Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

Introducción

Procesos ARCH: Construcción

Procesos GARCH: Construcción e identificación

Estimación

Diagnosis

Selección del modelo

Predicción

Aplicación a datos reales

Recapitulación

Part IV

Modelos para la volatilidad

Modelos para la volatilidad

Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

Introducción

Procesos ARCH: Construcción

Procesos GARCH: Construcción e identificación

Estimación

Diagnosis

Selección del modelo

Predicción

Aplicación a datos reales

Recapitulación

Introducción

Comenzamos indicando la notación general que utilizaremos en este tema:

- $y_1, y_2, \ldots, y_T$: serie de tiempo observada.
- $\{Y_t\}_t$: proceso generador de la serie observada.

Modelos para la volatilidad

Series de Tiempo
Germán Aneiros Pérez
Introducción
Procesos ARCH: Construcción
Procesos GARCH: Construcción e identificación
Estimación
Diagnosis
Selección del modelo
Predicción
Aplicación a datos reales
Recapitulación

Introducción

Existen series temporales estacionarias cuyas características no pueden ser explicadas o modelizadas a través de procesos ARMA generales.

Concretamente, dichas series presentan:

- Dependencia temporal, pero no de tipo lineal (ruido blanco dependiente).
- Colas más pesadas que las de la distribución normal (esto es, surgen valores altos o bajos más frecuentemente que en el caso gaussiano).
- Rachas o agrupamiento de valores altos (bajos) a lo largo del tiempo; esto es, se alternan períodos de valores altos (bajos) con períodos de valores medios.

Modelos para la volatilidad

Series de Tiempo
Germán Aneiros Pérez
Introducción
Procesos ARCH: Construcción
Procesos GARCH: Construcción e identificación
Estimación
Diagnosis
Selección del modelo
Predicción
Aplicación a datos reales
Recapitulación

Introducción

Muchas de estas series pertenecen al campo de las finanzas.

Un ejemplo son las series de rendimientos (o ganancias relativas) de un capital (acciones, bonos,...), entendiendo que si x_t es el valor del capital en el instante t, entonces su rendimiento en dicho instante es

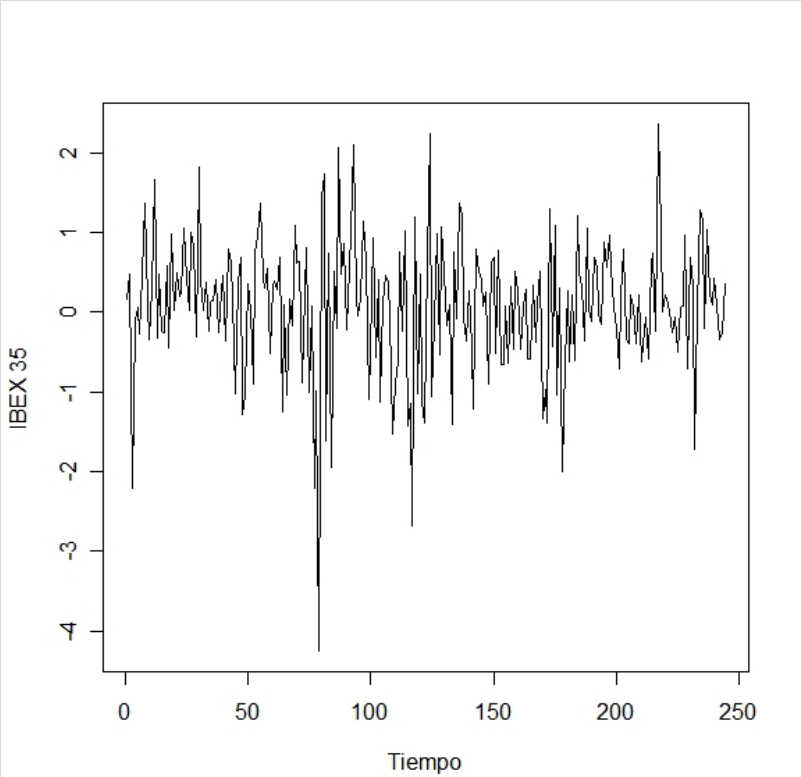
$$y_t = \frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}}.$$

Nota: Cuando y_t es pequeño, es costumbre utilizar la aproximación

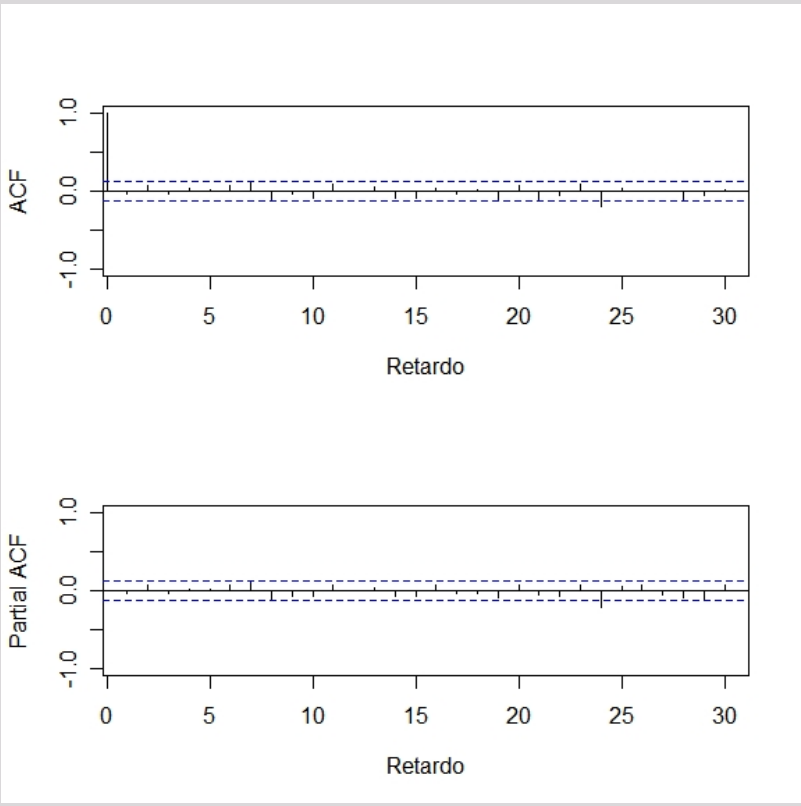
$$y_t \approx ln\left(\frac{x_t}{x_{t-1}}\right) = ln\left(x_t\right) - ln\left(x_{t-1}\right).$$

Series de Tiempo
Germán Aneiros Pérez
Introducción
Procesos ARCH: Construcción
Procesos GARCH: Construcción e identificación
Estimación
Diagnosis
Selección del modelo
Predicción
Aplicación a datos reales
Recapitulación

