|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | **Análisis de series****temporales** |
|  |

**ÍNDICE**

1. Introducción a las series temporales 3

1.1. ejemplos de series temporales univariantes 3

1.2. ejemplos de series multivariantes 3

2. Análisis descriptivo de una serie temporal 5

2.1. Introducción 5

2.2. El análisis de tendencias determinístas 6

2.2.1. Tipos de modelos 6

2.2.2. Estimación 7

2.2.3. Limitaciones del ajuste de tendencias deterministas 9

2.3. Métodos de alisado 9

2.3.1. El modelo de alisado simple 9

2.3.2. El modelo de alisado doble de Holt 12

2.4. métodos de descomposición para series estacionales 14

2.5. Estacionalidad y ajuste de ciclos 15

2.5.1. Definiciones básicas 15

2.5.2. Representación de la estacionalidad por un ciclo. 16

2.6. exploración de multiples ciclos: el periodograma 18

# Introducción a las series temporales

## ejemplos de series temporales univariantes

Una serie temporal es el resultado de observar los valores de una variable a lo largo del tiempo en intervalos regulares (cada día, cada mes, cada año,…)

Existen 3 tipos de series temporales:

* **Series temporales estacionarias o estables:** Son las que oscilan alrededor de un nivel constante; sin tendencia clara a crecer o decrecer con el tiempo.
* **Series temporales NO estacionarias:** Son las que no se mantienen en un nivel constante; su nivel aumenta o decrece con el tiempo.

Estas series pueden presentar una tendencia constante en periodos largos de observación (raro en series reales). También pueden presentar una tendencia evolutiva o cambiante a lo largo del tiempo.

* **Series temporales estacionales:** Son las series temporales que además de tener un nivel fijo, o variable en el tiempo, tienen además un comportamiento superpuesto que se repite a lo largo del tiempo.

El fenómeno de que el valor medio de la variable observada dependa del periodo de tiempo considerado, por ejemplo, del mes o del año, se denomina estacionalidad. Este fenómeno es muy frecuente en las series de variables económicas, sociales o climáticas.

**RESUMEN:**

Las series temporales pueden tener o no un nivel estable en el tiempo, y si no lo tienen, pueden representar tendencias más o menos constantes. Cuando el nivel de la serie **no es estable** decimos que la serie no es estacionaria. Un caso particular de no estacionaridad es cuando el nivel varía siguiendo un ciclo, como ocurre con la temperatura mensual dentro del año. Diremos entonces que la serie es estacional y esta faceta puede combinarse con tendencias más o menos acusadas en el nivel general. El gráfico de la serie siempre es una herramienta muy valiosa para entender su comportamiento.

## ejemplos de series multivariantes

Además de estudiar la evolución histórica de una serie, los modelos de series temporales nos permitirán estudiar la relación dinámica entre dos o más series.

Comparemos entonces series temporales:

**PROBLEMA 1:**

**SERIE1.- Matriculaciones de vehículos automóviles**

**SERIE2.- Consumo de gasolina de automoción**

|  |  |
| --- | --- |
| ***SERIE1*** | ***SERIE2*** |
| No estacionaria y estacional con pautas mensuales |
| El aumento de matriculaciones en los primeros años de la muestra generó un aumento claro del consumo de gasolina.En el último periodo los aumentos de matriculaciones no han generado necesariamente aumentos en el consumo. Esto es debido a que en este periodo hubo reposiciones de vehículos. |
| Se espera que entre estas dos series exista una relación dónde los aumentos en las matriculaciones produzcan aumentos en el consumo de gasolina; relación que puede variar con el tiempo. |
| No es esperable una relación en sentido contrario que vaya del consumo de gasolina a las matriculaciones |

Aunque las relaciones entre las variables dinámicas pueden ser en ambas direcciones.

**CONCEPTOS IMPORTANTES**

**Relación bidireccional o de realimentación**: Un crecimiento de una serie temporal produce el descenso de la otra

**Efectos externos o de intervención:** intervenciones externas que afectan a las series provocando cambios bruscos. Es importante modelizar estos efectos dentro de la relación dinámica de las series

**Patrón común:** Podemos preguntarnos si existe un patrón común de evolución en las series. La identificación de factores comunes en series temporales es un problema importante.

# Análisis descriptivo de una serie temporal

## Introducción

Comenzaremos estudiando los procedimientos descriptivos desarrollados entre 1940-1970 para analizar series temporales. Su objetivo es explicar la evolución pasada de la serie en términos de pautas simples y prever los valores futuros.

Hoy en día, disponemos de métodos más generales y eficaces, pero es importante estudiar estos métodos porque:

* Los métodos actuales se basan en ellos y se entienden mejor si se conocen las limitaciones de estos procedimientos más simples
* Están todavía disponibles como opciones de análisis en muchos programas de ordenador de uso frecuente.

