



## Series de Tiempo

Germán  
Aneiros Pérez

Introducción

Procesos  
FARIMA:  
Construcción  
e  
identificación

Estimación

Diagnóstico

Selección del  
modelo

Predicción

Aplicación a  
datos reales

Recapitulación

## Part IV

# Modelos de memoria larga



# Modelos de memoria larga

## Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

### Introducción

Procesos FARIMA:  
Construcción e identificación

Estimación

Diagnóstico

Selección del modelo

Predicción

Aplicación a datos reales

Recapitulación

## Introducción

Comenzamos recordando la notación y suposiciones generales:

- $x_1, x_2, \dots, x_T$ : serie de tiempo observada.
- $\{X_t\}_t$ : proceso generador de la serie observada.
- $\{a_t\}_t$ : proceso de ruido blanco (innovaciones).
- $a_t$  es independiente de  $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots$ .



# Modelos de memoria larga

## Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

### Introducción

Procesos FARIMA:  
Construcción e identificación

Estimación

Diagnos

Selección del modelo

Predicción

Aplicación a datos reales

Recapitulación

## Introducción

Existen series reales **estacionarias** cuya fas:

- Toma valores positivos.
- Presenta un **decaimiento muy lento** a cero a medida que el retardo crece.

El tipo de decaimiento que se observa es distinto del de los ARIMA no estacionarios, en el sentido de que:

- En los retardos bajos es más rápido.
- En los retardos altos es mucho más lento (**memoria larga**).

Estas características se han observado principalmente en ciertas series meteorológicas, mediambientales, hidrológicas y financieras.



# Modelos de memoria larga

## Series de Tiempo

Germán  
Aneiros Pérez

### Introducción

Procesos  
FARIMA:  
Construcción  
e  
identificación

Estimación

Diagnos

Selección del  
modelo

Predicción

Aplicación a  
datos reales

Recapitulación

## Introducción

El **objetivo** de este tema es la **construcción** de un modelo estocástico (modelo **FARIMA**) que, de forma razonable, haya podido generar a una serie de tiempo de este tipo.

Entonces, basándonos en dicho modelo, efectuaremos **predicciones** de valores futuros de la serie de tiempo.

De la misma forma que ocurría en el caso de los modelos ARIMA, la base para construir los modelos FARIMA será la clase de modelos ARMA ya estudiada.



# Modelos de memoria larga

Series de  
Tiempo

Germán  
Aneiros Pérez

Introducción

Procesos  
FARIMA:  
Construcción  
e  
identificación

Estimación

Diagnos

Selección del  
modelo

Predicción

Aplicación a  
datos reales

Recapitulación

## Procesos FARIMA: Construcción e identificación

El operador **diferencia fraccional**  $(1 - B)^d$  ( $d$  no entero)

Si  $d$  fuese un número entero positivo, se verificaría que:

$$(1 - B)^d = \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} 1^{d-i} (-B)^i = \sum_{i=0}^d \alpha_i B^i,$$

donde  $\alpha_i$  puede escribirse como

$$\alpha_i = \frac{d!}{(d-i)!i!} (-1)^i.$$

Sea  $\Gamma$  la función gamma definida como

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt & , \text{ si } x > 0 \\ \infty & , \text{ si } x = 0 \\ x^{-1} \Gamma(1+x) & , \text{ si } x < 0 \end{cases}$$



# Modelos de memoria larga

Series de  
Tiempo

Germán  
Aneiros Pérez

Introducción

Procesos  
FARIMA:  
Construcción  
e  
identificación

Estimación

Diagnóstico

Selección del  
modelo

Predicción

Aplicación a  
datos reales

Resumen

## Procesos FARIMA: Construcción e identificación

Teniendo en cuenta que:

- $\Gamma(x) = (x-1)!$  para  $x = 1, 2, \dots$
- $\Gamma(x) = \infty$  para  $x = 0, -1, -2, \dots$

es sencillo observar que, cuando  $d$  es entero positivo,

$$(1-B)^d = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i B^i,$$

donde

$$\alpha_i = \frac{\Gamma(d+1)}{\Gamma(d-i+1)\Gamma(i+1)} (-1)^i.$$

Puesto que la función  $\Gamma$  está definida para cualquier argumento real, si mantenemos la última expresión de  $(1-B)^d$  para el caso en que  $d$  es una fracción, tenemos construida la definición del **operador diferencia fraccional**.



# Modelos de memoria larga

Series de  
Tiempo

Germán  
Aneiros Pérez

Introducción

Procesos  
FARIMA:  
Construcción  
e  
identificación

Estimación

Diagnos

Selección del  
modelo

Predicción

Aplicación a  
datos reales

Resumen

## Procesos FARIMA: Construcción e identificación

Un proceso **FARIMA**( $p, d, q$ ) (siendo  $p$  y  $q$  números enteros no negativos y  $-0.5 < d < 0.5$ ) es aquél que, después de diferenciarlo  $d$  veces, se convierte en un proceso **ARMA**( $p, q$ ). Es decir:

$$\{X_t\}_t \text{ es FARIMA}(p, d, q) \Leftrightarrow (1 - B)^d X_t \text{ es ARMA}(p, q).$$

Equivalentemente:  $\{X_t\}_t$  es un proceso **FARIMA**( $p, d, q$ ) si admite una representación del tipo:

$$\phi(B)(1 - B)^d X_t = c + \theta(B) a_t,$$

donde el polinomio  $\phi(z)$  no tiene raíces de módulo 1.