Rendimientos del IBEX 35

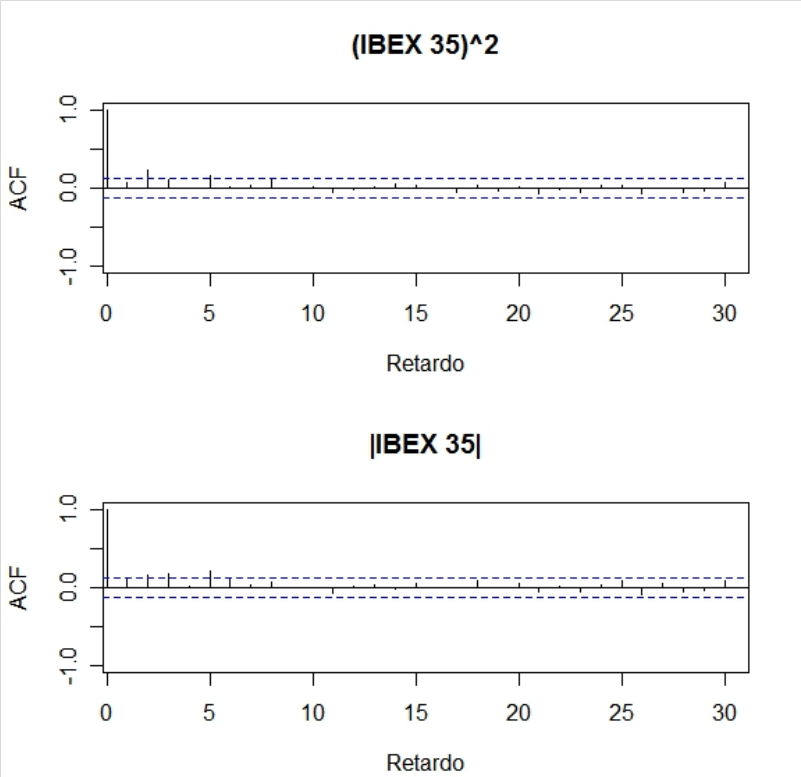


Fas y fap

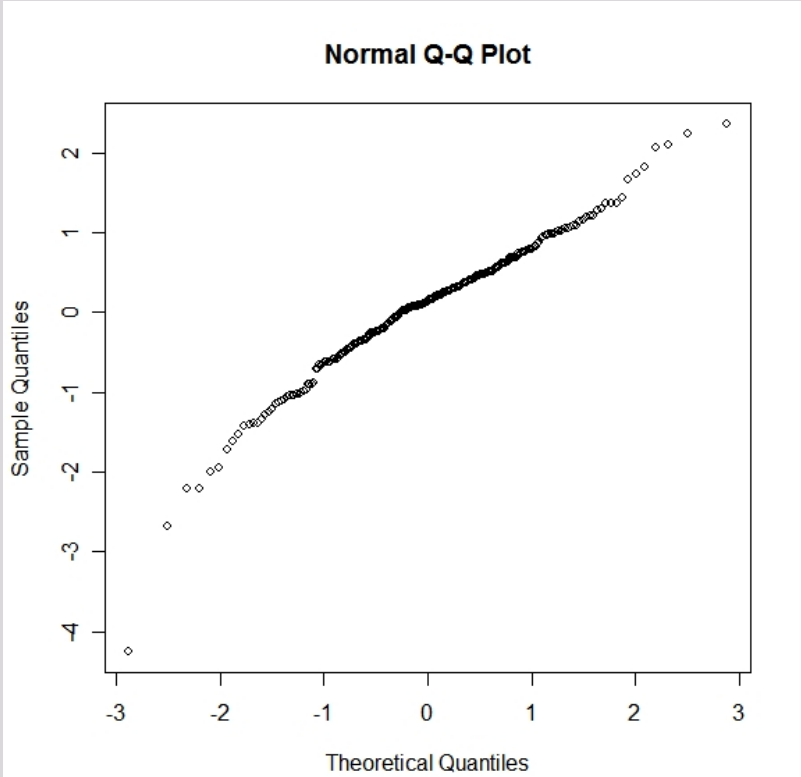


Series de Tiempo
Germán Aneiros Pérez
Introducción
Procesos ARCH: Construcción
Procesos GARCH: Construcción e identificación
Estimación
Diagnosis
Selección del modelo
Predicción
Aplicación a datos reales
Recapitulación

Fas



Rendimientos del IBEX 35



Modelos para la volatilidad

Introducción

El objetivo de este tema es la construcción de modelos estocásticos que sean capaces de explicar las características antes nombradas.
Dichos procesos, cuya varianza marginal debe ser constante (pues son estacionarios), verificarán que:

- La varianza condicionada al pasado no es constante, sino que depende de dicho pasado (heterocedasticidad condicional). De esta forma, introducen dependencia entre los cuadrados del proceso y su pasado; esto es, dependencia temporal no lineal.
- En general, valores altos (bajos) de la varianza condicionada van seguidos de valores altos (bajos). Esto generará el agrupamiento a lo largo del tiempo de valores altos (bajos) de la serie.

Modelos para la volatilidad

Series de Tiempo
Germán Aneiros Pérez
Introducción
Procesos ARCH: Construcción
Procesos GARCH: Construcción e identificación
Estimación
Diagnosis
Selección del modelo
Predicción
Aplicación a datos reales
Recapitulación

Introducción

Como se indica en la transparencia anterior, los modelos en cuestión imponen condiciones a la varianza condicionada. Por tanto, lo que en realidad modelizan es la varianza condicional (o volatilidad), por lo que son modelos para la volatilidad.

La volatilidad es un concepto sumamente importante dentro del campo de las finanzas, pues puede considerarse como una medida de la actividad financiera, o de la incertidumbre en las predicciones.

Los modelos que estudiaremos en este tema serán utilizados tanto para comprender la dinámica de la serie como para efectuar predicciones de valores futuros de la volatilidad.

Series de Tiempo
Germán Aneiros Pérez
Introducción
Procesos ARCH: Construcción
Procesos GARCH: Construcción e identificación
Estimación
Diagnosis
Selección del modelo
Predicción
Aplicación a datos reales
Recapitulación

Procesos ARCH: Construcción

El proceso $\{Y_t\}$ se dice que es un ARCH(1) (AutoRegresive Conditional Heteroscedastic) si admite una representación del tipo:

$$Y_t = \sigma_t Z_t \text{ siendo } \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1}^2,$$

donde

- $\alpha_0 > 0$ y $\alpha_1 \geq 0$ son constantes.
- $\{Z_t\}$ son v.a. i.i.d. según una distribución $N(0,1)$.
- Z_t es independiente de $\{Y_{t-k}, k \geq 1\}$ para cualquier t.

Modelos para la volatilidad

Procesos ARCH: Construcción

El proceso ARCH(1) verifica:

- Si $\alpha_1 < 1$ entonces es ruido blanco, y $Var\left(Y_t | Y_{t-1}\right) = \sigma_t^2$.
- Si $3\alpha_1^2 < 1$ entonces:
  1. Sus cuadrados admiten la representación AR(1)
  $$Y_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1}^2 + a_t,$$
  donde el ruido blanco $\{a_t\}$ no es independiente.
  2. Las colas de su distribución son más pesadas que las de Z_t.

A partir de estas propiedades, observamos que el ARCH(1) captura características presentes en ciertas series financieras (ruido blanco dependiente, colas pesadas y rachas de valores altos (bajos) a lo largo del tiempo; para obsevar esto último, recuérdese que $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1}^2$).

Series de Tiempo
Germán Aneiros Pérez
Introducción
Procesos ARCH: Construcción
Procesos GARCH: Construcción e identificación
Estimación
Diagnosis
Selección del modelo
Predicción
Aplicación a datos reales
Recapitulación

Procesos ARCH: Construcción

El proceso $\{Y_t\}$ se dice que es un ARCH(r) si admite una representación del tipo:

$$Y_t = \sigma_t Z_t \text{ siendo } \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_r Y_{t-r}^2,$$

donde

- $\alpha_0 > 0$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \geq 0$ son constantes.
- $\{Z_t\}$ son v.a. i.i.d. según una distribución $N(0,1)$.
- Z_t es independiente de $\{Y_{t-k}, k \geq 1\}$ para cualquier t.

Series de Tiempo
Germán Aneiros Pérez
Introducción
Procesos ARCH: Construcción
Procesos GARCH: Construcción e identificación
Estimación
Diagnosis
Selección del modelo
Predicción
Aplicación a datos reales
Recapitulación

Procesos ARCH: Construcción

El proceso ARCH(r) verifica:

- Si $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i < 1$ entonces es ruido blanco, y
$$Var\left(Y_t | Y_{t-1}, \ldots, Y_{t-r}\right) = \sigma_t^2.$$
- Si $3\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i\right)^2 < 1$ entonces:
  1. Sus cuadrados admiten la representación AR(r)
  $$Y_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_r Y_{t-r}^2 + a_t,$$
  donde el ruido blanco $\{a_t\}$ no es independiente.
  2. Las colas de su distribución son más pesadas que las de Z_t.

De manera análoga a lo que ocurría con los procesos ARCH(1), de las propiedades anteriores se deduce que el ARCH(r) captura características presentes en ciertas series financieras.

Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

Introducción

Procesos ARCH: Construcción

Procesos GARCH: Construcción e identificación

Estimación

Diagnosis

Selección del modelo

Predicción

Aplicación a datos reales

Recapitulación

Procesos ARCH: Construcción

En la práctica, cuando se trabaja con series reales que presentan heterocedasticidad condicional, se ha observado que el modelo ARCH(r) necesita un orden r alto para que de forma razonable haya podido generar a una de dichas series.

Esto conlleva la necesidad de estimar muchos parámetros. Este

problema viene solventado a través de los modelos ARCH generalizados, que presentamos a continuación.

Series de Tiempo
Germán Aneiros Pérez
Introducción
Procesos ARCH: Construcción
Procesos GARCH: Construcción e identificación
Estimación
Diagnosis
Selección del modelo
Predicción
Aplicación a datos reales
Recapitulación

Procesos GARCH: Construcción e identificación

El proceso $\{Y_t\}$ se dice que es un GARCH(1,1) (Generalized ARCH) si admite una representación del tipo:

$$Y_t = \sigma_t Z_t \text{ siendo } \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2,$$

donde

- $\alpha_0 > 0$ y $\alpha_1, \beta_1 \geq 0$ son constantes.
- $\{Z_t\}$ son v.a. i.i.d. según una distribución $N(0,1)$.
- Z_t es independiente de $\{Y_{t-k}, k \geq 1\}$ para cualquier t.

Modelos para la volatilidad

Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

Introducción

Procesos ARCH: Construcción

Procesos GARCH: Construcción e identificación

Estimación

Diagnosis

Selección del modelo

Predicción

Aplicación a datos reales

Recapitulación

Procesos GARCH: Construcción e identificación

El proceso GARCH(1,1) verifica:

- Si $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ entonces es ruido blanco, y
$$Var\left(Y_t | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \ldots\right) = \sigma_t^2.$$
- Si $3\left(\frac{\alpha_1}{1-\beta_1}\right)^2 < 1$ entonces:
  1. Sus cuadrados admiten la representación ARMA(1,1)
  $$Y_t^2 = \alpha_0 + \left(\alpha_1 + \beta_1\right) Y_{t-1}^2 + a_t - \beta_1 a_{t-1},$$
  donde el ruido blanco $\{a_t\}$ no es independiente.
  2. Las colas de su distribución son más pesadas que las de Z_t.

