



Universidade de Vigo

Traballo Fin de Máster

Sobre o reparto de custos de instalación de ascensores

Iago Montero Núñez

Máster en Técnicas Estatísticas

Curso 2019-2020

Proposta de Traballo Fin de Máster

Título en galego: Sobre o reparto de custos de instalación de ascensores
Título en español: Sobre el reparto de costes de instalación de ascensores
English title: On the allocation of costs of installing elevators
Modalidade: Modalidade A
Autor: Iago Montero Núñez, Universidade de Santiago de Compostela
Director: Ignacio García Jurado, Universidade da Coruña
Breve resumo do traballo: Analizamos o problema que supón o reparto de custos de instalación de ascensores en edificios de condominio. Estudamos diferentes formas de reparto dende a perspectiva da teoría de xogos e creamos un paquete dispoñible para R e RStudio co cal se poden facer os cálculos de forma máis sinxela.
Recomendacións:
Outras observacións:

Don Ignacio García Jurado, Catedrático da Universidade da Coruña informa que o Traballo Fin de Máster titulado

Sobre o reparto de custos de instalación de ascensores

foi realizado baixo a súa dirección por don Iago Montero Núñez para o Máster en Técnicas Estatísticas. Estimando que o traballo está rematado, dá a súa conformidade para a súa presentación e defensa ante un tribunal.

En Santiago de Compostela, a 14 de xullo de 2020.

O director:

O autor:

Don Ignacio García Jurado

Don Iago Montero Núñez

Índice xeral

Resumo	ix
1. Introducción	1
2. Estado da cuestión en materia legislativa	3
2.1. Reparto en función do beneficio	3
2.2. Reparto equitativo	4
2.3. Reparto en función da superficie	5
3. Análise do problema dende a perspectiva da teoría de xogos	7
3.1. Problemática coa lexislación do Grupo 1 (Francia, Italia e Portugal)	7
3.1.1. Regras de reparto	8
3.1.2. Reparto do excedente	10
3.2. Problemática coa lexislación dos Grupos 2 e 3 (Alemaña, Holanda e España)	11
4. Novas propostas de reparto	17
5. Cálculo do reparto empregando o paquete CustosAscensor de R	19
Referencias	23

Resumo

Resumo en galego

A día de hoxe existe na Unión Europea un gran número de inmobles nos que as zonas comúns se atopan descoidadas. Esta situación está en moitos casos directamente relacionada coa dificultade que supón atopar un reparto de custos co que estean de acordo todos os veciños á hora de facer algunha obra de mellora. Neste traballo analizamos o problema que supón o reparto de custos na instalación dun ascensor en edificios de condominio. Estudamos algunhas das lexislacións existentes en diferentes estados da Unión Europea e o efecto que teñen na creación de diferentes métodos de reparto. Analizando o problema dende a perspectiva da teoría de xogos, tratamos de atopar formas de reparto que sexan o máis xustas posibles e eviten conflitos entre os veciños do edificio. Con este obxectivo facemos un repaso polas normas existentes en outros traballos e propoñemos outras formas alternativas. Para rematar, creamos un paquete dispoñible en R e RStudio que se pode empregar para calcular o reparto de custos facendo uso das diferentes regras de reparto estudadas ao longo do traballo.

English abstract

Today there are a large number of buildings in the European Union where the common areas are not taken care of. This situation is in many cases directly related to the difficulty of finding a cost allocation with which all residents agree when it comes to making improvements. In this paper we analyze the problem of cost allocation in the installation of an elevator in condominium buildings. We study some of the existing laws in different states of the European Union and the effect they have on the creation of different methods of cost allocation. Analyzing the problem from the perspective of game theory, we try to find ways of cost allocation that are as fair as possible and avoid conflicts between the neighbors of the building. With this aim in mind, we review the existing rules in other papers and propose other alternative methods. Finally, we create a package available in R and RStudio that can be used to calculate the cost distribution using the different cost allocation rules studied throughout the paper.

Capítulo 1

Introdución

O mantemento, reparación e mellora de edificios de apartamentos está a ser nos últimos anos unha gran causa de conflitos nos diferentes estados membros da Unión Europea. Nestes edificios os apartamentos en xeral atópanse en bo estado, pero as zonas compartidas adoitan estar mal conservadas. Isto débese en gran medida ás deficiencias na lexislación que garante o mantemento e a renovación das zonas e utilidades comúns. Normalmente, cando unha persoa merca un apartamento adquire a propiedade individual dese apartamento e copropiedade das áreas comúns do edificio. Estas áreas comúns son conservadas e modificadas conforme se decide na asociación de copropietarios. Un decreto regula a propiedade conxunta e relaciona a asignación de custos para servizos públicos e melloras. Esta asignación está en gran medida determinada pola lei, pero difire entre distintos países.

Algunhas xurisdicións, por exemplo, optan por asignar os valores das accións por igual entre todos os propietarios de unidades, mentres noutros países a repartición de custos dunha mellora tamén debe ter en conta as diferenzas nos beneficios que obteñen as distintas unidades. Estas lexislacións acostuman ser pouco claras, o que moitas veces dá pé a conflitos entre veciños que rematan supoñendo que estas melloras non se leven a cabo. Existe, porén, un interese xeneralizado por atopar solucións lexislativas para problemas de propiedade de vivendas en edificios de condominio, que facilitarían a mellora e a modernización destas construcións.

O problema no reparto de custos aparece principalmente cando os beneficios da mellora non son uniformes para todas as partes. Este é o caso por exemplo cando falamos da instalación dun ascensor, que será o que estudaremos en profundidade neste traballo. Neste caso o apartamento do primeiro andar vaise ver polo xeral moito menos beneficiado que un apartamento que se atope no quinto andar. Por outra banda, xeralmente un apartamento grande no que vivan cinco persoas verase máis beneficiado pola instalación do ascensor que un apartamento pequeno no que só viva unha persoa.

Para comprender a magnitude deste problema convén saber que no ano 2001 existían en España máis de 650.000 ascensores e que cada 72 horas, os ascensores de todo o planeta transportan o equivalente á poboación mundial (Rego, 2003). Tamén é importante mencionar que segundo o Consello Xeral de Axentes da Propiedade Inmobiliaria (CGAPI), unha propiedade situada nun quinto andar sen ascensor ten de media unha perda de valor do 40% respecto dun piso de similares características nun edificio con ascensor. É por isto que dar solución ao problema no reparto de custos relacionados coa instalación e mantemento dun ascensor pode ser de gran utilidade.

A continuación, no Capítulo 2 farase un repaso de seis estados pertencentes á Unión Europea e das leis que cada un aplica para tratar de dar solución a este problema. Así, observarase como varían as condicións do reparto de custos dependendo do país no que se leve a cabo. No Capítulo 3, analizando o problema dende a perspectiva da teoría de xogos cooperativos, tratarase de atopar

unha asignación de custos que sexa coalicionalmente estable. Analizarase por que as leis vixentes dan lugar a disputas e desacordos e no Capítulo 4 propoñeranse novas formas de reparto. Para finalizar, no Capítulo 5 desenvolverase un paquete de R que poderá ser empregado para dividir os custos de calquera condominio tendo en conta as regras estudadas.

