Trabajo Fin de Máster

El problema de bancarrota

Javier Rivero de Aguilar Ameneiro

Máster en Técnicas Estadísticas

Curso 2017-2018

“El nivel máximo de bienestar social se alcanza cuando cada individuo, de forma egoísta, persigue su bienestar individual y nada más que ello.” **Adam Smith**

“Una sociedad maximiza su nivel de bienestar cuando cada uno de sus individuos acciona a favor de su propio bienestar, pero sin perder de vista el bienestar de los demás integrantes.” **John Nash**

Título en galego: O problema da bancarrota
Título en español: El problema de bancarrota
English title: The bankruptcy problem
Modalidad: A
Autor/a: Javier Rivero de Aguilar Ameneiro, Universidad de Santiago de Compostela
Director/a: Juan Vidal Puga
Breve resumen del trabajo: Cuando una empresa quiebra y su valor nominal no es suficiente para cubrir las deudas contraídas, ¿cómo debe repartirse éste entre los acreedores? Desde el punto de vista teórico, un problema de bancarrota puede definirse como un vector y un escalar. Las coordenadas del vector son las demandas de los acreedores, y el escalar representa la cantidad a repartir, de forma de la suma de las demandas es superior a la cantidad a repartir. El problema de bancarrota consiste en buscar un vector de pagos de forma que la suma de sus coordenadas coincida con la cantidad a repartir, sin que ningún pago supere la demanda inicial. El objetivo de este TFM es realizar una breve revisión de los principales trabajos realizados y aplicar alguno de dichos resultados a un problema real.

Don Juan Vidal Puga, profesor de la Universidad de Vigo, informa que el Trabajo Fin de Máster titulado

El problema de bancarrota

fue realizado bajo su dirección por don Javier Rivero de Aguilar Ameneiro para el Máster en Técnicas Estadísticas. Estimando que el trabajo está terminado, da su conformidad para su presentación y defensa ante un tribunal.

En Madrid, a 26 de enero de 2018

El director

Don Juan Vidal Puga

El autor

Don Javier Rivero de Aguilar Ameneiro

Agradecimientos

A todas aquellas personas que me han acompañado y aguantado durante estos años. En especial a mi familia, mis amigos, mis compañeros de trabajo y por supuesto, mi pareja.

Quiero destacar el gran aporte que ha supuesto a mi vida la realización de este máster y que culmina con este trabajo. Me ha abierto las puertas a una vida profesional y familiar de las que estoy más que satisfecho. Gracias por introducirme en la atmósfera de la Estadística.

Índice General

Resumen

Resumen:

Cuando una empresa quiebra y su valor nominal no es suficiente para cubrir las deudas contraídas, ¿cómo debe repartirse éste entre los acreedores? Desde el punto de vista teórico, un problema de bancarrota puede definirse como un vector y un escalar. Las coordenadas del vector son las demandas de los acreedores, y el escalar representa la cantidad a repartir, de forma de la suma de las demandas es superior a la cantidad a repartir. El problema de bancarrota consiste en buscar un vector de pagos de forma que la suma de sus coordenadas coincida con la cantidad a repartir, sin que ningún pago supere la demanda inicial.

El objetivo de este TFM ha sido realizar una breve revisión de los principales trabajos realizados sobre la teoría de juegos cooperativos, introducir las principales reglas de reparto y aplicarlas a un problema real sobre las emisiones de CO_2.

Abstract:

When a company goes bankrupt and its nominal value is not enough to cover the debts incurred, how should it be shared among the creditors? From the theoretical point of view, a bankruptcy problem can be defined as a vector and a scalar. The coordinates of the vector are the demands of the creditors, and the scalar represents the amount to be distributed, the way in which the demands are greater than the amount to be distributed. The problem of bankruptcy is to find a payment vector that forms the sum of its coincidences with the amount to be distributed, without the payment exceeding the initial demand.

The objective of this TFM has been to carry out a brief review of the main works carried out on the theory of cooperative games, to introduce the main distribution rules and to apply them to a real problem about CO_2 emissions.

Prefacio

La Teoría de Juegos es una rama de la matemática aplicada, desarrollada en sus comienzos como una herramienta para entender el comportamiento de la economía, que analiza, mediante modelos, interacciones en estructuras formalizadas de incentivos, denominadas juegos, en las que varios seres racionales, denominados jugadores, tienen un interés común y se influyen mutuamente. La Teoría de juegos no sólo analiza dichas interacciones, sino que estudia las estrategias óptimas, así como el comportamiento previsto de los jugadores.

La Teoría de Juegos se divide en Juegos cooperativos y Juegos no cooperativos. Generalmente en los juegos cooperativos los jugadores pueden llegar a un acuerdo, formar estrategias o en el caso de los juegos de bancarrota, variar sus demandas en función del estado o del número de jugadores. En los juegos no cooperativos los jugadores toman decisiones únicamente para su beneficio personal. A su vez pueden distinguirse los juegos con información completa o incompleta en función de si todos los jugadores conocen con seguridad su comportamiento previsto y el de los demás jugadores o no, respectivamente.

Dentro de la teoría de juegos cooperativos, nos encontramos con los problemas de bancarrota, por lo que introduciremos en el presente trabajo esta tipología de juegos y así centrarnos posteriormente el problema de bancarrota, sus soluciones y propiedades o características asociadas.

El trabajo constará de 6 bloques y un apéndice.

En el bloque 1, *Teoría de Juegos*, nos introduciremos en los juegos cooperativos con utilidad transferible y sus soluciones. Esta clase de juego es un juego cooperativo en el que hay una utilidad o beneficio infinitamente divisible que se asigna a cada grupo de jugadores, denominado coalición, y cuya solución determina la cantidad de utilidad que recibe o gana cada jugador.

El bloque 2, *Situaciones de bancarrota*, nos introduce en el objetivo principal del trabajo, cuando una empresa quiebra y su valor nominal no es suficiente para cubrir las deudas contraídas, ¿cómo debe repartirse éste entre los acreedores?. Daremos respuesta a esta pregunta mediante un reparto en situación de bancarrota. En definitiva, la situación de bancarrota se produce si la demanda total, resultante de la acumulación de las demandas de cada individuo, excede al capital disponible a repartir entre todos los individuos.

En el bloque 3, *Reglas de bancarrota*, comentaremos las formas más relevantes de dar solución a los problemas de bancarrota, así como sus propiedades.

En el bloque 4, *Dualidad y caracterizaciones de las reglas de bancarrota*, trataremos la dualidad de las propiedades y las caracterizaciones de las reglas de bancarrota.

En el bloque 5, *Extensiones de los problemas de bancarrota*, introduciremos las uniones a priori de los agentes en los problemas de bancarrota.

En el bloque 6, *Aplicación a un caso real*, aplicaremos las reglas de bancarrota analizadas a un caso real.

1. Teoría de Juegos

La Teoría de Juegos es una rama de las matemáticas cuyo objetivo principal es estudiar las situaciones o juegos en las que varios decisores o jugadores interaccionan de forma que pueden afectar los intereses de los otros jugadores con un interés común. La ausencia de estas situaciones o conflictos entre los decisores trivializa el juego. Los juegos se han clasificado tradicionalmente en juegos cooperativos y no cooperativos.

Los juegos no cooperativos son aquellos en los que cada decisor actúa siguiendo su propio interés y los jugadores no establecen contratos vinculantes. Se establecen posiciones entre los decisores total o parcialmente contrapuestas.

Sin embargo, a medida que se introducen posibilidades de cooperación o comunicaciones, los juegos pasan a ser cooperativos en los cuales se establece la recompensa de una supuesta cooperación.

Introducimos los siguientes términos:

Coalición de jugadores: un subconjunto de jugadores debe estar dispuesto a comunicarse y cooperar. Cada subconjunto de jugadores $S \subseteq N$ constituye una coalición de jugadores. Todas las posibles coaliciones de jugadores están formadas por el conjunto de todos los subconjuntos de jugadores de N. Diremos que existe coalición total cuando $S = N$.

Función característica: la función característica asigna a cada coalición su utilidad, representada por lo general en pagos, beneficios, cantidades de un bien, etc. fruto de su cooperación. La denotaremos por $v(S)$, asigna la utilidad total o valor que los jugadores de la coalición de S pueden asegurarse por sí mismos, sin afectarles las actuaciones del resto de jugadores del conjunto N.

En los juegos cooperativos con utilidad transferible $v(S)$ se puede repartir de cualquier manera, infinitamente divisible entre los jugadores de la coalición S.

1.1. Juegos cooperativos con utilidad transferible

El objetivo de la teoría de Juegos es estudiar las situaciones de conflicto entre los decisores o jugadores con el fin último de repartir o distribuir el valor o beneficio resultado de la cooperación entre los miembros de la coalición, introduciremos los siguientes términos:

Definición 1.1. Un juego cooperativo con utilidad transferible es un par (N, v), donde N es un conjunto finito $N = \{1, 2, \dots, n\}$, que representa al conjunto de jugadores y v es la función característica,

$$v: 2^N \to \mathbb{R}$$

que verifica $v(\emptyset) = 0$ y 2^N denota los subconjuntos que son coaliciones.

Se denota por G al conjunto de todos los juegos con utilidad transferible, y se denota por G^N al conjunto de todos los juegos con utilidad transferible con N como conjunto de jugadores. Cuando no haya lugar a confusión con el conjunto de jugadores, identificaremos un juego por su función característica v.

En un juego pueden distinguirse varios tipos de jugadores:

Títeres, los que no aportan más a cualquier coalición que lo que son capaces de conseguir por sí mismos.

Irrelevantes, son los que no aportan nada a ninguna coalición.

Simétricos, los que aportan exactamente lo mismo a cualquier coalición.

Definición 1.2. Dado un juego $v \in G^N$,

Un jugador $i \in N$, es títere si $v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(\{i\}), \forall S \subseteq N \backslash \{i\}$.

Un jugador $i \in N$, es irrelevante si $v(S \cup \{i\}) = v(S), \forall S \subseteq N \setminus \{i\}$.

Dos jugadores $i, j \in N$, son simétricos si $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}), \forall S \subseteq N \setminus \{i, j\}$.

Definición 1.3. Se dice que un juego (N, v) es monótono si $\forall S, T \subseteq N, con\ S \subseteq T$ se verifica,

$$v(S) \leq v(T).$$

Esto quiere decir que, al incorporarse jugadores a la coalición, el pago de dicha coalición no disminuye, por lo tanto, la incorporación de jugadores a la coalición no supone un menor valor.

Definición 1.4. Se dice que un juego (N, v) es superaditivo si $\forall S, T \subseteq N, con\ S \cap T = \emptyset$ se verifica,

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T).$$

Es decir, si dos coaliciones disjuntas deciden unirse para formar una coalición mayor, el beneficio de la nueva coalición será igual o superior a la suma de los beneficios originales de las coaliciones.

Si la desigualdad de la definición anterior se da en sentido opuesto, se dice que el juego es subaditivo: un juego (N, v) es subaditivo si $\forall S, T \subseteq N, con\ S \cap T = \emptyset$ se verifica,

$$v(S) + v(T) \geq v(S \cup T).$$

Todo jugador de un juego cooperativo tiene que recibir su parte del pago total $v(N)$. El pago a cada jugador se puede representar mediante una función que le asigne a cada jugador del conjunto un número real que represente el pago que obtendrá en el juego.

Definición 1.5. Dado un conjunto de jugadores N, un reparto de pagos viene dado por $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^N$, donde x_i representa el pago del jugador i.

Dado un reparto de pagos $x \in \mathbb{R}^N$, para cualquier coalición $S \subseteq N$ denotaremos por $x(S)$ al pago total recibido por los miembros de S, i.e. $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$, y por x_S a la restricción del reparto de pagos a S, i.e. $x_S = (x_i)_{i \in S} \in \mathbb{R}^S$.

Dado que asumimos que los individuos involucrados en la situación van a cooperar, parece razonable que el reparto de pagos que acuerden repartir entre ellos sea el beneficio global $v(N)$ resultante de la cooperación. Esta propiedad de los repartos de pago se denomina eficiencia.

Definición 1.6. Dado un juego $v \in G^N$, el conjunto de repartos de pago eficientes viene dado por:

$$X(v) = \{x \in \mathbb{R}^N : x(N) = v(N)\}.$$

Parece racional que los jugadores, para aceptar la distribución de pagos propuesta, deberían recibir un pago igual o superior al que recibirían si jugasen solos. Este es el llamado principio de individualidad racional.

Definición 1.7. Se define $I(N, v)$, al conjunto de imputaciones de un juego (N, v), como el conjunto de todos los repartos eficientes e individualmente racionales,

$$I(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^N : x(N) = v(N), x_i \geq v(\{i\}) \;\forall\, i \in N\}.$$

1.2. Soluciones en juegos cooperativos

Una vez introducidos los principales conceptos y propiedades de los juegos cooperativos, el problema que surge es el de proponer un reparto de pagos que sea aceptado por todos los jugadores.

Existen dos tipos de conceptos de solución de juegos cooperativos: las soluciones tipo conjunto, limitan el conjunto de repartos de pagos del conjunto de imputaciones, y los de tipo puntual, que eligen un solo reparto de pagos de entre todos los posibles.

A continuación, se presentan algunos de los conceptos de solución más utilizados en los juegos cooperativos: el Núcleo (tipo conjunto), y el Nucleolus, el valor de Shapley y el valor de Tijs o τ-valor (tipo puntual).

1.2.1. Núcleo

El núcleo fue introducido por Gillies (1953). Es una de las soluciones más importante en juegos cooperativos. El núcleo es el conjunto de repartos de pago que ofrece a cada posible coalición sobre N un beneficio al menos igual que el que dicha coalición puede conseguir por sí mima.

Definición 1.8. Dado $v \in G^N$, se define el núcleo de v, y se denota por $C(v)$, al siguiente conjunto de repartos de pago:

$$C(v) = \{x \in \mathbb{R}^N : x(N) = v(N), \qquad x(S) \geq v(S) \forall\ S \subseteq N\}.$$

El Núcleo es un poliedro (compacto y convexo). Puede tener un único elemento, un número infinito de elementos o puede ser un conjunto vacío, por lo tanto, no se podría obtener un reparto de pagos con el que todas las coaliciones se viesen beneficiadas.

Una clase importante de juegos para los que el núcleo es no vacío es la clase de juegos convexos.

Definición 1.9. Se dice que un juego (N, v) es convexo si $\forall\, S, T \subseteq N$, se verifica,

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T) - v(S \cap T).$$

Un juego es cóncavo si $v(S \cup T) \leq v(S) + v(T) - v(S \cap T)$.

Teorema 1.10. (Shapley, 1971). Todo juego convexo tiene núcleo no vacío.

1.2.2. Nucléolo

El nucléolo fue introducido por Schmeidler (1969), es una regla que propone una solución que tiene en cuenta la diferencia entre el valor de una coalición de jugadores y el pago que recibirán.

Definición 1.11. Dado $v \in G^N$ y $x \in \mathbb{R}^N$, para cada coalición $S \subset N$ se define el exceso de valor de la coalición S con respecto a la imputación x como,

$$e(S, x) = v(S) - x(S) = v(S) - \textstyle\sum_{i \in S} x_i.$$

Al incrementarse el exceso de valor de la coalición S con respecto a la imputación x, mayor es la insatisfacción que sienten sus miembros frente a x.

Considerando un reparto de pagos $x \in \mathbb{R}^N$, y $\theta(x) = \big(e(S_1, x), \ldots, e(S_{2^n}, x)\big) \in \mathbb{R}^{2^n}$, el denominado reparto de excesos, el vector cuyas componentes representan los excesos de las coaliciones con respecto de x, en orden no decreciente.

Para definir el siguiente concepto necesitamos introducir el orden lexicográfico. Sean $\theta(x) = \left(e(S_1^x, x), \ldots, e(S_{2^n}^x, x)\right)$ y $\theta(y) = \left(e(S_1^y, y), \ldots, e(S_{2^n}^y, y)\right)$ dos vectores de excesos, diremos que $\theta(x)$ precede a $\theta(y)$ en el orden lexicográfico si,

$$\exists\, j{:}\; e\left(S_j^x, x\right) = e\left(S_j^y, y\right) \forall\, i < j$$

$$y\; e\left(S_j^x, x\right) < e\left(S_j^y, y\right).$$

Definición 1.12. Dado $v \in G^N$, el nucléolo es el conjunto de imputaciones $\eta(v)$, que verifica:

$$\eta(v) = \{x \in I(v) : \theta(x) \leq_L \theta(y), \forall\, y \in I(v)\},$$

donde $\theta(x)$ y $\theta(y)$ son los repartos de excesos de valor respecto de x e y, respectivamente y $\leq_L$ es el orden lexicográfico en $\mathbb{R}^{2^n}$.

Por lo tanto, podemos decir que el nucléolo contiene aquellas distribuciones de pagos que son imputaciones y para las cuales se minimiza la insatisfacción de las coaliciones.

Teorema 1.13 (Schmeidler, 1969). Dado un juego monotono $v \in G^N$, existe un único punto $z \in \eta(v)$ y, además, se tiene que $z \in C(v)$ siempre y cuándo $C(v) \neq \emptyset$.

1.2.3. Valor de Shapley

El valor de Shapley, (Shapley, 1953) es método más utilizado en los juegos cooperativos de utilidad transferible. Shapley partió de cuatro axiomas que debería cumplir el reparto de pagos óptimo, y demostró que sólo una asignación cumplía todos los axiomas. Demostró que existe un único valor φ sobre G^N que asigna a cada juego un reparto de pago eficiente que asigna el mismo pago a jugadores simétricos, pago nulo a los jugadores irrelevantes y que, además, verifica que para cada par de juegos v, w la suma de los valores de estos juegos coincide con el valor del juego suma.

Definición 1.14. Dado un conjunto de juegos $G_0^N \subset G^N$, un valor sobre G_0^N es una aplicación $\psi : G_0^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ que asigna a cada juego $v \in G_0^N$ un reparto de pagos $\varphi(v) \in \mathbb{R}^N$. Se define como:

$$\varphi(v) = \sum_{T \subset N \setminus \{i\}} \frac{|T|!\,(|N| - |T| - 1)!}{|N|!} \left(v(T \cup \{i\}) - v(T)\right), \forall\, i \in N\; y\; \forall\, v \in G_0^N.$$

El valor de Shapley puede interpretarse como la contribución marginal esperada de cada jugador al entrar en una coalición.

Definición 1.15. Dado un juego $v \in G^N$, un jugador $i \in N$ y una coalición $S \subset N \setminus \{i\}$, el factor $v(S) - v(S \setminus \{i\})$ es la contribución marginal efectiva del jugador i al incorporarse a la coalición $S \setminus \{i\}$ y no a otra coalición.