# Modelos de memoria larga

Series de  
Tiempo

Germán  
Aneiros Pérez

Introducción

Procesos  
FARIMA:  
Construcción  
e  
identificación

Estimación

Diagnos

Selección del  
modelo

Predicción

Aplicación a  
datos reales

Resumen

## Procesos FARIMA: Construcción e identificación

El proceso FARIMA(p,d,q):

- Es estacionario. Además,

$$c = (1 - \phi_1 - \dots - \phi_p) \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \mu$$

- Si  $\phi(z) \neq 0 \forall z$  con  $|z| \leq 1$ , entonces admite una representación MA( $\infty$ )

$$X_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i a_{t-i},$$

con  $\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 < \infty$  y  $\psi_0 = 1$ .

- Si  $\theta(z) \neq 0 \forall z$  con  $|z| \leq 1$ , entonces admite una representación AR( $\infty$ )

$$a_t = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i (X_{t-i} - \mu),$$

con  $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i^2 < \infty$  y  $\pi_0 = 1$ .



# Modelos de memoria larga

Series de  
Tiempo

Germán  
Aneiros Pérez

Introducción

Procesos  
FARIMA:  
Construcción  
e  
identificación

Estimación

Diagnos

Selección del  
modelo

Predicción

Aplicación a  
datos reales

Resumen

## Procesos FARIMA: Construcción e identificación

A partir de ahora nos centraremos en modelos FARIMA( $p, d, q$ ) con  $0 < d < 0.5$ , que son, entre los modelos fraccionales, los que tienen mayor interés práctico. Bajo este supuesto:

- Si  $\phi(z) \neq 0$  y  $\theta(z) \neq 0 \forall z$  con  $|z| \leq 1$ , entonces existe una constante  $a > 0$  tal que  $\rho_k \sim ak^{2d-1}$  cuando  $k \rightarrow \infty$  (**decaimiento algebraico**). Por tanto:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho_k = \infty$$

(procesos de **memoria larga**).

Nota: En los procesos ARMA( $p, q$ ) se verifica que existen constantes  $a$  y  $b$  (con  $|b| < 1$ ) tales que  $\rho_k \sim ab^k$  cuando  $k \rightarrow \infty$  (**decaimiento exponencial**), con lo que  $\sum_{k=0}^{\infty} \rho_k < \infty$  (procesos de **memoria corta**).



# Modelos de memoria larga

Series de  
Tiempo

Germán  
Aneiros Pérez

Introducción

Procesos  
FARIMA:  
Construcción  
e  
identificación

Estimación

Diagnosís

Selección del  
modelo

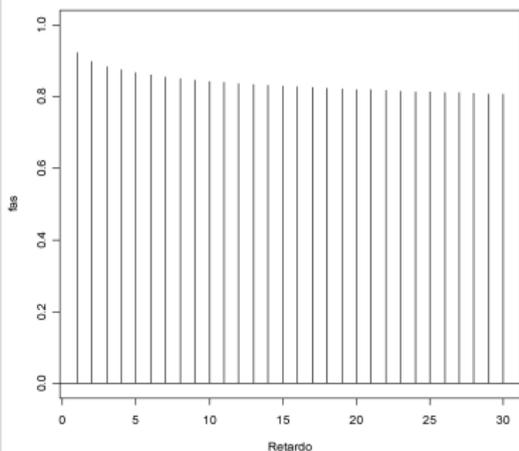
Predicción

Aplicación a  
datos reales

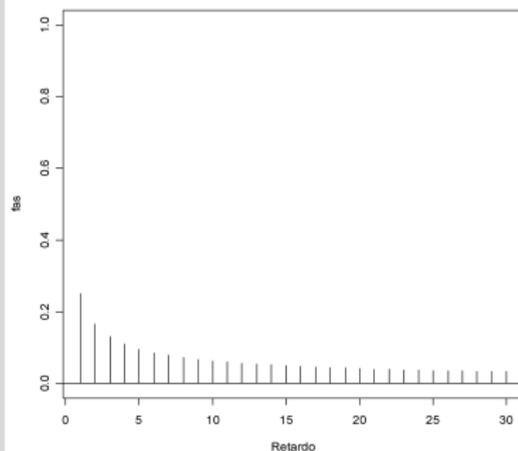
Recapitulación

## Ejemplos de la fas de procesos FARIMA

FARIMA(0,0.48,0)



FARIMA(0,0.2,0)





