)
φ	0.024	0.056	0.067
β	0.028	0.059	0.071
$\tilde{\gamma}$	0.013	0.037	0.045
ρ	0.078	0.074	0.130
$\tilde{\sigma}$	0.077	0.073	0.143

O caso de Cs é un claro exemplo de partido cunha boa presenza a nivel estatal pero que en circunscrición pequenas non consegue situarse entre as tres primeiras forzas. É por este motivo que tódolos índices coinciden en sinalar a circunscrición provincial coma a menos favorable para este partido.

Pode achegarse a seguinte conclusión a partires do amosado:

- A circunscrición electoral máis favorable ós intereses de Cs é a circunscrición única para tódolos índices de poder.

Conclusións

Neste punto compre sinalar as principais características e conclusións obtidas tanto sobre circunscricións electorais coma dos propios índices de poder. Analizando cada caso de forma illada.

Comezando polas circunscricións electorais, compre sinalar o seguinte:

- A circunscrición electoral provincial favorece en todo caso a aqueles partidos que presentan unha posición privilexiada en dous supostos. Nun primeiro lugar, o reparto de escanos e polo tanto os pesos dos dentro dun xogo de votación ponderada premian a aqueles partidos que contan cunha base de electores ampla e consolidada na maioría das provincias que conforman o Estado. Así mesmo, este tamén favorece a partidos maioritarios en provincias concretas.
- A circunscrición autonómica supón que o umbral electoral vai a eliminar da ecuación a máis partidos. Un claro exemplo disto é o de Teruel Existe (TE), que perdería ó seu representante ó ampliarse este umbral. Por outra banda, partidos cunha maior presenza a nivel autonómico ven mellorada a súa posición como pode ser o caso do Bloque Nacionalista Galego (BNG). Os partidos cunha gran presenza a nivel estatal poden chegar a perder peso ó tomar como referencia esta circunscrición electoral, tal e como se observa no caso do PSOE. Isto

débese a que os deputados que un partido podería monopolizar nunha provincia pequena pasan a formar parte dun conxunto maior no que os votos en conxunto poden supoñer unha migración destes escanos cara outros partidos.

- A circunscrición electoral única favorece en todo caso ós partidos cunha boa presenza a nivel estatal, é dicir, aqueles que se presentan na totalidade do territorio. Algúns partidos de corte autonómico poden superar a barreira do umbral electoral en zonas densamente poboadas tal e como se ve no caso de ERC, que ó contar cunha ampla base de electores en Catalunya obtén unha boa representación.

Os índices de poder vense afectados pola circunscrición electoral empregada en tanto varían os pesos que os xogadores presentan dentro dun xogo de votación ponderada. É por isto que se pode concluír que, en todo caso, unha modificación da circunscrición electoral vai a supoñer unha variación na distribución do poder.

Os índices de Shapley-Shubik, Penrose-Banzhaf e Johnston vense máis afectados pola escolla dunha ou doutra circunscrición electoral ca os de Deegan-Packel e Holler. Pode dicirse entón, que estes últimos, son menos volátiles fronte a modificacións nos pesos dos partidos nos xogos de votación ponderada.

Listaxe de referencias

Bibliografía

- [1] Alonso-Meijide, J., Casas-Méndez, B., Holler, M., & Lorenzo-Freire, S. (2008). Computing power indices: Multilinear extensions and new characterizations. *European Journal of Operational Research*, 188(2), 540–554. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2007.04.019>
- [2] Banzhaf, J. (1965). Weighted voting doesn't work: A mathematical analysis. *Rutgers Law Review*, 19(2), 317–344.
- [3] Brams, S. J. (2011). *Game Theory and Politics* (Illustrated ed.). Dover Publications.
- [4] Cervera, C. (2014, 4 julio). *¿El sistema electoral actual beneficia al PP, al PSOE y a los nacionalistas?* ABC. <https://www.abc.es/espana/20140704/abci-quien-beneficia-cada-sistema-201407031243.html>
- [5] Coelho, R. (2014). Power in game theory. *Contributions to Game Theory and Management*, 7, 282–289.
- [6] Courtin, S., & Tchantcho, B. (2019). Public Good Indices for Games with Several Levels of Approval. *The B.E. Journal of Theoretical Economics*, 20(1). <https://doi.org/10.1515/bejte-2019-0068>
- [7] Deegan, J., & Packel, E. W. (1978). A new index of power for simple n-person games. *International Journal of Game Theory*, 7(2), 113–123. <https://doi.org/10.1007/bf01753239>