De manera análoga a lo que ocurría con los procesos ARCH, de las propiedades anteriores se deduce que el GARCH(1,1) captura características presentes en ciertas series financieras.

Series de Tiempo
Germán Aneiros Pérez
Introducción
Procesos ARCH: Construcción
Procesos GARCH: Construcción e identificación
Estimación
Diagnosis
Selección del modelo
Predicción
Aplicación a datos reales
Recapitulación

Procesos GARCH: Construcción e identificación

Representación ARCH(∞) de un GARCH(1,1)

A partir de la expresión de la volatilidad del GARCH(1,1):

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2,$$

puede obtenerse que, si $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ y $\alpha_1, \beta_1 > 0$, entonces

$$\sigma_t^2 = \frac{\alpha_0}{1-\beta_1} + \alpha_1 \sum_{i=0}^{\infty} \beta_1^i Y_{t-i-1}^2.$$

Es decir, el GARCH(1,1) puede interpretarse como una ARCH de orden infinito. Éste es el motivo por el que el GARCH(1,1) (que únicamente contiene 3 parámetros) es capaz de modelizar series que, si fuesen modelizadas por un ARCH(r), necesitarían que r fuese alto.

Series de Tiempo
Germán Aneiros Pérez
Introducción
Procesos ARCH: Construcción
Procesos GARCH: Construcción e identificación
Estimación
Diagnosis
Selección del modelo
Predicción
Aplicación a datos reales
Recapitulación

Procesos GARCH: Construcción e identificación

El proceso $\{Y_t\}$ se dice que es un GARCH(r,s) si admite una representación del tipo:

$$Y_t = \sigma_t Z_t \text{ siendo } \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i Y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \sigma_{t-j}^2,$$

donde

- $\alpha_0 > 0$ y $\alpha_i, \beta_j \geq 0$ $(i = 1, \ldots, r;\ j = 1, \ldots, s)$ son constantes.
- $\{Z_t\}$ son v.a. i.i.d. según una distribución $N(0, 1)$.
- Z_t es independiente de $\{Y_{t-k}, k \geq 1\}$ para cualquier t.

Nota: La notación que utiliza el R en lo que a los órdenes del GARCH(r,s) se refiere es distinta a la que usualmente aparece en los textos (que es la que nosotros utilizamos): lo que para nosotros es un GARCH(r,s) para el R es un GARCH(s,r).

Series de Tiempo
Germán Aneiros Pérez
Introducción
Procesos ARCH: Construcción
Procesos GARCH: Construcción e identificación
Estimación
Diagnosis
Selección del modelo
Predicción
Aplicación a datos reales
Recapitulación

Procesos GARCH: Construcción e identificación

El proceso GARCH(r,s) verifica:

- Si $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i + \sum_{j=1}^{s} \beta_j < 1$ entonces es ruido blanco, y
$$Var\left(Y_t | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \ldots\right) = \sigma_t^2.$$
- Si $3\left(\frac{\sum_{i=1}^{r} \alpha_i}{1-\sum_{j=1}^{s} \beta_j}\right)^2 < 1$ entonces:
  1. Sus cuadrados admiten la representación ARMA
  $$Y_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{max\{r,s\}} (\alpha_i + \beta_i) Y_{t-i}^2 + a_t - \sum_{j=1}^{s} \beta_j \sigma_{t-j}^2,$$
  donde el ruido blanco $\{a_t\}$ no es independiente (hemos denotado $\alpha_i = 0$ para $i > r$ y $\beta_j = 0$ para $j > s$).
  2. Las colas de su distribución son más pesadas que las de Z_t.

De manera análoga a lo que ocurría con los procesos ARCH, de las propiedades anteriores se deduce que el GARCH(r,s) captura características presentes en ciertas series financieras.

Modelos para la volatilidad

Series de Tiempo
Germán Aneiros Pérez
Introducción
Procesos ARCH: Construcción
Procesos GARCH: Construcción e identificación
Estimación
Diagnosis
Selección del modelo
Predicción
Aplicación a datos reales
Recapitulación

Procesos GARCH: Construcción e identificación

La serie de tiempo. . . ¿ha sido generada por un proceso con heterocedasticidad condicional (GARCH)?

- El gráfico de la serie frente al tiempo debe mostrar estacionariedad, con agrupamiento de valores altos (bajos).
- Las colas de la distribución deben ser más pesadas que las de la normal.
- La fas y la fap de la serie deben sugerir que ha sido generada por un proceso de ruido blanco.
- La fas y la fap de la serie de los cuadrados deben sugerir que dicha serie ha sido generada por un proceso ARMA.

Series de Tiempo
Germán Aneiros Pérez
Introducción
Procesos ARCH: Construcción
Procesos GARCH: Construcción e identificación
Estimación
Diagnosis
Selección del modelo
Predicción
Aplicación a datos reales
Recapitulación

Estimación

Suposiciones generales: La serie $y_1, \ldots, y_T$ ha sido generada por un proceso GARCH(r,s)

$$Y_t = \sigma_t Z_t \text{ donde } \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i Y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \sigma_{t-j}^2,$$

verificándose que:

- $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i + \sum_{j=1}^{s} \beta_j < 1$.
- Los órdenes r y s son conocidos.

Objetivo: Estimar los parámetros $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s$.

Método: Máxima verosimilitud condicionada.

Series de Tiempo
Germán Aneiros Pérez
Introducción
Procesos ARCH: Construcción
Procesos GARCH: Construcción e identificación
Estimación
Diagnosis
Selección del modelo
Predicción
Aplicación a datos reales
Recapitulación

Estimación

La aplicación del método de máxima verosimilitud exacta requiere el conocimiento de la distribución del proceso, que en general desconocemos.

Por este motivo, los estimadores se suelen obtener maximizando la verosimilitud condicionada. Esto es:

- ARCH(1): Se seleccionan los valores de α_0 y α_1 que maximizan a la función de verosimilitud condicionada a Y_1:

$$L(\alpha_0, \alpha_1 | Y_1) = \frac{1}{\sqrt{\prod_{t=2}^{T}(2\pi\sigma_t^2)}} \exp\left(-\sum_{t=2}^{T} \frac{Y_t^2}{2\sigma_t^2}\right)$$

Nota: Recuérdese que $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1}^2$.

Series de Tiempo
Germán Aneiros Pérez
Introducción
Procesos ARCH: Construcción
Procesos GARCH: Construcción e identificación
Estimación
Diagnosis
Selección del modelo
Predicción
Aplicación a datos reales
Recapitulación

Estimación

- GARCH(1,1): Se seleccionan los valores de α_0, α_1 y β_1 que maximizan a la función de verosimilitud condicionada a Y_1, considerando $\sigma_1^2 = 0$:

$$L\left(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1 | Y_1, \sigma_1^2 = 0\right) = \frac{1}{\sqrt{\prod_{t=2}^{T}\left(2\pi\sigma_t^2\right)}} \exp\left(-\sum_{t=2}^{T} \frac{Y_t^2}{2\sigma_t^2}\right)$$

  Nota: Recuérdese que $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$.
- GARCH(r,s): Se generaliza la expresión anterior, condicionando ahora a $Y_1, \ldots, Y_{max\{r,s\}}$ y considerando $\sigma_1^2 = \cdots = \sigma_s^2 = 0$.

Modelos para la volatilidad

Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

Introducción

Procesos ARCH: Construcción

Procesos GARCH: Construcción e identificación

Estimación

Diagnosis

Selección del modelo

Predicción

Aplicación a datos reales

Recapitulación

Estimación

Bajo ciertas condiciones, se tiene que los estimadores propuestos son asintóticamente normales.

Nota: En algunos textos, la suposición de gaussianidad del proceso $\{Z_t\}$ que interviene en la definición del proceso GARCH (recuérdese que $Y_t = \sigma_t Z_t$) no es impuesta, dando lugar a una definición más flexible. Si adoptamos esta nueva definición, se sigue manteniendo la normalidad asintótica de los estimadores basados en la verosimilitud gaussiana condicionada.

Modelos para la volatilidad

Series de Tiempo
Germán Aneiros Pérez
Introducción
Procesos ARCH: Construcción
Procesos GARCH: Construcción e identificación
Estimación
Diagnosis
Selección del modelo
Predicción
Aplicación a datos reales
Recapitulación

Diagnosis

Una vez que un modelo GARCH ha sido estimado, la etapa de diagnosis o chequeo de las hipótesis básicas realizadas sobre él se realiza de modo análogo a lo hecho en los modelos Box-Jenkins y FARIMA.

En el caso de los GARCH, las hipótesis se imponen sobre Z_t $(= Y_t/\sigma_t)$, por lo que los residuos a analizar pasan a ser $\widehat{Z}_t = Y_t/\widehat{\sigma}_t$, donde $\widehat{\sigma}_t^2$ es la varianza condicional o volatilidad ajustada en el instante t. Se trata entonces de contrastar que $\left\{\widehat{Z}_t\right\}$ son i.i.d. con media 0 y varianza 1 (a la vista de la definición más flexible nombrada en la anterior transparencia, la normalidad no es estrictamente necesaria; sin embargo, el comportamiento de los estimadores es mejor si se verifica).