Los métodos descriptivos para series temporales son generalizaciones de los desarrollados para variables estáticas. Así pues los **métodos de análisis de tendencias determinista(MATD)** son una extensión inmediata de los métodos de regresión. Estos modelos pueden ser útiles para son útiles para la descripción simple de las pautas en una serie, las predicciones que proporcionan tienen un alto nivel de error ya que en una serie temporal la observación **hoy** depende en general de los valores previos , pero esta dependencia suele ser más fuerte en los con los datos más recientes y más débil con los más alejados.

Luego, comenzaron a usarse los **métodos de aislado(MA),** que realizan predicciones imponiendo una estructura donde la dependencia de las observaciones disminuye con el tiempo. Estos métodos se introdujeron en los años 60, se extendió su práctica por sus buenos resultados, facilidad de cálculo y por la aparición del ordenador digital.

La extensión para las series estacionales se hizo modelando separadamente la evolución de la serie, **métodos de descomposición**, surgen de **MATD** y el efecto estacional, **métodos de doble aislado**, surgen de **MA**.

Paralelamente, se desarrollaron procedimientos para las series cíclicas, como las series climáticas, donde domina el efecto estacional y la serie se presenta como suma de efectos sinusoidales. Esto dio lugar a PERIODOGRAMA que es una herramienta muy útil para detectar ondas determinísticas en una serie temporal.

## El análisis de tendencias determinístas

### Tipos de modelos

Comenzaremos presentando este modelo para series sin estacionalidad. Se fundamenta en modelar la dependencia temporal mediante las ideas de regresión para relacionar variables estáticas.

$z\_{t } =μ\_{t}+ a\_{t}$ ; t=1,…,T (2.1)

* $μ\_{t}=f(t,β)$ ; es el *nivel de la serie*que es una función conocida determinista del tiempo que depende del instante considerado y de un vector de parámetros, $β$. Parámetros que deben estimarse a partir de los datos
* $a\_{t}$, suele denominarse como la *innovación* y es un componente aleatorio que recoge todos los demás efectos que actúan sobre la serie.
	+ Tienen estructura estable a lo largo del tiempo: media cero, varianza constante y distribución normal.
	+ Observaciones correspondientes a dos periodos de tiempo distintos son independientes.

La predicción de la serie con este modelo en un periodo futuro, T+k, se obtiene extrapolando el nivel de la serie $μ\_{t}$, ya que la predicción de la innovación es su esperanza, que es siempre 0.

$\hat{z}\_{T }\left(k\right)=μ\_{T+k}=f(T+k, β)$ (2.2)

* $\hat{z}\_{T }\left(k\right)$ es la predicción realizada desde el origen T para k periodos en adelante; es la predicción del valor $z\_{T+k}$ con la información disponible hasta el momento T.

La forma que establezcamos para la evolución del nivel de la serie a lo largo del tiempo determina el modelo concreto utilizado.

**MODELO 1: modelo simple**

Suponemos que el nivel de la serie es constante en el tiempo,$μ\_{t}=μ\_{t-1}=μ$, este modelo se conoce como el modelo de nivel constante sin tendencia.

$z\_{t } =μ+ a\_{t}$ ; t=1,…,T (2.1)

La serie oscilará alrededor de su media constante,$ μ $**.** La predicción de este modelo para cualquier horizonte será su media, pues la serie no depende de t y el valor esperado de la innovación es 0.

**MODELO 2: modelo de tendencia lineal**

Este modelo se aplica a las series que tienen tendencia creciente o decreciente.

$z\_{t } =μ\_{t}+ a\_{t}$ ; t=1,…,T

$μ\_{t}=β\_{0}+β\_{1}t$ (2.4)

* $β\_{1}$ representa la pendiente de la recta que describe la evolución de la serie. Esta pendiente corresponde con el crecimiento esperado entre dos periodos.

La predicción con este modelo del valor de la serie en el instante T+k con información hasta T:

$\hat{z}\_{T }\left(k\right)=β\_{0}+β\_{1 }(T+k)$ (2.5)

Estos dos modelos son casos particulares del modelo siguiente:

**MODELO 3: modelo de tendencia polinómica**

En este modelo el nivel de la serie evoluciona según un polinomio de orden r:

$μ\_{t}=β\_{0}+β\_{1}t+ …+β\_{r}t^{r}$ (2.6)

**MODELO 1: modelo de tendencia polinómica, r=0**

**MODELO 2: modelo de tendencia polinómica, r=1**

### Estimación

El ajuste de estos modelos a una serie temporal requiere la estimación del vector de parámetros, $β=(β\_{1},β\_{2},…,β\_{r})$. Las estimaciones se obtienen con el criterio de mínimos cuadrados, es decir, minimizando las diferencias entre los valores observados y previstos por el modelo.

Este criterio se escribe como:

$minimizar\sum\_{i=1}^{T}(z\_{t}-μ\_{t})^{2}$ (2.7)

**Criterio de mínimos cuadráticos**

**MODELO 1: modelo simple**

Derivando respecto al parámetro µ y llamando $\overbar{z\_{t}}={\sum\_{}^{}z\_{t}}/{T}$ media de los datos observados. Se obtiene $\hat{µ}=\overbar{z\_{t}}$

**MODELO 1: modelo de tendencia lineal**

$minimizar\sum\_{i=1}^{T}(z\_{t}-β\_{0}-β\_{1 }t)^{2}$ (2.8)

Los estimadores se obtienen derivando esta expresión respecto $β\_{0} y β\_{1 }$ e igualando a cero las derivadas. Para simplicar, supongamos que la variable t se construye para que tenga media cero, y que tenemos T=2n+1 datos (periodos observados), de manera que podemos definir t como t=(-n,-n+1,…,-1,0,1,…,n-1,n).