- [8] D'Hondt, V. (1882). *Système pratique et raisonné de représentation proportionnelle*. Bruxelles.
- [9] Dubey, P., & Shapley, L. S. (1979). Mathematical Properties of the Banzhaf Power Index. *Mathematics of Operations Research*, 4(2), 99–131. <https://doi.org/10.1287/moor.4.2.99>
- [10] Hobbes, T. (2018). *Leviatán, o la Materia, Forma y Poder de un Estado Eclesiástico y Civil*. Independently Published.
- [11] Holler, M. J. (1982). Forming Coalitions and Measuring Voting Power. *Political Studies*, 30(2), 262–271. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9248.1982.tb00537.x>
- [12] Holler, M. J., & Packel, E. W. (1983). Power, luck and the right index. *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 43(1), 21–29. <https://doi.org/10.1007/bf01283881>
- [13] Johnston, R. J. (1978). On the Measurement of Power: Some Reactions to Laver. *Environment and Planning A: Economy and Space*, 10(8), 907–914. <https://doi.org/10.1068/a100907>
- [14] Laruelle, A. (1999). On the choice of a Power Index. *Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas*, 2103. https://www.researchgate.net/publication/5134327_-_ON_THE_CHOICE_OF_A_POWER_INDEX
- [15] Laruelle, A., & Valenciano, F. (2001). Shapley-Shubik and Banzhaf Indices Revisited. *Mathematics of Operations Research*, 26(1), 89–104. <https://doi.org/10.1287/moor.26.1.89.10589>

- [16] Laver, M. (1978). The Problems of Measuring Power in Europe. *Environment and Planning A: Economy and Space*, 10(8), 901–906. <https://doi.org/10.1068/a100901>
- [17] Lerner, D., Lasswell, H. D., & Kaplan, A. (1951). Power and Society: A Framework for Political Inquiry. *American Sociological Review*, 16(1), 118. <https://doi.org/10.2307/2087983>
- [18] Ley d'Hont | ¿Qué es y cómo funciona en las elecciones generales? (2019, 11 noviembre). ABC. https://www.abc.es/elecciones/elecciones-generales/abci-y-como-funciona-ley-dhont-201911090957_noticia.html
- [19] *Ley Orgánica 5/1985, de 19 de junio, del Régimen Electoral General*. (1985). BOE. <https://www.boe.es/buscar/doc.php?id=BOE-A-1985-11672>
- [20] Lorenzo-Freire, S., Alonso-Meijide, J., Casas-Méndez, B., & Fiestras-Janeiro, M. (2007). Characterizations of the Deegan–Packel and Johnston power indices. *European Journal of Operational Research*, 177(1), 431–444. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2005.08.025>
- [21] Ministerio del Interior. (s. f.). *Método D'Hondt*. Elecciones MIR. <http://www.elecciones.mir.es/generales10N2019/es/informacion-general/visitas-virtuales/metodo-dhondt.htm>
- [22] Partridge, P. H. (1963). Politics and Power. *Philosophy*, 38(144), 117–135. <https://doi.org/10.1017/s0031819100060113>
- [23] Penrose, L. S. (1946). The Elementary Statistics of Majority Voting. *Journal of the Royal Statistical Society*, 109(1), 53–57. <https://doi.org/10.2307/2981392>

- [24] ¿Qué es y en qué consiste la Ley D'Hondt? (2021, 28 abril). EuropaPress. <https://www.europapress.es/nacional/noticia-consiste-ley-dhondt-20150519142619.html>
- [25] Shapley, L. S., & Shubik, M. (1954). A Method for Evaluating the Distribution of Power in a Committee System. *American Political Science Review*, 48(3), 787–792. <https://doi.org/10.2307/1951053>
- [26] Weber, M. (2014). *Economía Y Sociedad* (3.a ed.). Fondo de Cultura Económica.
- [27] Young, H. P. (1985). Monotonic solutions of cooperative games. *International Journal of Game Theory*, 14(2), 65–72. <https://doi.org/10.1007/bf01769885>
- [28] Zuckerman, M., Faliszewski, P., Bachrach, Y., & Elkind, E. (2012). Manipulating the quota in weighted voting games. *Artificial Intelligence*, 180-181, 1–19. <https://doi.org/10.1016/j.artint.2011.12.003>

Paquetes R

- [1] Hadley Wickham and Jennifer Bryan (2019). `readxl`: Read Excel Files. R package version 1.3.1. <https://CRAN.R-project.org/package=readxl>
- [2] Jorge Albuja (2020). `electoral`: Allocating Seats Methods and Party System Scores. R package version 0.1.2. <https://CRAN.R-project.org/package=electoral>
- [3] Claus O. Wilke (2020). `cowplot`: Streamlined Plot Theme and Plot Annotations for 'ggplot2'. R package version 1.1.1. <https://CRAN.R-project.org/package=cowplot>
- [4] Staudacher, J., and Anwander, J. (2019). Using the R package `CoopGame` for the analysis, solution and visualization of cooperative games with transferable utility; {R} Vignette; 2019.
- [5] Matt Dowle and Arun Srinivasan (2021). `data.table`: Extension of `data.frame`. R package version 1.14.0. <https://CRAN.R-project.org/package=data.table>
- [6] H. Wickham. `ggplot2`: Elegant Graphics for Data Analysis. Springer-Verlag New York, 2016.
- [7] Robert Hickman, Zoe Meers and Thomas J. Leeper (2018). `ggparliament`: Parliament Plots. R package version 2.0.0. <https://CRAN.R-project.org/package=ggparliament>
- [8] Hadley Wickham, Romain François, Lionel Henry and Kirill Müller (2020). `dplyr`: A Grammar of Data Manipulation. R package version 1.0.2. <https://CRAN.R-project.org/package=dplyr>