Modelos para la volatilidad

Selección del modelo

Los órdenes r y s del modelo GARCH se seleccionan a través de alguno de los criterios AIC, AICc o BIC ya utilizados en la selección de modelos Box-Jenkins, con las pertinentes modificaciones provocadas por el método de estimación utilizado. Concretamente, debe tenerse presente que:

- El número de observaciones utilizadas en la estimación es $T - max\{r, s\}$ (esta cantidad interviene en la construcción de las funciones AICc y BIC).
- En la expresión de las funciones AIC, AICc y BIC, la función de verosimilitud L debe ser sustituida por la función de verosimilitud condicionada.

Modelos para la volatilidad

Series de Tiempo
Germán Aneiros Pérez
Introducción
Procesos ARCH: Construcción
Procesos GARCH: Construcción e identificación
Estimación
Diagnosis
Selección del modelo
Predicción
Aplicación a datos reales
Recapitulación

Predicción

Suposiciones generales: Se dispone de una serie de tiempo $y_1, \ldots, y_T$ generada por un proceso estocástico $\{Y_t\}_t$.

Suposiciones particulares: $\{Y_t\}_t$ tiene una estructura GARCH con parámetros conocidos.

Objetivo: Predecir, a partir de la serie observada $y_1, \ldots, y_T$ (y basándose en la estructura GARCH), el valor de la volatilidad del proceso dentro de k períodos de tiempo; esto es, predecir el valor de σ^2_{T+k}.

Notación: Dicha predicción (con origen en T y horizonte k) será denotada por $\widehat{\sigma}^2_T(k)$.

Modelos para la volatilidad

Series de Tiempo
Germán Aneiros Pérez
Introducción
Procesos ARCH: Construcción
Procesos GARCH: Construcción e identificación
Estimación
Diagnosis
Selección del modelo
Predicción
Aplicación a datos reales
Recapitulación

Predicción

Proceso ARCH(1): Predicción con origen en T y horizonte 1

Las predicciones (a cualquier horizonte) se basan en la expresión de la volatilidad:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1}^2.$$

Para predecir con origen en T y horizonte $k = 1$ utilizamos:

$$\sigma_{T+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 Y_T^2.$$

Puesto que conocemos el valor tomado por Y_T (y_T), la predicción buscada es:

$$\widehat{\sigma}_T^2(1) = \alpha_0 + \alpha_1 y_T^2.$$

Modelos para la volatilidad

Series de Tiempo
Germán Aneiros Pérez
Introducción
Procesos ARCH: Construcción
Procesos GARCH: Construcción e identificación
Estimación
Diagnosis
Selección del modelo
Predicción
Aplicación a datos reales
Recapitulación

Predicción

Proceso ARCH(1): Predicción con origen en T y horizonte 2

Particularizando la expresión general de la volatilidad al instante T+2, tenemos que:

$$\sigma^2_{T+2} = \alpha_0 + \alpha_1 Y^2_{T+1}.$$

En base a esta expresión, y prediciendo Y^2_{T+1} a través de su esperanza condicional (esto es, a través de la varianza condicional de Y_{T+1} : $\widehat{\sigma}^2_T(1)$), se obtiene:

$$\widehat{\sigma}^2_T(2) = \alpha_0 + \alpha_1 \widehat{\sigma}^2_T(1).$$

Este procedimiento recursivo nos permite obtener predicciones a cualquier horizonte k, y es fácilmente generalizable a procesos ARCH(r).

Series de Tiempo
Germán Aneiros Pérez
Introducción
Procesos ARCH: Construcción
Procesos GARCH: Construcción e identificación
Estimación
Diagnosis
Selección del modelo
Predicción
Aplicación a datos reales
Recapitulación

Predicción

Proceso GARCH(1,1): Predicción con origen en T y horizonte 1

Las predicciones (a cualquier horizonte) se basan en la expresión de la volatilidad:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2.$$

Para predecir con origen en T y horizonte $k = 1$ utilizamos:

$$\sigma_{T+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 Y_T^2 + \beta_1 \sigma_T^2.$$

Puesto que "conocemos" los valores tomados por Y_T y σ_T^2, la predicción buscada es:

$$\widehat{\sigma}_T^2(1) = \alpha_0 + \alpha_1 y_T^2 + \beta_1 \sigma_T^2.$$

Modelos para la volatilidad

Series de Tiempo
Germán Aneiros Pérez
Introducción
Procesos ARCH: Construcción
Procesos GARCH: Construcción e identificación
Estimación
Diagnosis
Selección del modelo
Predicción
Aplicación a datos reales
Recapitulación

Predicción

Proceso GARCH(1,1): Predicción con origen en T y horizonte 2

Particularizando la expresión general de la volatilidad al instante T+2, tenemos que:

$$\sigma^2_{T+2} = \alpha_0 + \alpha_1 Y^2_{T+1} + \beta_1 \sigma^2_{T+1}.$$

En base a esta expresión, y prediciendo tanto Y^2_{T+1} como σ^2_{T+1} a través de $\widehat{\sigma}^2_T(1)$ (véanse las dos transparencias anteriores) se obtiene:

$$\widehat{\sigma}^2_T(2) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\,\widehat{\sigma}^2_T(1).$$

Este procedimiento recursivo nos permite obtener predicciones a cualquier horizonte k, y es fácilmente generalizable a procesos GARCH(r,s).

Modelos para la volatilidad

Aplicación a datos reales

Para finalizar, presentamos un ejemplo con datos reales en el que se hace uso de gran parte de lo expuesto en este capítulo.

La serie que analizaremos es la serie de rendimientos diarios (en porcentaje) del IBEX 35, desde el 13-11-2003 hasta el 11-11-2004 (excepto fines de semana y festivos); esto es, analizamos la serie:

$$y_t = 100 \times (ln(x_t) - ln(x_{t-1})),$$

donde x_t es el valor del IBEX 35 observado en el instante t.

Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

Introducción

Procesos ARCH: Construcción

Procesos GARCH: Construcción e identificación

Estimación

Diagnosis

Selección del modelo

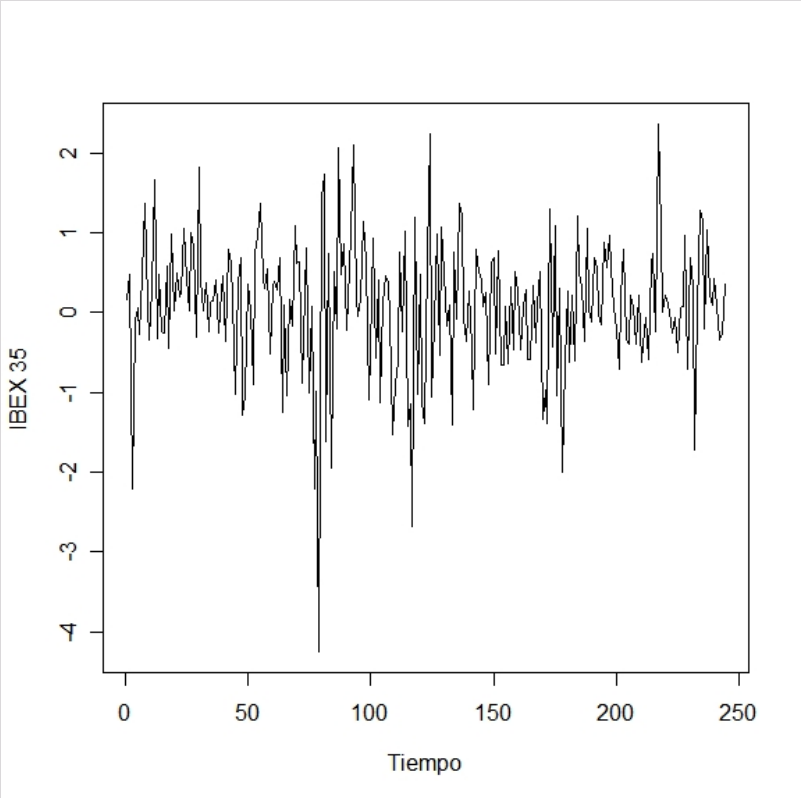
Predicción

Aplicación a datos reales

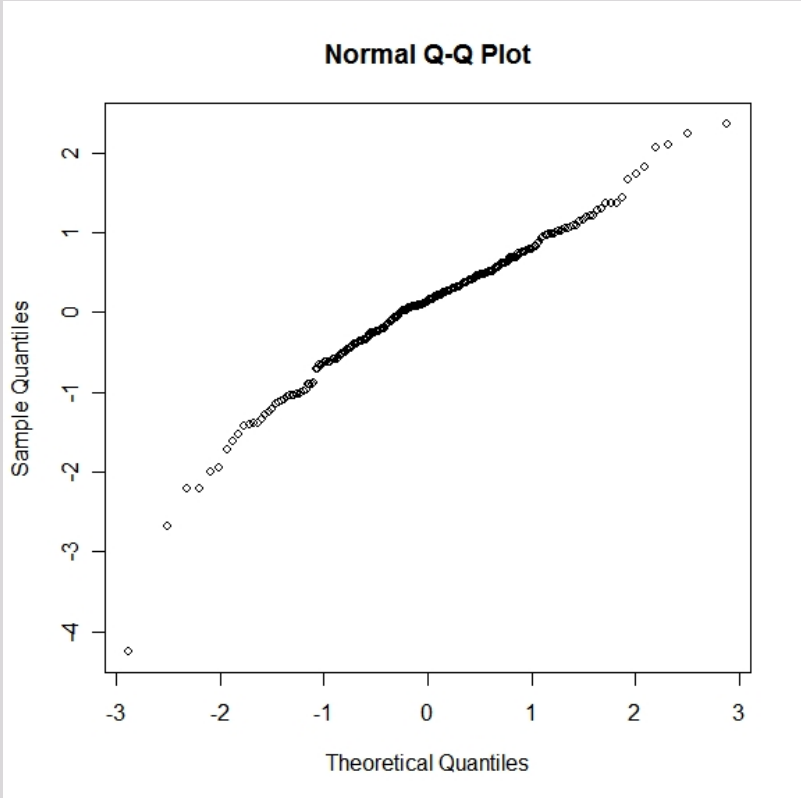
Recapitulación

1: Identificación de la presencia de heterocedasticidad condicional

Rendimientos del IBEX 35

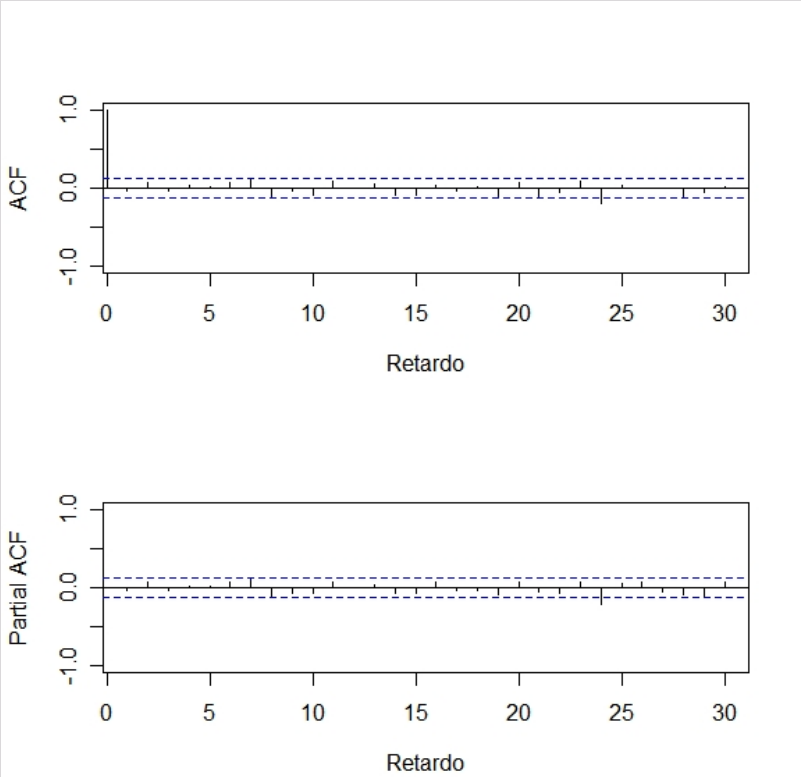


Rendimientos del IBEX 35

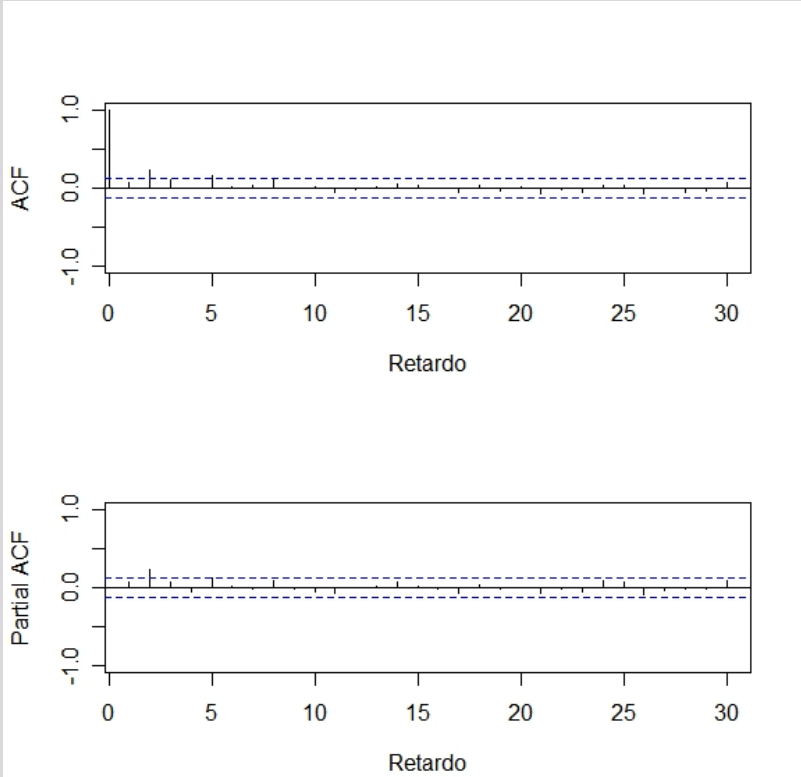


Series de Tiempo
Germán Aneiros Pérez
Introducción
Procesos ARCH: Construcción
Procesos GARCH: Construcción e identificación
Estimación
Diagnosis
Selección del modelo
Predicción
Aplicación a datos reales
Recapitulación

Rendimientos IBEX 35



Rendimientos al cuadrado



Modelos para la volatilidad

Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

Introducción

Procesos ARCH: Construcción

Procesos GARCH: Construcción e identificación

Estimación

Diagnosis

Selección del modelo

Predicción

Aplicación a datos reales

Recapitulación

Aplicación a datos reales

- Se ha chequeado la idoneidad de un proceso de ruido blanco como generador de la serie de rendimientos, y ha resultado adecuado (ruido blanco no gaussiano).
- Se ha identificado al mejor (BIC) proceso ARMA que haya podido generar a la serie: ha resultado ser un ARMA(0,0) sin constante; esto es, ruido blanco.

Modelos para la volatilidad

Series de Tiempo
Germán Aneiros Pérez
Introducción
Procesos ARCH: Construcción
Procesos GARCH: Construcción e identificación
Estimación
Diagnosis
Selección del modelo
Predicción
Aplicación a datos reales
Recapitulación

Aplicación a datos reales

2: Identificación (BIC) del GARCH

Se ha utilizado el criterio BIC para seleccionar los órdenes r y s del GARCH que sugeriremos como generador de la serie. Dichos valores se han seleccionado dentro del rango $\{0, \ldots, 4\}$.

El modelo con menor BIC ha resultado ser un GARCH(3,0) (r=3, s=0); esto es, un ARCH(3), el cual admite la representación

$$Y_t = \sigma_t Z_t,$$

donde

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1}^2 + \alpha_2 Y_{t-2}^2 + \alpha_3 Y_{t-3}^2.$$

Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

Introducción

Procesos ARCH: Construcción

Procesos GARCH: Construcción e identificación

Estimación

Diagnosis

Selección del modelo

Predicción

Aplicación a datos reales

Recapitulación

Aplicación a datos reales

3: Estimación del GARCH identificado

Las estimaciones de sus parámetros a través del método de máxima verosimilitud condicionada han resultado:

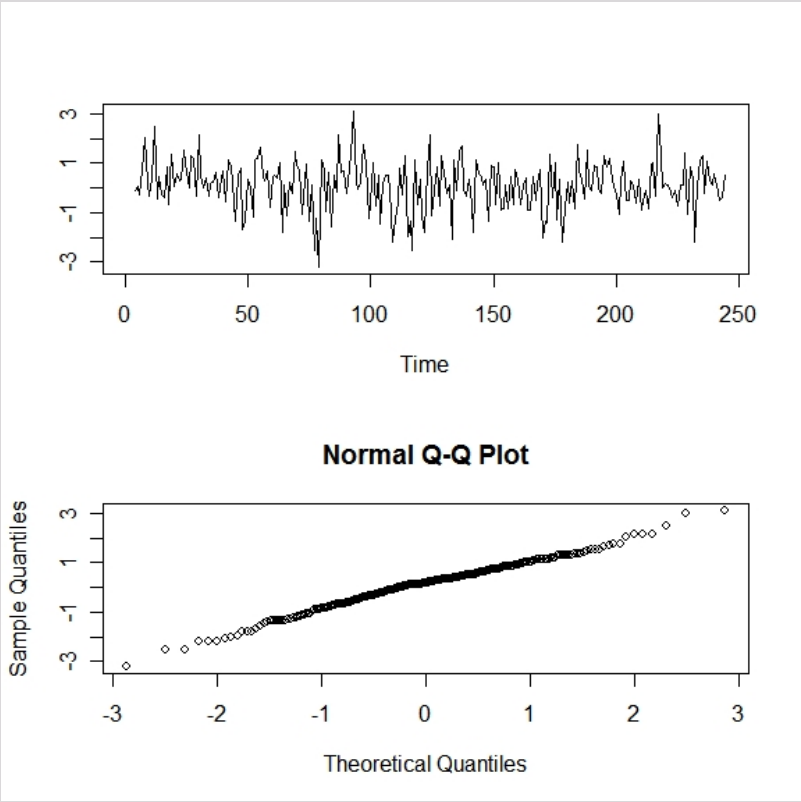
$$\widehat{\alpha_0} = 0.42410 \ (0.07436), \ \widehat{\alpha_1} = 0.01721 \ (0.08315),$$

$$\widehat{\alpha_2} = 0.26922 \ (0.06762) \text{ y } \widehat{\alpha_3} = 0.11257 \ (0.09087).$$

