Procesos ARIMA

- El paseo aleatorio $X_t = c + X_{t-1} + a_t$ no es estacionario. Sin embargo, el proceso diferenciado regularmente

$$X_t - X_{t-1} = c + a_t$$

es estacionario.

- El proceso $X_t = \beta_0 + \beta_1 t + V_t$ (donde $\{V_t\}_t$ es estacionario) no es estacionario. Sin embargo, el proceso diferenciado regularmente

$$X_t - X_{t-1} = \beta_1 + (V_t - V_{t-1})$$

es estacionario.

Conclusión: A veces, la diferenciación regular consigue eliminar la tendencia.

Procesos ARIMA

Los ejemplos anteriores muestran situaciones en las que la aplicación de 1 diferencia regular consigue eliminar la tendencia y transformar un proceso no estacionario en otro estacionario. En base a esto, ante una serie con tendencia, sugerimos:

- Eliminar la tendencia de la serie aplicando sucesivamente d diferencias regulares (en general, $d \leq 3$). Esto es, si después de diferenciar regularmente la serie persiste la existencia de tendencia, diferenciaremos la serie diferenciada, y así sucesivamente hasta obtener una serie sin tendencia.
- Si la serie obtenida es estacionaria, modelizarla a través de un proceso ARMA (recuérdese la gran capacidad que tiene la clase ARMA para modelizar procesos estacionarios).

Procesos ARIMA

¿Cómo construir un modelo que aglutine las ideas anteriores?

Sea $\{X_t\}_t$ un proceso con tendencia y sin componente estacional.

1. Eliminación de la tendencia: Diferenciación ($d = 1$).
$$Y_t = (1 - B)\, X_t.$$
2. Modelización de la dependencia: ARMA(1,1).
$$Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + a_t + \theta_1 a_{t-1}.$$
3. Modelo final:
$$Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + a_t + \theta_1 a_{t-1}, \text{ donde } Y_t = (1 - B)\, X_t.$$

Procesos ARIMA

OTRA FORMA DE EXPRESAR EL MODELO:

1. $Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + a_t + \theta_1 a_{t-1}$, donde $Y_t = (1-B)\,X_t$.
2. $Y_t - \phi_1 Y_{t-1} = c + a_t + \theta_1 a_{t-1}$, donde $Y_t = (1-B)\,X_t$.
3. $(1-\phi_1 B)\,Y_t = c + (1+\theta_1 B)\,a_t$, donde $Y_t = (1-B)\,X_t$.
4. $$\underbrace{(1-\phi_1 B)}_{\text{AR}}\,\underbrace{(1-B)}_{\text{Dif.}}\,X_t = c + \underbrace{(1+\theta_1 B)}_{\text{MA}}\,a_t.$$

El modelo en cuestión se denomina proceso ARIMA(1,1,1).

Procesos ARIMA

Operando en la expresión del ARIMA(1,1,1)

$$(1-\phi_1 B)(1-B)X_t = c + (1+\theta_1 B)\,a_t$$

se obtiene la representación:

$$X_t = c + (1+\phi_1)\,X_{t-1} - \phi_1 X_{t-2} + a_t + \theta_1 a_{t-1},$$

que muestra de una manera explícita la relación existente entre el presente y el pasado.

Procesos ARIMA

Un proceso ARIMA(p,d,q) es aquél que, después de aplicarle d diferencias regulares, se convierte en un proceso ARMA(p,q). Es decir:

$$\{X_t\}_t \text{ es ARIMA(p,d,q)} \Leftrightarrow (1-B)^d X_t \text{ es ARMA(p,q).}$$

Equivalentemente:

$\{X_t\}_t$ es un proceso ARIMA(p,d,q) si admite una representación del tipo:

$$\phi(B)(1-B)^d X_t = c + \theta(B) a_t,$$

donde el polinomio $\phi(z)$ no tiene raíces de módulo 1.

Procesos ARIMA

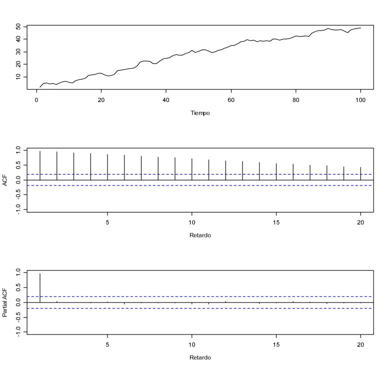
En la práctica, ante una serie real,...
¿cuándo propondremos un ARIMA como su posible generador?