# Modelos de memoria larga

Series de  
Tiempo

Germán  
Aneiros Pérez

Introducción

Procesos  
FARIMA:  
Construcción  
e  
identificación

Estimación

Diagnos

Selección del  
modelo

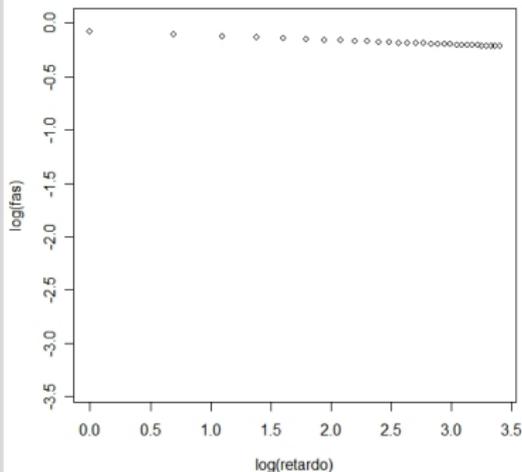
Predicción

Aplicación a  
datos reales

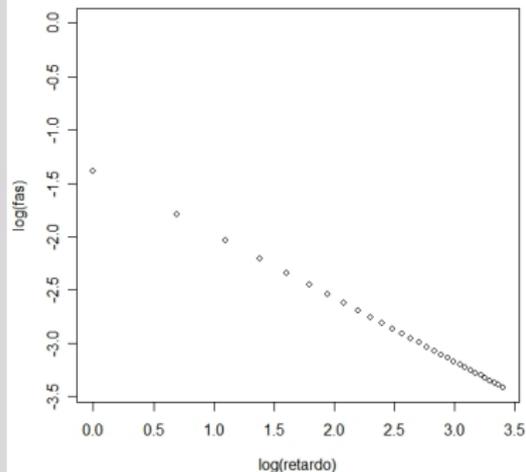
Recapitulación

## Ejemplos de la fas (log-log) de procesos FARIMA

### FARIMA(0,0.48,0)



### FARIMA(0,0.2,0)





# Modelos de memoria larga

Series de  
Tiempo

Germán  
Aneiros Pérez

Introducción

Procesos  
FARIMA:  
Construcción  
e  
identificación

Estimación

Diagnos

Selección del  
modelo

Predicción

Aplicación a  
datos reales

Recapitulación

## Procesos FARIMA: Construcción e identificación

La serie de tiempo. . . ,

¿ha sido generada por un proceso de memoria larga (FARIMA)?

- El gráfico de la serie frente al tiempo debe mostrar estacionariedad. Sin embargo:
  - 1 Una típica característica de las series generadas por procesos de memoria larga es la presencia de tendencias y ciclos locales (falsos), que desaparecen después de algún tiempo.
  - 2 Esta desaparición sólo es observable en series muy largas, lo que hace prácticamente imposible distinguir si una serie corta procede de un proceso estacionario con memoria larga o de uno no estacionario.



# Modelos de memoria larga

Series de  
Tiempo

Germán  
Aneiros Pérez

Introducción

Procesos  
FARIMA:  
Construcción  
e  
identificación

Estimación

Diagnos

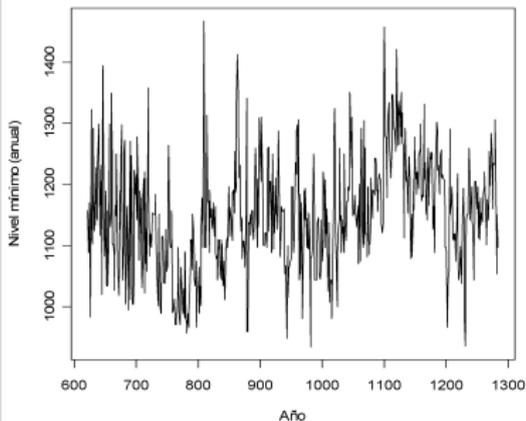
Selección del  
modelo

Predicción

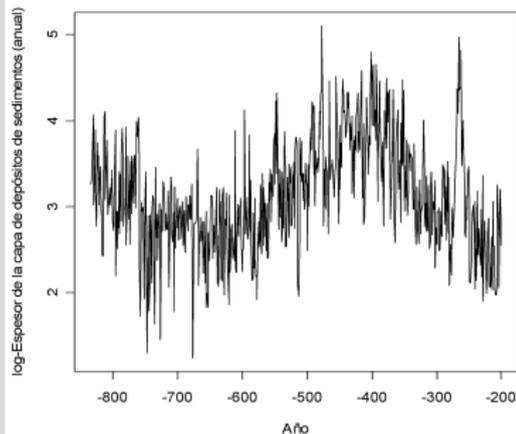
Aplicación a  
datos reales

Recapitulación

## Río Nilo



## Capa de sedimentos (log)





# Modelos de memoria larga

## Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

Introducción

Procesos FARIMA:  
Construcción e identificación

Estimación

Diagnos

Selección del modelo

Predicción

Aplicación a datos reales

Resumen

## Procesos FARIMA: Construcción e identificación

- La fas muestral  $\hat{\rho}_k$  debe converger a cero muy lentamente, en especial para retardos  $k$  grandes.
- Para valores altos del retardo  $k$ ,  $\log(\hat{\rho}_k)$  decrece linealmente a medida que  $\log(k)$  aumenta.
  - Esta propiedad distingue un proceso de memoria larga FARIMA de uno no estacionario ARIMA, pues en este último el decrecimiento lineal de  $\log(\hat{\rho}_k)$  es con  $k$  y no con  $\log(k)$ .