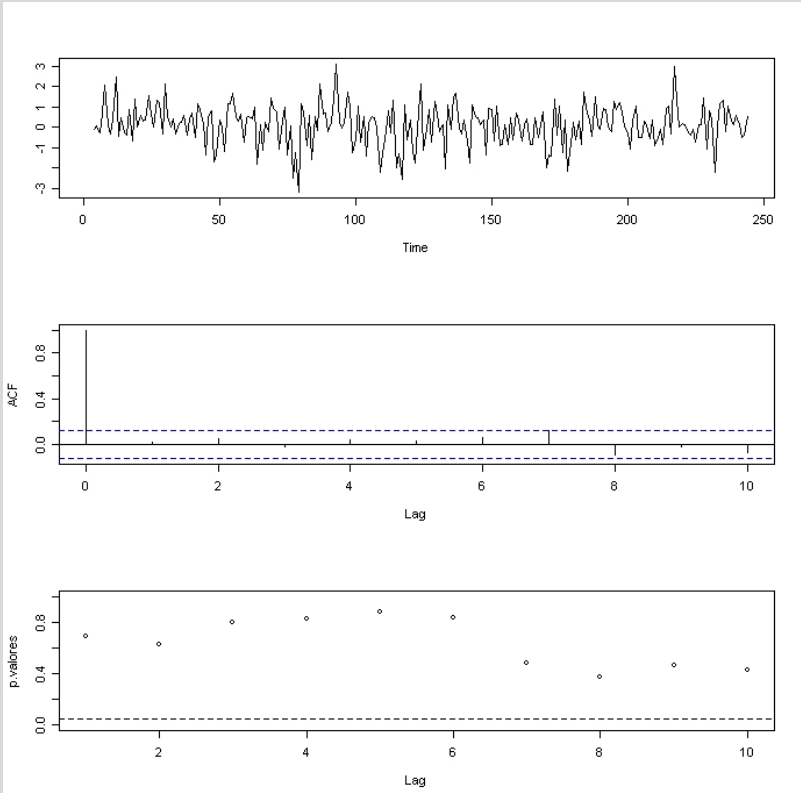
Series de Tiempo
Germán Aneiros Pérez
Introducción
Procesos ARCH: Construcción
Procesos GARCH: Construcción e identificación
Estimación
Diagnosis
Selección del modelo
Predicción
Aplicación a datos reales
Recapitulación

4: Diagnosis del modelo *ARCH*(3)

Residuos



Residuos

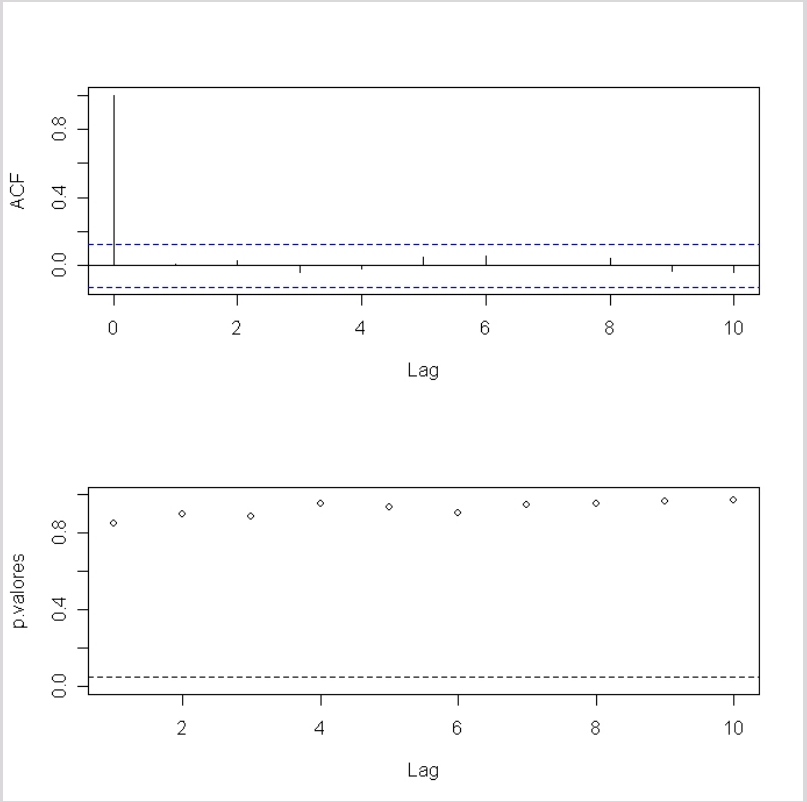


Series de Tiempo
Germán Aneiros Pérez
Introducción
Procesos ARCH: Construcción
Procesos GARCH: Construcción e identificación
Estimación
Diagnosis
Selección del modelo
Predicción
Aplicación a datos reales
Recapitulación

Residuos

- $H_0 : \mu_Z = 0$
  $p - valor = 0.1068$
- H_0 : Normalidad
  - Jarque-Bera:
    $p - valor = 0.0571$
  - Shapiro-Wilk:
    $p - valor = 0.0689$
- $H_0 : \sigma_Z^2 = 1$
  $p - valor = 0.9658$

Residuos al cuadrado



Series de Tiempo
Germán Aneiros Pérez
Introducción
Procesos ARCH: Construcción
Procesos GARCH: Construcción e identificación
Estimación
Diagnosis
Selección del modelo
Predicción
Aplicación a datos reales
Recapitulación

Aplicación a datos reales

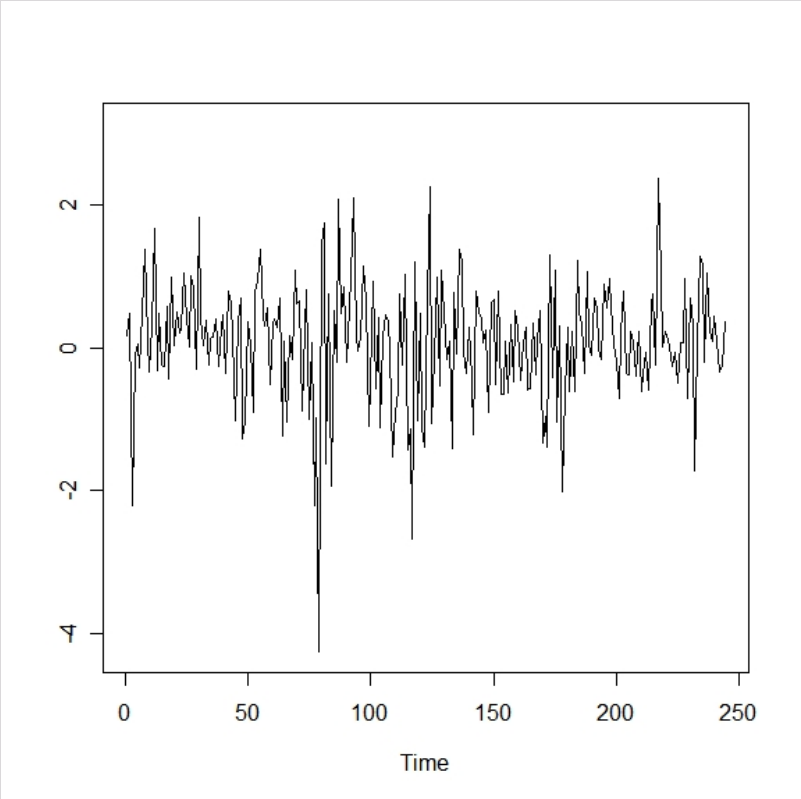
Como conclusión del estudio realizado, tenemos que un modelo $ARCH(3)$ resulta adecuado como generador de la serie de rendimientos del IBEX 35. En un principio, podemos considerar que $\{Z_t\}$ son gaussianas, si bien es verdad que los contrastes de normalidad los pasan de manera muy justa.

A continuación, mostramos varios gráficos en los que comparamos el comportamiento de la serie de rendimientos del IBEX 35 con el de la serie de los residuos del modelo ARCH(3) ajustado.