Consideremos que en un juego hay un centro de pago al que los individuos van llegando, uno a uno, según un determinado orden de llegada que viene dado por una permutación del conjunto total de jugadores. Bajo este supuesto, el pago de un jugador es su contribución marginal a la coalición formada por sus predecesores, i.e. la ganancia que éste aporta a la coalición formada por los jugadores que llegaron antes que él al centro de pago. De este modo podemos construir un vector en el que la coordenada $i - ésima$ indica la contribución marginal del jugador i a la coalición formada por sus predecesores.

Definición 1.16. Dado un juego $v \in G^N$ y una permutación $\pi \in \Pi_N$ del conjunto total de jugadores, el vector de contribuciones marginales de v asociado a π, $m_v^\pi \in \mathbb{R}^N$, se define como sigue:

$$m_v^\pi(i) = v\left(\left(\bigcup_{j \in N : \pi(j) < \pi(i)} \{j\}\right) \cup \{i\}\right) - v\left(\bigcup_{j \in N : \pi(j) < \pi(i)} \{j\}\right), \forall\, i \in N.$$

Una forma de hacer un reparto "justo" es considerar todos los posibles órdenes de llegada de los jugadores al centro de pago como órdenes que pueden ocurrir con la misma probabilidad. Observemos que en la coordenada $i - ésima$ del valor de Shapley cada sumando es el producto de la contribución marginal del jugador i a una cierta coalición T por la proporción de permutaciones en las que los miembros de T llegan al centro de pago y les sucede el jugador i. Esta proporción es $\frac{|T|!(|N|-|T|-1)!}{|N|!}$.

Por tanto, se puede redefinir el valor de Shapley como el promedio de los vectores de contribuciones marginales. Esto es:

$$\varphi(v) = \sum_{\pi \in \Pi_N} \frac{m_v^\pi}{|N|!}, \forall\, v \in G^N,$$

donde m_v^π es el vector de contribuciones marginales de v asociado a π.

En función de los vectores de contribuciones marginales, Shapley y Weber definieron un conjunto, denominado conjunto de Weber, como la envoltura convexa de dichos vectores de contribuciones marginales. Del conjunto de Weber podemos decir que, en un juego convexo, coincide con el núcleo y, consecuentemente, en un juego convexo el valor de Shapley pertenece al núcleo ya que el valor de Shapley se puede obtener como combinación lineal convexa de los vectores de contribuciones marginales y, entonces, pertenece al conjunto de Weber.

1.2.4. Valor de Tijs

Otra de las soluciones más importante en teoría de juegos cooperativos es valor de Tijs o τ-valor, introducido por Tijs en 1981, se caracteriza por encontrar un acuerdo entre las máximas y las mínimas aspiraciones de las ganancias que cada jugador espera obtener en el juego.

Sea un juego $v \in G^N$, definimos el vector superior, $M^v \in \mathbb{R}^N$, como sigue:

$$M_i^v = v(N) - v(N \setminus \{i\}), \forall\, i \in N.$$

Este vector se compone de las contribuciones marginales de cada jugador a la gran coalición y representa lo máximo a que cada jugador puede aspirar en el juego. Por tanto, si se forma la coalición S y todos los jugadores de dicha coalición obtienen el máximo pago, entonces el beneficio que le queda al jugador $i \in S$ con $S \subseteq N$ sería el resto:

$$R^v(S,i) = v(S) - \sum_{j \in S \setminus \{i\}} M_j^v(S),$$

por lo que la menor cantidad esperada por un jugador que participa en el juego o mínimo derecho es el mayor de los restos que puede conseguir. Lo que nos lleva a definir el vector inferior, $m^v \in G^N$, como sigue:

$$m_i^v = \max_{S: i \in S} \left\{ v(S) - \sum_{j \in S \setminus \{i\}} M_j^v(S) \right\}, \forall\, i \in N.$$

Definición 1.17. Un juego $v \in G^N$ se dice que es cuasiequilibrado si verifica:

a) $m^v \leq M^v$
b) $m^v(N) \leq v(N) \leq M^v(N)$.

El τ-valor asigna a cada juego cuasiequilibrado un reparto de pagos eficiente que es combinación convexa de los vectores superior e inferior.

Definición 1.18. En un juego cuasiequilibrado (N, v), el valor de Tijs es el vector $\tau(v) \in \mathbb{R}^n$, construido en la forma:

$$\tau(\mathrm{v}) = m^v + \alpha M^v,$$

donde $\alpha \in [0,1]$ y se verifica

$$\sum_{i \in N} \tau_i(v) = v(N).$$

El siguiente resultado que veremos afirma que los vectores m^v y M^v acotan el núcleo del juego inferior y superiormente, respectivamente.

Definición 1.19. Dado $v \in G^N$, el cubrimiento del núcleo del juego v, $CC(v)$, viene dado por:

$$CC(v) = \{x \in \mathbb{R}^N : x(N) = v(N),\ M^v \leq x \leq m^v\},$$

donde M^v es el vector superior de v y m^v es su vector inferior.

Teorema 1.20 (Tijs y Lipperts, 1982). Sea $v \in G^N$, se tiene que $C(v) \subset CC(v)$.

2. Problemas de bancarrota

Las situaciones de bancarrota tienen una estructura matemática común. Se trata de determinar un reparto de una cantidad de un bien infinitamente divisible (cuotas de pesca, emisiones de CO_2, dinero, etc) entre un conjunto de individuos cuyas demandas, derechos o reclamaciones exceden de la cantidad a repartir. Los ejemplos típicos son el de empresas en quiebra (el valor de sus activos es inferior al valor de sus pasivos), empresas en concurso de acreedores (no poder hacer frente a la totalidad de los pagos que adeuda), etc.

Una solución al problema de bancarrota es una regla de reparto que proporcione una distribución razonable de la cantidad del bien a repartir como función de las demandas de los agentes.

O'Neill (1982) presenta un convincente modelo matemático del problema de bancarrota. Propone varias metodologías para adjudicar reclamaciones conflictivas, y deriva en una serie de reglas sobre la base de estas metodologías.

Definición 2.1. Un problema de bancarrota es una tripleta (N, E, d), donde $E \in \mathbb{R}_+$ es el estado o bien disponible a dividir entre los agentes, $d = (d_1, \ldots, d_N) \in \mathbb{R}_+^N$ es el vector de demandas de los agentes, con un conjunto de n elementos, $N = \{1, \ldots, n\}$, siendo $|N| \geq 2$, d_i es la demanda del agente $i, \forall\ i \in N$ y además se cumple que $d(N) \geq E$ y $\sum_{i \in N} d_i > 0$.

Representaremos el problema de bancarrota por el par (E, d) cuando no dé lugar a confusión el conjunto de agentes.

Definición 2.2. Dado un problema de bancarrota (E, d), una solución es una función que asigna a cada problema de bancarrota un reparto $x \in \mathbb{R}^N$ tal que:

1) $x(N) = E$.
2) $0 \leq x_i \leq d_i, \forall\ i \in N$.

2.1. Juegos de bancarrota

En un problema de bancarrota (E, d), una solución pesimista de reparto es asignar a una coalición de agentes S lo que puede conseguir, esto es $E - d(N \setminus S)$, es decir, la diferencia de reparto en el Estado y las demandas de los agentes de no forman parte de la coalición S, entre $N \setminus S$, habiendo recibido cada uno de ellos la cantidad que demanda (sin superarla). En el caso de que esta diferencia sea 0, no sobre nada al dar a $N \setminus S$ todo lo que demanda, la coalición de agentes S, tendrá asignada una pago 0 y no inferior ya que el pago de cada agente no puede ser negativo. A continuación, usaremos la definición de O'Neill (1982).

Definición 2.3. Dado un problema de bancarrota (E, d), se define el juego de bancarrota, $(N, v_{E,d}) \in G^N$, como:

$$v_{E,d}(S) = máx(E - d(N \setminus S), 0), \forall\, S \subset N.$$

Una forma de dar una definición de juego de bancarrota optimista para los jugadores sería

$$\bar{v}_{E,d}(S) = mín(d(S), E), \forall\, i \in S, S \subset N.$$

Al conjunto de juegos de bancarrota con conjunto de jugadores N lo denotaremos por $GB^N \subset G^N$.

Observación 2.4. Dado $v_{E,d} \in GB^N$, se tiene :

$$v_{E,d}(N) = E,$$

$$v_{E,d}(\{i\}) = máx\{E - d(N \setminus \{i\}), 0\} \leq d_i, \forall i \in N,$$

$$v_{E,d}(N \setminus \{i\}) = máx\{E - d_i, 0\}, \forall i \in N.$$

2.1.1. Propiedades de los juegos de bancarrota

Teorema 2.5 (Curiel, Maschler y Tijs, 1987). Todo juego de bancarrota es convexo.

Se utiliza una formulación equivalente de juego convexo a la dada por Shapley.

Dado $v_{E,d} \in GB^N$, vamos a comprobar que $v_{E,d}(S\,U\,\{i\}) + v_{E,d}(T) \geq v_{E,d}(T\,U\,\{i\}) + v_{E,d}(S), \forall\, S, T \in N$ tales que $T \subset S \subset N \setminus \{i\}$.

Sea $T \subset S \subset N \setminus \{i\}$, $D = d(N)$, el conjunto de todas la demandas, y $A = E - D$, entonces:

$$v_{E,d}(S\,U\,\{i\}) + v_{E,d}(T) = máx\{A + d(S) + d_i, 0\} + máx\{A + d(T), 0\}$$

$$= máx\{2A + d(S) + d(T) + d_i, A + d(S) + d_i, A + d(T), 0\},$$

$$v_{E,d}(T\,U\,\{i\}) + v_{E,d}(S) = máx\{A + d(T) + d_i, 0\} + máx\{A + d(S), 0\}$$

$$= máx\{2A + d(S) + d(T) + d_i, A + d(T) + d_i, A + d(S), 0\},$$

como $d(S) \geq d(T)$ se tiene $A + d(T) + d_i \leq A + d(S) + d_i$, además por ser $d_i \geq 0$, $A + d(S) \leq A + d(S) + d_i$, por lo tanto se tiene $v_{E,d}(S\,U\,\{i\}) + v_{E,d}(T) \geq v_{E,d}(T\,U\,\{i\}) + v_{E,d}(S)$.

El siguiente resultado da una propiedad fuerte que implica que el núcleo y el cubrimiento del núcleo de un juego de bancarrota coinciden.

Teorema 2.6 (Curiel, Maschler y Tijs, 1987). Sean $v_{E,d} \in GB^N$ y $v \in G^N$ tales que $0 \leq v \leq v_{E,d}$ y $v(S) = v_{E,d}(S), \forall\, S$ si $|S| \in \{0, n-1, n\}$. Entonces $C(v) = CC(v)$.

Dado $x \in C(v_{E,d})$ implica $x \in C(v)$, por lo tanto $C(v) \neq 0$.

Por el teorema 1.20 sabemos que $C(v) \subset CC(v)$, veamos que $CC(v) \subset C(v)$.

Sea $x \in C(v_{E,d})$, entonces se tiene $x(N) = v_{E,d}(N)$ y como $v_{E,d}(S) = v(S)$ para S tal que $|S| = n$ se tiene $v_{E,d}(N) = v(N)$. Por tanto $x(N) = v(N)$. Sea $x \in C(v_{E,d})$, entonces se tiene $x(S) \geq v_{E,d}(S), \forall S \subset N$ y como $v \leq v_{E,d}$ se tiene que $x(S) \geq v(S), \forall S \subset N$.

Por tanto $C(v_{E,d}) \subset C(v)$.

Veamos que $CC(v) \subset C(v_{E,d})$, es decir, sea $x \in CC(v)$ probemos que $x \in C(v_{E,d})$. Entonces:

Por la definición de $CC(v)$ se tiene $x(N) = v_{E,d}(N)$.

En esta demostración usaremos $\geq^1$ cuando apliquemos $x(N) = v(N)$ y $x \leq M_i^v, \geq^2$ cuando apliquemos $m_i^v \leq x, =^3$ cuando apliquemos $v(S) = v_{E,d}(S)$ para cualquier coalición S tal que $|S| \in \{0, n-1, n\}$ y $\geq^4$ cuando apliquemos $v \geq 0$.

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i = \sum_{i \in N} x_i - \sum_{i \in N \setminus S} x_i \geq^1 v(N) - \sum_{i \in N \setminus S} \big(v(N) - v(N-i)\big)$$

$$=^3 v_{E,d}(N) - \sum_{i \in N \setminus S} \Big(v_{E,d}(N) - v_{E,d}(N-i)\Big)$$

$$= E - \sum_{i \in N \setminus S} (E - máx\{E - d_i, 0\}) \geq E - d(N-S).$$

Además se tiene $x(S) \geq^2 m_i^v(S) \geq v_i(S) \geq^4 0$.

Por tanto, como $x(S) \geq E - d(N-S)$ y $x(S) \geq 0$, se tiene

$$x(S) \geq máx\{E - d(N-S), 0\} = v_{E,d}(S).$$

Por lo que $CC(v) \subset C(v)$, y se desprende que $CC(v) \subset C(v_{E,d}) \subset C(v)$.

Observación 2.7. Dado $v_{E,d} \in GB^N$, veamos cómo es $CC(v_{E,d})$ o, lo que es lo mismo $C(v_{E,d})$.

Las coordenadas de los vectores inferior y superior vienen dadas, respectivamente, por:

$$m_i^{v_{E,d}} = v_{E,d}(\{i\}) = máx\{E - d(N \setminus \{i\}), 0\}, \forall i \in N.$$

$$M_i^{v_{E,d}} = v_{v_{E,d}}(N) - v_{v_{E,d}}(N \setminus \{i\}) = E - máx\{E - d_i, 0\}, \forall i \in N.$$

Veamos que $v(\{i\}) \geq v(S) - M^v(S \setminus \{i\}), \forall S \subset N$ tal que $i \in S$. Para ello fijemos $i \in N$ y tomemos la coalición $S = \{i, j_1, j_2, \ldots, j_k\} \subset N$ para probar

$$v(\{i\}) + M^v(j_1 \ldots j_k) \geq v(i\ j_1 \ldots j_k).$$

$$v(\{i\}) + M^v(j_1 \ldots j_k) = v(\{i\}) + [v(N) - v(N \setminus \{j_1\})] + \ldots + [v(N) - v(N \setminus \{j_k\})]$$

$$\geq v(i\,j_1) + [v(N) - v(N\setminus\{j_2\})] + \ldots + [v(N) - v(N\setminus\{j_k\})]$$

$$\geq v(i\,j_1\,j_2) + \ldots + [v(N) - v(N\setminus\{j_k\})] \geq \ldots \geq v(i\,j_1\,j_2 \ldots j_k).$$

Las desigualdades anteriores se tienen aplicando la propiedad de convexidad de forma recursiva:

- Primera desigualdad: $v(i\,j_1) + v(N\{j_1\}) \leq v(N) + v(\{i\})$.
- Desigualdad k-ésima: $v(i\,j_1 \ldots j_k) + v(N\setminus j_k) \leq v(N) + v(\{i\,j_1 \ldots j_{k-1}\})$.

De este modo llegamos a la siguiente expresión del cubrimiento del núcleo:

$$CC(v_{v_{E,d}}) = x \in \mathbb{R}^N : x(N) = E, máx\{E - d(N\,\{i\}), 0\} \leq x_i \leq mín\{E, d_i\}, \forall\, i \in N. 2.1.1.$$

Corolario 2.8. Toda solución de bancarrota está contenida en el núcleo del juego cooperativo asociado.

Tomando $v = v_{E,d}$ y aplicando el teorema 2.7 se tiene $C(v_{E,d}) = CC(v_{E,d})$ y de la expresión (2.1.1) se deduce que los vectores pertenecientes a $CC(v_{E,d})$ cumplen las propiedades de la definición de solución de bancarrota ya que:

- $x(N) = E$.
- $0 \leq x_i \leq d_i$:
  - $0 \leq x_i$ porque $máx\{E - d(N\setminus\{i\}), 0\} \leq x_i$.
  - $x_i \leq d_i$ porque $x_i \leq mín\{E, d_i\}$ y además si se tuviese $máx\{E - d(N\setminus\{i\}), 0\} = E - d(N\setminus\{i\})$, es posible afirmar que $d_i \leq x_i$ ya que $E \leq D = d(N\setminus\{i\}) + d_i$.

A continuación, en el capítulo 3 mostraremos las reglas de bancarrota como mecanismos para obtener soluciones a los problemas de bancarrota.

3. Reglas de bancarrota

Una regla de bancarrota es un método de solución para cualquier problema de bancarrota; es decir, un mecanismo que a cada problema de bancarrota le asocia una solución.

Denominaremos por B^N, la familia de problemas de bancarrota con N agentes.

Definición 3.1. (Villar, 2005). Una regla de bancarrota, R, es una función $R: B^N \rightarrow \mathbb{R}_+^N$ que asigna a cada problema (E, d) de B^N asocia un único punto $R(E, d) \in \mathbb{R}_+^N$ que verifica las siguientes condiciones:

1. $d_i \geq R_i(E, d) \geq 0, \forall\, i \in N.$
2. $\sum_{i \in N} R_i(E, d) = E.$

Debemos interpretar $R(E, d)$ como una forma deseable de repartir el estado E entre el conjunto de agentes N.

El punto $R(E, d)$ se interpreta como una forma razonable de distribuir E.

La condición 1 establece que ningún agente percibe una cantidad mayor que lo que demanda ni menor que cero. Ningún agente que espera recibir una cantidad determinada de un bien, acaba por entregar parte del bien.

La condición 2 es resultado del requisito de eficiencia: dado que no hay bastante para cubrir todas las reclamaciones, la cantidad de bien disponible, del estado, debe distribuirse en su totalidad.

Hay 5 soluciones clásicas al problema de bancarrota. Las tres primeras, la proporcional, la igualitaria y la de igual perdida, aplican un principio igualitario, pero difieren en la variable que tratan de igualar. La cuarta solución, regla de Talmud, aplica un criterio dependiendo de la demanda y el estado. La quinta, llegadas aleatorias, aplica un criterio de asignación secuencial.

La regla proporcional, iguala ratios entre cantidades obtenidas y cantidades reclamadas.

La regla igualitaria, iguala las cantidades obtenidas.

La regla de igual perdida, iguala las pérdidas sufridas con respecto a las reclamaciones presentadas.

La regla del Talmud, aplica una lógica diferente que consiste en que nadie obtenga más de la mitad de lo que reclama si la cantidad del bien disponible es inferior a la mitad de la cantidad total reclamada, y que nadie pierda más de la mitad de lo que reclama si la cantidad disponible supera la mitad de la reclamación global.

La regla de llegadas aleatorias, se obtiene como el promedio de los vectores de asignaciones que resultan de dividir el valor del estado de forma secuencial.

De la definición 3.1 se establece que reglas de bancarrota proporcionan soluciones que pertenecen al núcleo de los juegos de bancarrota asociados a dichos problemas.

Denominaremos RB^N como el conjunto de reglas de bancarrota con conjunto de jugadores N.

Teorema 3.2 (Curiel, Maschler y Tijs, 1987). Para cualquier $R \in RB^N$ y para cada $(E,d) \in B^N$ se tiene que $R(E,d) \in C(v_{E,d})$, donde $v_{E,d}$ es el juego de bancarrota asociado a (E,d).