Capítulo 2

Estado da cuestión en materia lexislativa

Á vista das lexislacións consultadas para facer este estudo podemos dividir os seis países escollidos en tres grupos. O primeiro grupo compóñeno os estados nos cales o criterio de reparto de custos é en proporción aos beneficios obtidos pola mellora. Entran dentro deste grupo Francia, Italia e Portugal. No grupo dous atópanse Alemaña e Holanda, cun criterio de reparto equitativo no cal cada propietario participa na mesma medida nos custos comúns a todos os donos de vivendas. No último grupo está só España, onde a parte a pagar depende dos metros cadrados útiles cos que conte cada propiedade.

2.1. Reparto en función do beneficio

Neste primeiro apartado veremos o grupo de estados que optan por un reparto de custos en función dos beneficios que cada apartamento poida obter da mellora.

Este é o caso de **Francia**, que recolle a seguinte información no seu código civil:

Capítulo I: Definición e organización da copropiedade.

Artigo 10

Requírese que os copropietarios participen nos cargos que supoñen os servizos colectivos e os elementos do equipo común **de acordo coa utilidade** que ditos servizos e elementos presentan con respecto a cada lote.

(Lei 65-557, de 10 de xullo de 1965, “Fixant le statut de la copropriété des immeubles bâtis”)¹

Este tipo de repartición tamén aparece na lexislación de **Italia**, os artigos 1117/1139 son os que se encargan do referido aos edificios de condominio. O artigo 1123 establece o reparto de gastos do seguinte xeito:

Art. 1123 (reparto de gastos)

Os gastos necesarios para a conservación e o desfrute das partes comúns do edificio, para a prestación de servizos de interese común e para as innovacións aprobadas pola maioría corren a cargo dos condominios en proporción ao valor da propiedade de cada un, excepto no caso de que se acorde o contrario.

De tratarse de cousas destinadas a servir os condominios de forma diferente, os custos distribúense **en proporción ao uso que cada un poida facer deles**. Se un edificio ten

¹As traducións das diferentes lexislacións que aparecen no traballo son propias. O mesmo sucede cos resaltes.

múltiples escaleiras, patios, paneis solares, obras ou sistemas destinados a servir unha parte de todo o edificio, os custos relacionados co seu mantemento corren a cargo do grupo de condominios que se benefician del.

(Artigos 1117/1139, de 16 de marzo de 1942, “Del condominio negli edifici”)

O caso de **Portugal** é tamén equivalente, tal e como pode observarse na información recollida no artigo 1424 do seu código civil:

Artigo 1424 - Cargos por conservación e disfrute.

1. A non ser que se especifique o contrario, os gastos necesarios para a conservación ou disfrute das partes comúns do edificio e o pago de servizos de interese común son pagados polos inquilinos **en proporción ao valor das súas fraccións**.

[...]

4. Nos gastos dos ascensores, solo participan os inquilinos cuxas fraccións poidan ser atendidas por eles.

(Decreto-lei N.º 47344/66, de 25 de novembro, “Direitos e encargos dos condóminos”)

Nestes tres casos vemos claramente como o criterio de reparto está por lei relacionado coa utilidade que o servizo vai proporcionar a cada parte do condominio. A pesar de que en ningún momento se especifica como se debe determinar esa diferenza de utilidade entre os apartamentos.

2.2. Reparto equitativo

En **Alemaña**, á diferenza dos casos anteriores, optan por un reparto diferente e máis igualitario. O código civil deste país recolle a seguinte información ao respecto:

Sección 741 - Copropiedade por cotas definidas

Cando máis dunha persoa ten en común un dereito a un ben, a menos que a lei leve a unha conclusión diferente, aplícanse as disposicións dos apartados 742 a 758 (copropiedade por cotas definidas).

Sección 742 - Cotas iguais

En caso de dúbida, suponse que os propietarios teñen dereito a cotas iguais.

[...]

Sección 747 - Eliminación de obxectos compartidos e conxuntos

Cada propietario pode controlar a súa participación. Os propietarios de pezas poderán controlar o obxecto conxunto na súa totalidade só de forma conxunta.

Sección 748 - Suposto de cargas e custos

Cada propietario está obrigado aos demais propietarios a sufragar os gastos do obxecto conxunto e os custos de mantemento, administración e uso conxunto segundo a proporción da súa cota.

(Título 17, de 4 de decembro 2008, “Bürgerliches Gesetzbuch ”)

A forma de determinar a cota no caso alemán acostuma ser mediante a aplicación da Sección 742, polo que na práctica os distintos apartamentos son polo xeral asignados cotas iguais.

Unha perspectiva case idéntica á alemá é a que recolle o código civil de **Holanda**. Neste caso establécese o seguinte criterio de reparto:

113 - Accións e responsabilidades iguais

2. Cada un dos propietarios debe, na súa relación mutua cos demais propietarios e na súa relación coa Asociación de Copropietarios, **participar por partes iguais nas débedas e custos correspondentes a todos os propietarios de vivendas**. Salvo que os arranxos

internos preveñan outra proporción de participación.
(Título 5.9, de 4 de febreiro de 2014, “Appartementrechten”)

2.3. Reparto en función da superficie

Por último temos o caso de **España**, que achega un punto de vista diferente aos anteriores. No caso español, a Lei de Propiedade Horizontal indica o seguinte:

CAPÍTULO II - Do réxime da propiedade por pisos ou locais.

Artigo terceiro.

[...]

A cada piso ou local atribuiráselle unha **cota de participación con relación ao total do valor do inmovible** e referida a centésimas do mesmo. Dita cota servirá de módulo para determinar a participación nas cargas e beneficios por razón da comunidade.

(Lei 49/1960, de 21 de xullo, “Sobre propiedade horizontal”)

Esta cota do caso español diferénczase da alemá en que na práctica acostuma depender da superficie do apartamento. Deste xeito os apartamentos con máis metros cadrados deberán facer unha aportación proporcionalmente maior a aquela dos apartamentos máis pequenos.

Capítulo 3

Análise do problema dende a perspectiva da teoría de xogos

Neste apartado trataremos de comprender mellor as lexislacións anteriormente citadas e analizar cales son as súas principais carencias. Veremos como ningunha delas garante un reparto xusto e como son pouco eficaces á hora de evitar conflitos entre os veciños de cada condominio.

3.1. Problemática coa lexislación do Grupo 1 (Francia, Italia e Portugal)

O exemplo da instalación dun ascensor co seu correspondente reparto de custos foi estudado en Crettez e Deloche (2018) tendo en conta a visión da lei francesa, que como vimos é tamén a empregada nos casos de Italia e Portugal. Neste traballo explícase como a lei francesa co seu reparto de custos “en proporción aos beneficios”, é demasiado imprecisa. Isto débese a que ditos beneficios son específicos e diferentes para cada edificio e cada mellora, o que supón que cada caso se teña que valorar e concretar por separado dando lugar a máis desacordos.

Analizando este problema dende a perspectiva da teoría de xogos cooperativos, o noso obxectivo será atopar unha asignación de custos que sexa coalicionalmente estable. Isto é, unha asignación de custos na cal ningunha das persoas propietarias se vexa beneficiada ao saírse da coalición de todas as propietarias. A existencia dun reparto de custos coalicionalmente estable significaría que dito reparto podería ser acordado de maneira unánime por todas as partes.