* Comenzando con la ecuación obtenida al igualar a cero la derivada de (2.8) respecto a $β\_{0}$ y llamando$\hat{β\_{o}} y \hat{β\_{1}}$ a los valores que verifican esta ecuación, se obtiene que:

$\sum\_{i=1}^{T}(z\_{t}-\hat{β}\_{0}-\hat{β}\_{1 }t)=0$ (2.9)

Llamaremos residuos a las estimaciones de las innovaciones, $\hat{a}\_{t}$.

$$\hat{a}\_{t}=z\_{t}-\hat{β}\_{0}-\hat{β}\_{1}t$$

La ecuación (2.9) exige que los residuos estimados tengan media cero. Como $\overbar{t}=0$ su solución es:

$\overbar{z}\_{t}=\hat{β}\_{0}$ (2.10)

Esta estimación de la ordenada en el origen coincide con el nivel estimado en el modelo constante, ya que si $β\_{1}=0$ entonces $μ\_{t}=β\_{0}=μ$.

* Para estimar la pendiente, derivando en (2.8) respecto a $β\_{1}$ e igualando a cero el resultado tenemos que:

$\sum\_{i=1}^{T}(z\_{t}-\hat{β}\_{0}-\hat{β}\_{1 }t)t=0$ (2.10)

Esta ecuación exige que los residuos no deben tener relación lineal con el tiempo. Sustituyendo (2.10) y despejando $\hat{β}\_{1}$ se obtiene, dado que $\overbar{t}=0$, el estimador de la pendiente:

$$\hat{β}\_{1}=\frac{\sum\_{t=1}^{T}(z\_{t}-\overbar{z}\_{t})t}{\sum\_{t=1}^{T}t^{2}}$$

### Limitaciones del ajuste de tendencias deterministas

La limitación principal de estos métodos es que, aunque las series con nivel constante son frecuentes, es muy raro que una serie real tenga una tendencia determinista lineal, o polinómica con r≥1.

Una posible solución es intentar ajustar tendencias lineales por tramos, es decir dividir la serie en tramos que tengan, aproximadamente, tendencia constante y ajustar en cada tramo un modelo lineal o constante. Estos modelos explican mejor la evolución histórica de algunas series , pero son menos útiles para predecir valores futuros; pues no sabemos cuántas observaciones pasadas utilizar para ajustar el futuro nivel de la serie.

Un inconveniente adicional de ajustar una tendencia lineal por tramos es que el modelo de crecimiento implícito es poco razonable

**¿Cuáles son las implicaciones de suponer que una serie sigue un modelo con tendencia determinista en un intervalo?**

Si admitimos que una serie tiene tendencia determinista lineal en un intervalo estamos diciendo que la predicción futura de su crecimiento debe hacerse ponderando los crecimientos observados, pero dando peso mínimo al último valor observado. Este peso es, además, igual al que se atribuye al crecimiento más alejado en el tiempo, es decir, el primer crecimiento observado en la muestra. Además, si aumentamos el tamaño del intervalo, el peso de los últimos años disminuye, pero siempre manteniéndose igual el peso de los primeros crecimientos observados. Esto es poco razonable en muchas situaciones.

## Métodos de alisado

Para resolver las limitaciones de los modelos con tendencias deterministas se introdujeron en los años 60 los métodos de alisado. La idea de estos métodos es permitir que los últimos datos de la serie tengan más peso en las predicciones que los antiguos. Esto se consigue permitiendo que los parámetros del modelo de tendencias deterministas no sean constantes, sino que puedan ir variando con el tiempo.

### El modelo de alisado simple

Supongamos que hemos hecho una predicción del valor de una variable para el periodo T que llamaremos $\hat{z}\_{T}$ y observamos después su valor, $z\_{T}$.

**¿Cómo generar la próxima predicción?**

Holt (1956) propuso hacer una combinación lineal de la última predicción y el último valor observado, de manera que la predicción del próximo periodo T+1, viene dada por:

$\hat{z}\_{T+1}=θ\hat{z}\_{T}+(1-θ)z\_{T}$ (2.14)

Dónde 0<θ<1 determina el peso que le damos a cada uno de los dos componentes para generar las predicciones.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Θ->1** | Θ=1 | Θ->0 | Θ->0 |
| Las predicciones para distintos periodos son muy similares, y se modifican poco con la nueva información  |  | Produce una predicción constante, método de nivel cte | La predicción va adaptándose mucho en función del último valor observado. |
|  |  |  |

Sustituyamos el valor $\hat{z}\_{T}$ en la ecuación (2.14)

$$\hat{z}\_{T+1}=θ\left(θ\hat{z}\_{T-1 }+(1-θ)z\_{T-1}\right)+(1-θ)z\_{T}$$

*=*$θ^{2}\hat{z}\_{T-1}+\left(1-θ\right)(z\_{T}+θz\_{T-1})$

Repitiendo este proceso de sustitución de las predicciones anteriores, obtenemos:

$\hat{z}\_{T+1}=θ^{2}\hat{z}\_{1}+\left(1-θ\right)(z\_{T}+θz\_{T-1}+θ^{2}z\_{T-2}+ …)$.