3.1. Regla proporcional

La regla proporcional, P, propone resolver los problemas de bancarrota de modo que cada agente recibe una proporción del estado.

Formalmente se define la regla del siguiente modo:

Definición 3.3. Para todo $(E,d) \in B^N$, la regla proporcional, P, viene dada por:

$$P(E,d) \; = \; E \; \frac{d}{D}.$$

3.1.1. Propiedades de la regla proporcional

Simetría. (Thomson, W., 2003). Es conveniente que no haya ningún tipo de prioridad a la hora de asignar un pago u otro a quienes demandan lo mismo. Una regla es simétrica si asigna el mismo pago a todos los agentes que demandan la misma cantidad.

Definición 3.4. Se dice que $R \; \in \; RB^N$ verifica la propiedad de simetría si para cada $(E,d) \in B^N$ y cada $\{i,j\} \; c \; N$ tales que $d_i = \; d_j$ se tiene que $R_i(E,d) = R_j(E,d)$.

Esta definición de simetría, los agentes con demandas iguales deben recibir la misma cantidad, se puede extender a grupos de agentes.

Definición 3.5. Se dice que $R \; \in \; RB^N$ verifica la propiedad de simetría para grupos si para cada $(E,d) \in B^N$ y cualesquiera $S,T \; c \; N$ tales que $d(S) \; = \; d(T)$ se tiene que

$$\sum_{i \in S} R_i(E,d) = \sum_{j \in T} R_j(E,d).$$

Anonimato. (Thomson, W., 2003). Una propiedad que se debe exigir al reparto del estado, es que se realice ignorando el orden de las demandas de los agentes o la identificación del agente y su demanda. Se define a través de la propiedad de anonimato.

Definición 3.6. Se dice que $R \in RB^N$ verifica la propiedad de anonimato si para cada $(E,d) \in B^N$ y cada $\pi \in \Pi_N$ se tiene que $R_{\pi(i)}(E,d_\pi) = R_i(E,d), \forall\, i \in N$.

Conservación del orden, (Aumann y Maschler, 1985). Una propiedad que depende de las demandas es la de conservación del orden. Una regla verifica esta propiedad si otorga mayores pagos y pérdidas a quienes demandan cantidades mayores, de modo que dichos pagos y pérdidas no son menores que los pagos y pérdidas que otorga a quienes demandan cantidades menores.

Definición 3.7. Se dice que $R \in RB^N$ verifica la propiedad de conservación del orden si para cada $(E,d) \in B^N$ y para cualesquiera $i,j \in N$ tales que $d_i \leq d_j$ se tiene:

$$R_i(E,d) \leq R_j(E,d) \text{ y } d_i - R_i(E,d) \leq d_j - R_j(E,d).$$

Regresividad. **(Thomson, W., 2003).** Una regla regresiva es aquella que otorga proporciones menores a los agentes con mayores demandas y proporciones mayores a los agentes con menores demandas.

Definición 3.8. Se dice que $R \in RB^N$ verifica la propiedad de regresividad si para cada $(E,d) \in B^N$ se tiene:

$$\frac{R_i(E,d)}{d_i} \geq \frac{R_j(E,d)}{d_j}, \forall\, i,j \in N \text{ tales que } 0 < d_i \leq d_j.$$

Progresividad. (Thomson, W., 2003). Esta propiedad otorga los pagos al contrario que lo hace la propiedad regresiva. Si una regla cumple la propiedad de progresividad, otorga cantidades proporcionalmente mayores a los agentes con mayores demandas.

Definición 3.9. Se dice que $R \in RB^N$ verifica la propiedad de progresividad si para cada $(E,d) \in B^N$ se tiene:

$$\frac{R_i(E,d)}{d_i} \leq \frac{R_j(E,d)}{d_j}, \forall\, i,j \in N \text{ tales que } 0 < d_i \leq d_j.$$

Monotonía respecto a las demandas. (Thomson, W., 2003). En el caso en el que un agente aumente su demanda, diremos que la regla verifica la propiedad de monotonía débil respecto a las demandas si el pago de dicho agente no disminuye.

Definición 3.10. Se dice que $R \in RB^N$ verifica la propiedad de monotonía débil respecto a las demandas si para $(E,d),(E,d') \in B^N$, se tiene:

$$R_j(E,d) \leq R_j(E,d').$$

En la monotonía respecto a las demandas denotaremos por $d' = (d'_1,,\dots,d'_n) \in \mathbb{R}^N_+$ al vector que tiene las mismas componentes que d a excepción de una de ellas, supongamos que ésta es $j \in N$, tal que $d'_j > d_j$.

De la definición de monotonía débil respecto de las demandas se deduce que si una regla verifica esta propiedad entonces el pago conjunto que reciben el resto de agentes no puede aumentar debido a la eficiencia,

$$\sum_{i\in N\setminus\{j\}} R_i(E,d) \geq \sum_{i\in N\setminus\{j\}} R_i(E,d').$$

En el caso de que cada uno de los agentes que no aumentan su demanda, si el pago otorgado a cada uno de ellos no aumenta diremos que la regla verifica la propiedad de monotonía fuerte respecto de las demandas.

Definición 3.11. Se dice que $R \in RB^N$ verifica la propiedad de monotonía fuerte respecto de las demandas si para $(E,d),(E,d') \in B^N$, se tiene:

$$R_i(E,d') \leq R_i(E,d), \forall\, i \in N \ tal\ que\ i \neq j.$$

El siguiente resultado afirma que la monotonía fuerte implica la débil.

Proposición 3.12. Cualquier $R \in RB^N$ que verifica la propiedad de monotonía fuerte respecto de las demandas verifica la propiedad de monotonía débil respecto de las demandas.

Demostración.

Sea $R \in RB^N$ una regla monótona fuerte respecto de las demandas, veamos que R verifica $R_j(E,d') \leq R_j(E,d)$.

Por ser R una regla se cumple:

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i\in N} R_i(E,d) = E \\ \sum_{i\in N} R_i(E,d') = E \end{array}\right\} \Rightarrow R_j(E,d) + \sum_{i\in N\setminus\{j\}} R_i(E,d) = R_j(E,d') + \sum_{i\in N\setminus\{j\}} R_i(E,d').$$

Por ser R monótona fuerte respecto de las demandas, se cumple:

$$\sum_{i \in N \setminus \{j\}} R_i(E, d') \leq \sum_{i \in N \setminus \{j\}} R_i(E, d).$$

Por lo que se deduce que $R_j(E, d') \geq R_j(E, d)$.

Aditividad de las demandas. (Thomson, W., 2003). En el caso en que sean nulos los derechos mínimos de los agentes y que ninguna de sus demandas supere el estado que se reparte, si los agentes ceden parte de sus demandas al resto de agentes, estos últimos demandaran su demanda inicial y además la parte cedida. Esta propiedad indica que el reparto no se verá modificado para los agentes que, tras la cesión de demandas, coincida su demanda actual con su demanda anterior.

Definición 3.13. Se dice que $R \in RB^N$ verifica la propiedad de aditividad de las demandas si para cada $(E, d) \in B^N$ que verifique $d_i \leq E \ y \ m_i = 0, \forall \ i \in N$, se tiene que:

$$R_i(E, d) = R_i(E, d''), \forall \ i \in N \setminus \{j\},$$

donde d_j se divide entre $d_{j1}, \dots, d_{jk}$, siendo $d'' = (d_1, \dots, d_{j-1}, d_{j1}, \dots, d_{jk}, d_{j+1}, \dots, d_n)$.

Transferencia ventajosa, (Chun, 1988). En un problema de bancarrota en el que un agente cede parte de su demanda a otros agentes, no se ve afectada la demanda total del problema, por lo que el reparto al agente que haya cedido parte de su demanda no debe aumentar.

Definición 3.14. Se dice que $R \in RB^N$ verifica la propiedad de transferencia ventajosa si para cada $(E, d) \in B^N$ se tiene:

$$R_j(E, d'') \leq R_j(E, d),$$

donde d_j se divide entre $d_{j1}, \dots, d_{jk}$, siendo $d'' = \left(d_1, \dots, d_{j-1}, d_{j1}, \dots, d_{jk}, d_{j+1}, \dots, d_n\right)$.

Transferencia no ventajosa, (Chun, 1988). En un problema de bancarrota en el que varios agentes transfieren sus demandas entre ellos mismos, el reparto del estado a los agentes tras las cesiones debe ser el mismo que si no hubiese cesiones de demanda entre ellos.

Definición 3.14. Se dice que $R \in RB^N$ verifica la propiedad de transferencia no ventajosa si para cada $(E, d) \in B^N$ y cualquier $M\ c\ N$ con vector de demandas $d" \in \mathbb{R}_+^M$ tal que $d"(M) = d(M)$, se tiene:

$$\sum_{i \in M} R_i(E, d) = \sum_{i \in M} R_i\big(E, (d''_M, d_{N\setminus M})\big),$$

donde $(d''_M, d_{N\setminus M})$ tiene coordenadas d''_i, para todo $i \in M$ y coordenadas d_i, para todo $i \in N \setminus M$.

Monotonía respecto al estado. (Thomson, W., 2003). Esta propiedad indica que si aumenta el estado a repartir en un problema de bancarrota y las demandas de los agentes no sufren variación tras el aumento del estado, el reparto a los agentes no puede ser inferior al reparto sin el aumento del estado.

Definición 3.15. Se dice que $R \in RB^N$ verifica la propiedad de monotonía respecto al estado si para cualesquiera $(E, d), (E', d) \in B^N$, con $E' > E$ se tiene:

$$R_i(E', d) \geq R_i(E, d), \forall\ i \in N.$$

Supermodularidad. (Thomson, W., 2003). Se cumple esta propiedad en un problema de bancarrota, si al aumentar el estado y los agentes no modifican sus demandas, el reparto del estado será mayor cuanto mayor sea la demanda de los agentes.

Definición 3.16. Se dice que $R \in RB^N$ verifica la propiedad de supermodularidad si para cualesquiera $(E, d), (E', d) \in B^N$ con $E' > E$ se tiene:

$$R_i(E', d) - R_i(E, d) \leq R_j(E', d) - R_j(E, d), \forall\ i, j \in N\ tales\ que\ d_i \leq d_j.$$

Composiciones hacia arriba y hacia abajo, (Chun, 1988). En un problema de bancarrota, el estado a repartir puede sufrir cambios, es decir, puede incrementarse o reducirse.

Composición hacia arriba se da en el caso que se incremente el estado a repartir tras un reparto inicial. Los agentes reciben su reparto original y revisan sus demandas para repartir el incremento sufrido o como alternativa los agentes realizan un nuevo reparto con la suma del estado original más el incremento.

Esta propiedad garantiza que cualquier problema de bancarrota podemos resolverlo como la suma de dos sub-problemas de bancarrota. El primero, (E, d), corresponde al reparto de una fracción del estado con respecto a las reclamaciones originales. El segundo corresponde al reparto del presupuesto restante, $E' - E$, con respecto a unas nuevas reclamaciones, $d' = d - R(E, d)$, en las que hemos descontado la parte ya satisfecha de las reclamaciones originales. La propiedad de composición hacia arriba establece que resolver el problema en pedazos o de una sola vez no altera el resultado. Si el reparto es el mismo en ambas situaciones, se cumplirá dicha propiedad.

Definición 3.17. Se dice que $R \in RB^N$ verifica la propiedad de composición hacia arriba si para cada (E, d) y cualquier $E' > E \; tal \; que \; (E', d) \in B^N$, se tiene:

$$R(E', d) = R(E, d) + R(E' - E, d - R(E, d)).$$

Composición hacia abajo se da en el caso de que disminuya el estado a repartir tras un reparto inicial. Los agentes demandarán del estado disminuido el mismo reparto que el del estado original ya que, al disminuir el estado, como mínimo cada agente recibirá su reparto inicial o demandarán lo mismo.

Definición 3.18. Se dice que $R \in RB^N$ verifica la propiedad de composición hacia abajo si para cada $(E, d) \in B^N$ y cualquier E' tal que $E' < E$, se tiene:

$$R(E', d) = R(E', R(E, d)).$$

Una propiedad más débil a la propiedad de composición hacia abajo es la propiedad de composición hacia abajo restringida.

Definición 3.19. Se dice que $R \in RB^N$ verifica la propiedad de composición hacia abajo restringida si para cada $(E', d) \in B^N$ y cualquier E tal que $E' \leq E \leq \min_{i \in N}\{d_i\}$, se tiene:

$$R(E', d) = R(E', R(E, d)).$$

Aditividad del estado. (Thomson, W., 2003). En algunas ocasiones, los problemas de bancarrota repartan el estado en 2 partes y se realiza un reparto por separado para cada una de las partes del estado. Si la suma de los repartos de las partes del estado es igual al reparto del estado en su conjunto, se cumple esta propiedad.

Definición 3.21. Se dice que $R \in RB^N$ verifica la propiedad de aditividad del estado si para cada $(E, d) \in B^N$ y para cualesquiera $\{E', E''\}$ tales que $E' + E'' = E$, se tiene:

$$R(E, d) = R(E', d) + R(E'', d).$$

Consistencia y consistencia bilateral, (Aumann y Maschler, 1985). Si un conjunto de agentes ha obtenido un reparto en un problema de bancarrota, si el conjunto de agentes decide repartirlo entre los agentes que lo conforman (siguiendo el mismo criterio dado por la regla original), obteniendo un reparto final, si el reparto antes de repartir entre los agentes es el mismo que el reparto del conjunto de agentes, se cumple esta propiedad.

Definición 3.22. Se dice que $R \in RB^N$ verifica la propiedad de consistencia si para cada $(N, E, d) \in B^N$ y para cada $S \ c \ N$ se cumple lo siguiente:

$$R_i(E, d) = R_i\left(S, \sum_{j \in S} R_j(E, d), d_s\right), \forall\, i \in S.$$

Para el caso en el que $|S| = 2$ la propiedad de consistencia se denomina consistencia bilateral.

Consistencia inversa

Definición 3.23. Se dice que $R \in RB^N$ verifica la propiedad de consistencia inversa si para cada $(N, E, d) \in B^N$ y para cada reparto de pagos $x \in \mathbb{R}^N$ se cumple lo siguiente:

$$R(S, x(S), d_S) = x_S, \forall\, S \subseteq N \ tal \ que \ |S| = 2 \Rightarrow x = R(N, E, d).$$

3.2. Regla proporcional ajustada

La regla proporcional ajustada, AP, se basa en lo mínimo que cada agente debe recibir. La regla asigna a cada agente i la cantidad de estado que queda pendiente de repartir cuando al resto de clientes $N \setminus \{i\}$ se les ha repartido lo que demandaban. Si el estado fuse insuficiente, al agente i se le asigna 0.

Definición 3.24. Dado $(E, d) \in B^N$ y un agente $i \in N$, el derecho mínimo del agente i, $m_i \in \mathbb{R}_+$, es el vector $m = (m_1, \ldots, m_n)$, que viene dado por $máx\{E - d(N \setminus \{i\}), 0\}, \forall\, i \in N$.

La regla asigna a cada agente su derecho mínimo, m_i, de modo que reparte $m(N)$ y falta por repartir $E - m(N)$. Después de esto cada agente i pasa a demandar $d_i' = d_i - m_i$. Si la demanda de algún agente es mayor que $E - m(N)$, dicho agente demanda el $d_i'' = mín\{d_i - m_i, E - m(N)\}$. Posteriormente se reparte de forma proporcional entre los agentes.

Definición 3.25. Para todo $(E, d) \in B^N$, la regla proporcional ajustada, AP, viene dada por:

$$AP(E,d) = m + P\,(E - m(N), mín\{d_i - m_i, E - m(N)\})\,.$$

La siguiente teorema establece que para un problema de bancarrota, la regla AP, da una división que es igual al τ-valor del correspondiente juego de bancarrota.

Teorema 3.26 (Curiel, Maschler y Tijs, 1987). Sea $(E, d) \in B^N$ y sea $v_{E,d} \in GB$ su juego de bancarrota asociado, entonces $AP(E, d) = \tau(v_{E,d})$.

3.2.1. Propiedades de la regla proporcional ajustada

Derechos mínimos primero, (Curiel, Maschler y Tijs, 1987). Esta propiedad indica que la regla repartirá los mismo entre los agentes ante un problema de bancarrota, tanto si se reparte por separado a cada agente su derecho mínimo y a continuación reparte el estado entre los agentes restantes, como si se reparte el estado completo entre los agentes.

Definición 3.27. Se dice que $R \in RB^N$ verifica la propiedad de los derechos mínimos primero si para cada $(E, d) \in B^N$ se tiene:

$$R(E,d) = m + R(E - m(N), d - m).$$

Seguridad mínima, (Moreno-Ternero y Villar, 2004). Una regla verifica la propiedad de seguridad mínima si otorga a cada agente un reparto no inferior a lo que obtendría al repartir entre todos los agentes a partes iguales el mínimo entre el estado y lo que demanda.

Definición 3.28. Se dice que $R \in RB^N$ verifica la propiedad de seguridad mínima si para cada $(E, d) \in B^N$ se tiene:

$$R_i(E;\ d) \geq \frac{1}{n}\ mín\{E, d_i\}, \forall\ i\ \in\ N.$$

Invarianza bajo truncación y conformidad con la teoría de juegos cooperativos, (Curiel, Maschler, y Tijs, 1987). Una regla cumple esta propiedad si ignora el exceso de las demandas con respecto al estado a repartir.

Definición 3.29. Se dice que $R \in RB^N$ verifica la propiedad de invarianza bajo la truncación de las demandas si para cada $(E,d) \in B^N$ se tiene:

$$R(E,d) = R(E, mín\{d, E\}).$$

Además, cumple las propiedades de: **Simetría, Anonimato, Conservación del orden, Monotonía respecto a las demandas, Aditividad de las demandas, Monotonía respecto al estado, Supermodularidad y Composiciones hacia arriba y hacia abajo.**

3.3. Regla de ganancias igualitarias

La regla de ganancias igualitarias, CEA, propone igualar las cantidades percibidas del estado entre los agentes, sin que se supere la cantidad demanda por cada agente. Esta regla favorece a los agentes con demandas más bajas, puesto que les otorga toda su demanda o reciben lo mismo que los agentes con demandas más altas.

Definición 3.30. Para todo $(E,d) \in PB^N$, la regla de ganancias igualitarias, CEA, viene dada por:

$$CEA_i(E,d) \ = \ mín\{d_i, \alpha\}, \forall \ i \ \in N,$$

donde α es el único número real no negativo que verifica,

$$\sum_{i \in N} CEA_i(E,d) = E.$$

En definitiva, todos los agentes reciben α excepto quienes demandan menos que α, que reciben su demanda.

Veamos que la regla está bien definida; es decir, que efectivamente existe un único número $\alpha \in \mathbb{R}_+$ que verifica $\sum_{i \in N} mín\{d_i, \alpha\} \ = \ E$.