Nesta sección estémonos a centrar nas lexislacións do Grupo 1, as cales fan o reparto de custos en función da utilidade. Tendo isto en conta e sabendo que a utilidade depende principalmente do andar e non do apartamento en concreto, traballaremos sobre o exemplo presentado a continuación.

Consideraremos un condominio con m andares, simplificaremos asumindo que en cada andar hai un apartamento e que cada un destes apartamentos supón tamén un voto na asociación de copropietarios. Deste xeito, cando este condominio considera instalar un ascensor, os custos asociados son os seguintes: un custo fixo c_b que corresponde aos traballos feitos no baixo e un custo c_a para cada andar adicional.

Se unha coalición S quere instalar un ascensor que beneficie unicamente aos membros da coalición, o custo $c(S)$ da instalación será

$$c(S) = \max_{z \in S} c_z,$$

onde c_z representa o custo dun ascensor que chega ao andar z .

Un esquema de asignación de custos $(\lambda_i)_i$ é unha forma de repartir $c(1, \dots, m)$ na cal todos os copropietarios son beneficiados e de xeito que $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ onde o copropietario i asume unha parte $\lambda_i c(\{1, \dots, m\})$ do custo da instalación.

Definimos entón un esquema de asignación de custos $(\lambda_i)_i$ como coalicionalmente estable cando se cumpre o seguinte:

$$\left(\sum_{i \in S} \lambda_i \right) c(\{1, \dots, m\}) \leq c(S), \forall S \subseteq \{1, \dots, m\}.$$

Considerando a lei francesa (equivalente á de Italia e Portugal) recordamos que nela se establecía que “os copropietarios participen nos cargos [...] de acordo coa utilidade que ditos servizos e elementos presentan con respecto a cada lote”. Tendo isto en conta podemos asumir que canto máis alto sexa o andar, maior a parte que o seu propietario debe aportar. De acordo con isto, Crettez e Deloche (2018) propoñen a chamada “regra do ascensor” como regra de facto para compartir o custo dun ascensor nun condominio.

3.1.1. Regras de reparto

Na **regra do ascensor** calculamos o esquema de asignación de custos $(\lambda_i)_i$ como vemos a continuación: Asignamos ao primeiro andar un coeficiente igual a 1 e a cada andar que subimos engadímoslle 0.5. Así quedamos con 1 para o primeiro andar, 1.5 para o segundo, 2 para o terceiro, etc. Obtemos o esquema de asignación de custos dividindo o coeficiente de cada andar pola suma de todos os coeficientes. No caso dun edificio de m andares, o coeficiente do andar i vén dado pola seguinte expresión:

$$\lambda_i = \frac{1 + (i - 1) \frac{1}{2}}{\Sigma}, i = 1, \dots, m,$$

onde Σ é a suma dos coeficientes, é dicir

$$\Sigma = m + \frac{m(m - 1)}{4}.$$

Así, un edificio de 5 andares dividiría o custo do ascensor segundo as seguintes proporcións: (0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30).

De acordo con esta regra, a parte asociada a cada apartamento sobe conforme aumenta o número de andares que ten debaixo, o cal respecta o establecido pola lei francesa. Crettez e Deloche establecen o seguinte na primeira proposición do seu traballo:

Proposición 1. Se un esquema de asignación de custos é tal que a cota dos andares non diminúe conforme aumenta o nivel do andar, esta asignación é coalicionalmente estable. É dicir, é unha asignación de custos coalicionalmente estable se $\lambda_i \leq \lambda_j$ cando $i < j$.

Demostración 2. Asumimos que a Proposición é falsa. Existe entón unha coalición S de copropietarios de forma que:

$$\left(\sum_{i \in S} \lambda_i \right) c(\{1, \dots, m\}) > c(S),$$

onde $c(S) = c_b + I(S)c_a$ e $c(\{1, \dots, m\}) = c_b + mc_a$, e $I(S) = \max_k \{k \in S\}$. A desigualdade anterior pódese escribir como

$$\sum_{i \in S} \lambda_i > \frac{c_b + I(S)c_a}{c_b + mc_a},$$

ou ben

$$c_b \left(\sum_{i \in S} \lambda_i - 1 \right) + c_a \left(m \sum_{i \in S} \lambda_i - I(S) \right) > 0.$$

Unha condición necesaria para que a desigualdade anterior se cumpla é

$$m \sum_{i \in S} \lambda_i - I(S) > 0.$$

Agora asumimos que $\sum_{i \in S} \lambda_i > I(S)/m$. Desta desigualdade podemos concluír que $I(S) < m$. Agora, como as cotas λ_i son unha función non decrecente con i , obtemos

$$\#S \times \lambda_{I(S)} > \frac{I(S)}{m},$$

onde $\#S$ é o cardinal de S . Como $\#S \leq I(S)$, temos que

$$\lambda_{I(S)} > \frac{1}{m}.$$

Pero se empregamos entón o suposto de que as cotas λ_i son unha función non decrecente con i , temos que

$$\sum_{i=I(S)+1}^m \lambda_i + \sum_{i \in S} \lambda_i > \frac{m - I(S)}{m} + \frac{I(S)}{m} = 1.$$

Isto é unha contradición. □.

Dedúcese consecuentemente que a regra do ascensor é coalicionalmente estable e que un reparto de custos baseado nesta regra podería ser acordado por todas as partes.

Outra regra de reparto sería a **regra equitativa**, na cal todos os apartamentos aportarían a mesma cantidade:

$$\lambda_i = \frac{1}{m}, i = 1, \dots, m,$$

No exemplo do edificio de 5 andares, a regra equitativa repartiría o custo do ascensor de acordo ás seguintes proporcións: (0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2). Tendo en conta que este esquema de reparto tampouco

asigna proporcións maiores aos pisos inferiores podemos dicir que esta regra é tamén coalicionalmente estable.

Unha terceira alternativa a estas regras é o **valor de Shapley**. Seguindo esta regra, cada andar i aportaría unha parte sh_i calculada a partir da seguinte expresión:

$$sh_i = \frac{c_b}{m} + c_a \left(\sum_{t=1}^i \frac{1}{m - (t - 1)} \right), i = 1, \dots, m,$$

Imaxinemos que para instalar un ascensor nun edificio de 5 andares os custos de instalación se dividen da seguinte maneira: o custo de levar a cabo as obras de instalación no baixo é de 25.000€, mentres que o custo das obras en cada andar adicional é de 15.000€. Ao tratarse dun edificio de 5 andares, o gasto total sería de 100.000€. Segundo o valor de Shapley o reparto de custos no caso do edificio do noso exemplo sería o seguinte: (0.08, 0.1175, 0.1675, 0.2425, 0.3925). Pola mesma razón que as dúas regras anteriores podemos concluír que este reparto é tamén coalicionalmente estable.