Nota: Para procesos con memoria larga, no está garantizada la normalidad asintótica de  $\hat{\rho}_k$ . Esto implica que las bandas  $\pm 1.96/\sqrt{T}$  que por defecto se muestran en los gráficos de la fas muestral pierden validez.



# Modelos de memoria larga

Series de  
Tiempo

Germán  
Aneiros Pérez

Introducción

Procesos  
FARIMA:  
Construcción  
e  
identificación

Estimación

Diagnosís

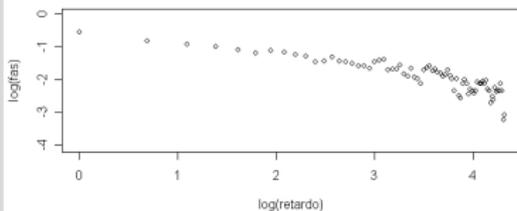
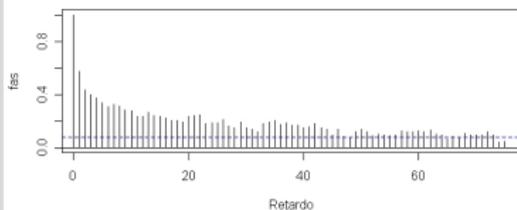
Selección del  
modelo

Predicción

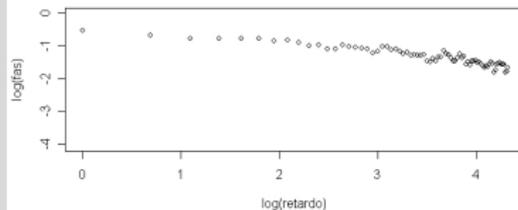
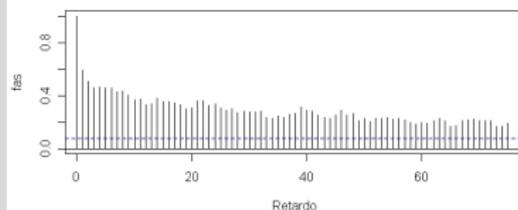
Aplicación a  
datos reales

Recapitulación

## Río Nilo



## Capa de sedimentos (log)





# Modelos de memoria larga

## Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

Introducción

Procesos FARIMA:  
Construcción e identificación

Estimación

Diagnóstico

Selección del modelo

Predicción

Aplicación a datos reales

Resumen

## Estimación

**Suposiciones generales:** La serie  $x_1, \dots, x_T$  ha sido generada por un proceso FARIMA(p,d,q)

$$\phi(B)(1-B)^d X_t = c + \theta(B) a_t,$$

- Causal e invertible (en el sentido expresado en este tema) y Gaussiano.
- Cuyos órdenes p y q son conocidos.

**Objetivo:** Estimar  $c, \phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q, \sigma_a^2$  y  $d$ .

**Métodos:** Máxima verosimilitud, y varios métodos basados en aproximaciones de la función de verosimilitud.



# Modelos de memoria larga

## Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

Introducción

Procesos FARIMA:  
Construcción e identificación

Estimación

Diagnos

Selección del modelo

Predicción

Aplicación a datos reales

Recapitulación

## Estimación

- Método de **máxima verosimilitud**: Debido a la estructura del proceso FARIMA (compárese con la del ARMA o con la del ARIMA), la aplicación de este método presenta **inconvenientes prácticos** motivados tanto por la dificultad en la construcción como por la lentitud en el cálculo de la función de verosimilitud. Como consecuencia de esto, se suelen utilizar otros métodos de estimación que, manteniendo las propiedades asintóticas de los estimadores de máxima verosimilitud, sean más sencillos de obtener.



# Modelos de memoria larga

## Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

Introducción

Procesos FARIMA:  
Construcción e identificación

Estimación

Diagnóstico

Selección del modelo

Predicción

Aplicación a datos reales

Resumen

## Estimación

- Métodos basados en **aproximaciones** de la función de verosimilitud:
  - Aproximación basada en la **representación AR( $\infty$ )** del proceso: En esencia, se supone que se dispone de todo el pasado de la serie:  $\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_T$ . Utilizando dicho pasado se construye la función de verosimilitud, posteriormente se trunca (se fijan a  $\mu$  los valores  $\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0$ ) y se obtienen los parámetros que maximizan a dicha "función de verosimilitud truncada".
  - Aproximación de **Whittle**: Consiste en aproximar a la función de verosimilitud a través de cierta función del periodograma y de la función de densidad espectral de la serie. Dicha aproximación es maximizada para obtener las estimaciones.