Suponiendo que T es grande y θ<1, el primer término será muy pequeño y podemos escribir la ecuación de predicción como:

$\hat{z}\_{T+1}=\left(1-θ\right)(z\_{T}+θz\_{T-1}+θ^{2}z\_{T-2}+ …)$ (2.15)

Que es una media ponderada de las observaciones previas con pesos decrecientes que suman uno, ya que:

$$\left(1+θ+θ^{2}+ …\right)= \frac{1}{1-θ}$$

Las predicciones generadas por el modelo de aislado simple son una media ponderada de los valores previos de la serie con pesos que decrecen geométricamente

Esta forma de generar predicciones supone que la serie se ha generado mediante el modelo:

$$z\_{t } =μ\_{t}+ a\_{t}$$

µt es la media de zt, que ahora no es constante, sino que puede evolucionar con el tiempo

at son las innovaciones que siempre suponemos de media cero.

Supongamos una muestra de tamaño T y llamemos $\hat{μ}\_{T }$(1) a la estimación del nivel futuro de la serie en el instante T+1, dados los datos hasta T. Esta notación pone de manifiesto que T es la información disponible y $\hat{μ}\_{T }$(1) es la predicción de $μ\_{T+1 }$ . Como la media está cambiando en el tiempo , podríamos obtener la predicción minimizando la función:

$\sum\_{t=1}^{T}(z\_{t}-μ\_{T+1})^{2}w\_{t}$ (2.16)

$w\_{t}$, son pesos, que permiten tener en cuenta que las observaciones son más importantes que las lejanas para estimar la media local.

La estimación de $μ\_{T+1 }$, derivando e igualando a cero, vendrá dada por:

$\hat{μ}\_{T+1}=\hat{μ}\_{T}\left(1\right)=\sum\_{t=1}^{T}z\_{t}w\_{t}$.

|  |
| --- |
| Observaciones próximas son más importantes que las alejadas.Escogemos pesos que disminuyan de forma geométrica con el tiempo. |
|  | ZT | ZT-1 | ZT-2 | Zi, (en general) |
| Peso | C | cθ, 0<θ<1 | cθ2 | cθi |

Esto conduce a la ecuación de predicción (2.15)

La constante c debe ser tal que los pesos sumen la unidad, y utilizando la fórmula de una progresión geométrica indefinida, resulta:

$$1=c\left(1+θ+θ^{2}+ …\right)=\frac{c}{1-θ}$$

Con lo que c=1-θ. De esta forma, los pesos vienen dados por

$$w\_{t}=(1-θ)θ^{T-t}$$

Y la ecuación de predicción es:

$\hat{μ}\_{T}\left(1\right)=\left(1-θ\right)\sum\_{t=1}^{T}θ^{T-t}z\_{t}$ (2.17)

Que implica que la predicción de zT+1 con información hasta T:

$$\hat{z}\_{T}\left(1\right)= \hat{z}\_{T+1}=\hat{μ}\_{T}\left(1\right)=\left(1-θ\right)\left(z\_{T}+θz\_{T-1}+θ^{2}z\_{T-2}+ …\right)$$

Donde vamos a utilizar la notación $\hat{z}\_{T+1}$ para indicar la predicción de zT+1 con información hasta el instante anterior. Con esta notación, la predicción de zT con información hasta T-1 es:

$$\hat{z}\_{T-1}\left(1\right)= \hat{z}\_{T}=\hat{μ}\_{T-1}\left(1\right)=\left(1-θ\right)(z\_{T-1}+θz\_{T-2}+z\_{T-3}θ^{2}+ …)$$

$$\hat{z}\_{T+1}-θ\hat{z}\_{T}=(1-θ)z\_{T}$$

Esto nos lleva a la siguiente ecuación de predicción:

$\hat{z}\_{T+1}=\hat{z}\_{T}+\left(1-θ\right)\left(z\_{T}-\hat{z}\_{T}\right),$ (2.18)

Que nos indica que la predicción de la próxima observación se realiza modificando la última predicción por una fracción (1-θ) del último error de predicción cometido.

|  |
| --- |
| Determinar el parámetro θ |
| En primeras aplicaciones este parámetro se fijaba a priori, habitualmente entre .70 y .90, pero permitiendo una mayor amplitud de los valores posibles y estimando su magnitud a partir de los datos con el criterio de minimizar los errores de producción; se obtuvieron mejores resultados. |
| Dada una rejilla de valores, como 0.1,0.2,…,0.9 para θ. Se calculan los errores de predicción dentro de la muestra: $\hat{a}\_{t}=z\_{t}-\hat{z}\_{t }$y tomando el valor de θ que conduzca a un valor menor de la suma de los cuadrados de los errores de predicción.El mejor valor obtenido en la búsqueda anterior es θ0, podemos refinar la búsqueda y probar con valores de θ en (θ-0.05, θ+0.05). Esta precisión suele ser suficiente en las aplicaciones. |