Dado un vector de demandas fijo d, consideremos la función $f \ : \ \mathbb{R}_+ \to \ [0, D]$ definida por

$$f(\alpha) = \sum_{i \in N} mín\{d_i, \alpha\}.$$

Esta función es continua y estrictamente creciente en $[0, máx_{i \in N}\{d_i\}]$ por tanto es inyectiva, entonces existe un único $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tal que $f(\alpha) \ = \ E$.

Esta regla ha sido propuesta, entre otros, por Maimónides, en su tratado “Leyes para prestar y tomar prestado”.

3.3.1. Propiedades de la regla ganancias igualitarias

Cumple las propiedades vistas anteriormente de: **Seguridad mínima, Simetría, Anonimato, Conservación del orden, Regresividad, Invarianza bajo truncación y conformidad con la teoría de juegos cooperativos, Monotonía respecto a las demandas, Transferencia ventajosa, Monotonía respecto al estado, Supermodularidad, Composiciones hacia arriba y hacia abajo, Consistencia y consistencia bilateral y Consistencia inversa.**

3.4. Regla de pérdidas igualitarias

La regla de pérdidas igualitarias, CEL, al contrario que la regla CEA, da prioridad a los agentes con mayores demandas. La forma de reparto del estado a cada agente de la regla, asigna una cantidad que depende de las demandas no recibidas del conjunto de agentes, por lo que la pérdida en relación a la demanda de los agentes sea la misma para todos ellos, bajo la condición de que la asignación se no negativa.

Definición 3.31. Para todo $(E, d) \in B^N$, la regla de pérdidas igualitarias, viene dada por:

$$CEL_i(E, d) = máx\{d_i - \alpha, 0\}, \forall\, i \in N,$$

donde α es el único número real que verifica $\sum_{i \in N} CEL_i(E, d) = E.$

Este tipo de solución también aparece propuesta por Maimónides en su discusión de las pérdidas originadas para el vendedor de un objeto mediante una subasta cuando el ganador de la misma se echa atrás. Desde un punto de vista geométrico esta forma de resolver los problemas de bancarrota es muy natural dado que equivale a elegir el punto del conjunto presupuestario que está más cerca (en términos de la distancia euclídea).

3.4.1. Propiedades de la regla pérdidas igualitarias

Compensación completa, (Herrero y Villar, 2002). La propiedad de compensación completa otorga a un agente lo que demanda si su demanda es sostenible, es decir $(E, d) \in B^N$ la demanda d_j es sostenible si

$$\sum_{i \in N} mín\{d_i, d_j\} \leq E.$$

Esta propiedad indica que, en un problema de bancarrota, los agentes con demandas bajas se le paga todo lo que demanda, consideramos demanda baja si al no tener en cuenta el exceso de demanda de los agentes con respecto a esta, la demanda total no es mayor que el estado a repartir, por lo tanto, no sería un problema de bancarrota.

Definición 3.32. Se dice que $R \in RB^N$ verifica la propiedad de compensación completa si para cada $(E,d) \in B^N$ y cada $i \in N$ con demanda sostenible se tiene que $R_i(E,d) = d_i$.

Exención, **(Herrero y Villar, 2001)**. Una regla verifica la propiedad de exención si reparte lo mismo a los agentes que demandan una cantidad que no exceda de la partición del estado entre el número de agentes del problema de bancarrota, $\left(\frac{E}{n}\right)$.

Definición 3.33. Se dice que $R \in RB^N$ verifica la propiedad de exención si para cada $(E,d) \in B^N$ y cada $i \in N$ tal que $d_i \leq \frac{E}{n}$ se tiene que $R_i(E,d) = d_i$.

Compensación vacía, (Herrero y Villar, 2002). Una regla verifica la propiedad de compensación vacía si no reparte nada a los agentes con demandas residuales. En muchas ocasiones los tribunales de los problemas de bancarrota no quieren dar prioridad a las demandas bajas, ya sea porque no cumplen un minimo de criterios, o por alguna situación del problema. Una demanda d_j se puede considerar grande si $(E, (máx\{0, d_1 - d_j\}, \dots, máx\{0, d_n - d_j\}))$ es un problema de bancarrota (demanda residual).

Definición 3.34. Se dice que $R \in RB^N$ verifica la propiedad de compensación vacía si para cada $(E,d) \in B^N$ y cada $i \in N$ con demanda residual se tiene que $R_i(E,d) = 0$.

Exclusión, (Herrero y Villar, 2001). Una regla verifica la exclusión, si no reparte nada a los agentes cuyas demandas no exceden a la división $\left(\frac{D-E}{n}\right)$.

La propiedad de exclusión al igual que la de compensación vacía, da prioridad al pago de los agentes con mayores demandas.

Definición 3.35. Se dice que $R \in RB^N$ verifica la propiedad de exclusión si para cada $(E,d) \in B^N$ y cada $i \in N$ tal que $d_i \leq \frac{D-E}{n}$, se tiene que $R_i(E,d) = 0$.

Además, cumple las propiedades vistas anteriomente de: **Progresividad, Derechos mínimos primero, Simetría, Anonimato, Conservación del orden, Monotonía respecto a las demandas, Transferencia ventajosa, Monotonía respecto al estado, Supermodularidad, Composiciones hacia arriba y hacia abajo, Consistencia y consistencia bilateral y Consistencia inversa.**

A modo de ejemplo vamos a comprobar que la regla CEL no tiene la propiedad de invarianza bajo truncación de las demandas.

Dado el siguiente problema de bancarrota $(100,(40,50,110))$:

$$\frac{D-E}{n}=\frac{100}{3} \Longrightarrow CEL\big(100,(40,50,110)\big)=\left(40-\frac{100}{3},50-\frac{100}{3},110-\frac{100}{3}\right)=\left(\frac{20}{3},\frac{50}{3},\frac{230}{3}\right).$$

Resolvamos ahora el problema con las demandas truncadas, $(100,(40,50,100))$:

$$\frac{D-E}{n}=30 \Longrightarrow CEL\big(100,(40,50,100)\big)=(40-30,50-30,100-30)=(10,20,70).$$

Como $\left(\frac{20}{3},\frac{50}{3},\frac{230}{3}\right)\neq(10,20,70)$ se tiene que la regla CEL no verifica la propiedad de invarianza bajo la truncación de las demandas.

3.5. Contested Garment (CG)

Definición 3.36. Para todo $(E,d)\in B^N$ con $|N| = 2$, la regla, CG, viene dada por:

$$CG_i(E,d)= \text{máx}\{E-d_j,0\}+\frac{E-\text{máx}\{E-d_i,0\}-\text{máx}\{E-d_j,0\}}{2}, \forall\, i,j \in N, con\ i\neq j.$$

El problema de la prenda, consiste en repartir un tejido entre dos agentes que reclaman la mitad y la totalidad del tejido, respectivamente.

El agente 1 demanda d_1, en el caso en el que el agente reciba o se le asigne la cantidad demandada, la parte sobrante o la diferencia de su demanda y el estado E, se le asignaría al agente 2, por lo tanto este recibiría $E-d_1$ (el agente 2 no recibiría nada si esta diferencia fuese 0). Este mismo proceso se lleva a cabo con el agente 2. En este reparto cada agente recibe lo que el otro agente no demanda del estado. El agente 1 destina al agente 2 la cantidad $\text{máx}\{E-d_1,0\}$ y el agente 2 destina al agente 1 la cantidad $\text{máx}\{E-d_2,0\}$. Por lo tanto, para continuar con el reparto lo único que se debe hacer es repartir el remanente del estado, $E-\text{máx}\{E-d_1,0\}-\text{máx}\{E-d_2,0\}$.

Este remanente se divide a partes iguales entre los agentes y el reparto será de la siguiente forma:

Agente 1: $máx\{E - d_2, 0\} + \frac{E - máx\{E-d_2,0\} - máx\{E-d_1,0\}}{2}$.

Agente 2: $máx\{E - d_1, 0\} + \frac{E - máx\{E-d_2,0\} - máx\{E-d_1,0\}}{2}$.

Aumann y Maschler (1985) introducen el concepto de solución CG-consistente y demuestran que cada problema de bancarrota tiene una única solución CG-consistente.

Una solución de bancarrota es CG-consistente si al aplicar la regla CG para repartir el pago obtenido por cada par de agentes, estos obtienen lo mismo que les otorgaba la solución inicial.

Definición 3.37. Se dice que un reparto $x \in R^N$ de un problema de bancarrota $(E, d) \in PB^N$ es CG-consistente si se tiene:

$$CG(x_i + x_j;\ (d_i, d_j)) = (x_i, x_j), \forall\ i, j \in N\ tales\ que\ i \neq j.$$

Teorema 3.38 (Aumann y Maschler, 1985). Para cada problema $(E, d) \in B$ existe una única solución CG-consistente.

La regla del Talmud, T, es aquella que asocia a cada problema de bancarrota la única solución CG-consistente.

3.5.1. Propiedad de la regla Contested Garment

Cumple las propiedades vistas anteriormente de: **Simetría, Derechos mínimos primero, Invarianza bajo truncación y conformidad con la teoría de juegos cooperativos.**

3.6. Regla del Talmud

En la tradición judía el Talmud (estudio o aprendizaje en hebreo) se refiere, a una compilación de dos tipos de escritos. El Mishna, que es una colección de normas y leyes orales complementadas con algunas escritas, y el Gemara, que contiene una serie de comentarios y elaboraciones sobre el Mishna. La regla del Talmud es un procedimiento de reparto diseñado para acomodar las soluciones numéricas que aparecen en el Talmud relativas a la resolución de una serie de problemas prácticos muy específicos, relacionados con herencias. Fue propuesta por Aumann y Maschler (1985), tras una primera contribución pionera de O'Neill en 1982.

El primero de estos problemas se refiere a cómo repartir una manta que un padre ha dejado en herencia a sus dos hijos. Uno de los hermanos asegura que su padre le prometió la manta completa y el otro que a él le prometió la mitad. La solución propuesta por el rabino consiste en darle tres cuartos de la manta a quien reclama el 100 % y un cuarto a quien reclama la mitad. Así, si la manta tuviera un valor de 200 ello supondrá que nuestro problema de bancarrota será de la forma: $n = 2, E = 200,\ d = (200, 100)$, y la solución adoptada $F(E, d) = (150, 50)$. La solución coincide con la aportada por la regla CEL, en este caso $d = 300, d - E = 100$, de modo que cada hermano pierde 50 con respecto a su demanda.

Pero el Talmud incluye también otros ejemplos cuya lógica no es tan elemental. El siguiente caso se refiere a un hombre que muere habiendo dejado promesa escrita a sus tres esposas de una herencia de $100, 200\ y\ 300$, respectivamente. Sin embargo, el valor de sus propiedades resulta inferior a la promesa de 600. En el primero el valor de la herencia es 100, en cuyo caso conceden $100/3$ a cada una de las viudas. En el segundo, el valor es de 200, situación en la que proponen un reparto de $(50, 75, 75)$. En el tercero, tomando $E = 300$, sugiriendo un reparto de $(50, 100, 150)$. Por último, el valor es de 450, en cuyo caso proponen un reparto de $(50, 150, 250)$.

La regla del Talmud puede identificarse como la aplicación de un principio de protección a los agentes según el cual la pérdida de cada individuo será del mismo tipo que la pérdida social. En particular, nadie obtendrá más de la mitad de su deuda cuando la cantidad disponible sea inferior a la mitad de la deuda agregada; y nadie perderá más de la mitad de su reclamación cuando la cantidad disponible supere la mitad de la reclamación total.

Definición 3.39. Para todo $(E, d) \in B^N$, la regla Talmud, T, verifica que $T(E, d)$ es la única solución de bancarrota CG-consistente.

Se puede probar que se la regla T asigna a cada agente la mitad de su demanda en el caso en que el estado coincida con la mitad de la demanda total realizada por los agentes. Si, en cambio, el estado es menor que la mitad de la demanda total, la regla reparte el estado aplicando la regla CEA al problema cuyo vector de demandas es $\frac{d}{2}$, por último, si no se cumplen ninguna de estas dos condiciones, se aplica la regla CEL considerando el vector de demandas $\frac{d}{2}$. De modo que la regla T se ajusta a esta definición alternativa:

Definición 3.40. Para todo $(E, d) \in B^N$, la regla Talmud, T, viene dada por:

$$T(E, d) = \begin{cases} CEA\left(E, \dfrac{d}{2}\right) & si\ E \leq \dfrac{D}{2} \\ \dfrac{d}{2} + CEL\left(E - \dfrac{D}{2}; \dfrac{d}{2}\right) & si\ E \geq \dfrac{D}{2}. \end{cases}$$

Esta regla proporciona los repartos que aparecen en el Talmud y para los problemas de bancarrota con dos agentes hace el mismo reparto que proporciona la regla CG.

La siguiente proposición afirma que la regla T, aplicada a cualquier problema de bancarrota, coincide con el nucléolo del juego de bancarrota asociado a dicho problema.

Proposición 3.41 (Aumann y Maschler, 1985). Sea $(E,d) \in B$ y sea $v_{E,d} \in GB$ su juego asociado, entonces $T(E,d) = \eta(v_{E,d})$.

3.6.1. Propiedades de la regla del Talmud

Cumple las propiedades vistas anteriormente de: **Derechos mínimos primero, Seguridad mínima, Simetría, Anonimato, Conservación del orden, Invarianza bajo truncación y conformidad con la teoría de juegos cooperativos, Monotonía respecto a las demandas, Transferencia ventajosa, Monotonía respecto al estado, Supermodularidad, Composiciones hacia arriba y hacia abajo, Consistencia y consistencia bilateral y Consistencia inversa.**

3.7. Regla de llegada aleatoria

La regla de llegada aleatoria, RA, es una regla de asignación en la que cada agente recibe el promedio que puede obtener, es decir, el mínimo de la cantidad igual a su demanda y el remanente, si todos los agentes aparecen uno por uno al azar. Esto significa que la regla de llegada aleatoria es una regla de asignación en la que cada demandante recibe la expectativa de sus compensaciones marginales, pero no exactamente.

Los agentes van apareciendo al reparto uno por uno por lo que recibirán el mínimo entre lo que demandan y el remante del estado, hasta que se agote. El agente 1 recibe el mínimo entre lo que demanda y el estado, el agente 2 recibe el mínimo entre su demanda y el estado que queda disponible, y así sucesivamente hasta agotar el estado. La regla de llegada aleatoria para evitar las preferencias de llegada de los agentes, utiliza el promedio de los repartos de pago que proporcionan todas las permutaciones de las posibles órdenes de llegada.

Definición 3.42. (Hwang, Y. , 2015). Para todo $(E,d) \in B^N$, la regla de llegadas aleatorias, RA, viene dada por:

$$RA_i(E,d) = \frac{1}{|N|!} \sum_{\pi \in \theta_N} mín \left\{ d_i, máx \left\{ E - \sum_{j \in N : \pi(i) < \pi(j)} d_j \right\} \right\}, \forall\, i \in N.$$

En el caso de problemas de bancarrota bipersonales, al igual que la regla T, la regla RA coincide con la regla CG.

La regla RA, aplicada a cualquier problema de bancarrota, coincide con el valor de Shapley del juego de bancarrota asociado a dicho problema.

Proposición 3.43 (O'Neill, 1982). Sea $(E, d) \in B$ y sea $v_{E,d} \in GB$ su juego asociado, entonces $RA(E, d) \ = \ \varphi(v_{E,d})$.

3.7.1. Propiedades de la regla llegada aleatoria

Compensación equilibrada. (Hwang, Y., 2015). Una regla verifica la propiedad de compensación equilibrada si el reparto en un problema de bancarrota excluyendo a un agente determinado, es el mismo que el reparto excluyendo a otro agente distinto del primero.

Definición 3.44. Se dice que $R \ \in \ RB^N$ verifica la propiedad de compensación equilibrada si para cada $(E, d) \in B^N$ y para cada $\{i, j\} \subseteq N$, se tiene:

$$R_i(E,d) - R_i(N \setminus \{j\}, E_{N\ \{j\}}, d_{N\ \{j\}}) = R_j(E,d) \ - R_j(N \setminus \{i\}, E_{N\ \{i\}}, d_{N \setminus \{i\}}),$$

donde $E_{N \setminus \{k\}} = \ máx\{E - d_k, 0\}, \forall\, k \in N$.

Además, cumple las propiedades vistas anteriormente de: **Derechos mínimos primero, Seguridad mínima, Simetría, Anonimato, Conservación del orden, Invarianza bajo truncación y conformidad con la teoría de juegos cooperativos, Monotonía respecto a las demandas, Transferencia ventajosa, Monotonía respecto al estado y Supermodularidad.**

4. Dualidad y caracterizaciones de las reglas de bancarrota

En un problema de bancarrota se denominan reglas duales (Aumann y Maschler, 1985), si el criterio para repartir ganancias es el mismo que se utiliza para repartir pérdidas.

En este bloque nos hemos basado en las caracterizaciones que realizan entre otros: **Thomson, W. (2003), Aumann, R.J., Maschler, M. (1985), Dagan, N. (1996), Herrero, C. & Villar, A. (2001 y 2002).**

Definición 4.1. Dada una regla $R \in RB^N$, se define su regla dual, $R^* \in RB^N$, como sigue:

$$R^*(E,d) = d - R(D — E,d).$$

Observación 4.2. Las reglas $CEA\ y\ CEL$ son duales entre sí.

Las propiedades duales son aquellas propiedades tales que si una regla verifica una de ellas entonces su regla dual verifica la otra y viceversa. Las propiedades autoduales se verifican tanto por una regla como por su dual.

Definición 4.3. Dado un par de reglas duales $R, R^* \in RB^N$, y un par de propiedades p, p^* se dice que $p\ y\ p^*$ son propiedades duales si se tiene:

$$R\ satisface\ p \Leftrightarrow R^*\ verifica\ p^*.$$

Definición 4.4. Dado un par de reglas duales $R, R^* \in RB^N$, y una propiedad p se dice que p es una propiedad autodual si se cumple:

$$R\ satisface\ p \Leftrightarrow R^*\ verifica\ p.$$

Observación 4.5.

Los siguientes pares de propiedades son duales:

- Compensación completa y compensación vacía.
- Exención y exclusión.
- Invarianza bajo la truncación de las demandas y derechos mínimos primero.
- Composición hacia arriba y composición hacia abajo.

Las siguientes propiedades son autoduales:

- Simetría.
- Monotonía respecto al estado.

Una regla $R \in RB^N$ que produce unas ganancias igual a las pérdidas permite considerar $R = R^*$ y entonces afirmar que $R\ y\ R$ son duales o bien que R coincide con su dual. Estas reglas verifican la propiedad de autodualidad (Aumann y Maschler, 1985).

Definición 4.6. Se dice que $R \in RB^N$ es autodual si para cada $(E, d) \in PB^N$, se tiene:

$$R(E, d) = d - R(D - E, d).$$

Observación 4.7. Las reglas $P, AP, T\ y\ RA$ son autoduales ya que coinciden con sus duales.