# Modelos de memoria larga

## Series de Tiempo

Germán  
Aneiros Pérez

Introducción

Procesos  
FARIMA:  
Construcción  
e  
identificación

**Estimación**

Diagnosís

Selección del  
modelo

Predicción

Aplicación a  
datos reales

Resumen

## Estimación

- Métodos basados en **aproximaciones** de la función de verosimilitud:
  - Aproximación de **Haslett y Raftery** (1989, Journal of the Royal Statistical Society, Series C): Una de las dificultades prácticas que tiene la construcción de la función de verosimilitud exacta es la obtención de la dependencia (correlación) entre las variables del proceso, la cual forma parte de la función de verosimilitud. En esencia, estos autores proponen utilizar valores aproximados de dicha dependencia para retardos grandes (concretamente, utilizan los valores asintóticos). De esta forma, construyen una aproximación de la función de verosimilitud, la cual es maximizada para obtener las estimaciones. Éste es el método utilizado tanto por el **R** como por el **S-PLUS**.



# Modelos de memoria larga

## Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

Introducción

Procesos FARIMA:  
Construcción e identificación

Estimación

Diagnóstico

Selección del modelo

Predicción

Aplicación a datos reales

Recapitulación

## Estimación

Al igual que en el tema anterior:

- Cuando hablamos de la función de verosimilitud nos referimos a la Gaussiana (como hipótesis de partida hemos supuesto que el proceso FARIMA( $p,d,q$ ) es Gaussiano).
- La Gaussianidad garantiza la eficiencia asintótica de los estimadores, así como la normalidad de los errores de predicción.
- La **ausencia de Gaussianidad** implica la pérdida de eficiencia de los estimadores basados en la verosimilitud Gaussiana, aunque siguen siendo asintóticamente insesgados y normales. Sin embargo, **invalida** a los **intervalos de predicción** construidos bajo la suposición Gaussiana.



# Modelos de memoria larga

## Series de Tiempo

Germán  
Aneiros Pérez

Introducción

Procesos  
FARIMA:  
Construcción  
e  
identificación

Estimación

**Diagnos**

Selección del  
modelo

Predicción

Aplicación a  
datos reales

Recapitulación

## Diagnos

Una vez que un modelo FARIMA ha sido estimado, la etapa de diagnos o chequeo de las hipótesis básicas realizadas sobre él se realiza de modo análogo a lo hecho en los procesos ARIMA.

Se trata de verificar que las innovaciones son ruido blanco (preferiblemente Gaussiano), lo cual se realiza analizando el comportamiento de los residuos.



# Modelos de memoria larga

## Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

Introducción

Procesos FARIMA:  
Construcción e identificación

Estimación

Diagnóstico

Selección del modelo

Predicción

Aplicación a datos reales

Recapitulación

## Selección del modelo

Los órdenes  $p$  y  $q$  del modelo FARIMA se seleccionan a través de alguno de los criterios AIC, AICc o BIC utilizados en la selección de modelos Box-Jenkins, con las pertinentes modificaciones provocadas por el método de estimación utilizado. Concretamente, debe tenerse presente que:

- Ahora hay un parámetro más:  $d$ .
- Si no se utiliza el método de máxima verosimilitud (exacta) para obtener las estimaciones, entonces en la expresión de las funciones AIC, AICc y BIC la función de verosimilitud  $L$  debe ser sustituida por la aproximación utilizada (función de verosimilitud truncada, aproximación de Whittle ó aproximación de Haslett y Raftery).



# Modelos de memoria larga

## Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

Introducción

Procesos FARIMA:  
Construcción e identificación

Estimación

Diagnos

Selección del modelo

**Predicción**

Aplicación a datos reales

Resumen

## Predicción

**Suposiciones generales:** Se dispone de una serie de tiempo  $x_1, \dots, x_T$  generada por un proceso estocástico  $\{X_t\}_t$ .

**Suposiciones particulares:**  $\{X_t\}_t$  tiene una estructura FARIMA con **parámetros conocidos**.

**Objetivo:** Predecir, a partir de la serie observada  $x_1, \dots, x_T$ , el valor futuro del proceso dentro de  $k$  períodos de tiempo; esto es, predecir el valor de  $X_{T+k}$ .

**Notación:** Al igual que en el tema anterior, dicha predicción (con origen en  $T$  y horizonte  $k$ ) será denotada por  $\hat{x}_T(k)$ .