### El modelo de alisado doble de Holt

Ahora en vez de suponer una tendencia determinista permitimos que el nivel evolucione linealmente en el tiempo, pero con una pendiente que puede ser distinta en los distintos periodos. Esto se consigue escribiendo el nivel de la serie en el instante t como:

$$μ\_{t}=μ\_{t-1}+β\_{t-1}$$

De manera que la diferencia de dos instantes consecutivos t-1 y t, es $β\_{t-1}$ la pendiente en el momento t-1.

Nota: Si $β\_{t-1}=β$, cte en el tiempo, este modelo es idéntico a la tendencia determinista.

$$\hat{z}\_{t-1}\left(1\right)=\hat{μ}\_{\vertoverlay{t}t-1}=\hat{μ}\_{t-1⃒t-1}+\hat{β}\_{t-1}$$

Predicción de zt con información hasta el instante t-1. La estimación del nivel de la serie en el instante t es la suma de las últimas estimaciones de nivel y de la pendiente con información hasta t-1. La notación $\hat{μ}\_{\vertoverlay{t}t-1}$indica que estamos estimando el nivel en el instante t, pero con información que incluye la del instante t, es decir el dato zt-1.

Las predicciones del aislado simple se obtienen mediante:

$\hat{z}\_{T+1}=\hat{z}\_{T}+\left(1-θ\right)\left(z\_{T}-\hat{z}\_{T}\right),$ (2.18)

Esto indica que la predicción futura es igual a la última predicción realizada más un factor de corrección que es el producto de un coeficiente ( uno menos el factor de descuento) por el último error cometido.

Ahora tenemos que estimar dos parámetros, el método de Holt generaliza esta idea introduciendo dos factores de descuento.

Supongamos que:

* La última predicción se realiza en el periodo T.
* Después de haber observado zT
* Corresponde a la estimación de zT+1 en el instante T+1

La predicción será:

$$\hat{μ}\_{T+1⃒T}=\hat{μ}\_{T⃒T}+\hat{β}\_{T}$$

* $\hat{μ}\_{T⃒T}$ es la estimación del nivel en el instante T
* $\hat{β}\_{T}$ es la estimación del crecimiento con la información hasta el instante T

Al observar el valor zT+1 podemos calcular el error de predicción (zT+1 -$\hat{μ}\_{T+1⃒T}$), como el método de aislado simple, se corrige la estimación anterior por un fracción del error cometido. Luego, la estimación $\hat{μ}\_{T+\vertoverlay{1}T+1}$con información hasta T+1, será:

$$\hat{μ}\_{T+\vertoverlay{1}T}=\hat{μ}\_{T+1⃒T}+\left(1-θ\right)\left(z\_{T+1}-\hat{μ}\_{T+\vertoverlay{1}T}\right)=$$

$=\hat{μ}\_{T⃒T}+\hat{β}\_{T}+\left(1-θ\right)(z\_{T+1}-\hat{μ}\_{\vertoverlay{T}T}-\hat{β}\_{T}$),

Dónde θ<1 es un factor de descuento.

La nueva estimación del crecimiento futuro con información hasta T+1, βT+1 se realiza modificando la última estimación por una fracción del último error cometido:

$\hat{β}\_{T+1}=\hat{β}\_{T}+\left(1-γ\right)(\hat{μ}\_{T+\vertoverlay{1}T+1}-\hat{μ}\_{\vertoverlay{T}T}-\hat{β}\_{T}$),

Donde $γ$ es otro factor de descuento sobre el error anterior en la estimación del crecimiento.

**Estas ecuaciones permiten obtener recursivamente las estimaciones a partir de valores iniciales. Los parámetros θ y** $γ$ **se determinan probando con una rejilla de valores y escogiendo los que minimizan la suma cuadrática de los errores de predicción.**

## métodos de descomposición para series estacionales

Cuando la serie además de **tendencia** y **componente aleatorio** tiene **estacionalidad**, los métodos de descomposición suponen que los datos se generan como suma de esos tres efectos:

$$z\_{t}=μ\_{t}+S\_{t}+a\_{t}$$

* $μ\_{t}$ es el nivel de la serie.
* $S\_{t}$ es el componente estacional.
* $a\_{t}$ es el componente puramente aleatorio o innovación; es una secuencia de variables incorreladas de media cero y varianza cte.

