

Boletín 1 – Ejercicio 4

Usar la simulación para calcular aproximadamente $\text{Cov}(U; e^U)$, donde U es una variable aleatoria uniforme en $(0,1)$. Comparar la aproximación obtenida con la respuesta exacta.

Para aproximar la covarianza entre U y e^U , generaremos una serie de números aleatorios entre 0 y 1 con distribución uniforme, mediante los cuales haremos una

estimación de la forma $S_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$. En nuestro caso, consideraremos un vector $x=U$ de números aleatorios con distribución uniforme en $(0,1)$ y otro, $y=e^U$, con las exponenciales de tales números aleatorios.

El código para hacer el experimento con una única réplica es el siguiente:

```
n<-1000000
U<-runif(n,0,1)
E_U<-sum(U)/n
E_ExpU<-sum(exp(U))/n
Cov<-sum((U-E_U)*(exp(U)-E_ExpU))/n
err<-abs(Cov-(3-exp(1))/2)
show(list("covarianza"=Cov,"error"=err))
```

Esta simulación nos devuelve una aproximación de $\text{Cov}[U, e^U] = 0.1409006$.

Podemos hacer también varias réplicas, generando un vector más pequeño de números aleatorios y calculando la media de los resultados obtenidos:

```
n<-10000
m<-1000
Cov<-numeric(m)
for (i in 1:m) {
  U<-runif(n,0,1)
  E_U<-sum(U)/n
  E_ExpU<-sum(exp(U))/n
  Cov[i]<-sum((U-E_U)*(exp(U)-E_ExpU))/n
}
err<-abs(mean(Cov)-(3-exp(1))/2)
show(list("covarianza"=mean(Cov),"error"=err))
summary(Cov)
```

En este caso, la nueva aproximación es $\text{Cov}[U, e^U] = 0.1408465$. Esta es la media de cada una de las réplicas, las cuales tomaron valores entre 0.1370 y 0.1446.

También podemos repetir el experimento usando un generador congruencial lineal en vez del proporcionado por R. En nuestro caso, usaremos el dado por $a = 16807$, $c = 0$ y $m = 2^{31} - 1$ tomando como semilla 1. El código es el siguiente:

```
GenLin<-function(n,a,c,m,sem) {
  z<-numeric(n)
  z[1]<-sem%%m
  for (i in 2:n) {
    z[i]<-(a*z[i-1]+c)%%m
  }
  newsem<-z[n]
  u<-z/m
  return(u)
}
n<-100000
U<-GenLin(n,a=16807,c=0,m=2^31-1,1)
E_U<-sum(U)/n
E_ExpU<-sum(exp(U))/n
Cov<-sum((U-E_U)*(exp(U)-E_ExpU))/n
err<-abs(Cov-(3-exp(1))/2)
show(list("covarianza"=Cov,"error"=err))
```

El resultado obtenido es $\text{Cov}[U, e^U] = 0.1405896$.

Finalmente, vamos a hacer el cálculo exacto:

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}[U, e^U] &= E[(U - E[U]) \cdot (e^U - E[e^U])] = \\
 &= E[U \cdot e^U - e^U \cdot E[U] - U \cdot E[e^U] + E[U] \cdot E[e^U]] = \\
 &= E[U \cdot e^U] - E[e^U \cdot E[U]] - E[U \cdot E[e^U]] + E[E[U] \cdot E[e^U]] = \\
 &= E[U \cdot e^U] - E[U] \cdot E[e^U] = \\
 &= \int_0^1 x e^x dx - \left(\int_0^1 x dx \right) \cdot \left(\int_0^1 e^x dx \right) = e^x \left(x - 1 \right) \Big|_0^1 - \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \cdot e^x \Big|_0^1 = \\
 &= (0 - (-1)) - \left(\frac{1}{2} - 0 \right) \cdot (e - 1) = \frac{1}{2}(3 - e) \approx 0.1408591
 \end{aligned}$$

En resumen, hemos obtenido los siguientes resultados:

Modo	Resultado	Error
Una réplica	0.1409006	4.147198 e-5
Mil réplicas	0.1408123	1.257266 e-5
Generador lineal	0.1405896	2.694988 e-4
Exacto	$\frac{1}{2}(3-e) \approx 0.1408591$	0