

3.3.2 Hypercube

Des théorèmes 3.2.4 et 3.2.6 on déduit le

Théorème 3.3.3 *Le produit direct de deux treillis de Boole est un treillis de Boole.*

L'ensemble $\mathcal{B} = \{0, 1\}$, muni de l'ordre strict $0 < 1$, est clairement un treillis de Boole. Les tables de multiplication, d'addition, et de complémentation sont :

•	0	1
0	0	0
1	0	1

+	0	1
0	0	1
1	1	1

	'
0	1
1	0

Tableau 3.3.1

Le produit direct $\mathcal{B}^n$ de n exemplaires de $\mathcal{B}$ est donc une algèbre de Boole. Il est commode d'associer à $\mathcal{B}^n$ sa représentation géométrique. Celle-ci s'obtient en construisant le diagramme de Hasse (cf. 2.5.4) de l'ensemble ordonné $\mathcal{B}^n$. A chaque élément $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathcal{B}^n$, correspond un et un seul point de l'espace à n dimensions dont les coordonnées sont 0 et 1.

Définition *On appelle hypercube de dimension n une représentation du diagramme de Hasse de $\mathcal{B}^n$ dans l'espace à n dimensions.*

Clairément, l'hypercube de dimension n possède 2^n sommets. Deux sommets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ sont adjacents ssi il existe exactement un indice i tel que $x_i \neq y_i$.

Par la suite, nous employons aussi le vocable *n-cube* pour désigner l'hypercube de dimension n .

Exemple 3.3.1 Un hypercube est un segment pour $n = 1$, un carré pour $n = 2$, un cube pour $n = 3$. La représentation pose des difficultés quand $n > 3$.

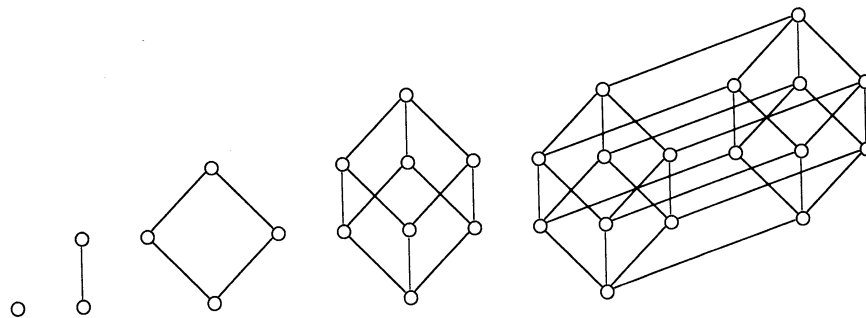


Figure 3.3.1

Pour le 4-cube, on peut considérer que la dernière composante est 0 pour le cube de gauche, 1 pour le cube de droite.

L'hypercube fournit un langage géométrique commode. Par exemple, nous

nommerons *distance* de deux sommets A et B, $d(A, B)$, le nombre de composantes de A et B qui sont différentes. Deux sommets adjacents sont donc à distance 1. La plus petite longueur possible pour une chaîne joignant A et B est $d(A, B)$ car pour aller de A à B il faut changer $d(A, B)$ composantes exactement.

Définition On appelle *face de dimension p de l'hypercube de dimension n*, tout ensemble de sommets qui engendre un graphe isomorphe à l'hypercube de dimension p.

Les faces de dimension 0 et 1 sont donc respectivement les sommets et les arêtes de l'hypercube. A titre d'exemple, $\mathcal{B}^3$ possède 8 faces de dimension 0, 12 faces de dimension 1, 6 faces de dimension 2 et 1 face de dimension 3.

En tant que treillis, $\mathcal{B}^n$ est isomorphe au treillis des parties d'un ensemble à n éléments $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Nous résumons dans le tableau 3.3.2 les principales correspondances entre ces deux treillis.

$\mathcal{B}^n$	$\mathcal{P}(E)$
$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$	A contient a_i ssi $x_i = 1$
$X' = (x_1', x_2', \dots, x_n')$	$\overline{A}$ ou $E - A$: complément de A
$\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$	$\emptyset$
$\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$	E
Multiplication	Intersection
Addition	Union
Disjonction	Différence symétrique
Conjonction	Somme symétrique

Tableau 3.3.2

Rappelons qu'étant donnés deux parties A et B de E :

- la *différence symétrique* de A et B est l'ensemble des éléments de E qui figurent un nombre *impair* de fois dans $A \cup B$; on note $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$
- la *somme symétrique* de A et B est l'ensemble des éléments de E qui figurent un nombre *pair* de fois dans $A \cup B$; on note $A \otimes B = (A \cap B) \cup (E - (A \cup B))$

Théorème 3.3.4 Tout treillis de Boole fini est isomorphe au treillis des parties d'un certain ensemble fini.

Preuve. Soit $(B, \leq)$ un treillis de Boole fini. Pour éviter les trivialités, supposons que $|B| \geq 2$. Notons 0 le minimum et 1 le maximum de B. Considérons l'ensemble A des *atomes* de B défini par

$$A = \{a \in B \mid a \text{ est un successeur de } 0\}$$

Puisque B est fini, $A \neq \emptyset$ (cf. corollaire 2.5.5). Posons $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Associons à tout x dans B la partie de A définie par $A_x = \{a_i \in A \mid a_i \leq x\}$.