NOTA: los métodos clásicos de predicción suponen que tanto el nivel como la estacionalidad son deterministas.

|  |
| --- |
| El nivel µt se modela mediante un polinomio del tiempo de orden menor o igual a dos |
| La estacionalidad se modela como una función periódica, que verifica la condición: St=St-s, donde s es el periodo de la función que depende de la estacionalidad de los datos. |

 El procedimiento de construcción del modelo para la serie se realiza en las 4 etapas siguientes:

1. Se estima el nivel de la serie observada como en el modelo de tendencias deterministas. A continuación, se calcula la serie residual: $E\_{t}=z\_{t}-\hat{μ}\_{t}$, que contendrá la estacionalidad y el componente aleatorio. Esta serie se denomina serie sin tendencia.
2. Los coeficientes estacionales, S1,…,S12, se definen como un conjunto de coeficientes que suman cero y que se repiten cada año. Se estiman en la serie sin tendencia como la diferencia entre la media de los periodos estacionales y la media general.

$$\hat{S}\_{j}=\overbar{E}\_{j}-\overbar{E}$$

La suma de los factores estacionales es cero.

Ejemplo:

T=12n datos de una serie mensual correspondiente a n años de datos mensuales.

Etiquetamos las observaciones de modo que se ponga en manifiesto de que mes y año son: t=12i+j; i=1,…,n-1(años); j=1,…,12 (meses)

Así, las observaciones de la serie se escriben: E12i+j

Media total :$\sum\_{i=1}^{n-1}\sum\_{j=1}^{12}{E\_{12i+j}}/{T}$ Media del mes j=$\sum\_{i=1}^{n}{E\_{12i+j}}/{n}$

1. Se obtiene la serie de innovaciones estimada restando a la serie sin tendencia el factor estacional de cada observación

$$\hat{a}\_{12i+j}=E\_{12i+j}-\hat{S}\_{j}$$

1. La predicción de la serie se realiza sumando las estimaciones de la tendencia y del factor estacional que corresponde a cada observación de este mes. Por otro lado, si restamos a la serie original el coeficiente estacional del mes se obtiene la *serie desestacionalizada*.

SERIES QUE NO TIENEN UNA TENDENCIA CONSTANTE

* No es adecuado ajustarlas mediante una tendencia determinista.
* ALTERNATIVA: Estimar el nivel de la serie localmente mediante una media móvil de 12 meses como sigue: el valor del nivel centro

$$\hat{μ}\_{t}=\frac{z\_{t-5}+ …+z\_{t+5}+z\_{t+6}}{12}$$

Se construye una media de doce observaciones. Se denomina media móvil pues todas las operaciones que entran en el cálculo de $\hat{μ}\_{t}$ van variando en el tiempo.

* Se obtiene una estimación del nivel en los instantes t=6,…,T-6.
* Para obtener los valores del nivel en los extremos se ajusta una recta a los últimos valores y de esta manera se completa la serie de niveles.
* A continuación se realiza la descomposición descrita de la serie; explicada en los pasos 2 y 3.

## Estacionalidad y ajuste de ciclos

### Definiciones básicas

Un procedimiento alternativo para modelar la estacionalidad es representarla en función de su serie armónica s.

Consideremos series que tienen solo componente estacional, con estructura:

zt=St+at

La alternativa más simple para representar St como una función periódica con St=St-s, es suponer una función armónica como el seno o el coseno.( tamaño de la muestra T igual al periodo de la función). Estas funciones se repiten exactamente cada s observaciones.

Se denomina frecuencia a la inversa del periodo: f=1/s; indica la fracción de un ciclo completo que se observa entre dos unidades de tiempo.

|  |  |
| --- | --- |
| Tipos de series | Frecuencia |
| Serie trimestral (s=4) | f=1/4=0.25entre dos observaciones ha transcurrido 0.25 del periodo de la función o un 25% de un ciclo completo. |
| Serie mensual (s=12) | f=1/12=0.833indicando que la unidad de tiempo de la serie ,un mes, representa el 8.33% del ciclo estacional de 12 meses.  |

La cantidad w=2Πf=2Π/s se denomina frecuencia angular, e indica en radianes el ángulo recorrido en una unidad de tiempo, teniendo en cuenta que el ciclo completo son 2Π radianes.

|  |  |
| --- | --- |
| Tipos de series | Frecuencia angular |
| Serie trimestral (s=4) | w=2Π/4=Π/2indicando que en un trimestre se recorre un ángulo de Π/2 respecto al ciclo total de 2Π |
| Serie mensual (s=12) | w=2Π/12=Π/6indicando que en doce meses se recorre un ángulo de Π/6 respecto al ciclo total de 2Π |

En una serie real el tamaño muestral es típicamente mayor que el periodo de la función. Si el tamaño muestral fuese menor que el periodo solo observaremos una fracción del ciclo.

### Representación de la estacionalidad por un ciclo.

Supongamos una serie (z1,…,zT) que tiene una estacionalidad cíclica de periodo s, y en la que observamos j ciclos completos, es decir T=js, con j entero. Vamos a modelar la estacionalidad mediante una función seno con frecuencia angular ω=2Π/s.

La primera observación de la serie no será, en general, el valor medio del ciclo, como le corresponde a la función seno, sino que la onda sinusoidal que describe la estacionalidad comenzará en la primera observación con un cierto ángulo de desfase θ, desconocido, con relación al comienzo del ciclo.

El modelo para la serie será

Zt=µ+ Rsen(ωt+θ) + at.