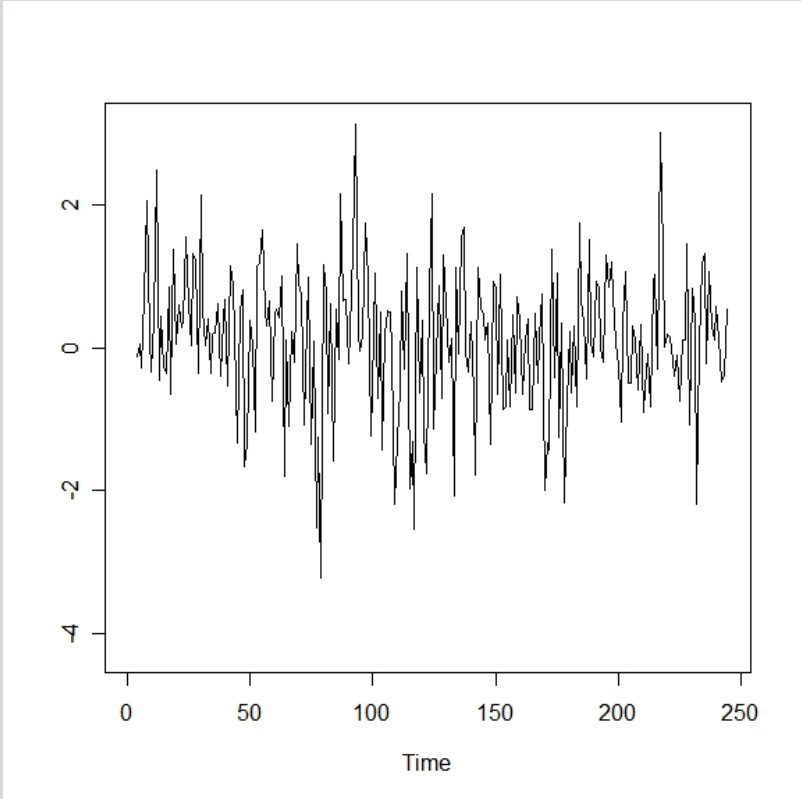
Series de Tiempo
Germán Aneiros Pérez
Introducción
Procesos ARCH: Construcción
Procesos GARCH: Construcción e identificación
Estimación
Diagnosis
Selección del modelo
Predicción
Aplicación a datos reales
Recapitulación

Rendimientos del IBEX 35 v.s. Residuos del ARCH(3)

Rendimientos del IBEX 35

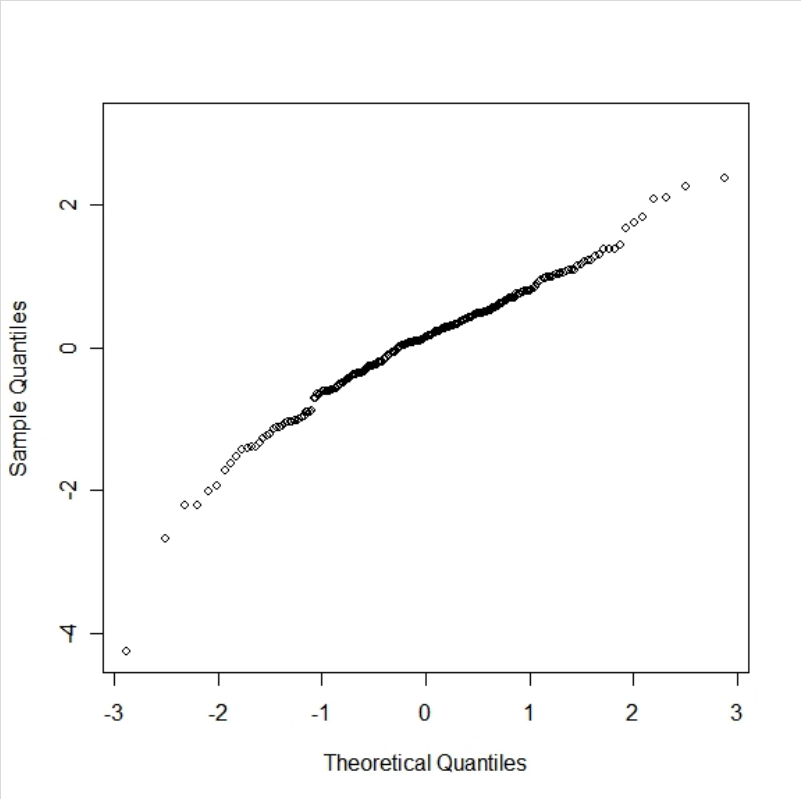


Residuos del ARCH(3)

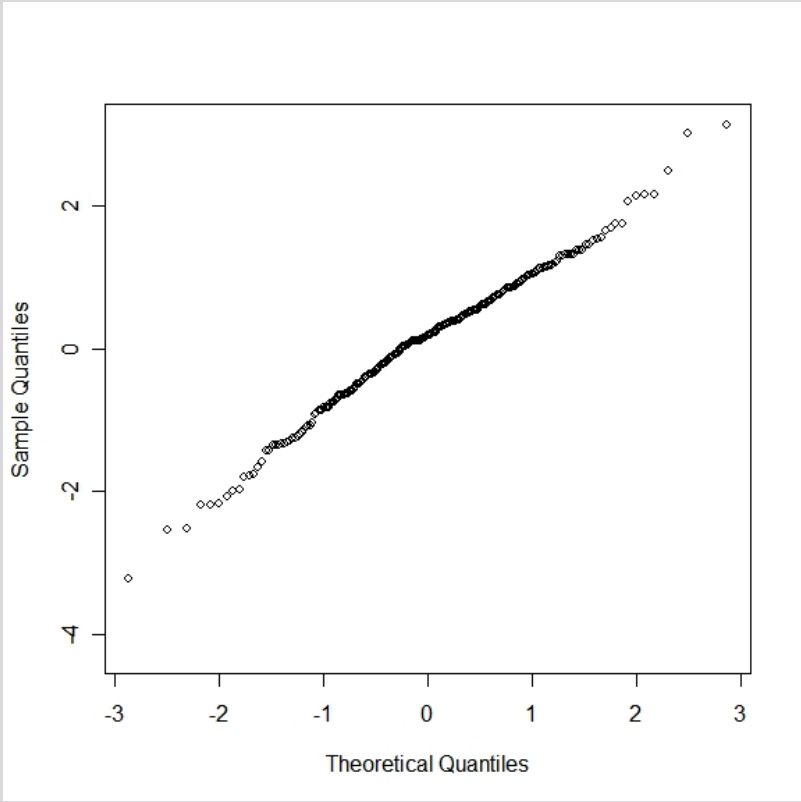


Series de Tiempo
Germán Aneiros Pérez
Introducción
Procesos ARCH: Construcción
Procesos GARCH: Construcción e identificación
Estimación
Diagnosis
Selección del modelo
Predicción
Aplicación a datos reales
Recapitulación

Rendimientos del IBEX 35

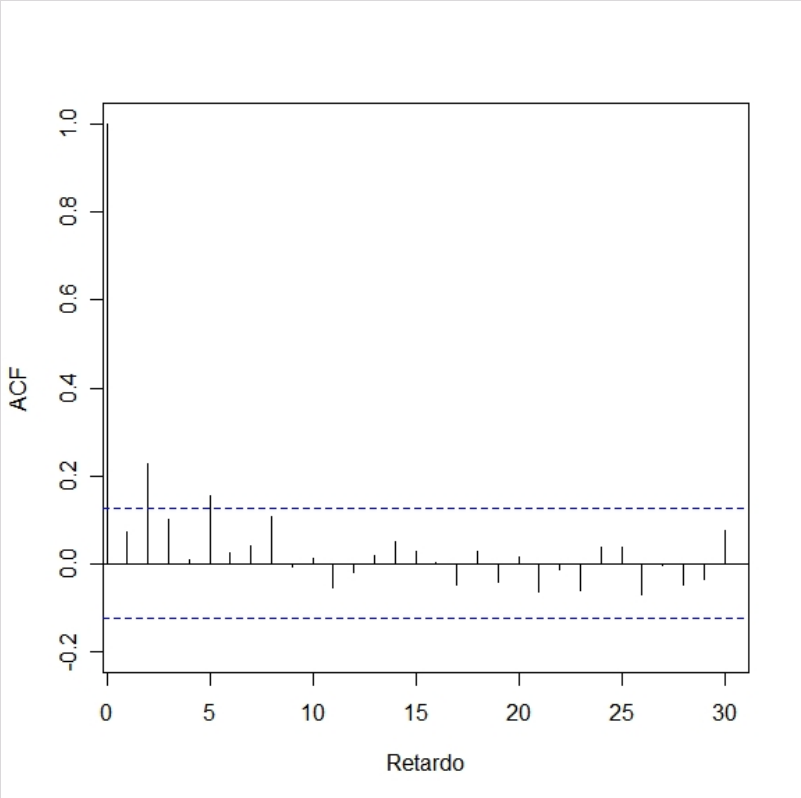


Residuos del ARCH(3)