La propiedad de dualidad nos lleva a poder caracterizar las reglas de bancarrota presentadas en este trabajo en función de las propiedades enunciadas en el capítulo anterior.

Teorema 4.8 (Herrero y Villar, 2001). Dadas $R, R^* \in RB^N$ dos reglas duales, si R se caracteriza por verificar el conjunto de propiedades independientes $\{p_1, \dots, p_k\}$, entonces R^* se caracteriza por verificar el conjunto de propiedades independientes $\{p_1^*, \dots, p_k^*\}$, donde $\forall\ i \in \{1, \dots, k\}$ se tiene que $p_i\ y\ p_i^*$ son propiedades duales.

Lema 4.9 (Thomson, 2006). Si una regla $R \in RB^N$ es consistente y para el caso $|N| = 2$ se tiene $R = R'$, con R' verificando la consistencia inversa, entonces $R = R'$ en general.

Una regla conforme con la teoría de juegos cooperativos proporciona para cualquier problema de bancarrota una solución que coincide con algún concepto de solución del juego de bancarrota asociado a dicho problema.

Definición 4.10. Se dice que $R \in RB^N$ es una regla conforme con la teoría de juegos cooperativos si para cada $(E, d) \in B^N$ existe un valor Ψ sobre GB^N que verifica $\Psi(v_{E,d}) = R(E, d)$, donde $v_{E,d}$ es el juego de bancarrota asociado al problema (E, d).

Observación 4.11. Las reglas $AP, T\ y\ RA$ son reglas conformes con la teoría de juegos cooperativos ya que coinciden, respectivamente, con el τ-valor, el nucléolo y el valor de Shapley del juego de bancarrota asociado al problema de bancarrota al que se aplican.

El siguiente resultado nos proporciona una condición necesaria y suficiente para que una regla sea conforme con la teoría de juegos cooperativos.

Teorema 4.12 (Curiel, Maschler y Tijs, 1987). Una regla $R \in RB^N$ es una regla conforme con la teoría de juegos cooperativos si y sólo si R es invariante bajo truncación de las demandas.

4.1. Regla Proporcional

Lema 4.13 (Herrero y Villar, 2001). Si una regla R verifica la propiedad de composición hacia arriba entonces para cada $(E, d) \in B^N$ se tiene que $R(E, d)$ es continua respecto de E.

Teorema 4.14 (Young, 1988). La regla P es la única regla de bancarrota que verifica las propiedades de simetría, composición hacia arriba y es autodual.

Demostración.

Que la regla P cumple las tres propiedades es fácil de comprobar, vamos a demostrar la unicidad.

Sea R regla de bancarrota simétrica, autodual y que verifica composición hacia arriba y sea $d \in R_+^N$. Definimos sobre $[0, D]$ la función $y_d(T) = d - R(T, d)$. El argumento T es el estado que va desde 0 hasta D, siendo $D = \sum d$. Por el Lema 4.13 y por la propiedad de composición hacia arriba se tiene que R es continua respecto de T y, por tanto, y_d es continua en $[0, D]$.

Definimos la siguiente relación en R_+^N: $d' \sim d$ si existe $s \in [0, D]$ tal que $d' = y_d(s)$

- Veamos que $\sim$ es transitiva ($d'' \sim d' y\, d' \sim d \Rightarrow d'' \sim d$).

Supongamos que se cumple lo siguiente:

$$d'' \sim d' \Rightarrow \exists\, s' \in [0, D] \text{ tal que } d'' = y_{d'}(s') = d' - R(s', d')$$

$$d' \sim d \Rightarrow \exists\, s'' \in [0, D] \text{ tal que } d' = y_{d'}(s'') = d - R(s'', d)$$

y veamos qué $\exists\, s \in [0, D]$ tal que $d'' = y_d(s) = d - R(s, d)$. Se tiene:

$$d'' = d' - R(s', d') = d - R(s'', d) - R(s', d - R(s'', d))$$

$$= d - \left[R(s'', d) + R\big(s', d - R(s'', d)\big)\right] = d - R(s' + s'', d).$$

Como $E = s''\, y\, E' - E = s' (\Rightarrow E' = s' + s'' > s'' = E)$ en la propiedad de composición hacia arriba que verifica R. Comprobemos que $s \in [0, D]$,

$$\left.\begin{array}{r} D'' = D' - s' \, por\ d'' = d' - R(s', d') \\ D' = D - s''\, por\ d'' = d' - R(s', d') \end{array}\right\} \Rightarrow D'' = D - s'' - s'.$$

Por tanto, $s' + s'' = D — D' \in [0, D]$ ya que $D'' \leq D' \leq D$.

- Veamos que $\sim$ verifica lo siguiente: $d' \sim d \Rightarrow d - d' \sim d$.

Supongamos que se tiene:

$$d' \sim d \Rightarrow s'' \in [0, D] \; tal \; que \; d' = y_d(s'') = d — R(s'', d),$$

y veamos que $\exists\, s \in [0, D]$ tal que $d - d' = y_d(s) = d — R(s, d)$. Se tiene:

$$d — d' = R(s', d) = d — R(D — s', d) = d — R(s, d),$$

donde la segunda igualdad se debe a que R es autodual tomando $E = s'$ y la última a haber tomado $s = D — s' \in [0, D]$ ya que $s \in [0, D]$.

Definimos $d' = y_d(D/2)$. Evidentemente, $d' \sim d$ y por otro lado $(d - d') \sim d$.

Puesto que $\sum_{i \in N} d_i = D/2 = \sum_{i \in N} d_i — d_i'$; si $d \; y \; d — d'$ son imágenes de la curva y_d se tiene que $d' = d — d'$, lo que implica que $d' = \frac{d}{2}$. En consecuencia, $\frac{d}{2} \sim d$.

Repitiendo el razonamiento partiendo de $\frac{d}{2}$, obtenemos $\frac{d}{4} \sim \frac{d}{2}$, y por transitividad $\frac{d}{4} \sim d$ y ahora por autodualidad $\frac{3d}{4} \sim d$. Aplicando recurrentemente este razonamiento obtendríamos que para cualquier par de enteros positivos m, n tales que $m \leq 2^n$, $\frac{m}{2^n} d \sim d$. Como y_d es continua, y_d tiene que ser un rayo $y_d(s) = \lambda_s d$, luego $F(T, d)$ es proporcional a d. Como esto ocurre para cualquier d, R es la regla proporcional.

Teorema 4.15 (Herrero y Villar, 2001). La regla P es la única regla de bancarrota que es simétrica, verifica la propiedad de composición hacia abajo y es autodual.

4.2. Regla proporcional ajustada

Teorema 4.16 (Curiel, Maschler y Tijs, 1987). La regla AP es la única regla de bancarrota que es invariante bajo la truncación de las demandas, simétrica, verifica la propiedad de los derechos mínimos primero y la propiedad de aditividad de las demandas.

Demostración.

Que la regla AP cumple las cuatro propiedades es fácil de comprobar, vamos a demostrar la unicidad.

Sea $R \in RB^N$ que verifica las propiedades de simetría, invarianza bajo la truncación de las demandas, los derechos mínimos primero y la aditividad de las demandas. Veamos que $R(E, d) = AP(E, d)$.

Como la propiedad de aditividad de las demandas se cumple para problemas de bancarrota $(E, d) \in B^N$ con $m_i = 0$ y con $d_i \leq E, \forall\, i \in N$ supongamos que tenemos un problema de bancarrota en el que se verifiquen estas condiciones.

Sea $i \in N$ con $d_i > 0$ y sea $k \in N$ tal que $\frac{d_i}{k} \leq d_j$ para $d_j > 0$. Reemplacemos d_i por $d_{i1} = \frac{d_i}{k}, \ldots, d_{ik} = \frac{d_i}{k}$ y consideremos el nuevo problema $(E, d') \in B^N$.

- Por simetría se tiene $R_{i1}(E, d') = \ldots = R_{ik}(E, d')$.
- Por aditividad de demandas se tiene $\sum_{j \in N \setminus \{i\}} R_j(E, d) = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} R_j(E, d')$.
- Por eficiencia se tiene $\sum_{j \in N} R_j(E, d) = \sum_{j \in N} R_j(E, d')$.

De lo anterior se deduce que

$$R_{i1}(E, d') = \ldots = R_{ik}(E, d') = \frac{R_i(E, d)}{k}.$$

Denotamos por $[x]$ a la función parte entera de x y sustituyamos d_j por $\left[d_j \frac{k}{d_i}\right] + 1$ demandas, obteniendo el problema (E, d''), donde $\left[d_j \frac{k}{d_i}\right]$ agentes demandan $\frac{d_i}{k}$ y el otro demanda $c_{jk} = d_j - \left[d_j \frac{k}{d_i}\right] \frac{d_i}{k}$. Por ser R simétrica, se tiene que los $\left[d_j \frac{k}{d_i}\right]$ agentes reciben $\frac{R_i(E,d)}{k}$.

Por ser $[\cdot]$ la función parte entera se tiene:

$$d_j \frac{k}{d_i} - 1 < \left[d_j \frac{k}{d_i}\right] \leq d_j \frac{k}{d_i},$$

de donde, cambiando el signo, multiplicando por $\frac{d_i}{k}$ y sumando d_j, obtenemos lo siguiente:

$$\frac{d_i}{k} > d_j - \left[d_j \frac{k}{d_i}\right] \frac{d_i}{k}.$$

Por $R_i \leq 0$ y por verificar R la propiedad de aditividad de las demandas se tiene lo siguiente:

$$0 \leq R_{jk}(E, d'') \leq \frac{R_i(E;, d)}{k}.$$

Además, por aditividad de las demandas también se tiene:

$$R_j(E, d) = \left[d_j \frac{k}{d_i}\right] \frac{R_i(E, d)}{k} + R_{jk}(E, d''),$$

de donde se deduce que:

$$\left[d_j \frac{k}{d_i}\right] \frac{R_i(E, d)}{k} \leq R_j(E, d) \leq \left[d_j \frac{k}{d_i}\right] \frac{R_i(E, d)}{k} + \frac{R_i(E, d)}{k},$$

y dividiendo por $R_i(E, d)$:

$$\left[d_j \frac{k}{d_i}\right] \frac{1}{k} \leq \frac{R_j(E,d)}{R_i(E,d)} \leq \left[d_j \frac{k}{d_i}\right] \frac{1}{k} + \frac{1}{k}.$$

Por tanto:

$$\frac{d_j}{d_i} - \frac{1}{k} < \left[d_j \frac{k}{d_i}\right] \frac{1}{k} \leq \frac{R_j(E,d)}{R_i(E,d)} \leq \left[d_j \frac{k}{d_i}\right] \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \leq \frac{d_j}{d_i} + \frac{1}{k},$$

donde las desigualdades primera y última se deben a que $\frac{d_j}{d_i} k - 1 < \left[d_j \frac{k}{d_i}\right]$ y $< \left[d_j \frac{k}{d_i}\right] \leq \frac{d_j}{d_i} k$, respectivamente. Llegando así a:

$$\frac{d_j}{d_i} - \frac{1}{k} \leq \frac{R_j(E,d)}{R_i(E,d)} \leq \frac{d_j}{d_i} + \frac{1}{k},$$

y como esto es válido para cualquier k, se tiene que $\frac{R_j(E,d)}{R_i(E,d)} = \frac{d_j}{d_i}$, lo cual coincide con la regla proporcional. En particular, la regla AP coincide con la regla P para el problema de bancarrota (E,d), por tanto $R(E,d) = AP(E,d)$.

Sea $(E', d^*) \in B^N$, como R verifica la propiedad de los derechos mínimos primero y es invariante bajo la truncación de las demandas se tienen las siguientes igualdades, respectivamente:

$$R(E', d^*) = m + R(E' - m(N); d^* - m) = m + R(E' - m(N); mín\{E', d^* - m\}) \quad (4.2.8)$$

Ahora bien, $(E' - m(N);\ mín\{E', d^* - m\}) \in B^N$ con derechos mínimos nulos y $d_i^* < E, \forall\, i \in N$.

Por tanto, se tiene:

$$R(E', d^*) = m + AP(E' - m(N); mín\{E', d^* - m\}).$$

Como la regla AP es invariante bajo la truncación de las demandas y verifica los derechos mínimos primero, respectivamente, como queríamos demostrar:

$$m + AP(E' - m(N);\ mín\{E', d^* - m\}) = m + AP(E' - m(N), d^* - m) = AP(E', d^*).$$

4.3. Regla de ganancias igualitarias

Teorema 4.17 (Dagan, 1996). La regla CEA es la única regla de bancarrota que es simétrica, verifica la propiedad de invarianza bajo la truncación de las demandas y la de composición hacia arriba.

Teorema 4.18 (Herrero y Villar, 2002). La regla CEA es la única regla de bancarrota que verifica las propiedades de compensación completa y composición hacia abajo.

Teorema 4.19 (Chun, 2006). La regla CEA es la única regla de bancarrota que verifica las propiedades de seguridad mínima, composición hacia arriba y consistencia.

Teorema 4.20 (Chun, 2006). La regla CEA es la única regla de bancarrota que verifica las propiedades de seguridad mínima, composición hacia arriba y consistencia inversa.

Los siguientes lemas los utilizaremos para probar la última caracterización que damos de la regla CEA:

Lema 4.21 (Herrero y Villar, 2001). Si una regla $R \in RB^N$, con $|N| = 2$ verifica las propiedades de exención y de composición hacia abajo, entonces R verifica la propiedad de simetría.

Lema 4.22 (Chun, 1999). Si una regla $R \in RB^N$ verifica las propiedades de consistencia y monotonía respecto al estado, entonces R verifica la propiedad de consistencia inversa.

Teorema 4.23 (Herrero y Villar, 2001). La regla CEA es la única regla de bancarrota que verifica las propiedades de consistencia, exención y composición hacia abajo.

Demostración.

Que la regla CEA cumple las tres propiedades es fácil de comprobar, vamos a demostrar la unicidad.

Sea $R \in RB^N$ que verifica las propiedades de consistencia, exención y composición hacia abajo. Supongamos, sin pérdida de generalidad que las demandas están ordenadas en orden creciente. Veamos que $R(E,d) = CEA(E,d)$.

Por el lema 4.21 se tiene que R es simétrica. Consideremos $(E,(d_1,d_2)) \in B^N$, con $|N| = 2$ y distingamos los siguientes casos:

- Si $d_1 = d_2$.

$CEA(E,d) = (\frac{E}{2},\frac{E}{2})$, veamos que R asigna el mismo reparto de pagos.

Como R es simétrica y $R_1(E,d) = R_2(E,d)$. Por lo anterior y por la eficiencia de R se tiene que $R(E,d) = (\frac{E}{2},\frac{E}{2})$, de donde se deduce $R(E,d) = CEA(E,d)$.

- Si $d_1 \neq d_2$.

  - Si $d_1 \leq \frac{E}{2}$.

  $CEA(E,d) = (d_1, E - d_1)$, veamos que R asigna el mismo reparto de pagos. Puesto que $d_1 < d_2$ se tiene que, como mínimo, $d_1 = \frac{E}{2} < d_2$ de donde se deduce, por verificar R la propiedad de exención, que $R_1(E,d) = (d_1, E - d_1)$. Por esto y por la eficiencia de R se tiene que $R_2(E,d) = E - d_1$ y, por tanto, $R(E,d) = (d_1, E - d_1) = CEA(E,d)$.

  - Si $\frac{E}{2} < d_1$.

  $CEA(E,d) = (\frac{d_1}{2},\frac{d_1}{2})$, veamos que R asigna el mismo reparto de pagos. En este caso $E < 2d_1$, consideremos $(E',d) \in B^N$, con $E' = 2d_1$. Por la exención, como $\frac{2d_1}{2} = d_1 < d_2$ se tiene que $R_1(E',d) = d_1$ y, por la eficiencia, $R_2(E',d) = d_1$.

  Por verificar R la propiedad de composición hacia abajo se tiene que

$$R(E,d) = R(E,R(E',d)) = R(E,R(2d_1,(d_1,d_1))) = R(E;\ (d_1,d_1)). \qquad (4.2.9)$$

Como R es simétrica $R(E,(d_1,d_1)) = \left(\frac{d_1}{2},\frac{d_1}{2}\right)$. Por tanto, sustituyendo en (4.2.9) se obtiene $R(E,d) = \left(\frac{d_1}{2},\frac{d_1}{2}\right)$ y, así, $R(E,d) = CEA(E,d)$.

Ya tenemos probado que $R(E,d) = CEA(E,d)$ para $|N| = 2$. Veamos que esto es cierto para cualquier N:

Como CEA verifica la propiedad de composición hacia abajo se tiene que también verifica la propiedad de monotonía respecta al estado, por definición de composición hacia abajo. Además, como CEA es consistente, aplicando el lema 4.21, se tiene que CEA verifica la propiedad de consistencia inversa.

Ahora bien, puesto que R verifica la consistencia, CEA la consistencia inversa y $R(E,d) = CEA(E,d)$ para $|N| = 2$ podemos aplicar el Lema de Elevación, teorema 4.9, para afirmar que $R(E,d) = CEA(E,d)$ en general.

4.4. Regla de pérdidas igualitarias

Teorema 4.24 (Herrero y Villar, 2001). La regla CEL es la única regla de bancarrota que es simétrica y verifica las propiedades de derechos mínimos primero y composición hacia abajo.

Teorema 4.25 (Herrero y Villar, 2002). La regla CEL es la única regla de bancarrota que verifica las propiedades de compensación vacía y composición hacia arriba.

Teorema 4.26 (Herrero y Villar, 2001). La regla CEL es la única regla de bancarrota que verifica las propiedades de consistencia, exclusión y composición hacia arriba.

4.5. Regla de Talmud

Teorema 4.27 (Herrero y Villar, 2001). La regla T es la única regla de bancarrota que verifica las propiedades de invariaza bajo truncación de las demandas, consistencia y es autodual.

Teorema 4.28 (Herrero y Villar, 2001). La regla T es la única regla de bancarrota que verifica las propiedades de derechos mínimos primero, consistencia y es autodual.

Teorema 4.29 (Chun, 2006). La regla T es la única regla de bancarrota que verifica las propiedades de seguridad mínima, derechos mínimos primero y consistencia.

Teorema 4.30 (Chun, 2006). La regla T es la única regla de bancarrota que verifica las propiedades de seguridad mínima, derechos mínimos primero y consistencia inversa.

El siguiente lema lo usaremos para probar la última caracterización que damos de la Regla del Talmud.

Lema 4.31 (Moreno-Ternero y Villar, 2004). Si una regla $R \in RB^N$, con $|N| = 2$ verifica las propiedades de autodualidad y de composición hacia abajo restringida, entonces R verifica la propiedad de simetría.

Teorema 4.32 (Moreno-Ternero y Villar, 2004). La regla T es la única regla de bancarrota que verifica las propiedades de seguridad mínima, composición hacia abajo restringida, consistencia bilateral y autodualidad.