Cuando detectemos no estacionariedad motivada por la presencia de tendencia. La presencia de tendencia en una serie (y, por tanto, la necesidad de diferenciarla para convertirla en estacionaria) suele ser delatada por:

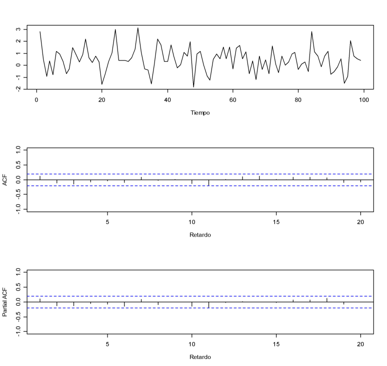
- El gráfico de la serie frente al tiempo.
- La fas muestral:
  - Toma valores positivos, siendo próximo a 1 el correspondiente al primer retardo.
  - Decae lentamente a cero (decrecimiento lineal) a medida que el retardo crece.

Modelos Box-Jenkins

Serie original (tendencia)



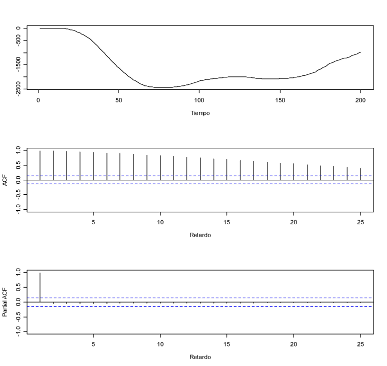
Serie diferenciada (estacionaria)



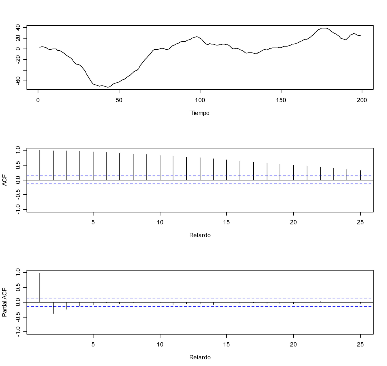
El análisis anterior sugiere que la serie diferenciada ha sido generada por un ruido blanco (serie original: ARIMA(0,1,0)).

Modelos Box-Jenkins

Serie original (tendencia)

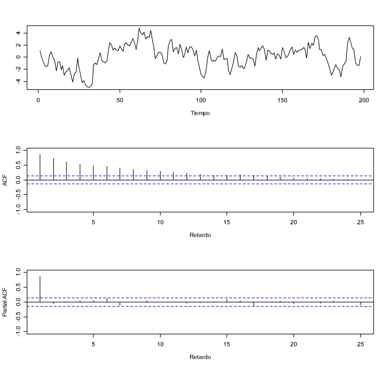


Serie diferenciada (tendencia)



Modelos Box-Jenkins

Serie diferenciada (2 veces)



Conclusión

Los gráficos estudiados sugieren que la serie original:

1. No es estacionaria.
2. Ha sido generada por un proceso ARIMA(1,2,0).

Procesos ARIMA

La clase de procesos ARIMA que acabamos de estudiar:

- Captura no estacionariedades provocadas por la presencia de tendencia.
- No captura no estacionariedades provocadas por la presencia de componente estacional.

A continuación, construiremos otra clase de procesos que modeliza no estacionariedades provocadas por la presencia de tendencia y/o componente estacional.

Modelos Box-Jenkins

Procesos ARIMA estacionales

Sea $X_t = S_t + V_t$, donde $\{V_t\}_t$ es estacionario y

1. $S_t = S_{t-s}$,
   ó
2. $S_t = S_{t-s} + W_t$ donde $\{W_t\}_t$ es estacionario con media 0.

$\{X_t\}_t$ no es estacionario, pues contiene una componente estacional S_t (determinista ó aleatoria). Sin embargo, el proceso diferenciado estacionalmente

1. $X_t - X_{t-s} = V_t - V_{t-s}$
   ó
2. $X_t - X_{t-s} = W_t + V_t - V_{t-s}$

es estacionario.

Conclusión: A veces, la diferenciación estacional consigue eliminar la componente estacional.