* µ, valor medio de la serie constante en el tiempo, alrededor del cual se producen las oscilaciones.
* R, amplitud desconocida del ciclo.
* at, error aleatorio superpuesto a la estacionalidad; secuencia de variables aleatorias independientes de media cero, varianza constante y distribución normal.

Escribiremos este modelo de forma más conveniente para ajustarlo a los datos:

Sen(a+b)=sen(a)sen(b)+cos(a)cos(b)

zt=µ+ Rsen(ωt)sen(θ) + Rcos(ωt)cos(θ) + at.

* R y θ parámetros desconocidos

llamando A= Rsen(θ) y B=Rcos(θ) tenemos que:

zt=µ+ Asen(ωt)+ Bcos(ωt) + at. (2.20)

La serie es representada como suma de dos funciones sinusoidales de frecuencia angular conocida y dos amplitudes desconocidas A y B que estimaremos a partir de los datos.

El modelo es lineal en los tres parámetros desconocidos y podemos estimarlo por mínimos cuadrados.

$$\hat{μ}=\frac{1}{T}\sum\_{t=1}^{T}z\_{t}$$

$\hat{A}=\frac{2}{T}\sum\_{t=1}^{T}z\_{t} sen(ωt)$ (2.21)

$\hat{B}=\frac{2}{T}\sum\_{t=1}^{T}z\_{t} cos(ωt)$ (2.22)

$$\hat{R}^{2}=\hat{A}^{2}+\hat{B}^{2}.$$

Los residuos del modelo se calculan mediante:

$$\hat{a}\_{t}=z\_{t}- \hat{μ}\_{t}+ \hat{A} sen\left(ωt\right)+\hat{B}\cos(\left(ωt\right)),$$

* E($\hat{a}\_{t}$)=0
* Var($\hat{a}\_{t})$= $\frac{1}{T}\sum\_{t=1}^{T}\hat{a}^{2}\_{t}$

El modelo estimado realiza una descomposición de la variabilidad de los datos en una parte que corresponde al componente sinusoidal y otra al componente residual. En efecto, la varianza de la variable será:

$$\frac{1}{T}\sum\_{t=1}^{T}(z\_{t}-\hat{μ})^{2}=\frac{1}{T}\sum\_{t=1}^{T}\left(\hat{A}sen\left(ωt\right)+\hat{B}\cos(\left(ωt\right))+ \hat{a}\_{t}\right)^{2}$$

Como las variables sen(ωt) y cos(ωt) tienen media cero, varianza ½ y están incorreladas, resulta:

$\frac{1}{T}\sum\_{t=1}^{T}(x\_{t}-\hat{μ})^{2}=\frac{\hat{A}^{2}}{2}+\frac{\hat{B}^{2}}{2}+\hat{σ}^{2}=\frac{\hat{R}^{2}}{2}+\hat{σ}^{2}$ (2.24)

Que puede interpretarse como una descomposición de la varianza en sus dos componentes ortogonales de variabilidad.

## exploración de multiples ciclos: el periodograma

La representación de una serie estacional mediante la ecuación

zt=µ+ Asen(ωt)+ Bcos(ωt) + at. (2.20)

 es adecuada cuando la estacionalidad es exactamente sinusoidal de periodo s, pero no nos sirve para describir funciones periódicas generales.

Toda función periódica puede representarse como funciones sinusoidales de distinta amplitud y frecuencia.

Fourier, a principios del siglo XIX

Esto sugiere generalizar el resultado para un ciclo permitiendo que la función periódica sea suma de varias funciones armónicas con distintas frecuencias.

Dada una serie de longitud T,

**Periodos básicos o de Fourier:** son los periodos que son fracciones exactas completas del tamaño muestral. Están definidos por:

$$s\_{j}=\frac{T}{j}, para j=1,2,… ,{T}/{2}$$

|  |
| --- |
| **PERIODOS BÁSICOS O DE FOURIER** |
| **VALOR MÁXIMO** | VALOR MÍNIMO |
| j=1→$s\_{j}=T$(tamaño muestral) | j=T/2→$s\_{j}=2$(no podemos observar periodos que duren menos de dos observaciones) |

En el ajuste de ciclos suele trabajarse con las frecuencias, en lugar de con los periodos, y se definen las frecuencias básicas o de Fourier como las inversas de los periodos básicos.

$$f\_{j}=\frac{j}{T}=\frac{1}{s\_{j}}, para j=1,2, …, T/2,$$

Luego,

$$\frac{1}{2}\geq f\_{j}\geq \frac{1}{T}$$

El valor máximo de la frecuencia que podemos observar es $f\_{j}=5$. Este valor de las frecuencias básicas se conoce como la frecuencia de Nyquist.