Demostración. Sea $R \in RB^N$ que verifica las propiedades de seguridad mínima, composición hacia abajo restringida, consistencia bilateral y autodualidad. Por el lema 4.31 se tiene que R es simétrica. Supongamos, sin pérdida de generalidad que las demandas están ordenadas en orden creciente. Veamos que $R(E,d) = T(E,d)$.

- Consideremos el caso en el que $|N| = 2$ y distingamos los siguientes casos:

  - $d_1 \leq E \leq d_2$.

$T(E,d) = \left(\frac{d_1}{2}, E - \frac{d_1}{2}\right)$. Veamos que R asigna el mismo reparto de pagos.

1. Como R verifica la seguridad mínima y $d_1 \leq E$, entonces $R_1(E,d) \geq \frac{d_1}{2}$.

Por otro lado: $E \leq d_2 \Rightarrow E + d_1 \leq D \Rightarrow d_1 \leq D - E = L$.

2. Como R verifica la seguridad mínima y $d_1 \leq L$, entonces $R_1(L,d) \geq \frac{d_1}{2}$. Por tanto se tiene $\frac{d_1}{2} \leq R_1(E,d) = d_1 - R_1(L,d) \leq d_1 - \frac{d_1}{2} = \frac{d_1}{2}$, donde la primera igualdad se da por ser R autodual y las desigualdades primera y segunda se tienen por 1 y 2, respectivamente. Por tanto $R_1(E,d) = \frac{d_1}{2}$ y, por la eficiencia de R, $R_1(E,d) = E - \frac{d_1}{2}$.

  - $E < d_1$.

$T(E,d) = \left(\frac{E}{2}, \frac{E}{2}\right)$. Veamos que R asigna el mismo reparto de pagos.

Sea E' tal que $E < d_1 = E' \leq d_2$. Se tiene que $R_1(E',d) = \left(\frac{d_1}{2}, \frac{d_1}{2}\right)$ por el caso anterior. Como R verifica la composición hacia abajo restringida se tiene $R(E,d) = R(E, R(E',d))$ y por ser simétrica y ser $E < d_1$ se tiene $R(E, R(E',d)) = \left(\frac{E}{2}, \frac{E}{2}\right)$. De donde se deduce que $R(E,d) = \left(\frac{E}{2}, \frac{E}{2}\right)$. Seguridad mínima y $d_1 \leq E$, entonces $R_1(E,d) \geq \frac{d_1}{2}$.

  - $d_2 < E$.

$T(E,d) = \left(d_1 - \frac{D-E}{2}, d_2 - \frac{D-E}{2}\right)$. Veamos que R asigna el mismo reparto de pagos.

$d_2 < E \Rightarrow D < E + d_1 \Rightarrow \leq L < d_1$. Por el caso anterior se tiene que $R(L,d) = \left(\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$ y, por ser autodual, $R(L,d) = d - R(E,d)$, de donde se deduce: $(E,d) = d -$

$R(L,d) = d - \left(\frac{L}{2},\frac{L}{2}\right) = \left(d_1 - \frac{L}{2}, d_2 - \frac{L}{2}\right)$, coincidiendo con el reparto de pagos que proporciona T.

- Consideremos el caso en el que N toma cualquier valor finito.

Puesto que la regla R verifica la propiedades de consistencia, T la propiedad de consistencia inversa y $R(E,d) = T(E,d)$ para $|N| = 2$ aplicando el Lema de Elevación, teorema 4.9, obtenemos que $R(E,d) = T(E,d)$ en general.

4.6. Regla de llegada aleatoria

Teorema 4.33 (Hwang, 2015). La regla RA es la única regla de bancarrota que verifica la propiedad de compensación equilibrada.

Demostración.

Que la regla RA cumple la propiedad es fácil de comprobar, vamos a demostrar la unicidad.

Sea R una regla de bancarrota que verifica la propiedad de compensación equilibrada, veamos que para cualquier $(E,d) \in PB^N$ se tiene que $R(E,d) = RA(E,d)$.

Lo probamos por inducción para N:

- Si $|N| = 1$. $R(E,d) = R(E,d_1) = mín\{d_1, E\} = RA(E,d_1)$.
- Supongamos cierto para $|N| \leq k$, con $k \geq 1$ y probemos que se cumple para $|N| = k + 1$. Sea $(E,d) \in PB^N$, con $|N| = k$.

Por verificar R la propiedad de compensación balanceada, $\forall \{i,j\} \subset N$ se tiene:

$$R_i(E,d) - R_i\left(N \setminus\{j\}, E_{N\setminus\{j\}}, d_{N\setminus\{j\}}\right) = R_j(E,d) - R_j\left(N \setminus\{i\}, E_{N\setminus\{i\}}, d_{N\setminus\{i\}}\right). \qquad (4.2.10)$$

Aplicando la hipótesis de inducción a (4.2.10) se tiene que:

$$R_i(E,d) - RA_i\left(N \setminus\{j\}, E_{N\setminus\{j\}}, d_{N\setminus\{j\}}\right) = R_j(E,d) - RA_j\left(N \setminus\{i\}, E_{N\setminus\{i\}}, d_{N\setminus\{i\}}\right).$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} R_i(E,d) - R_j(E,d) &= RA_i\left(N \setminus\{j\}, E_{N\setminus\{j\}}, d_{N\setminus\{j\}}\right) - RA_j\left(N \setminus\{i\}, E_{N\setminus\{i\}}, d_{N\setminus\{i\}}\right) \\ &= RA_i(E,d) - RA_j(E,d), \end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a que la regla RA verifica la propiedad de compensación balanceada.

Fijado $i \in N$, $R_i(E,d) - R_j(E,d) = RA_i(E,d) - RA_j(E,d), \forall\, j \in N$,

$$\Rightarrow \sum_{j\in N}\left(R_i(E,d) - R_j(E,d)\right) = \sum_{j\in N}\left(RA_i(E,d) - RA_j(E,d)\right)$$

$$\Rightarrow |N|\, R_i(E,d) - \sum_{j\in N} R_j(E,d) = \; |N|\, RA_i(E,d) - \sum_{j\in N} RA_j(E,d)$$

$$\Rightarrow |N|\, R_i(E,d) - E = |N|\, RA_i(E,d) - E \Rightarrow R_i(E,d) = RA_i(E,d).$$

4.7. Síntesis

Hemos analizado las principales reglas de la literatura, sus propiedades y su caracterización. Procedemos a resumir las caracterizaciones de las reglas a continuación:

La regla proporcional es la única que verifica las propiedades de:

- Simetría, composición hacia arriba y autodualidad (Young, 1988).
- Simetría, composición hacia abajo y autodualidad (Herrero y Villar, 2001).

La regla proporcional ajustada es la única que verifica las propiedades de invarianza bajo la truncación de las demandas, simetría, los derechos mínimos primero y la aditividad de las demandas (Curiel, Maschler y Tijs, 1987).

La regla de ganancias igualitarias verifica las propiedades de:

- Simetría, invarianza bajo la truncación de las demandas y la composición hacia arriba (Dagan, 1996).
- Compensación completa y composición hacia abajo (Herrero y Villar, 2002).
- Seguridad mínima, composición hacia arriba y consistencia (Chun, 2006).
- Seguridad mínima, composición hacia arriba y consistencia inversa (Chun, 2006).
- Consistencia, exención y composición hacia abajo (Herrero y Villar, 2001).

La regla de pérdidas igualitarias verifica las propiedades de:

- Simetría, derechos mínimos primero y composición hacia abajo (Herrero y Villar, 2001).
- Compensación vacía y composición hacia arriba (Herrero y Villar, 2002).
- Consistencia, exclusión y composición hacia arriba (Herrero y Villar, 2001).

La regla del Talmud verifica las propiedades de:

- Invariaza bajo truncación de las demandas, consistencia y autodualidad (Herrero y Villar, 2001).
- Derechos mínimos primero, consistencia y autodualidad (Herrero y Villar, 2001).
- Seguridad mínima, derechos mínimos primero y consistencia (Chun, 2006).
- Seguridad mínima, derechos mínimos primero y consistencia inversa (Chun, 2006).
- Seguridad mínima, composición hacia abajo restringida, consistencia bilateral y autodualidad (Moreno-Ternero y Villar, 2004).

La regla de llegadas aleatorias verifica la propiedad de compensación equilibrada (Hwang, 2015).

5. Extensiones de los problemas de bancarrota

En muchas situaciones en las que los agentes interactúan, lo hacen dentro de grupos. La teoría de juegos cooperativos estudia tales situaciones teniendo en cuenta que cada coalición de jugadores puede lograr ganancias por sí misma. Estos valores de las coaliciones son consecuentemente tenidos en cuenta a la hora de determinar una división justa del valor de la coalición total entre todos los jugadores. A menudo, sin embargo, algunas coaliciones juegan un papel especial, ya que surgen de forma natural de la situación subyacente. Si estos grupos emergentes forman una partición de la coalición total, se denominan usualmente uniones a priori.

5.1. La regla ganancias igualitarias en problemas de bancarrota con uniones a priori

Se presenta una extensión de la regla ganancias igualitarias (CEA). Esta extensión involucra un procedimiento en dos etapas similar al presentado en Casas-Méndez y otros (2003).

Un problema de bancarrota con uniones a priori (Born et al. 2005), se representa por una terna (E, d, P) donde (E, d) es un problema de bancarrota estándar y $P = \{P_k\}\ k \in R$ es una partición del conjunto de agentes. Denotamos por BU^N al conjunto de todos los problemas de bancarrota con uniones a priori y conjunto de agentes N.

Esto es, funciones $\varphi :\ BU \to\ \mathbb{R}^N$ que asignan a cada problema de bancarrota con uniones a priori (E, d, P) un vector $\varphi(E, d, P) \in \mathbb{R}^N$ tal que:

1. $0 \leq \varphi_i(E, d, P) \leq d_i$ para todo $i \in N$.
2. $\sum_{i \in N} mín\varphi_i(E, d, P) = E$.

Si $(E, d, P) \in BU^N$ es un problema de bancarrota con uniones a priori, se puede definir el correspondiente problema de bancarrota en el que intervienen las uniones como agente (R, E, d^p), el denominado problema cociente, donde $d_k^P = \sum_{i \in P_k} d_i$ para cada unión P_k de agentes.

La idea básica que motiva esta clase de problemas es que los agentes no tienen una única demanda sobre el estado, como en el modelo de bancarrota estándar, sino varias demandas, cada una de las cuales se refiere a un asunto particular. La hipótesis básica que se hace en este modelo es que estos asuntos se tratan por orden: tan pronto como el dinero se distribuye según lo previsto en un asunto en concreto, este asunto debe completarse antes de que el siguiente se considere.

Una situación de reparto para varios asuntos se representa por el par (E, D), donde $D \in \mathbb{R}_+^{RxN}$ es la matriz de demandas. Cada fila de la matriz D hace referencia a un asunto y el conjunto de todos los asuntos se denota por $R = \{1, \ldots, r\}$. Cada elemento $d_{ki} \geq 0$ representa la cantidad que el jugador $i \in N$ demanda del asunto $K \in R$, si un agente no está interesado en un asunto, su demanda es 0.

Cada situación de bancarrota con uniones a priori (E, d, P) da lugar a una situación de reparto para varios asuntos disjuntos $(E, D^{d,P})$ en la que los asuntos son las uniones y la matriz $D^{d,P} = [D_{kj}^{d,P}]k \in R \;\; y \, j \in N$ se define de la siguiente manera

$$D_{kj}^{d,P} = \begin{cases} d_j \; si \; j \in P_k \\ 0 \; si \; j \notin \; P_k \end{cases}.$$

Si se quiere dividir el estado total entre los acreedores, una posibilidad es dividir primero ese estado en las uniones y luego dividir lo que obtiene cada unión entre sus agentes.

Definición 5.1. (Born et al. 2005). Sea $f \,:\, B^N \rightarrow \,\mathbb{R}^N$ una regla de bancarrota. Se define la extensión de f en dos etapas $\bar{f} \,:\, BU^N \rightarrow \,\mathbb{R}^N$ como sigue. Sea $(E, d, P) \in BU^N$ un problema de bancarrota con uniones a priori. Primero se define $E_k^f = f_k(R, E, d^P)$ para todo $k \in R$ y a continuación, para $i \in P_k$,

$$\overline{f_\iota}(E, d, P) = f_i\big(P_k, E_k^f, d_j\big) \; j \in P_k.$$

Aplicando la extensión a la regla CEA, la regla $\overline{\text{CEA}}$ para situaciones de bancarrota con uniones a priori, es una generalización de la misma, de modo que $\overline{\text{CEA}}(E, d, P^N) \; y \; \overline{\text{CEA}}(E, d, P^n)$ coinciden con $CEA(E, d)$, donde $P^n = \{1, \ldots, n\}$ es la partición discreta y $P^N = \{N\}$ es la partición trivial. Además por construcción, se tiene que $\overline{\text{CEA}_k}(R, E, d^P, P^R) = E_k, \forall \; k \in R$.

5.2. La regla de llegadas aleatorias en problemas de bancarrota con uniones a priori

A continuaciones definiremos la extensión de la regla de llegadas aleatorias, RA, con uniones a priori (Born, et al, 2005).

Definición 5.2. Sea f una regla de bancarrota y sea (E, d, P) un problema de bancarrota con uniones a priori. Entonces se define la regla f basada en llegadas aleatorias de la manera siguiente:

$$RA_i^f(E,d,P) = \frac{1}{r!}\left[\sum_{\sigma\in\Pi(R)} f_i(P_k, E_\sigma, d_j\right], \forall\, i,j \in P_k,$$

$$donde\ E_\sigma = máx\left\{0, E - \sum_{\iota\in R,\sigma(\iota)<\sigma(k)} d_\iota^P\right\}.$$

La interpretación de esta regla es similar a otras soluciones en llegadas aleatorias. Aquí, se supone que las demandas de las diferentes uniones se van satisfaciendo en orden prefijado. Si, en el momento de repartir el recurso en una unión concreta, el estado restante no es suficiente para verificar toda la demanda, se utiliza la regla f para hacer la distribución dentro de esa unión. Por tanto, la regla f basada en llegadas aleatorias reparte a un agente la media de las cantidades que éste obtiene utilizando este procedimiento para todos los posibles órdenes de llegada de las uniones.

Si se considera la partición discreta en el conjunto de jugadores, $P = P^n$, se tiene que $RA^f(E,d,P^n) = RA(E,d)$, es decir RA^f coincide con las regla de llegadas aleatorias para problemas de bancarrota y para cualquier regla f. Si se considera la partición trivial, $P = P^N$, la regla f basada en llegadas aleatorias coincide con la regla f.

6. Aplicación a un caso real (COP21)

A continuación, para poner en práctica las reglas de bancarrota analizadas en este trabajo y poder apreciar de una forma visual sus diferencias, analizaremos un caso real asociado a un problema de bancarrota.

6.1. El acuerdo de París sobre cambio climático (COP21)

Tal y como recoge la Comisión Europea en su página web, reflejaremos a continuación el significado del acuerdo de Paris, sus principales objetivos y datos relevantes.

En la Conferencia de París sobre el Clima (COP21), celebrada en diciembre de 2015, 195 países firmaron el primer acuerdo vinculante mundial sobre el clima. Para evitar un cambio climático peligroso, el Acuerdo establece un plan de acción mundial que pone el límite del calentamiento global muy por debajo de 2° C.

El Acuerdo de París tiende un puente entre las políticas actuales y la neutralidad climática que debe existir a finales del siglo y su objetivo principal es el de reducir las emisiones de CO_2 a la atmosfera.

Los países acordaron que las emisiones globales alcancen su nivel máximo cuanto antes, si bien reconocen que en los países en desarrollo el proceso será más largo, y aplicar después rápidas reducciones basadas en los mejores criterios científicos disponibles.

Antes y durante la conferencia de París, los países presentaron sus planes generales nacionales de acción contra el cambio climático (CPDN) aunque dichos planes no bastarán para mantener el calentamiento global por debajo de 2 °C, el acuerdo señala el camino para llegar a esa meta.

El acuerdo reconoce la importancia de evitar, reducir al mínimo y atender a los daños y perjuicios debidos a los efectos adversos del cambio climático, admite la necesidad de cooperar y mejorar la comprensión, actuación y apoyo en diferentes campos: sistemas de alerta temprana, preparación para emergencias y seguro contra los riesgos.

En la lucha contra el cambio climático, el acuerdo reconoce la importancia de las partes interesadas no signatarias: las ciudades y otras administraciones subnacionales, la sociedad civil, el sector privado, etc.

La Unión Europea (UE) y los demás países desarrollados seguirán apoyando la acción por el clima a fin de reducir las emisiones y aumentar la resistencia a las consecuencias del cambio climático en los países en desarrollo.

Los países desarrollados quieren mantener el actual objetivo colectivo de movilizar 100.000 millones de dólares estadounidenses al año en 2020 y ampliar esta medida hasta 2025. Para después de ese periodo, se establecerá un nuevo objetivo aún más ambicioso.

La UE viene estando en vanguardia de los esfuerzos internacionales por alcanzar un acuerdo global sobre el clima.

Dada la limitada participación en el Protocolo de Kioto y ante la falta de acuerdo en la cumbre de 2009 en Copenhague, la UE formó una amplia y ambiciosa coalición de países desarrollados y en desarrollo, que prefiguró el buen resultado de la Conferencia de París.

En marzo de 2015, la UE fue la primera gran economía en presentar su contribución prevista al nuevo Acuerdo. La UE ya toma medidas para alcanzar su objetivo de reducir las emisiones un 40% como mínimo en 2030.

El Acuerdo quedó abierto a la firma durante un año el 22 de abril de 2016. Para entrar en vigor, al menos 55 países que representasen al menos el 55% de las emisiones mundiales debían depositar sus instrumentos de ratificación. El 5 de octubre, la UE ratificó formalmente el acuerdo de París, lo que permitió que entrara en vigor el 4 de noviembre de 2016.

6.2. Trabajo relacionado

Analizamos un trabajo relacionado a nuestro caso real, *The global carbon budget: a conflicting claims problem* (Giménez-Gómez et al. 2016). Este artículo evalúa las diferentes reglas de bancarrota vistas en este trabajo (P, CEA, CEL y T) para la distribución del presupuesto global de $\mathrm{CO_2}$, y analiza los diferentes principios que estas reglas pueden aportar en el contexto del cambio climático. El análisis del artículo sugiere que la regla de reparto más adecuada que verifique los principios requeridos para el problema de bancarrota ligado al reparto de $\mathrm{CO_2}$ con respecto al cambio climático es la regla del Talmud.

El artículo parte de 3 posibles presupuestos de $\mathrm{CO_2}$ acumulado para el periodo 2000-2050:

(a) 1440 Gt $\mathrm{CO_2}$ que corresponden al 50 % de probabilidad de exceder el aumento de 2 °C la temperatura del planeta, (b) 1000 Gt $\mathrm{CO_2}$ al 25 % de probabilidad y (c) 745 Gt $\mathrm{CO_2}$ al 0% de probabilidad.