3.1.2. Reparto do excedente

Todo esquema de reparto de custos xera un excedente repartido. Este excedente é a diferenza entre o incremento no valor do apartamento resultado da instalación do ascensor (b_i) e o custo asumido por ese apartamento. Definimos entón o excedente para o andar i resultado da regra de reparto de custos λ_i como $b_i - \lambda_i c(\{1, \dots, m\})$. Como vimos na regra do ascensor, o custo asumido por un apartamento aumenta conforme aumenta o número de andares que ten debaixo. Deste mesmo xeito, o incremento no valor do apartamento aumenta conforme se vai atopando en andares superiores; é dicir, $b_j < b_i$ cando $j < i$.

O excedente repartido dunha coalición S de copropietarios defínese na seguinte función:

$$v(S) = \max_{T \subseteq S} \left\{ \sum_{i \in T} b_i - c(T) \right\}, i = 1, \dots, m,$$

sendo $v(S)$ non negativo, xa que unha coalición non baleira S non construíría un ascensor no caso de que este producira un custo maior que o beneficio asociado.

Agora definimos o reparto de excedente como un vector de números reais non negativos $(s_i)_i$ tales que $\sum_{i=1}^m s_i = v(\{1, \dots, m\})$. Crettez e Deloche establecen no seu traballo que existe un reparto de excedente coalicionalmente estable (Crettez e Deloche, 2018, Proposition 2). É dicir, un reparto do excedente $(s_i)_i$ no cal cada coalición recibe un pago igual ou maior que o excedente que obtén cando se realiza o proxecto.

O feito de que as leis de Francia, Italia e Portugal opten por facer un reparto de custos en proporción coas vantaxes ten como obxectivo que o reparto do excedente sexa o máis xusto posible. Esta idea fundaméntase no feito de que se aquelas partes que maior beneficio obteñen do servizo pagan máis, a diferenza entre o custo e o beneficio (i.e. o excedente) será máis parecida entre as distintas fraccións. Porén, non existe ningunha lei que se refira ao reparto do excedente.

Ademais, as distribucións de custos coalicionalmente estables obtidas a partir da regra do ascensor, da regra igualitaria, ou do valor de Shapley, inducen ás veces distribucións do excedente que non satisfán a condición de estabilidade coalicional (Crettez e Deloche, 2018). Isto supón que mentres que o reparto de custos pode ser acordado por unanimidade, este non sempre será o caso co reparto do excedente. Polo tanto, será complicado chegar a acordos cando os copropietarios se vexan obrigados a prestar máis atención ao reparto do excedente que ao reparto do custo.

3.2. Problemática coa lexislación dos Grupos 2 e 3 (Alemaña, Holanda e España)

No apartado anterior, co obxectivo de explicar os conceptos de forma máis clara, analizamos distintas regras de reparto tomando como exemplo un edificio con apartamentos iguais e repartidos un en cada andar. Porén, na maioría dos edificios de condominio existen varios apartamentos en cada nivel e repartidos de diferentes xeitos. Para os vindeiros exemplos tomaremos un edificio coa seguinte estrutura: terá cero apartamentos no baixo, dous apartamentos no primeiro andar, un no segundo, tres no terceiro e un no cuarto. Ademais, cada un dos apartamentos terá a superficie en metros cadrados indicada na Figura 3.1. Observamos como o terceiro andar conta cunha menor superficie total, isto débese a que neste andar é onde se atopa o almacén de mantemento do edificio. Por último asumiremos que a instalación do ascensor supón un gasto total de 140.000€.

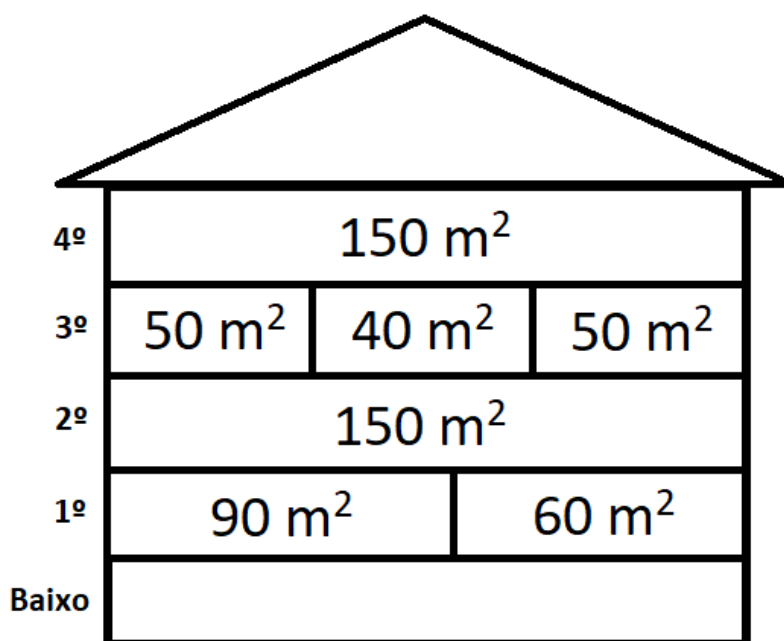


Figura 3.1: Exemplo de reparto de metros cadrados por vivenda

É importante ter en conta que a pesar de que cada apartamento pode pertencer a un dono distinto, aqueles que compartan a mesma parada de ascensor terán uns intereses compartidos. Por isto non é correcto consideralos sempre como unidades independentes, se non tamén como partes dun andar. Así, neste caso existe unha estrutura coalicional a priori que condiciona as negociacións relacionadas co reparto de custos. Este tipo de xogos nos que atopamos unións a priori foron primeiro estudados en Owen (1977). En Vázquez-Brage et al. (1997) estúdanse este tipo de xogos empregando como exemplo o problema do aeroporto proposto en Littlechild e Owen (1973). Este problema é moi similar ao do ascensor, considera os avións como xogadores con unións a priori por pertencer a compañías aéreas do mesmo xeito que nós consideramos os apartamentos ou as unidades de cota como xogadores que pertencen a andares.

Centrarémonos agora nas lexislacións dos grupos 2 (Holanda e Alemaña) e 3 (España). Como vimos cando repasamos as leis de cada un destes estados, os tres países baséanse nun reparto equitativo; en Holanda e Alemaña o custo repártese equitativamente entre os apartamentos mentres que en España

repártese equitativamente entre as unidades de cota (metros cadrados).

Dende a perspectiva da teoría de xogos estudaremos este problema como un xogo cooperativo de utilidade transferible (xogo TU). Un xogo TU é un par (N, c) onde N é un conxunto finito de n xogadores e c é unha aplicación de 2^N a \mathbb{R} con $c(\emptyset) = 0$.

Tendo isto en conta podemos definir a **regra de reparto equitativo** do seguinte xeito:

Para todo xogo (N, c) e para todo $i \in N$

$$\lambda_i = \frac{1}{n} \quad \text{ou} \quad RE_i(N, c) = \frac{c(N)}{n}.$$

Tendo en conta o edificio do exemplo e esta regra de reparto equitativo, a asignación de custos quedaría como vemos na Figura 3.2.