# Modelos de memoria larga

## Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

Introducción

Procesos FARIMA:  
Construcción e identificación

Estimación

Diagnóstico

Selección del modelo

**Predicción**

Aplicación a datos reales

Recapitulación

## Predicción

Las predicciones se obtienen en base a la representación  $AR(\infty)$  del proceso:

$$X_t = \mu - \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i (X_{t-i} - \mu) + a_t.$$

Así, para predecir con origen en  $T$  y horizonte  $k = 1$  se hace uso de la expresión

$$X_{T+1} = \mu - \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i (X_{T+1-i} - \mu) + a_{T+1},$$

en base a la cual obtenemos

$$\hat{x}_T(1) = \mu - \sum_{i=1}^T \pi_i (x_{T+1-i} - \mu).$$



# Modelos de memoria larga

## Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

Introducción

Procesos FARIMA:  
Construcción e identificación

Estimación

Diagnos

Selección del modelo

**Predicción**

Aplicación a datos reales

Resumen

## Predicción

Para predecir con origen en  $T$  y horizonte  $k = 2$  utilizamos la predicción a horizonte 1 que acabamos de obtener ( $\hat{x}_T(1)$ ) y la expresión

$$X_{T+2} = \mu - \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i (X_{T+2-i} - \mu) + a_{T+2}.$$

Basándonos en esta expresión y haciendo uso de  $\hat{x}_T(1)$  obtenemos la predicción a horizonte  $k = 2$

$$\hat{x}_T(2) = \mu - \pi_1 (\hat{x}_T(1) - \mu) - \sum_{i=2}^{T+1} \pi_i (x_{T+2-i} - \mu).$$

La aplicación sucesiva de este procedimiento nos permite obtener  $\hat{x}_T(k)$  para cualquier horizonte  $k$ .



# Modelos de memoria larga

## Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

Introducción

Procesos FARIMA:  
Construcción e identificación

Estimación

Diagnos

Selección del modelo

Predicción

Aplicación a datos reales

Recapitulación

## Predicción

### Intervalos de predicción

Del mismo modo que ocurría en los procesos ARIMA, se tiene que, cuando "T es grande" y las innovaciones  $\{a_t\}_t$  son Gaussianas, el error de predicción verifica que

$$X_{T+k} - \hat{X}_T(k) \approx N(0, \sigma_a^2 (1 + \psi_1^2 + \dots + \psi_{k-1}^2)),$$

donde  $\psi_i$  son los coeficientes de la representación MA( $\infty$ )

$$X_t = \mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots$$

Por tanto, un intervalo de predicción (al 95%) para el valor de  $X_{T+k}$  será

$$\left( \hat{X}_T(k) \pm 1.96 \sqrt{\sigma_a^2 (1 + \psi_1^2 + \dots + \psi_{k-1}^2)} \right).$$



# Modelos de memoria larga

## Series de Tiempo

Germán  
Aneiros Pérez

Introducción

Procesos  
FARIMA:  
Construcción  
e  
identificación

Estimación

Diagnóstico

Selección del  
modelo

Predicción

**Aplicación a  
datos reales**

Recapitulación

## Aplicación a datos reales

Para finalizar, presentamos un ejemplo con datos reales en el que se hace uso de gran parte de lo expuesto en este capítulo.

La serie que analizaremos es la serie de niveles mínimos anuales del río Nilo, medidos en el indicador del Roda (cerca de El Cairo). Esta serie, que comienza en el año 622 y finaliza en el 1284, es una serie clásica dentro del contexto de los procesos con memoria larga.



# Modelos de memoria larga

Series de  
Tiempo

Germán  
Aneiros Pérez

Introducción

Procesos  
FARIMA:  
Construcción  
e  
identificación

Estimación

Diagnosís

Selección del  
modelo

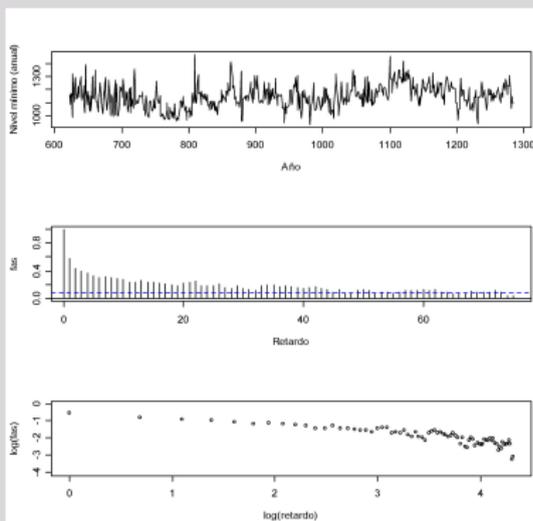
Predicción

Aplicación a  
datos reales

Recapitulación

## 1: Identificación de la presencia de memoria larga

### Nivel mínimo del río Nilo



El gráfico de la izquierda **sugiere** que la serie ha sido generada por un proceso de memoria larga.



## Aplicación a datos reales

### 2: Identificación (BIC) del FARIMA

Se ha utilizado el criterio BIC para seleccionar los órdenes  $p$  y  $q$  del FARIMA que sugeriremos como generador de la serie.