Los agentes implicados son los países formados por 4 regiones: REF (países bajo cambios económicos), OECD90 (países de la OCDE en 1990), ASI (Asia) y ALM (África y América Latina). Además estiman que las demandas de todos los agentes implicados en el problema asciende a 2736 Gt de $\mathrm{CO_2}$ acumulados en el periodo de estudio. Obtienen los resultados de reparto de $\mathrm{CO_2}$ de la Tabla 6.2.1.

Estamos ante un problema de bancarrota (N, E, d), donde $E \in \mathbb{R}_+$ es el estado o bien disponible a dividir entre los agentes, que toma los valores de 1440, 1000 y 745 Gt de $\mathrm{CO_2}$, y el vector de demandas de las regiones, $d = (d_1, \dots, d_N) \in \mathbb{R}_+^N$ es d= (300.36, 618.78, 768.47, 1048.57) y con un conjunto de 4 elementos, N = {REF, ALM, OECD90, Asia}.

Para elegir el mejor reparto, parten de las propiedades estudiadas en el presente trabajo para las reglas que analizan en el estudio, y como dichas propiedades se adaptan al problema del cambio climático, en concreto Talmud es la única regla que verifica las propiedades de: simetría, anonimato, conservación del orden, invariancia bajo truncación, dualidad, consistencia bilateral y derechos mínimo primero.

Reparto de emisiones de CO2 acumulado.					
Demandas: REF=300.36; ALM=618.78; OECD90=768.47; ASIA=1048.57					
		P	**CEA**	**CEL**	**Talmud**
Estado	REF	158.07	300.36	0	150.18
1440 Gt	ALM	325.65	379.88	286.84	309.39
CO_2	OECD90	404.43	379.89	436.53	384.24
50%	ASIA	551.84	379.90	716.63	596.2
Estado	REF	109.77	250	0	150.18
1000 Gt	ALM	226.15	250	140.17	283.27
CO_2	OECD90	280.86	250	289.86	283.28
25%	ASIA	383.22	250	569.96	283.29
Estado	REF	81.78	186.25	0	150.18
745 Gt	ALM	168.48	186.26	55.17	198.27
CO_2	OECD90	209.24	186.27	204.86	198.28
0%	ASIA	285.5	186.28	484.96	198.29

Tabla 6.2.1: Giménez-López et al, 2016 (Tabla 1).

6.3. Análisis exploratorio de los datos para (COP21)

A diferencia del trabajo relacionado (Giménez-Gómez et al. 2016), en nuestro estudio analizaremos a los países que conforman la UE, mediante los datos registrados en Eurostat (Enero 2018), *Air emissions accounts totals bridging to emission inventory totals* (Código: env_ac_aibrid_r2).

Los datos de CO_2 lo conforman 28 países, y no son datos acumulativos (trabajo relacionado) sino que son datos por año y expresados en Millones de toneladas (Mt). Aclarar que los datos para el 2016 son una estimación de Eurostat

En la Tabla 6.3.1 tenemos los datos de los 14 países más emisores de CO_2.

En el Gráfico 6.3.1, podemos observar la evolución del CO_2 en la UE en el periodo 2008-2016, para los 14 países con más emisiones de CO_2.

País	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Total UE	4423,28	4057,38	4184,45	4042,39	3982,80	3884,52	3715,74	3752,63	3755,83
Alemania	924,18	851,62	896,11	871,89	881,68	899,36	856,41	857,03	860,47
Reino Unido	595,79	540,14	558,85	519,79	534,50	521,03	483,52	468,34	442,24
Italia	486,44	429,05	437,94	425,13	400,22	372,06	354,98	366,63	376,04
Francia	411,31	391,66	401,10	376,59	375,42	374,48	343,51	348,32	357,20
Polonia	335,10	321,94	340,50	339,61	332,96	327,65	316,49	319,68	322,87
España	345,84	305,91	292,06	292,10	287,91	260,70	262,58	279,28	283,65
Países Bajos	210,39	205,57	216,95	204,82	202,38	200,67	195,83	203,01	205,04
Bélgica	118,12	106,08	113,32	103,78	101,35	102,73	97,15	100,46	101,75
República Checa	112,57	104,33	107,23	103,17	99,52	95,63	93,84	93,49	90,95
Rumania	106,09	87,67	84,88	91,16	88,70	80,31	81,01	82,70	79,46
Grecia	111,11	104,34	97,34	94,53	91,42	81,72	78,66	74,96	72,05
Dinamarca	95,92	89,26	87,74	85,63	78,94	77,02	71,67	70,56	73,96
Austria	71,36	65,56	70,26	68,57	65,97	65,40	61,98	64,11	64,24

Tabla 6.3.1: Evolución $CO_2(Mt)$ por País.

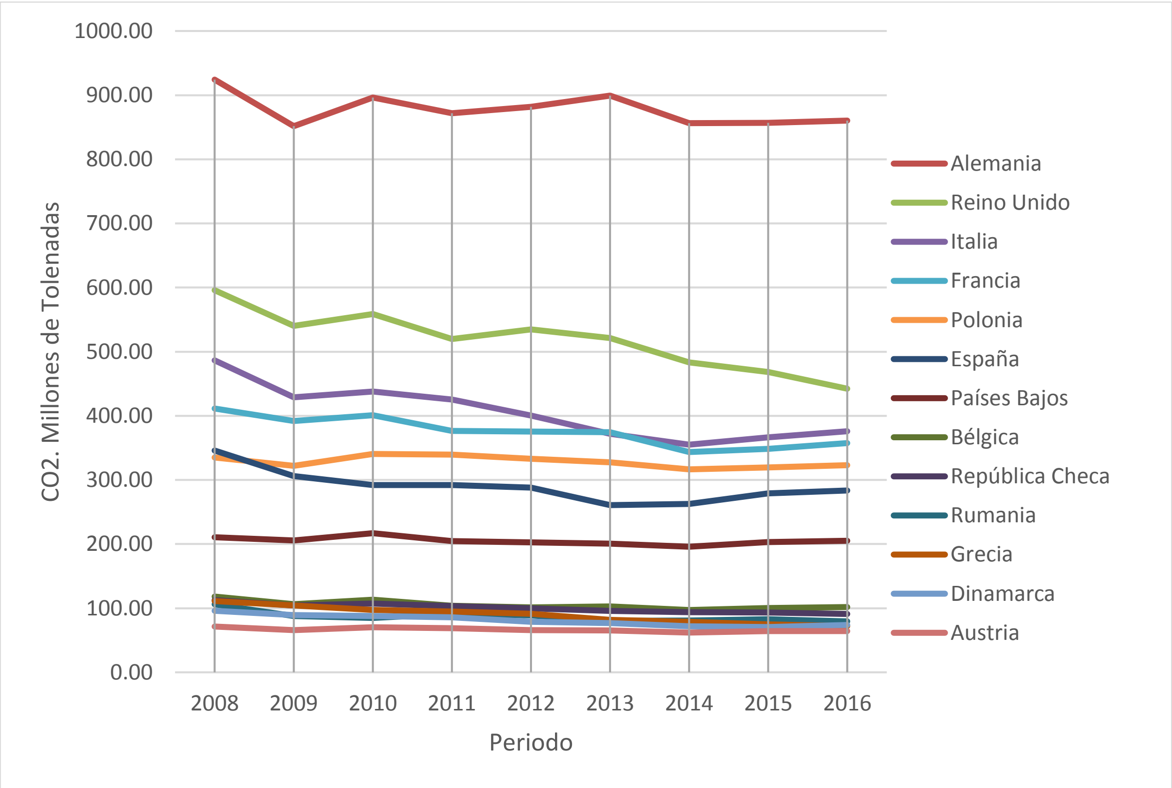

Gráfico 6.3.1: $CO_2(Mt)$ por países 2008-2016.

6.4. Análisis de los datos con el paquete de R "GameTheory".

Nos encontramos en la siguiente situación: La UE ha acordado la reducción del 40% de las emisiones de CO_2 en 2030, por lo que se aplicarán políticas de eficiencia energética, energías renovables, etc. Ahora bien, si nos planteamos esta reducción como un problema de bancarrota, en el que las emisiones de CO_2 de los estados (sus demandas) superan la cantidad máxima del acuerdo en 2030 (estado). ¿Cuáles serán las cuotas de emisiones para cada estado miembro si mantenemos la demanda del 2015 y poder cumplir el acuerdo?

A diferencia del trabajo relacionado (Giménez-Gómez et al. 2016), no utilizamos una estimación de CO_2 según el informe especial sobre escenarios de emisiones (SRES) creado por el Panel sobre el Cambio Climático (IPCC) para calcular las demandas futuras de los países, sino que intuitivamente hemos extrapolado el posible escenario en el que se mantengan las emisiones del año 2015 (no acumulativas) en el año 2030.

Aplicaremos a nuestros datos el paquete de R mencionado, el cual nos devuelve los valores de aplicar las reglas de reparto vistas a lo largo de este trabajo.

Estamos ante un problema de bancarrota (N, E, d), donde $E \in \mathbb{R}_+$ es el estado o bien disponible a dividir entre los agentes es el 40% del total de emisiones de la UE28 en 2015, $E = 1502{,}33$ Millones de Toneladas de CO_2, y el vector de demandas de los países, $d = (d_1, \dots, d_N) \in \mathbb{R}_+^N$ es d=(857.03, 468.34, 366.63, 348.32, 319.68, 279.28, 203.01, 100.46, 93.49, 82.70, 74.96, 70.56, 64.11, 53.87, 51.52, 50.82, 48.29, 47.88, 42.66, 33.82, 18.29, 17.92, 16.37, 14.63, 9.05, 8.83, 6.88, 3.23) y con un conjunto de 28 elementos, N = { Alemania, Reino Unido, Italia, Francia, Polonia, España, Países Bajos, Bélgica, República Checa, Rumanía, Grecia, Dinamarca, Austria, Portugal, Suecia, Hungría, Bulgaria, Finlandia, Irlanda, Eslovaquia, Lituania, Croacia, Estonia, Eslovenia, Luxemburgo, Letonia, Chipre, Malta}. Se cumple que $d(N) \geq E$.

Dadas las limitaciones computacionales para problemas de bancarrota con más de 6 agentes, escogeremos el subconjunto de nuestro problema de bancarrota formado por el TOP6 países emisores de CO_2, formado por: Alemania, Reino Unido, Italia, Francia, Polonia y España. El estado o cuota a repartir pasa a ser de 1055,70 Millones de toneladas de CO_2.

A continuación, en la Tabla 6.3.1, podemos observar los repartos ofrecidos por las reglas presentadas en este trabajo a través del paquete de R.

	Demandas	P	CEA	CEL	Talmud	RA
Alemania	857.03	342.81	175.95	593.10	175.95	321.20
Reino Unido	468.34	187.33	175.95	204.41	175.95	191.68
Italia	366.63	146.65	175.95	102.70	175.95	150.33
Francia	348.32	139.33	175.95	84.39	175.95	143.31
Polonia	319.68	127.87	175.95	55.75	17.77	132.33
España	279.28	111.71	175.95	15.35	17.77	116.85

Tabla 6.4.1: Reparto de $CO_2(Mt)$ por Reglas de bancarrota

Mostraremos de una forma visual el reparto mediante gráficos por país:

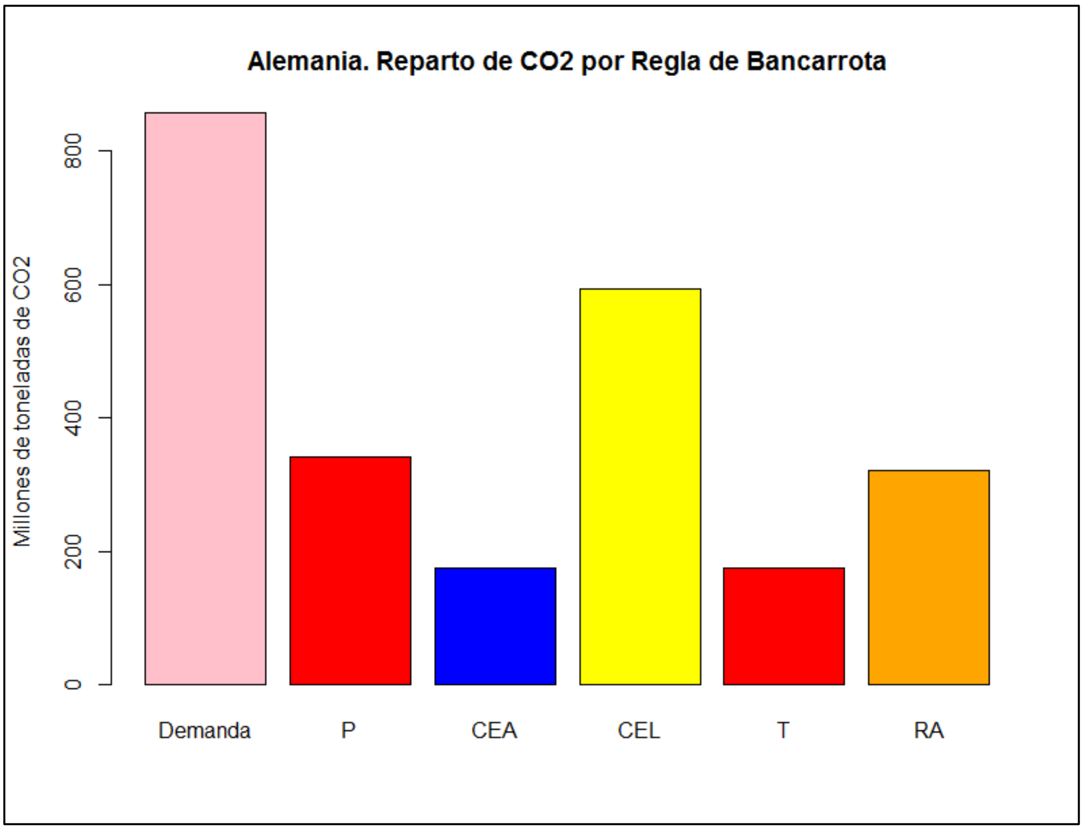

Gráfico 6.4.1: Reparto de $CO_2(Mt)$ por Reglas de bancarrota. Alemania

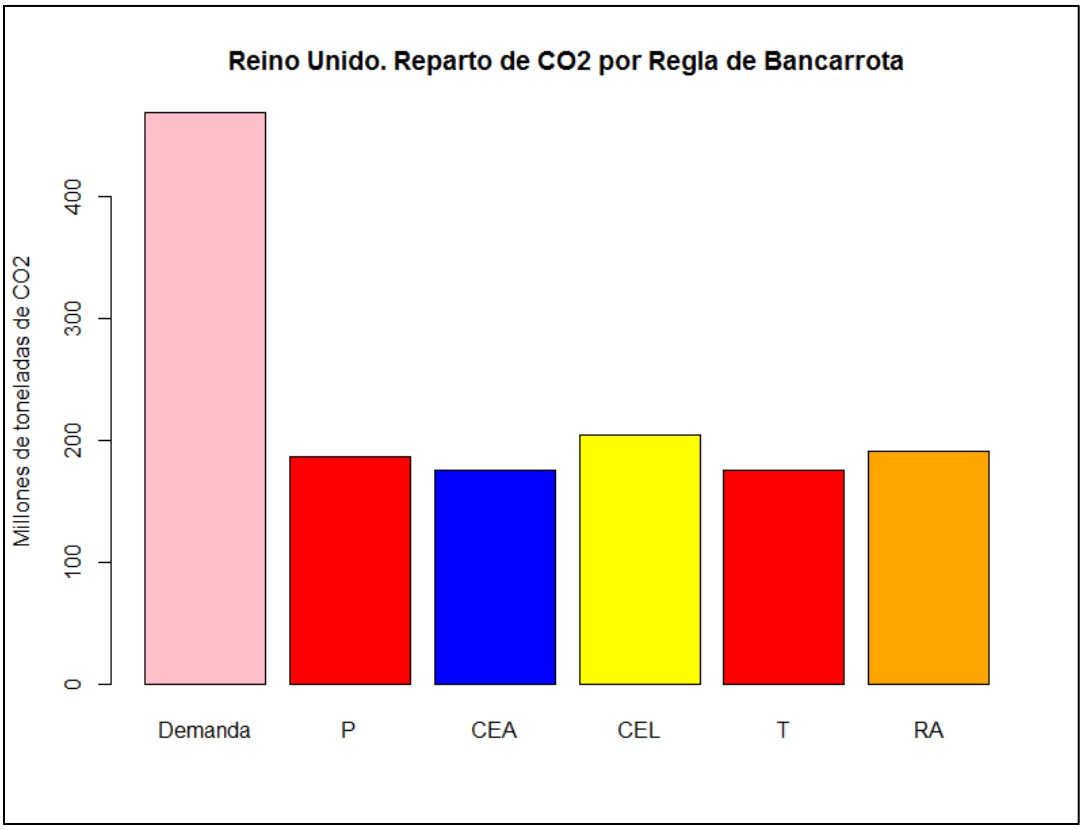

Gráfico 6.4.2: Reparto de $CO_2(Mt)$ por Reglas de bancarrota. Reino Unido

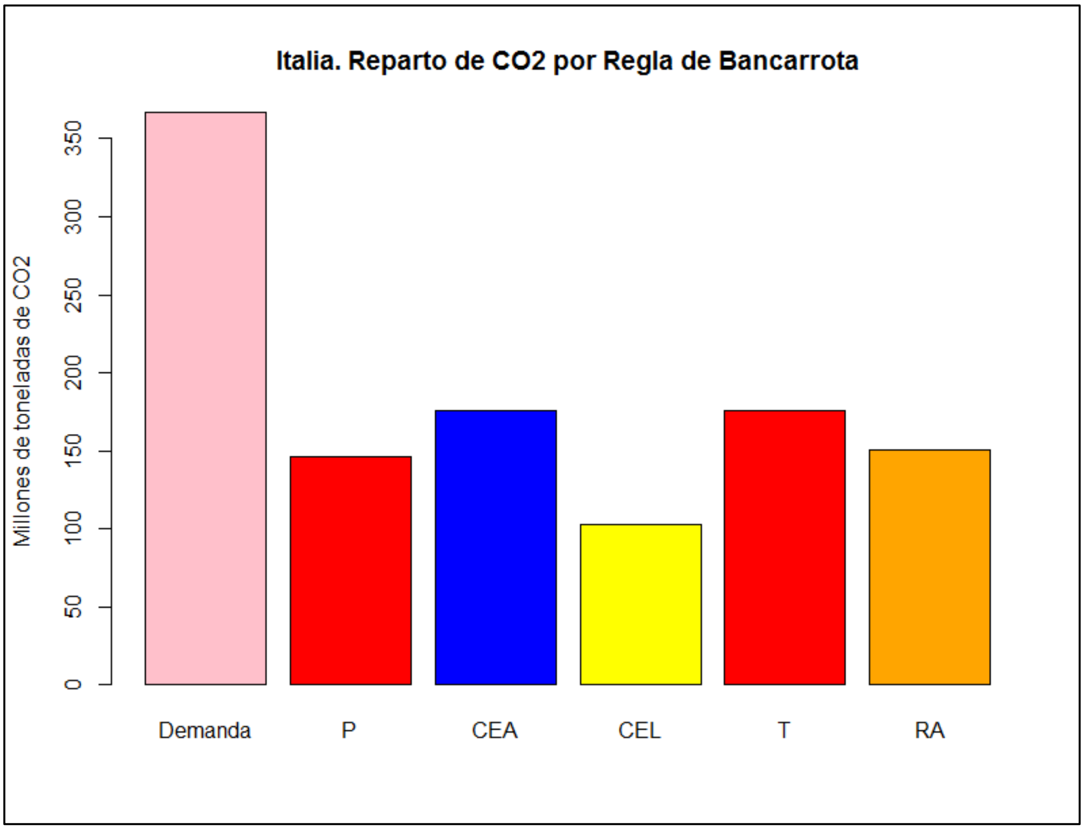

Gráfico 6.4.3: Reparto de $CO_2(Mt)$ por Reglas de bancarrota. Italia

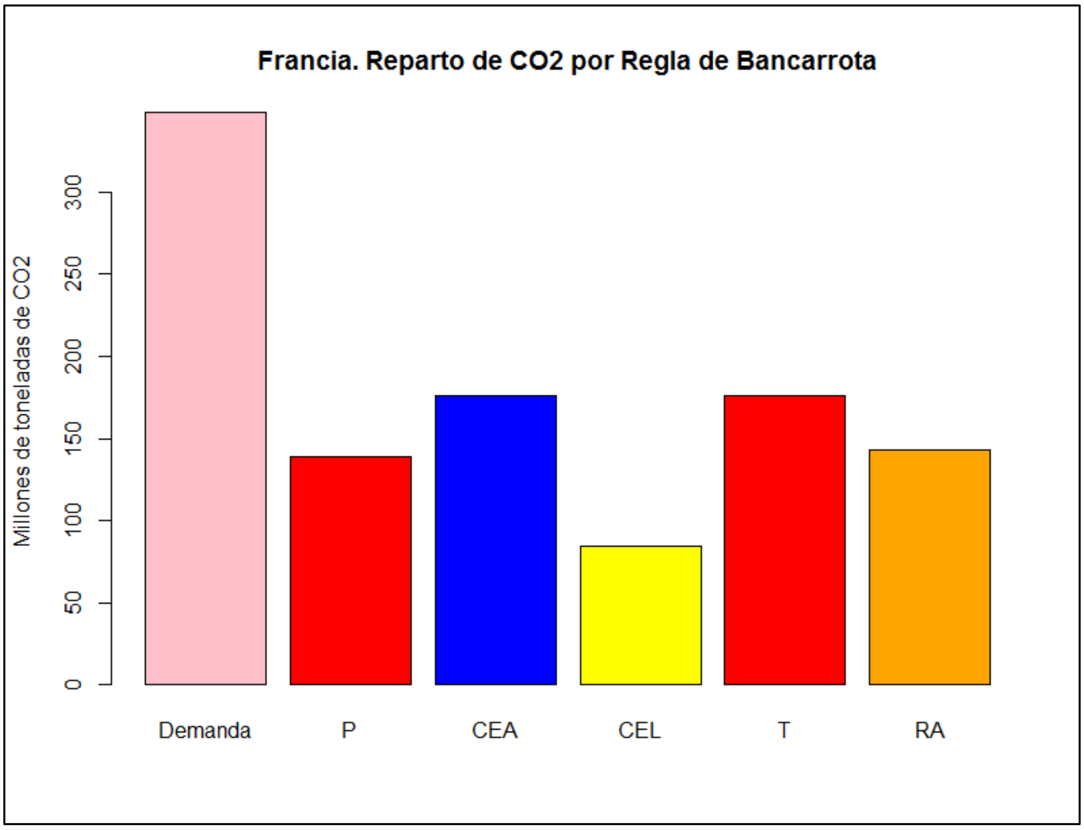

Gráfico 6.4.4: Reparto de $CO_2(Mt)$ por Reglas de bancarrota. Francia

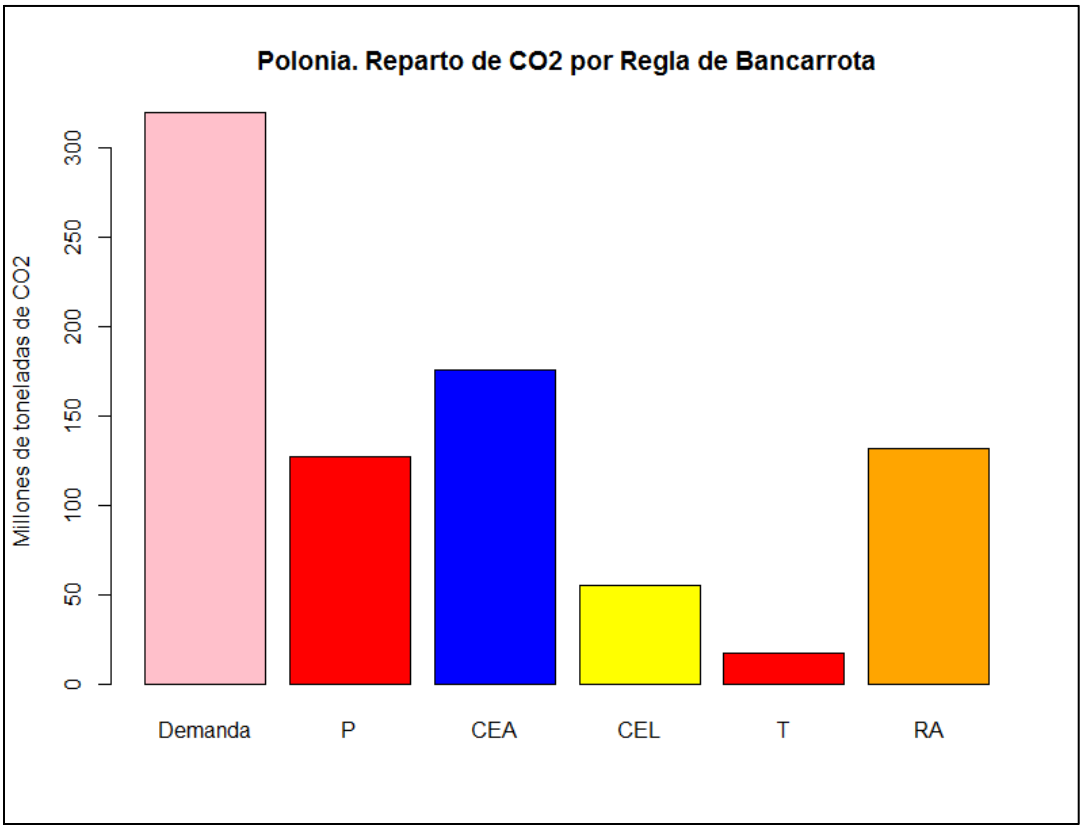

Gráfico 6.4.5: Reparto de $CO_2(Mt)$ por Reglas de bancarrota. Polonia

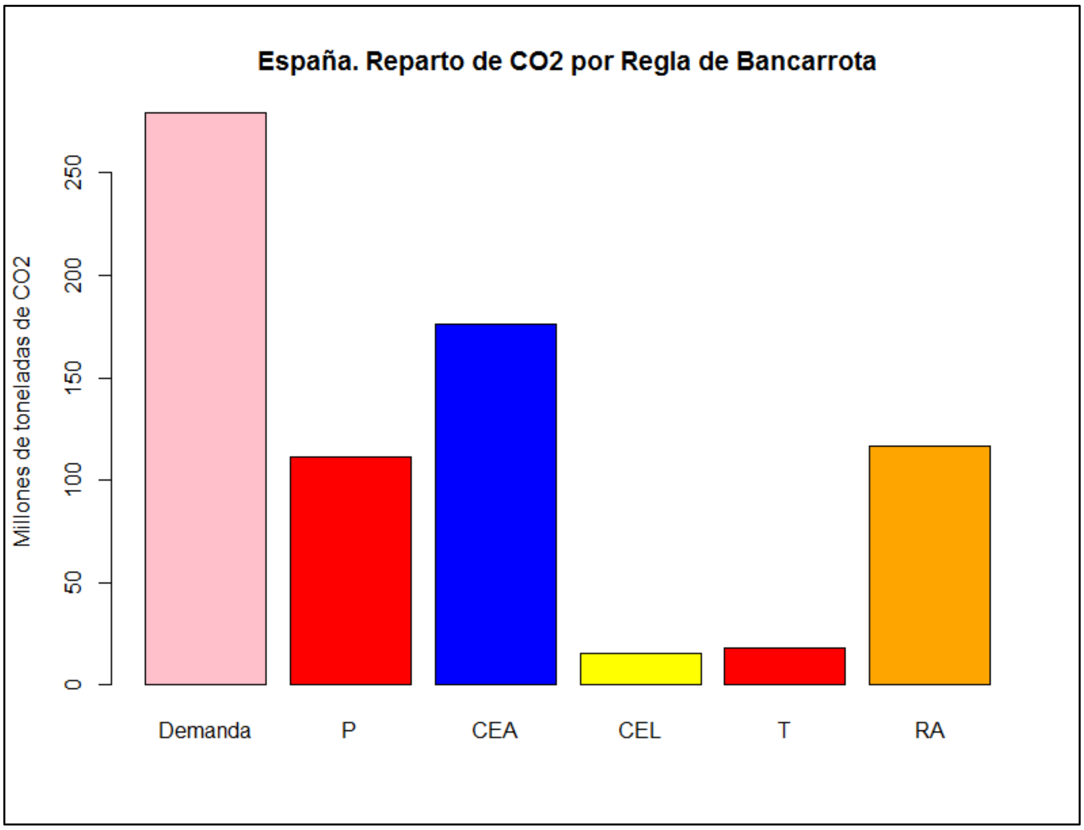

Gráfico 6.4.6: Reparto de $CO_2(Mt)$ por Reglas de bancarrota. España

Tras visualizar el reparto podemos observar que la regla CEL es la que mejor reparto de CO_2 asigna a Alemania. En el caso de Reino Unido, cualquiera de las reglas le asigna un reparto similar. Italia y Francia saldrían perdiendo en el reparto, si se aplicase la regla CEL con respecto a las demás. El caso de España y Polonia muestra cómo aplicar las reglas de reparto CEL y Talmud, les implicaría una asignación muy baja de CO_2.

En comparación con el caso previo, hemos añadido al nuestro estudio la regla RA. Los repartos que obtenemos con la regla P y con la regla RA, son muy similares.

Aunque la regla del Talmud sea la que cumple más propiedades de las reglas estudiadas, y veamos gracias al trabajo relacionado, su relación con las características del problema del cambio climático, si comparamos las demandas con los repartos que asigna, está asignando a Alemania la misma cantidad de CO_2 que Francia, siendo la demanda de esta última 500 Mt inferior. Esto nos hace discutir si este reparto a nivel impacto económico sería aceptado por las partes.

Conclusiones

A lo largo del trabajo hemos analizado los conceptos más relevantes en la literatura para el problema de bancarrota. Hemos introducido estos problemas aplicando en un primer lugar los conceptos de solución de juegos cooperativos, hemos introducido el núcleo, el nucléolo, el valor de Shapley y el τ-valor. Además, hemos visto como las soluciones de los problemas de bancarrota, a través de conceptos de solución de juegos de bancarrota, verifiquen que el valor de Shapley pertenece al núcleo y este coincide con el conjunto de Weber y con el cubrimiento del núcleo. Hemos visto los juegos convexos, juegos que favorecen la formación de la coalición total y tienen núcleo no vacío.

Hemos realizado una breve revisión de la literatura y plasmado las reglas más importantes de los problemas de bancarrota:

La regla proporcional (P).

La regla proporcional ajustada (AP).

La regla de ganancias igualitarias (CEA).

La regla de pérdidas igualitarias (CEL).

La regla de Contested Garment (CG).

La regla del Talmud (T).

La regla de llegadas aleatorias (RA).

La regla AP proporciona una solución que coincide con el τ-valor, la regla T proporciona una solución que coincide con el nucléolo y la regla RA proporciona una solución que coincide con el valor de Shapley.

Además, hemos visto las propiedades de las reglas y sus caracterizaciones, las cuales permiten que el árbitro o juez de un problema de bancarrota pueda tomar decisiones en función de las mimas.

De una manera muy reducida también introducimos una extensión de los problemas de bancarrota, los problemas de bancarrota con uniones a priori.

Por último, hemos aplicado las reglas analizadas en un caso práctico sobre las emisiones de CO_2.

Como trabajo futuro, destacaría el continuo avance en el estudio de las reglas de bancarrota. Los problemas de nuestra sociedad son tan diversos y cada vez tan complicados que precisan el ajuste de las reglas a estas nuevas necesidades.

Apéndice

Código R utilizado:

```
install.packages("GameTheory")

library(GameTheory)

N<-c("Alemania", "Reino Unido", "Italia", "Francia", "Polonia", "España")

d<-c(857.03, 468.34, 366.63, 348.32, 319.68, 279.28)

# Funciones disponibles

# Proportional()

# AdjustedProportional()

# CEA()

# CEL()

# Talmud()

# RandomArrival()

# AllRules() # En nuestro caso con tantos agentes no funciona.

# plot.ClaimsRules()

# LorenzRules()

summary(Proportional(1055.70,d,N))

summary(AdjustedProportional(1055.70,d,N))

summary(CEA(1055.70,d,N))

summary(CEL(1055.70,d,N))

summary(Talmud(1055.70,d,N))

summary(RandomArrival(1055.70,d,N))

AllRules(1055.70,d,N)

x=AllRules(1055.70,d,N)[1:6,1:6]

barplot(x[1,],main="Alemania. Reparto de CO2 por Regla de Bancarrota",

    names.arg=c("Demanda","P","CEA","CEL","T","RA"),
```

```
    col=c("pink","red","blue","yellow","red","orange"),
    ylab="Millones de toneladas de CO2")
barplot(x[2,],main="Reino Unido. Reparto de CO2 por Regla de Bancarrota",
    names.arg=c("Demanda","P","CEA","CEL","T","RA"),
    col=c("pink","red","blue","yellow","red","orange"),
    ylab="Millones de toneladas de CO2")
barplot(x[3,],main="Italia. Reparto de CO2 por Regla de Bancarrota",
    names.arg=c("Demanda","P","CEA","CEL","T","RA"),
    col=c("pink","red","blue","yellow","red","orange"),
    ylab="Millones de toneladas de CO2")
barplot(x[4,],main="Francia. Reparto de CO2 por Regla de Bancarrota",
    names.arg=c("Demanda","P","CEA","CEL","T","RA"),
    col=c("pink","red","blue","yellow","red","orange"),
    ylab="Millones de toneladas de CO2")
barplot(x[5,],main="Polonia. Reparto de CO2 por Regla de Bancarrota",
    names.arg=c("Demanda","P","CEA","CEL","T","RA"),
    col=c("pink","red","blue","yellow","red","orange"),
    ylab="Millones de toneladas de CO2")
barplot(x[6,],main="España. Reparto de CO2 por Regla de Bancarrota",
    names.arg=c("Demanda","P","CEA","CEL","T","RA"),
    col=c("pink","red","blue","yellow","red","orange"),
    ylab="Millones de toneladas de CO2")
```

Bibliografía

Aumann, R.J., Maschler, M. (1985). *Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud*. Journal of Economic Theory 36, 195–213.

Born, P., Carpente, L., Cásas-Méndez, B., Hendrickx, R. (2005). *The Constrained Equal Awards Rule for Bankruptcy Problems with a Priori Unions*. Annals of Operations Research 137, 211–227.

Chun, Y. (2006). *Secured lower bound, composition up, and minimal rights first for bankruptcy problems*. Journal of Mathematical Economics 44, 925–932.

Chun, Y. (1988). *The proportional solution for rights problem*. Mathematical Social Sciences 15, 231–246.

Chun, Y. (1999). *Equivalence of axioms for bankruptcy problems*. International Journal of Game Theory 28, 511–520.

Curiel, I.J., Maschler, M., Tijs, S.H. (1987). *Bankruptcy Games*. Zeitschrift für Operations Research 31, 143–159.

Dagan, N. (1996). *New characterizations of old bankruptcy rules*. Social Choice and Welfare 13, 51–59.

Gillies, D.B. (1953). *Some theorems on n-person games*. Ph. D. Thesis, Princeton University.

Giménez-Gómez, J.M., Teixidó-Figueras, J., Vilella, C. (2016). *The global carbon budget: a conflicting claims problem*. Climatic Change 136, 693–703.

Herrero, C., Villar, A. (2001). *The three musketeers: four classical solutions to bankruptcy problems*. Mathematical Social Sciences 42, 307–328.

Herrero, C., Villar, A. (2002). *Sustainability in Bankruptcy Problems*. University of Alicante. TOP 10(2), 261–273.

Hwang, Y. (2015). *Two characterizations of the random arrival rule*. Economic Theory Bulletin 3(1), 43–52.

Moreno-Ternero, J.D., Villar, A. (2004). *The talmud rule and the securement of agents awards*. Matematical Social Sciences 47(2), 245–257.

O'Neill, B. (1982). *A problem of rights arbitration from the Talmud*. Mathematical Social Sciences 2, 345–371.

Schmeidler, D. (1969). *The nucleolus of a characteristic function game*. SIAM Journal of Applied Mathematics 17, 1163–1170.

Shapley, L.S. (1953). *A value for n-person games*. Contributions to the Thoery of Games II (H.Kuhn & A.W. Tucker eds.) Princeton University Press, Princeton, 307–317.

Shapley, L.S. (1971). *Cores of convex games*. International Journal of Game Theory 1, 11–26.

Thomson, W. (2003). *Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: a survey*. Mathematical Social Sciences 45, 249–297.

Thomson, W., (2006). How to Divide When there Isn't Enough; from the Talmud to Game Theory. Book manuscript.

Tijs, S.H. (1981). *Bounds for the core and the τ-value*. Game Theory and Mathematical Economics (O. Moeschlin & D. Pallaschke eds.) North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 123–132.

Tijs, S.H., Lipperts, F.A.S. (1982). *The hypercube and the core cover of N-person cooperative games*. Cashiers du Centre de Recherche Operationelle 24, 27–37.

Villar, A. (2005). *Cómo repartir cuando no hay bastante*. Lecturas de Economía 62, pp.9-34.

Young, P. (1988). *Distributive justice in taxation*. Journal of Public Economics 32, 321–335.

Otros recursos:

Comisión Europea. Web: https://ec.europa.eu/.

Eurostat (Consultado en enero de 2018). Web: http://ec.europa.eu/eurostat/. Air emissions accounts totals bridging to emission inventory totals. Código: env_ac_aibrid_r2.