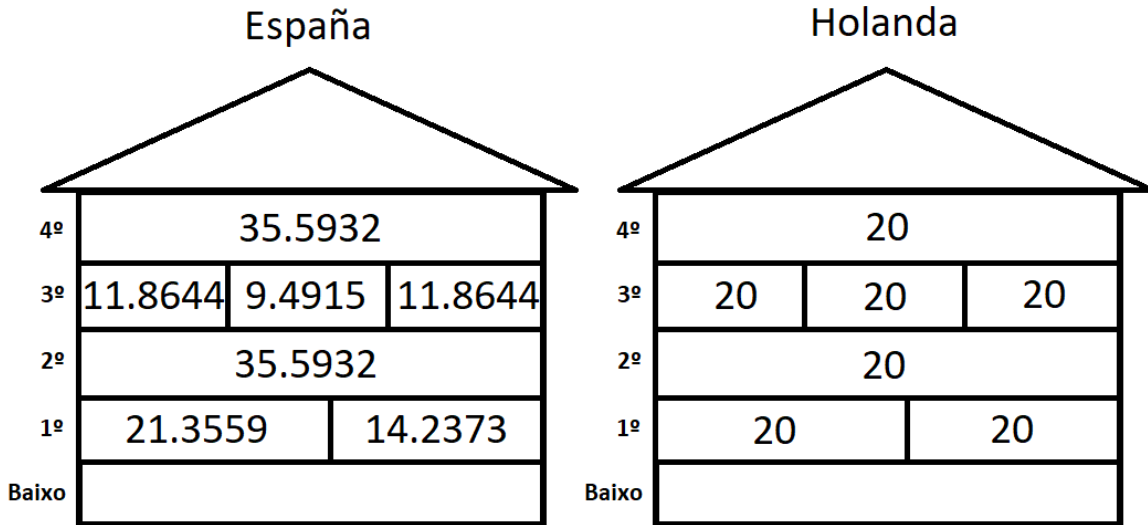


Figura 3.2: Reparto de custos segundo as regras española e holandesa (en miles de €)

Alonso-Mejide et al. (2020) estuda distintos modos de reparto tendo en conta as leis de España e Holanda. No seu traballo consideran a posibilidade de facer un reparto equitativo en dous pasos tendo en conta as unións a priori. O primeiro paso consistiría en repartir os custos de maneira equitativa entre os andares e o segundo paso en repartir o custo de cada andar a partes iguais entre os apartamentos (no caso da lei holandesa) ou entre os metros cadrados (no caso da lei española). Este reparto está baseado no valor de Owen e a distribución no caso do noso exemplo quedaría como vemos na Figura 3.3.

Formalmente definimos (N, c, P) como o xogo TU con unións a priori no cal $P = \{P_1, \dots, P_m\} \in P(N)$ e $P(N)$ é o conxunto de todas as particións de N .

Para todo xogo (N, c, P) con $P = \{P_1, \dots, P_m\}$ e con $i \in P_k$ e para todo $i \in N$, a regra de reparto equitativo con unións a priori asignaría os custos como vemos a continuación:

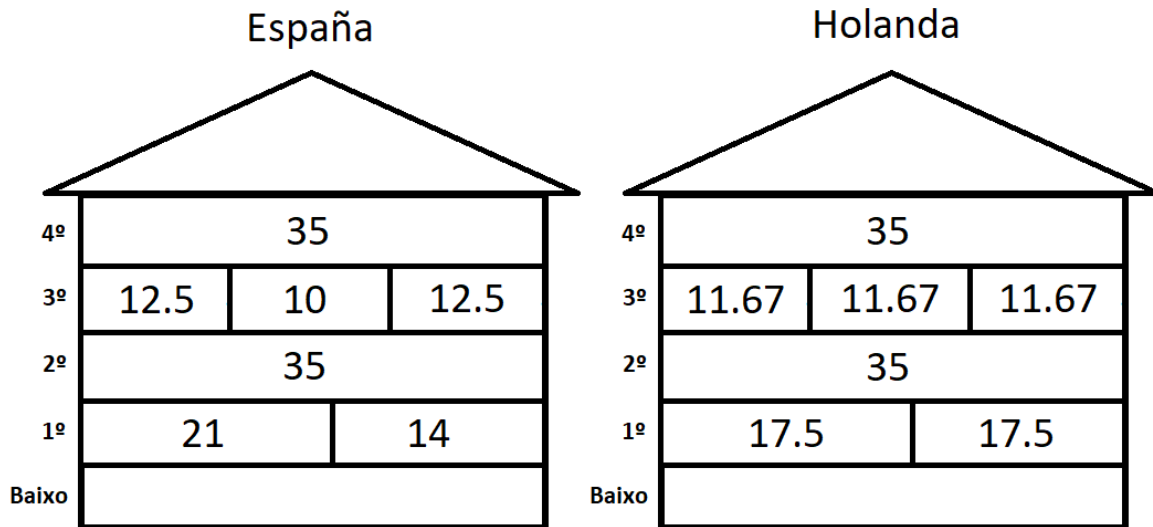


Figura 3.3: Reparto de custos segundo as regras española e holandesa tendo en conta unións a priori (en miles de €)

$$\lambda_i = \frac{1}{mp_k} \quad \text{ou} \quad RE_i^U(N, c, P) = \frac{c(N)}{mp_k}.$$

En casos nos que os beneficios colectivos e os individuais son facilmente distinguibles, ten sentido considerar o reparto equitativo do beneficio como regra para facer o reparto de custos. Esta regra defínese para todo xogo (N, c) e para todo $i \in N$

$$REB_i(N, c) = c(i) + \frac{c^0(N)}{n},$$

onde $c^0(S) = c(S) - \sum_{i \in S} c(i)$.

No condominio do noso exemplo asumimos que o custo do ascensor de 140.000€ se divide en 60.000€ de custo fixo c_b correspondente aos traballos feitos no baixo e un custo c_a de 20.000€ por cada un dos catro andares adicionais. Na Figura 3.4 mostramos como queda o reparto de custos cando aplicamos a regra do reparto equitativo do beneficio.

Como vemos, en ningún dos dous casos queda un reparto apropiado. No caso de España os andares superiores vense moi prexudicados mentres que os inferiores serían mesmo recompensados pola instalación do ascensor. No reparto holandés, o terceiro andar é o que leva unha peor parte e os apartamentos do primeiro tamén levan unha recompensa que non parece coherente co problema que se propón.

Alonso-Mejide et al. (2020) indica que este problema no reparto pode vir dado polo feito de que os custos individuais corresponden cos andares mentres que os suxeitos no reparto son os xogadores. A raíz desta premisa propóñense tres repartimentos diferentes baseados na regra do reparto equitativo do beneficio pero tendo agora en conta as unións a priori.