Je dis que $x = \sum_{a_i \in A_x} a_i$. Clairement, il suffit de montrer que $x \leq \sum_{a_i \in A_x} a_i$. Ceci est vrai pour $x = 0$, car une somme vide est égale à l'élément neutre de l'addition. Si $x \neq 0$, alors montrons que $x(\sum_{a_i \in A_x} a_i)' = 0$ (cf. théorème 3.3.2). En effet, si $x(\sum_{a_i \in A_x} a_i)' \neq 0$, alors il existerait un atome a_j tel que $a_j \leq x(\sum_{a_i \in A_x} a_i)'$. Ce qui entraînerait d'une part, $a_j \leq x$ donc $a_j \in A_x$, et d'autre part $a_j \leq (\sum_{a_i \in A_x} a_i)'$ donc $a_j a_i = 0$ pour tout $a_i \in A_x$. Ce qui est contradictoire. Considérons la fonction $h : B \rightarrow \mathcal{P}(A)$ telle que $h(x) = A_x$. Pour montrer que h est un isomorphisme de treillis, il suffit, d'après le théorème 2.11.7, de montrer que h est un isomorphisme d'ordre. Nous laissons la vérification au lecteur. $\square$

3.3.3 Fonctions booléennes

Soit E un ensemble. Soit B un algèbre de Boole. Sur l'ensemble $[E \rightarrow B]$ des fonctions de E dans B , définissons :

- la fonction $0 : 0(x) = 0_B$
- la fonction $1 : 1(x) = 1_B$
- le complément d'une fonction $f : f'(x) = [f(x)]'$
- le produit de deux fonctions f et $g : [fg](x) = f(x)g(x)$
- la somme de deux fonctions f et $g : [f+g](x) = f(x) + g(x)$

Muni de toutes ces opérations, $[E \rightarrow B]$ est manifestement une algèbre de Boole. On peut vérifier qu'en tant que treillis, $[E \rightarrow B]$ est ordonné par la relation

$$f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in E [f(x) \leq g(x)] \Leftrightarrow fg = f \Leftrightarrow f + g = g$$

Théorème 3.3.5 *L'ensemble des fonctions d'un ensemble arbitraire dans une algèbre de Boole est une algèbre de Boole.*

Dans toute la suite, nous nous intéressons surtout à $[B^n \rightarrow B]$.

Définition *On appelle fonction booléenne simple de n variables toute fonction de l'algèbre B^n dans l'algèbre B .*

Exemple 3.3.2 Il y a plusieurs modes de description d'une fonction booléenne simple de n variables. Nous en donnons deux :

• Représentation spatiale

Interprétons chaque n -uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ où $x_i \in \{0, 1\}$ comme les coordonnées d'un sommet du n -cube.

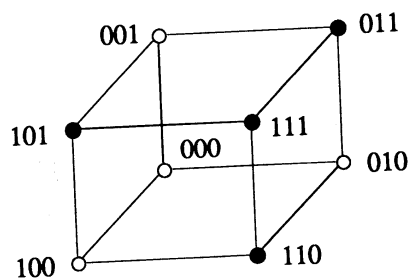


Figure 3.3.3

Se donner une fonction booléenne simple f de n variables, c'est se donner l'ensemble des sommets du n -cube où f prend la valeur 1. Un tel sommet est dit *couvert* par f .

Par exemple, la figure 3.3.3 représente une fonction de 3 variables qui couvre les sommets 011, 101, 110, 111.

• Représentation tabulaire

Interprétons chaque n -uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ où $x_i \in \{0, 1\}$ comme la représentation binaire d'un entier compris entre 0 et $2^n - 1$. En énumérant ces n -uplets dans l'ordre naturel des entiers qu'ils représentent, une fonction booléenne simple de n variables est alors donnée par le tableau des valeurs de la fonction en chaque point. A titre d'exemple :

	x	y	z	$f(x, y, z)$		x	y	$g(x, y)$
0	0	0	0	1		0	0	0
1	0	0	1	0		0	1	1
2	0	1	0	0		1	0	0
3	0	1	1	1		1	1	1
4	1	0	0	1				
5	1	0	1	1				
6	1	1	0	1				
7	1	1	1	0				

Tableau 3.3.3

La représentation tabulaire souffre du défaut d'énumérer les valeurs de la fonction aux points qui ne sont pas toujours voisins sur l'hypercube. Pour y remédier, on peut adopter les *tableaux de Karnaugh* qui, pour n assez petit, donnent une représentation de l'hypercube dans le plan.

Ci-dessous, le tableau de gauche est celui de Karnaugh de la fonction f plus haut ; le tableau de droite représente une fonction de 4 variables x, y, z, t . Les colonnes sont indexées par xy et les lignes par z ou zt .

	00	01	11	10		00	01	11	10
0	1	0	1	1	00	0	1	1	0
1	0	1	1	0	01	0	1	1	0
					11	1	1	0	1
					10	1	0	1	1

Tableau 3.3.4

Le nombre de fonctions booléennes simples de n variables est 2^{2^n} . Nous donnons ci-dessous les 16 fonctions de 2 variables. L'indice de chaque fonction permet de retrouver le tableau des valeurs.