Procesos ARIMA estacionales

Basándonos en los ejemplos anteriores, ante una serie con tendencia y/o componente estacional, sugerimos:

- Eliminar la tendencia aplicando d diferencias regulares $((1-B)^d)$. En general, es suficiente $d \leq 3$.
- Eliminar la componente estacional aplicando D diferencias estacionales $((1-B^s)^D)$. En general, es suficiente $D = 1$.
- Una vez que la serie diferenciada es estacionaria, modelizarla a través de un ARMA:
  - Sólo dependencia regular: ARMA(p,q).
  - Sólo dependencia estacional: ARMA$(P,Q)_s$.
  - Ambos tipos de dependencia: ARMA$(p,q)\times(P,Q)_s$.

Procesos ARIMA estacionales

¿Cómo construir un modelo que aglutine las ideas anteriores?

Sea $\{X_t\}_t$ un proceso con tendencia y con componente estacional de período $s = 12$.

- Eliminación de la tendencia: $d = 1$.
$$(1 - B) X_t.$$
- Eliminación de la componente estacional: $D = 1$.
$$Y_t = (1 - B)\left(1 - B^{12}\right) X_t.$$
- Modelización de la dependencia: ARMA(1,1)×(1,1)$_{12}$.
$$(1 - \phi_1 B)\left(1 - \Phi_1 B^{12}\right) Y_t = c + (1 + \theta_1 B)\left(1 + \Theta_1 B^{12}\right) a_t$$
- Modelo final: Denotando $Y_t = (1 - B)\left(1 - B^{12}\right) X_t$,
$$(1 - \phi_1 B)\left(1 - \Phi_1 B^{12}\right) Y_t = c + (1 + \theta_1 B)\left(1 + \Theta_1 B^{12}\right) a_t$$

Procesos ARIMA estacionales

OTRA FORMA DE EXPRESAR EL MODELO:

$$\underset{\substack{\text{AR}\\\text{reg.}}}{\left(1-\phi_1 B\right)}\ \underset{\substack{\text{AR}\\\text{est.}}}{\left(1-\Phi_1 B^{12}\right)}\ \underset{\substack{\text{Dif.}\\\text{reg.}}}{\left(1-B\right)}\ \underset{\substack{\text{Dif.}\\\text{est.}}}{\left(1-B^{12}\right)}\ X_t =$$

$$c + \underset{\substack{\text{MA}\\\text{reg.}}}{\left(1+\theta_1 B\right)}\ \underset{\substack{\text{MA}\\\text{est.}}}{\left(1+\Theta_1 B^{12}\right)}\ a_t$$

Este modelo se denomina proceso ARIMA$(1,1,1)\times(1,1,1)_{12}$.

Procesos ARIMA estacionales

Operando en la expresión del ARIMA(1,1,1)×(1,1,1)$_{12}$

$$(1-\phi_1 B)\left(1-\Phi_1 B^{12}\right)(1-B)\left(1-B^{12}\right)X_t = c+(1+\theta_1 B)\left(1+\Theta_1 B^{12}\right)a_t$$

se obtiene la representación:

$$\begin{aligned} X_t &= c+(1+\phi_1)X_{t-1}-\phi_1 X_{t-2}+(1+\Phi_1)X_{t-12} \\ &\quad -(1+\phi_1+\Phi_1+\phi_1\Phi_1)X_{t-13} \\ &\quad +(\phi_1+\phi_1\Phi_1)X_{t-14}-\Phi_1 X_{t-24} \\ &\quad +(\Phi_1+\phi_1\Phi_1)X_{t-25}-\phi_1\Phi_1 X_{t-26} \\ &\quad +a_t+\theta_1 a_{t-1}+\Theta_1 a_{t-12}+\theta_1\Theta_1 a_{t-13} \end{aligned}$$

Procesos ARIMA estacionales

Un proceso ARIMA(p,d,q)$\times$(P,D,Q)$_s$ (o ARIMA estacional multiplicativo) es aquél que, después de aplicarle d diferencias regulares y D diferencias estacionales de período s, se corvierte en un proceso ARMA(p,q)$\times$(P,Q)$_s$.

Equivalentemente:

$\{X_t\}_t$ es un proceso ARIMA(p,d,q)$\times$(P,D,Q)$_s$ (o ARIMA estacional multiplicativo) si admite una representación del tipo:

$$\phi(B)\,\Phi(B^s)\,(1-B)^d\,(1-B^s)^D\,X_t = c + \theta(B)\,\Theta(B^s)\,a_t,$$

donde el polinomio $\phi(z)\,\Phi(z^s)$ no tiene raíces de módulo 1.