Na primeira (REB1) divídese o valor da gran coalición entre os andares empregando o reparto equitativo do beneficio para logo dividir a cantidade asignada a cada un de forma equitativa. É dicir, para todo xogo (N, c, P) con $P = \{P_1, \dots, P_m\}$ e con $i \in P_k$ e para todo $i \in N$

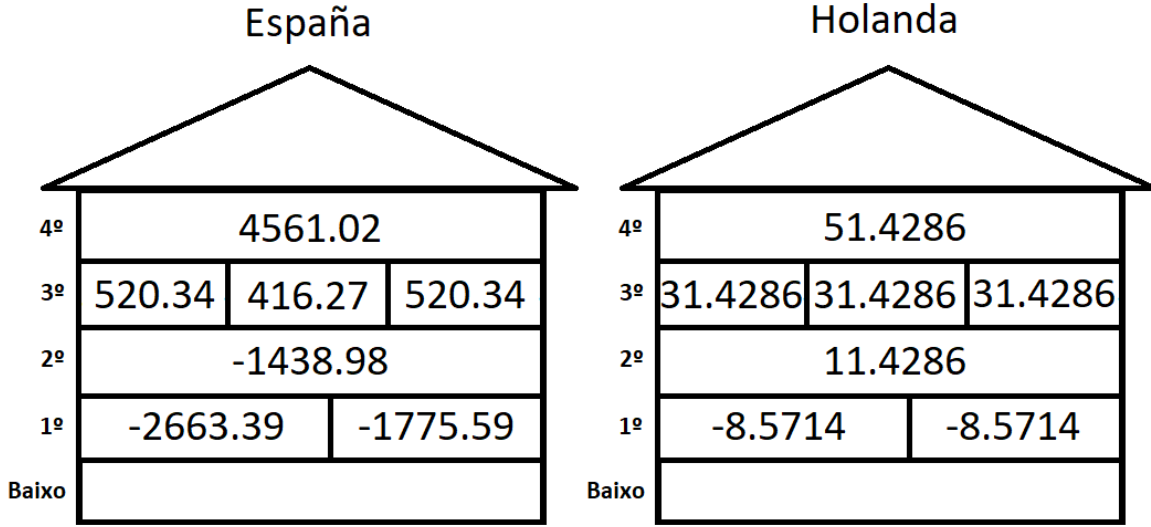


Figura 3.4: Reparto de custos segundo a regra de reparto do beneficio en España e Holanda (en miles de €)

$$REB1_i^U(N, c, P) = \frac{c(P_k)}{p_k} + \frac{c(N) - \sum_{l \in M} c(P_l)}{mp_k}.$$

Aplicando esta regra de reparto obtemos o esquema da Figura 3.5.

Na segunda (REB2), para todo xogo (N, c, P) con $P = \{P_1, \dots, P_m\}$ e con $i \in P_k$ e para todo $i \in N$

$$REB2_i^U(N, c, P) = c(i) + \frac{c(P_k) - \sum_{j \in P_k} c(j)}{p_k} + \frac{c(N) - \sum_{l \in M} c(P_l)}{mp_k}.$$

Desta forma obtemos o reparto da Figura 3.6.

O terceiro reparto (REB3) asigna $c(i)$ a cada apartamento i e logo divide $c^0(N)$ entre eles empregando o reparto equitativo de dous pasos. É dicir, para todo xogo (N, c, P) con $P = \{P_1, \dots, P_m\}$ e con $i \in P_k$ e para todo $i \in N$

$$REB3_i^U(N, c, P) = c(i) + RE^U(N, c^0, P) = c(i) + \frac{c(N) - \sum_{j \in N} c(j)}{mp_k}.$$

Dando lugar á asignación da Figura 3.7.

Observamos que a regra REB3 non dá un reparto satisfactorio, asignando custos moi elevados a algúns apartamentos mentres que recompensa a outros con cantidades de diñeiro que son inxustificables. Vemos por outra banda como as regras REB1 e REB2 si proporcionan un reparto aceptable tendo en conta o problema proposto. Obtéñense uns repartimentos de custos que penalizan aos andares superiores ao contrario do que sucedía co reparto equitativo en un e dous pasos. Esta penalización aos andares superiores con respecto aos inferiores parece xusta e é semellante á que se obtiña coa regra do ascensor ou o valor de Shapley que vimos cando estudabamos o problema en base á lexislación francesa. Porén, parece que no noso exemplo a penalización é demasiado esaxerada, habendo unha diferenza demasiado grande entre os distintos andares.

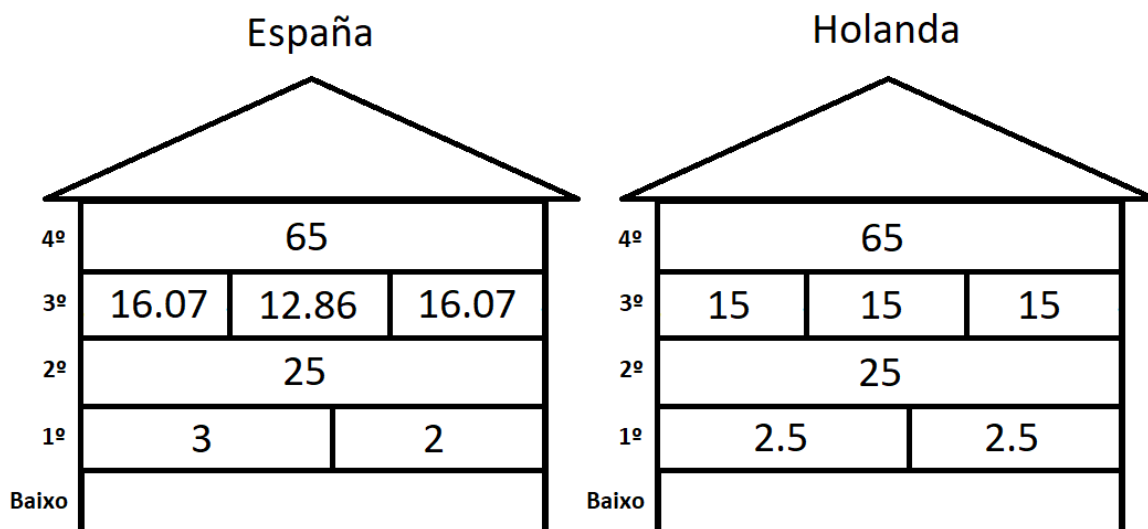


Figura 3.5: Reparto de custos segundo a regra REB1 en España e Holanda (en miles de €)

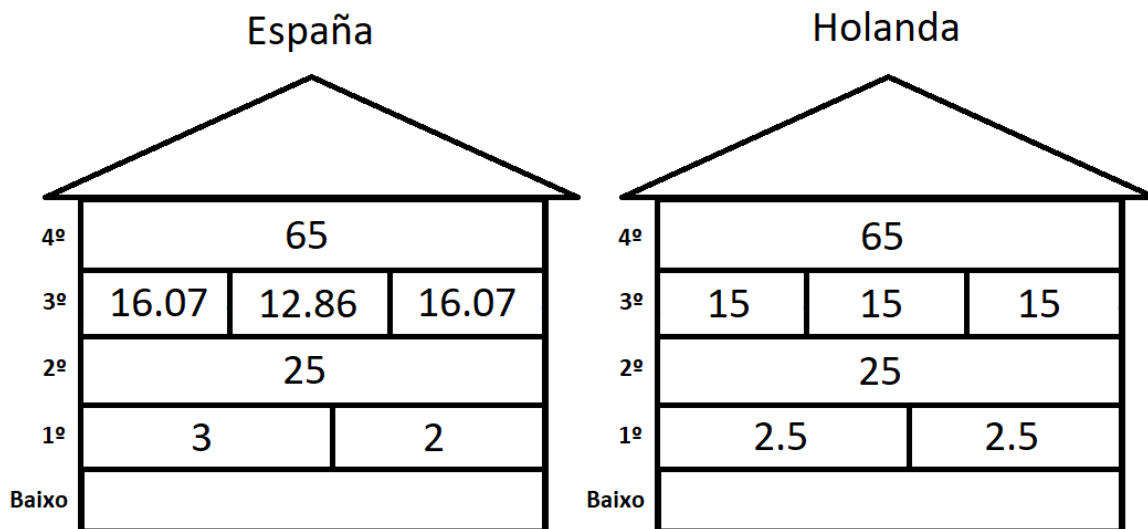


Figura 3.6: Reparto de custos segundo a regra REB2 en España e Holanda (en miles de €)