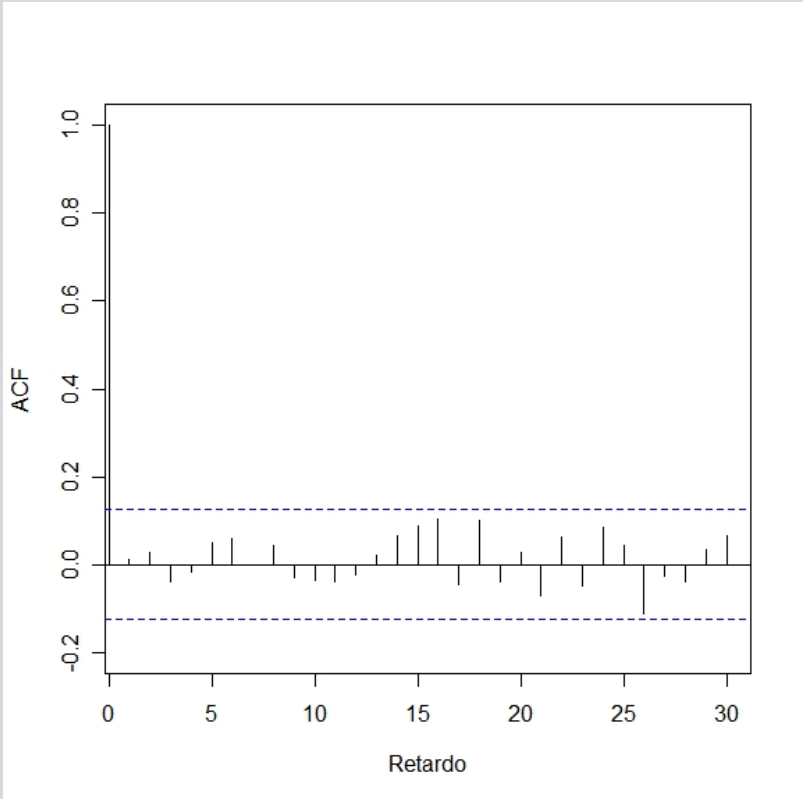


Series de Tiempo
Germán Aneiros Pérez
Introducción
Procesos ARCH: Construcción
Procesos GARCH: Construcción e identificación
Estimación
Diagnosis
Selección del modelo
Predicción
Aplicación a datos reales
Recapitulación

Cuadrado de los rendimientos del IBEX 35



Cuadrado de los residuos del ARCH(3)



Modelos para la volatilidad

Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

Introducción

Procesos ARCH: Construcción

Procesos GARCH: Construcción e identificación

Estimación

Diagnosis

Selección del modelo

Predicción

Aplicación a datos reales

Recapitulación

Aplicación a datos reales

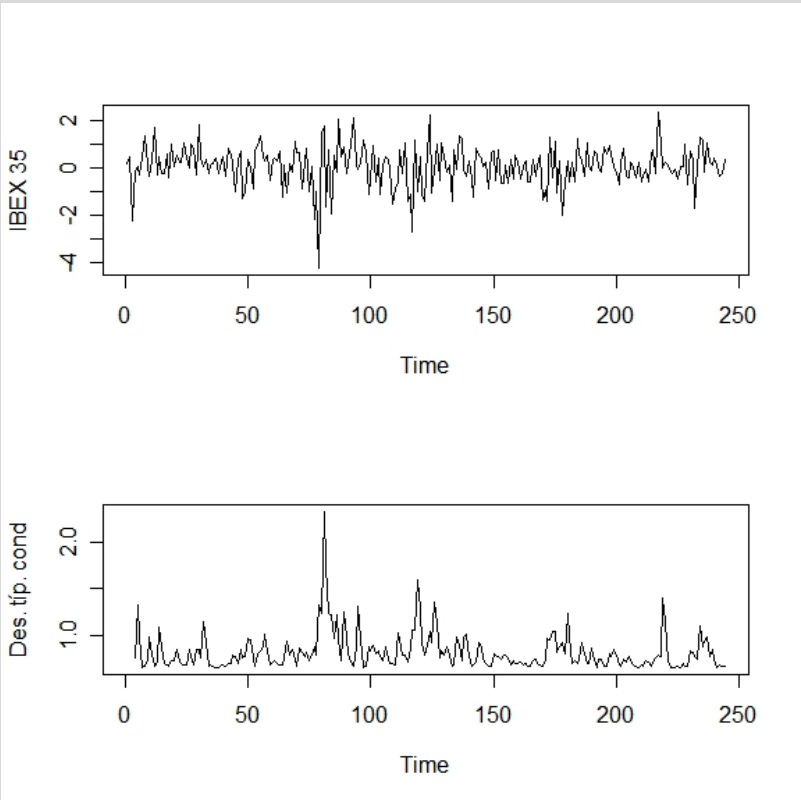
La volatilidad (varianza condicional) ajustada sigue la ecuación:

$$\widehat{\sigma}_t^2 = 0.42410 + 0.01721\, Y_{t-1}^2 + 0.26922\, Y_{t-2}^2 + 0.11257\, Y_{t-3}^2.$$

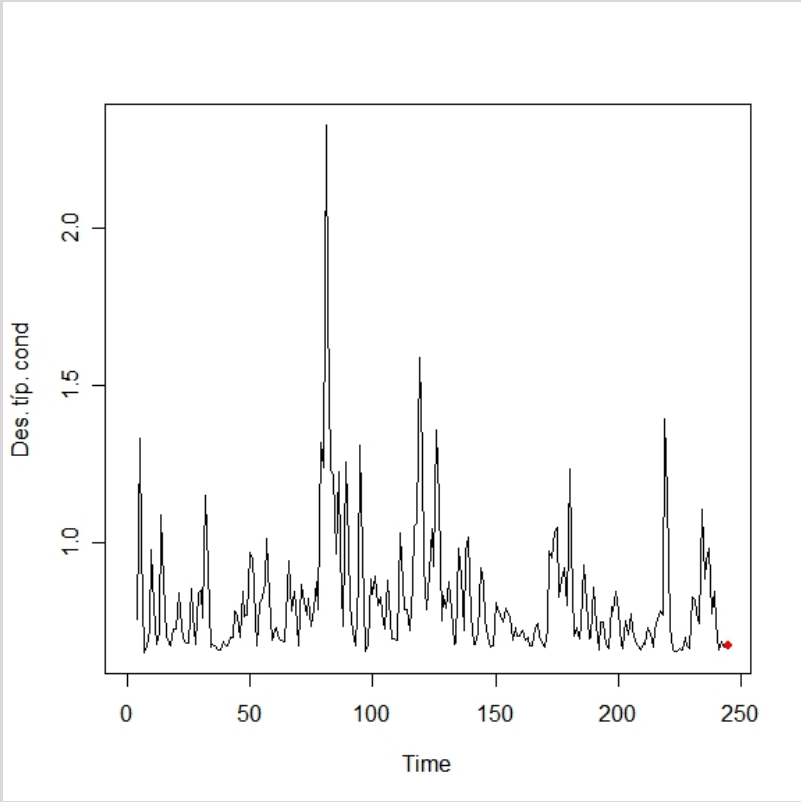
A continuación, haciendo uso de esta ecuación, comparamos los rendimientos del IBEX 35 con su desviación típica condicional ajustada. Además, predecimos dicha desviación típica a un horizonte $k = 1$.

Series de Tiempo
Germán Aneiros Pérez
Introducción
Procesos ARCH: Construcción
Procesos GARCH: Construcción e identificación
Estimación
Diagnosis
Selección del modelo
Predicción
Aplicación a datos reales
Recapitulación

Rendimientos y $\widehat{\sigma}_t$



$\widehat{\sigma}_t$ y $\widehat{\sigma}_T(1)$



Modelos para la volatilidad

Series de Tiempo
Germán Aneiros Pérez
Introducción
Procesos ARCH: Construcción
Procesos GARCH: Construcción e identificación
Estimación
Diagnosis
Selección del modelo
Predicción
Aplicación a datos reales
Recapitulación

Recapitulación

A lo largo de este tema:

- Se ha construido la clase de modelos GARCH (para modelizar la volatilidad).
- Se han propuesto algunos métodos para detectar la presencia de heterocedasticidad condicional.
- Se han propuesto estimadores para los parámetros del GARCH y se han mostrado algunas de sus propiedades asintóticas.
- Se han construido predictores para valores futuros de la volatilidad.

Modelos para la volatilidad

Recapitulación

Por último, es conveniente indicar que en ocasiones la serie de rendimientos (u otro tipo de series, especialmente de datos financieros) a analizar no será ruido blanco, sino que presentará estructura de dependencia lineal (ARMA).

En estos casos (series financieras), resulta frecuente que el ruido blanco del ARMA presente heterocedasticidad condicional. Si es así, podemos modelizar dicho ruido blanco (los residuos del ARMA) a través de un modelo GARCH.

En conjunto, habremos ajustado un modelo ARMA (para la esperanza condicional) y un modelo GARCH (para la varianza condicional).