Dichos valores se han seleccionado dentro del rango  $\{0, 1, 2\}$ .

El modelo con menor BIC ha resultado ser un FARIMA(0,d,0) ( $p=q=0$ ) que, como sabemos puede representarse a través de cualquiera de las 3 formas equivalentes:

- 1  $(1 - B)^d X_t = c + a_t$
- 2  $(1 - B)^d (X_t - \mu) = a_t$
- 3  $X_t = \mu + (1 - B)^{-d} a_t$



# Modelos de memoria larga

Series de  
Tiempo

Germán  
Aneiros Pérez

Introducción

Procesos  
FARIMA:  
Construcción  
e  
identificación

Estimación

Diagnos

Selección del  
modelo

Predicción

Aplicación a  
datos reales

Resumen

## Aplicación a datos reales

### 3: **Estimación** del FARIMA identificado

Las estimaciones de sus parámetros a través de la maximización de la aproximación de la función de verosimilitud dada por Haslett y Raftery han resultado:

$$\hat{d} = 0.3938 (0.0305), \hat{\mu} = 1147.72 \text{ y } \hat{\sigma}_a^2 = 4906.31.$$

Por tanto, si los residuos superan los distintos contrastes (ruido blanco), tenemos corroborada la presencia de memoria larga (nótese que un intervalo de confianza al 95% para el parámetro de diferenciación fraccional  $d$  es  $(0.3340, 0.4536)$ ).



# Modelos de memoria larga

Series de  
Tiempo

Germán  
Aneiros Pérez

Introducción

Procesos  
FARIMA:  
Construcción  
e  
identificación

Estimación

Diagnos

Selección del  
modelo

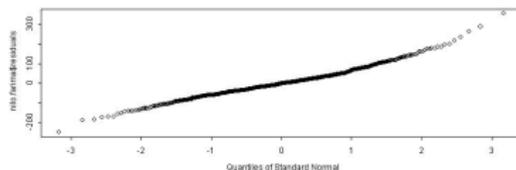
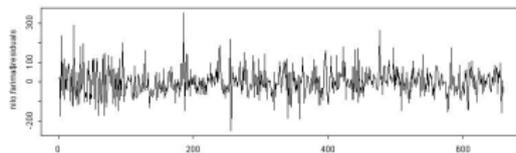
Predicción

Aplicación a  
datos reales

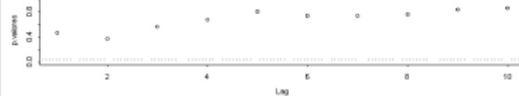
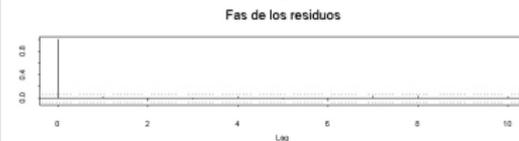
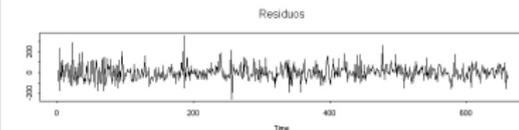
Recapitulación

## 4: **Diagnos** del modelo $FARIMA(0, 0.3938, 0)$

### Gráficos de residuos y Q-Q normal



### Contrastes de independencia





# Modelos de memoria larga

## Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

Introducción

Procesos FARIMA:  
Construcción e identificación

Estimación

Diagnóstico

Selección del modelo

Predicción

Aplicación a datos reales

Recapitulación

## Contrastes de media cero y normalidad

- $H_0 : \mu_a = 0$   
 $p - \text{valor} = 0.8182$
- $H_0 : \text{Normalidad}$ 
  - Jarque-Bera:  
 $p - \text{valor} = 0.0000$
  - Shapiro-Wilk:  
 $p - \text{valor} = 0.0055$

**Conclusión:** Un modelo FARIMA(0, 0.3938, 0) con innovaciones **no Gaussianas** resulta **adecuado** como generador de la serie de niveles mínimos anuales del río Nilo.



# Modelos de memoria larga

Series de  
Tiempo

Germán  
Aneiros Pérez

Introducción

Procesos  
FARIMA:  
Construcción  
e  
identificación

Estimación

Diagnóstico

Selección del  
modelo

Predicción

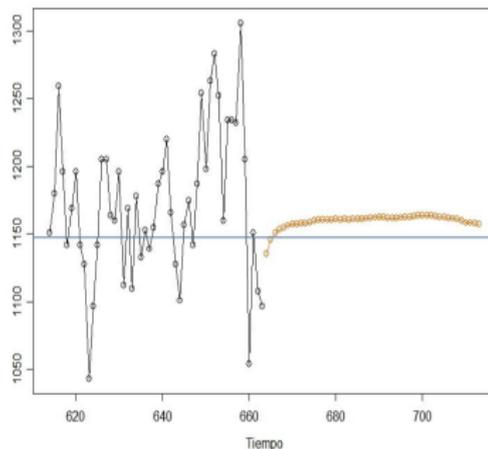
Aplicación a  
datos reales

Resumen

## 5: **Predicción** en base al modelo $FARIMA(0, 0.3938, 0)$

Para finalizar el estudio, el  $FARIMA(0, 0.3938, 0)$  que hemos seleccionado y estimado fue utilizado para realizar predicciones con **origen** en  $T = 663$  y **horizontes de predicción**  $k = 1, \dots, 50$ . Éstas pueden observarse en el gráfico de la derecha (naranja), junto con el valor de la media del FARIMA (azul).