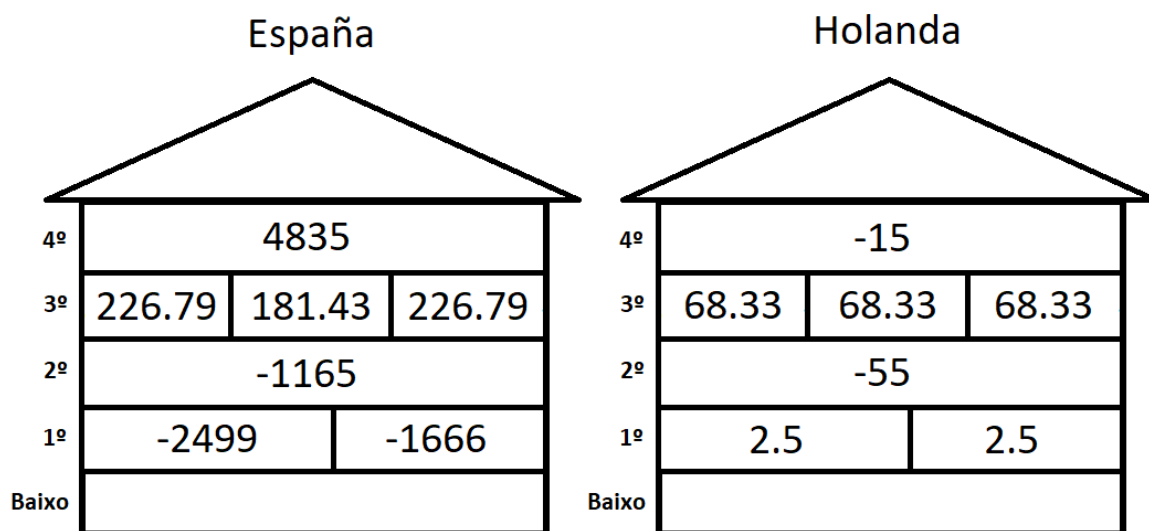


Figura 3.7: Reparto de custos segundo a regra REB3 en España e Holanda (en miles de €)

Capítulo 4

Novas propostas de reparto

A partir dos resultados obtidos anteriormente, empregaremos as regras de reparto estudadas para crear dúas novas. Buscamos así atopar asignacións de custos alternativas que poidan ser máis xustas que as obtidas ata agora. Concretamente, faremos o reparto a partir da regra do ascensor e do valor de Shapley para o caso que contempla as unións a priori.

Na primeira dividimos o valor da gran coalición entre os andares empregando a regra do ascensor para logo dividir a cantidade asignada a cada xogador segundo o reparto equitativo:

$$\lambda_a^U = \frac{1 + (a - 1)^{\frac{1}{2}}}{p_k \Sigma}, a = 1, \dots, m,$$

onde Σ é a suma dos coeficientes, é dicir

$$\Sigma = m + \frac{m(m-1)}{4}.$$

Vemos como este método de reparto é basicamente a regra do ascensor engadindo que a parte correspondente a cada andar se divide igualitariamente entre o número de apartamentos ou de metros cadrados. Obtemos así o reparto da Figura 4.1.

Na segunda regra seguimos o mesmo procedemento pero neste caso empregamos o valor de Shapley en vez de empregar a regra do ascensor. Facendo isto obtemos o valor de Owen, que aplicado a este traballo queda representado pola seguinte expresión:

Para todo $i \in N$ con $i \in P_k$

$$sh_i^U = Ow_i = \frac{c_b}{mp_k} + c_a \left(\sum_{t=1}^m \frac{1}{p_k (m - (t - 1))} \right).$$

A asignación de custos obtida a partir desta regra vémosla na Figura 4.2.

Observamos que ambas regras proporcionan un reparto satisfactorio. Comparándoas coas regras REB1 e REB2 vemos como estas dúas tamén penalizan aos andares superiores con respecto aos inferiores. Porén, a penalización neste caso parece máis razoable e non tan esaxerada como a que viamos no capítulo anterior. Poderíase dicir que os repartos obtidos con estas regras son os máis acertados para o exemplo plantexado.

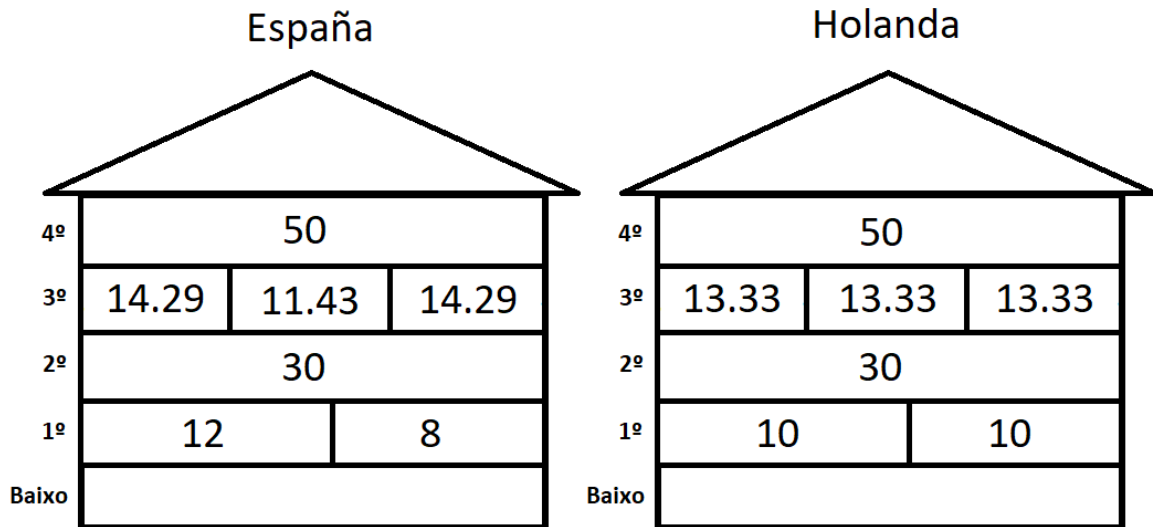


Figura 4.1: Reparto de custos segundo a regra do ascensor en España e Holanda (en miles de €)