Modelos Box-Jenkins

Procesos ARIMA estacionales

El proceso ARIMA(p,d,q)$\times$(P,D,Q)$_s$:

- Es estacionario cuando $d = D = 0$ (se convierte en un proceso ARMA(p,q)$\times$(P,Q)$_s$).
- Generaliza a todos los procesos que hemos estudiado.
- Captura no estacionariedades provocadas por la presencia de tendencia.
- Captura no estacionariedades provocadas por la presencia de componente estacional.
- Es, posiblemente, el proceso más utilizado en la modelización de series de tiempo univariantes.

Procesos ARIMA estacionales

En la práctica, ante una serie real,...
¿cuándo propondremos un ARIMA estacional como su generador?

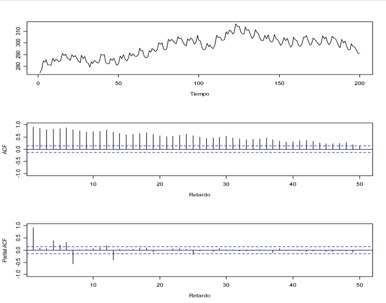
Cuando detectemos no estacionariedad motivada por la presencia de componente estacional. La presencia de componente estacional en una serie (y, por tanto, la necesidad de diferenciarla estacionalmente para eliminarla) suele ser delatada por:

- El gráfico de la serie frente al tiempo.
- La fas muestral:
  - Presenta fuerte correlación en el retardo estacional (y, posiblemente, en sus múltiplos),
  - Presenta periodicidad del mismo periodo que la serie,
  - Converge lentamente a cero a medida que el retardo crece.

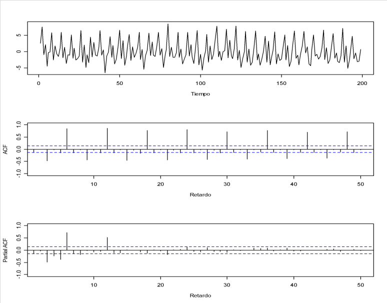
Modelos Box-Jenkins

A veces, la tendencia enmascara a la componente estacional. Por tanto, si detectamos tendencia comenzaremos por eliminarla. Posteriormente, estudiaremos la posible presencia de componente estacional en la serie sin tendencia.

Serie original

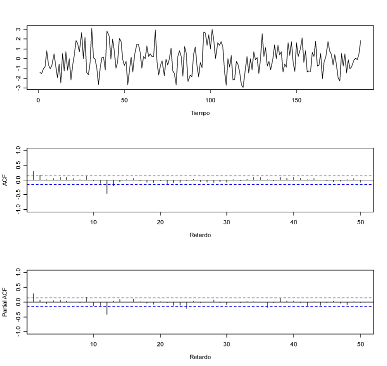


Serie diferenciada regularmente



Modelos Box-Jenkins

Serie dif. reg. y estac. (s=12)



Conclusión

Los gráficos estudiados sugieren que la serie original:

1. No es estacionaria.
2. Ha sido generada por un proceso ARIMA$(0,1,1)\times(0,1,1)_{12}$, o quizás por un ARIMA$(1,1,0)\times(0,1,1)_{12}$.

Heterocedasticidad

En los estudios teóricos y prácticos realizados hasta ahora, la falta de estacionariedad venía provocada por la presencia de tendencia y/o componente estacional (el valor medio no es constante o estable).

- Aplicando diferencias (regulares y/o estacionales, respectivamente) conseguíamos eliminar este tipo de no estacionariedad.

Otra fuente que provoca falta de estacionariedad es la heterocedasticidad (la varianza no es constante o estable).

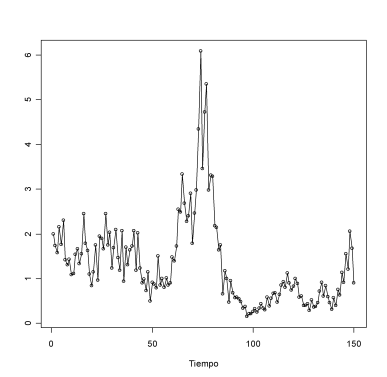
A continuación veremos cómo eliminar la heterocedasticidad.