Utilizando estas definiciones, podemos obtener una representación general de una función periódica como suma de ondas asociadas a todas las frecuencias básicas, mediante:

$z\_{t}=μ+\sum\_{j=1}^{T/2}A\_{j}sen\left(ω\_{j}t\right)+\sum\_{j=1}^{T/2}B\_{j}cos⁡(ω\_{j}$t). (2.25)

* Esta ecuación tiene tantos parámetros como observaciones; SIEMPRE AJUSTARÁ EXACTAMENTE A CUALQUIER SERIE OBSERVADA

Para **j=T/2,** $s\_{j}=2$**,** $ω\_{j}=\frac{2π}{s\_{j}}=π$**→ senΠt=0** para t=1, …, T, con lo que el coeficiente$ B\_{T/2}$ no puede estimarse y tenemos T parámetros.

$$1+\frac{T}{2}+\left(\frac{T}{2}-1\right)=T$$

**OBJETIVO DEL PERIDIOGRAMA:**

**Encontrar un procedimiento para seleccionar las frecuencias que debemos incluir para explicar la evolución de la serie**

|  |  |
| --- | --- |
| La ecuación (2.25) | Permite descomponer exactamente una serie temporal como suma de componentes armónicos  |
| La ecuación (2.24) | La contribución de una onda a la varianza de una serie es su amplitud al cuadrado dividido por dos.Ondas con amplitud estimada alta => importantes para explicar la serieOndas de amplitud baja=>contribuyen poco a la explicación de la serie |

Para seleccionar las frecuencias importantes podemos calcular los parámetros Aj y Bj para todas las frecuencias básicas y representar la contribución de la varianza de la serie.

Los coeficientes de regresión Aj y Bj serán iguales a los calculados en el modelo (2.25) que incluye todas sus frecuencias básicas y , en un modelo (2.19) que incluye solo la frecuencia $ω\_{j}$. Esto es así por ser $sen\left(ω\_{j}t\right)$ y $e$

Por tanto las estimaciones de los coeficientes Aj y Bj vienen dadas por las ecuaciones (2.21) y (2.22):

$\hat{A\_{j}}=\frac{2}{T}\sum\_{t=1}^{T}z\_{t} sen\left(ω\_{j}t\right)=\frac{2}{T}\sum\_{t=1}^{T}z\_{t} sen\left(2πf\_{j}t\right)=\frac{2}{T}\sum\_{t=1}^{T}z\_{t} sen\left(2π\frac{j}{T}t\right)$

$\hat{B\_{j}}=\frac{2}{T}\sum\_{t=1}^{T}z\_{t} cos(ω\_{j}t)=\frac{2}{T}\sum\_{t=1}^{T}z\_{t} cos\left(2πf\_{j}t\right)=\frac{2}{T}\sum\_{t=1}^{T}z\_{t} cos\left(2π\frac{j}{T}t\right)$

$$\hat{R}\_{j=}\hat{A}\_{j}^{2}+\hat{B}\_{j}^{2}$$

Utilizando la ecuación (2.25) descomponemos la varianza de la serie en los componentes asociados a cada una de las funciones armónicas. Sea sz2 la varianza muestral de la serie.

$Ts\_{x}^{2}=\sum\_{t=1}^{T}(z\_{t}-μ)^{2}=\sum\_{j=1}^{T/2}\frac{T}{2}\hat{R}\_{j}^{2}$ (2.26)

Se conoce como periodograma la representación de la contribución de cada frecuencia, $\frac{T}{2}\hat{R}\_{j}^{2}$, en función de fj o $ω\_{j}$. En este segundo caso se define como:

I(fj)=$ \frac{T}{2}\hat{R}\_{j}^{2}$, con 1/T≤ fj≤5. (2.27)

**OBSERVACIÓN:**

**El valor medio de las alturas de las ordenadas del periodograma es el doble de la varianza del proceso, ya que por (2.26) y (2.27), como el número de frecuencias básicas es T/2.**

$$\overbar{I}=\frac{2}{T}\sum\_{j=1}^{T/2}\frac{T}{2}\hat{R}\_{j}^{2}=2s\_{x}^{2}$$

Suponemos que estamos interesados únicamente en las frecuencias básicas. Esta hipótesis es poco restrictiva si el tamaño muestral es grande, ya que entonces el número de frecuencias básicas es muy grande y siempre existirá alguna frecuencia básica muy próxima a la que puede interesarnos.

El peridiograma puede verse como una herramienta para la detección de posibles ciclos deterministas en una serie temporal. Por otro lado, la serie puede tener otros ciclos no necesariamente ligados al periodo estacional y el peridiograma es una buena herramienta para detectar estos posibles componentes.

La utilidad del peridiograma aumenta si notamos que cuando estimamos la amplitud de una onda para una frecuencia determinada estamos de hecho calculando una amplitud media de todos los posibles ciclos con frecuencias próximas a la que estimamos.

Como las distancias entre las frecuencias básicas son (j+1) / T-j /T = 1/T, podemos considerar la amplitud calculada para la frecuencia fj como un promedio de las amplitudes existentes en las frecuencias situadas en el intervalo fj como un promedio de las amplitudes existentes en las frecuencias situadas en el intervalo fj $\pm $ 1/2T. En consecuencia, en lugar de representar barras en las frecuencias básicas con alturas I(fj), podemos obtener un periodograma suavizado construyendo rectángulos con centro fj en todo el rango de frecuencias. Este peridiograma suavizado ahora para todo el rango de frecuencias.