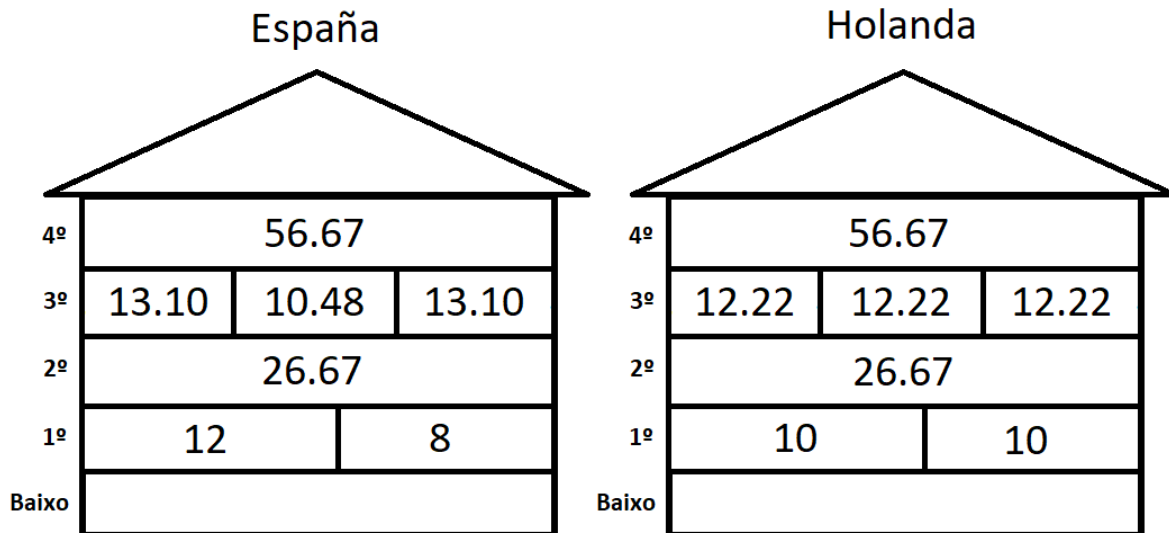


Figura 4.2: Reparto de custos segundo o valor de Shapley en España e Holanda (en miles de €)

Capítulo 5

Cálculo do reparto empregando o paquete CustosAscensor de R

Con motivo deste traballo foi creado un paquete para o software estatístico R. Este paquete permítenos calcular o reparto de custos de instalación dun ascensor empregando os diferentes métodos que estudamos nos capítulos anteriores. Para instalalo debemos abrir R ou ben RStudio e empregar o seguinte comando:

```
>install.packages("CustosAscensor")
```

Esta función de R vai ao repositorio, descarga e instala todo empregando só unha liña de código. Unha vez feito isto deberemos activar o paquete para que poida ser empregado. Faremos isto co seguinte comando:

```
>library(CustosAscensor)
```

Así estaremos xa listos para empregar as funcións do paquete e obter os repartos de custos que desexemos calcular.

En canto ás funcións que temos dispoñibles no paquete, temos por unha banda as funcións **REandar()**, **AscensorAndar()** e **ShapleyAndar()**. Empregando estas funcións podemos calcular a parte que lle toca aportar a cada andar dependendo de se repartimos mediante a regra equitativa, a regra do ascensor ou o valor de Shapley. Basta introducir o custo da instalación e o número de andares para obter a cantidade que se lle asigna a cada un.

Imaxinemos que queremos calcular o reparto mediante a regra do ascensor para un edificio de 5 andares e un custo de instalación de 140 (en miles de €). Empregaríamos a seguinte expresión:

```
>AscensorAndar(140,5)
```

	andar	custo
1	1	14
2	2	21
3	3	28
4	4	35
5	5	42

Neste exemplo pagaría o primeiro andar 14 mil €, o segundo 21 mil €, o terceiro 28 mil €, o cuarto 35 mil € e o quinto 42 mil €.

Se o que queremos é calcular o custo correspondente a un apartamento en concreto, empregaremos as funcións representadas na Figura 5.1. Os parámetros que precisamos introducir varían dependendo da función que escollamos, pero pódense consultar facilmente empregando a páxina de axuda de R. Pódese acceder a esta páxina de xeito sinxelo executando o nome da función anteposto por un signo de interrogación. Por exemplo, para obter axuda na función **REm2()** escribiríamos:

```
>?REm2()
```

Vemos así que para executar esta función necesitamos introducir o custo total da instalación do ascensor, o número de metros cadrados que ten o edificio e o número de metros cadrados que ten o apartamento.

Imaxinemos que queremos calcular o custo correspondente a un apartamento de 60 m^2 nun edificio que consta en total de 590 m^2 e ten unha instalación que custa 140 (en miles de €). Empregaríamos a seguinte expresión:

```
>REm2(140,590,60)
```

```
[1] 14.23729
```

O apartamento do exemplo debería pagar 14.23729 miles de €.

Ademais de ensinarnos os parámetros que debemos empregar para usar a función, a páxina de axuda do paquete proporciona máis información. Por unha banda describe cal é o obxectivo que a función trata de acadar dándonos unha breve descrición de como funciona. Á súa vez enumera e describe os parámetros que debemos introducir para obter o resultado esperado. Por último, proporcionáanos dous exemplos que poden ser modificados para o caso concreto que queiramos calcular, facilitando así o entendemento de como funciona o paquete.

En definitiva, o paquete ofrécenos a posibilidade de obter o reparto de custos dun edificio calquera empregando a regra de reparto que nós escollamos. Deste xeito poderemos calcular en apenas uns segundos a cantidade que lle corresponde aportar ao noso apartamento, xa que as funcións implementadas no paquete fan todos os cálculos por nós.

Regra \ País	ESPAÑA	HOLANDA
Reparto equitativo	REm2	REapt
Reparto equitativo con unións a priori	REm2U	REaptU
Reparto equitativo do beneficio	REBm2	REBapt
REB1	REB1m2	REB1apt
REB2	REB2m2	REB2apt
REB3	REB3m2	REB3apt
Regra do ascensor con unións a priori	Ascensorm2	AscensorApt
Valor de Shapley con unións a priori (valor de Owen)	Shapleym2	ShapleyApt

Figura 5.1: Funcións dispoñibles no paquete CustosAscensor de R

Referencias

- [1] Alonso Meijide J M, Costa J, García-Jurado I, Gonçalves-Dosantos J (2020) On egalitarian values for cooperative games with a priori unions. TOP. doi: 10.1007/s11750-020-00553-2
- [2] Crettez B, Deloche R (2018) A law-and-economics perspective on cost-sharing rules for a condo elevator. Review of Law & Economics, Volume 15, Issue 2, 20160001, ISSN (Online) 1555-5879.
- [3] Littlechild S C, Owen G (1973) A simple expression for the Shapley value in a special case. Management Science 20:370-372.
- [4] Owen G (1977) Values of games with a priori unions. Mathematical Economics and Game Theory, eds. Henn, R & Moeschlin, O. (Springer-Verlag), pp. 76-88.
- [5] Rego P (2003) La máquina que “inventó” los rascacielos. El mundo, Magazine 187.
- [6] Vazquez-Brage M, Nouweland A, García-Jurado I (1997) Owen’s coalitional value and aircraft landing fees. Mathematical Social Sciences 34:273-286.