### Predicciones, ...





# Modelos de memoria larga

## Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

Introducción

Procesos FARIMA:  
Construcción e identificación

Estimación

Diagnos

Selección del modelo

Predicción

Aplicación a datos reales

Recapitulación

## Aplicación a datos reales

Con el fin de **comparar** el comportamiento de las **predicciones** basadas en modelos de **memoria larga** (FARIMA) con el de las basadas en modelos de **memoria corta** (ARMA), se seleccionó a través del criterio BIC un modelo ARMA como posible generador de la serie que estamos estudiando. Sus órdenes  $p$  y  $q$  se seleccionaron dentro del rango  $\{0, 1, \dots, 8\}$ .

- El modelo seleccionado fue un ARMA(2,1) con constante.
- Una vez analizados los residuos, la conclusión fue que dicho ARMA(2,1) con innovaciones no Gaussianas es un modelo razonable para haber generado la serie.



# Modelos de memoria larga

## Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

Introducción

Procesos FARIMA:  
Construcción e identificación

Estimación

Diagnos

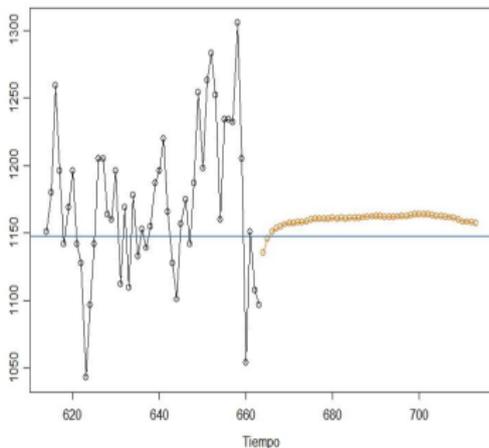
Selección del modelo

Predicción

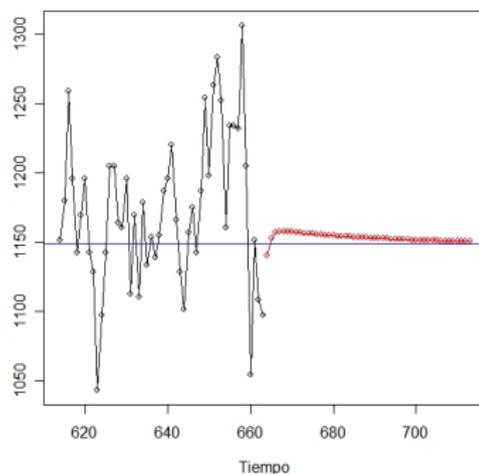
Aplicación a datos reales

Resumen

### FARIMA(0, 0.3938, 0)



### ARMA(2, 1)





# Modelos de memoria larga

## Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

Introducción

Procesos FARIMA:  
Construcción e identificación

Estimación

Diagnóstico

Selección del modelo

Predicción

Aplicación a datos reales

Resumen

## Aplicación a datos reales

Los 2 gráficos anteriores nos muestran la típica diferencia entre las predicciones basadas en modelos con memoria larga y las basadas en modelos con memoria corta:

- Aunque en ambos casos **convergen a la media**, la **velocidad** de esta convergencia es **muy superior** en los de **memoria corta**.
- Puesto que la utilización de la media como predictor de futuros valores del proceso es equivalente a la independencia del futuro con el pasado, se tiene que:
  - Memoria corta: el pasado ejerce **muy poca influencia** sobre el futuro lejano (prácticamente son independientes).
  - Memoria larga: la influencia del pasado sobre el futuro **persiste** en el tiempo.



# Modelos de memoria larga

## Series de Tiempo

Germán  
Aneiros Pérez

Introducción

Procesos  
FARIMA:  
Construcción  
e  
identificación

Estimación

Diagnos

Selección del  
modelo

Predicción

Aplicación a  
datos reales

Recapitulación

## Recapitulación

A lo largo de este tema:

- Se ha **construido** la clase de modelos FARIMA (memoria larga).
- Se han propuesto algunos métodos para **detectar** la presencia de memoria larga.
- Se han propuesto **estimadores** de sus parámetros y se han mostrado algunas de sus propiedades asintóticas.
- Se han construido **predictores** e **intervalos de predicción** para sus valores futuros.
- Se ha **comparado** el comportamiento de las predicciones basadas en modelos de **memoria larga** con las basadas en modelos de **memoria corta**.