Modelos Box-Jenkins

En el gráfico de la derecha, se intuye que la variabilidad de la serie no es constante.

Concretamente, parece que la variabilidad aumenta al hacerlo el nivel de la serie.

Serie heterocedástica

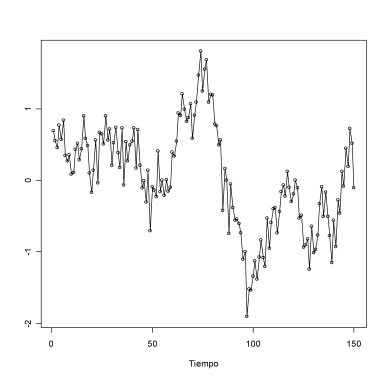


Modelos Box-Jenkins

En el gráfico de la derecha, se muestra la serie transformada a través de la función logaritmo neperiano.

Se observa que la aplicación de dicha función ha conseguido estabilizar la varianza.

Serie homocedástica



Modelos Box-Jenkins

TRANSFORMACIONES PARA ESTABILIZAR LA VARIANZA

Transformaciones de Box-Cox

La familia de transformaciones de Box-Cox se define como aquélla que transforma a x_t en:

$$\begin{cases} \dfrac{x_t^\lambda - 1}{\lambda}, & \text{si} \quad \lambda \neq 0 \\ \ln(x_t), & \text{si} \quad \lambda = 0 \end{cases}$$

- Si la desviación típica es una función potencial de la media ($\sigma_t = k\mu_t^{1-\lambda}$), entonces la transformación de Box-Cox con parámetro λ consigue estabilizar la varianza.
- Un situación muy usual es aquélla en que $\sigma_t = k\mu_t$. En este caso, la aplicación del logaritmo neperiano estabiliza la varianza.

Modelos Box-Jenkins

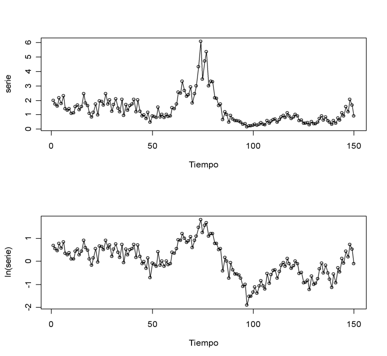
Resumen

De manera esquemática, las etapas a seguir para identificar un modelo como posible generador de una serie de tiempo son:

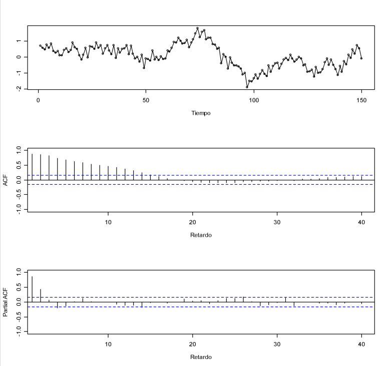
1. Si la serie presenta heterocedasticidad, eliminarla a través de una transformación de Box-Cox.
2. Si la serie (quizás transformada en la etapa 1) presenta tendencia, eliminarla a través de la diferenciación regular.
3. Si la serie (quizás transformada en las etapas 1 y/o 2) presenta componente estacional, eliminarla a través de la diferenciación estacional.
4. Identificar un modelo ARMA para la serie (quizás transformada en las etapas 1, 2 y/o 3).

Modelos Box-Jenkins

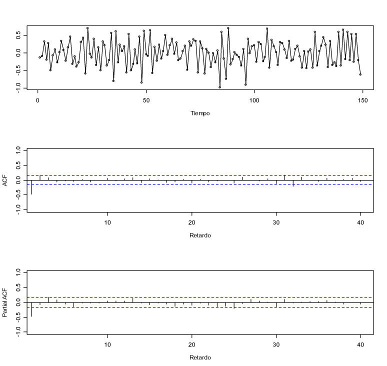
Serie y serie transformada (ln)



Serie transformada (ln)



Dif. reg. del ln de la serie



Conclusión

Los gráficos estudiados sugieren que:

1. La serie original no es estacionaria ni en media ni en varianza.
2. La serie transformada a través del logaritmo neperiano ha sido generada por un proceso ARIMA(1,1,0), ARIMA(0,1,1) o ARIMA(0,1,2).