Procesos ARMA: Estimación y diagnosis

Supongamos que la serie de tiempo $x_1, \ldots, x_T$ ha sido generada por un proceso ARMA(p,q):

- Causal, invertible y gaussiano.
- Cuyos órdenes p y q son conocidos.

Representemos dicho proceso a través de

$$\begin{aligned} X_t = \; & c + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} \\ & + a_t + \theta_1 a_{t-1} + \theta_2 a_{t-2} + \cdots + \theta_q a_{t-q}. \end{aligned}$$

Los parámetros $c, \phi_1, \ldots, \phi_p, \theta_1, \ldots, \theta_q$ y σ_a^2 son desconocidos. A continuación, abordaremos su estimación.

Nota: Todo lo que se presentará en esta sección es válido para los ARMA regulares (ARMA(p,q)), estacionales (ARMA(P,Q)$_s$) y estacionales multiplicativos (ARMA(p,q) $\times$ ARMA(P,Q)$_s$).

Procesos ARMA: Estimación (mín. cuadrados condicionados)

Dados $(\tilde{c}, \tilde{\phi}_1, \ldots, \tilde{\phi}_p, \tilde{\theta}_1, \ldots, \tilde{\theta}_q)$, se consideran los residuos

$$\hat{a}_t = X_t - \tilde{c} - \tilde{\phi}_1 X_{t-1} - \cdots - \tilde{\phi}_p X_{t-p} - \tilde{\theta}_1 \hat{a}_{t-1} - \cdots - \tilde{\theta}_q \hat{a}_{t-q}$$

y la suma de sus cuadrados

$$S\left(\tilde{c}, \tilde{\phi}_1, \ldots, \tilde{\phi}_p, \tilde{\theta}_1, \ldots, \tilde{\theta}_q\right) = \sum_{t=1}^{T} \hat{a}_t^2$$

La estimación de los parámetros $c, \phi_1, \ldots, \phi_p, \theta_1, \ldots, \theta_q$ por medio del método de mínimos cuadrados condicionados se obtiene a través de los valores $(\hat{c}, \hat{\phi}_1, \ldots, \hat{\phi}_p, \hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_q)$ que minimizan a la función S condicionada a que $\hat{a}_{1-q} = \hat{a}_{2-q} = \cdots = \hat{a}_0 = \hat{a}_1 = \cdots = \hat{a}_p = 0$.

Procesos ARMA: Estimación (máxima verosimilitud)

La credibilidad que los valores $\tilde{c}, \tilde{\phi}_1, \ldots, \tilde{\phi}_p, \tilde{\theta}_1, \ldots, \tilde{\theta}_q, \tilde{\sigma}_a^2$ dan a la serie $x_1, \ldots, x_T$ se mide a través de la función de verosimilitud:

$$L_{x_1,\ldots,x_T}\left(\tilde{c}, \tilde{\phi}_1, \ldots, \tilde{\phi}_p, \tilde{\theta}_1, \ldots, \tilde{\theta}_q, \tilde{\sigma}_a^2\right) = f_{\tilde{c},\tilde{\phi}_1,\ldots,\tilde{\phi}_p,\tilde{\theta}_1,\ldots,\tilde{\theta}_q,\tilde{\sigma}_a^2}\left(x_1, \ldots, x_T\right),$$

donde $f_{\tilde{c},\tilde{\phi}_1,\ldots,\tilde{\phi}_p,\tilde{\theta}_1,\ldots,\tilde{\theta}_q,\tilde{\sigma}_a^2}$ denota a la función de densidad conjunta de un vector aleatorio $(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_T)'$ procedente de un proceso ARMA con parámetros $\tilde{c}, \tilde{\phi}_1, \ldots, \tilde{\phi}_p, \tilde{\theta}_1, \ldots, \tilde{\theta}_q, \tilde{\sigma}_a^2$.

Nota: A partir de ahora, suprimiremos los subíndices en las funciones de densidad y verosimilitud; esto es, serán denotadas por f y L, respectivamente.

Procesos ARMA: Estimación (máxima verosimilitud)

La estimación de máxima verosimilitud de los parámetros $c, \phi_1, \ldots, \phi_p, \theta_1, \ldots, \theta_q$ y σ_a^2 se obtiene a través de los valores que dan mayor credibilidad a la serie $x_1, \ldots, x_T$.

Por tanto, la estimación de los parámetros $c, \phi_1, \ldots, \phi_p$, $\theta_1, \ldots, \theta_q$ y σ_a^2 por medio del método de máxima verosimilitud se obtiene a través de los valores $(\hat{c}, \hat{\phi}_1, \ldots, \hat{\phi}_p, \hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_q$ y $\hat{\sigma}_a^2)$ que maximizan a la función de verosimilitud L.

Procesos ARMA: Estimación (máxima verosimilitud)

Ejemplo: $\{X_t\}_t$ es un proceso ARMA(p,q) gaussiano

$$L\left(\tilde{c},\tilde{\phi}_1,\ldots,\tilde{\phi}_p,\tilde{\theta}_1,\ldots,\tilde{\theta}_q,\tilde{\sigma}_a^2\right)=$$
$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^T\left|\tilde{\mathbf{V}}_T\right|}}\exp\left(-\frac{(\mathbf{x}_T-\tilde{\mu}_T)'\,\tilde{\mathbf{V}}_T^{-1}\,(\mathbf{x}_T-\tilde{\mu}_T)}{2}\right),$$

donde $\mathbf{x}_T=(x_1,\ldots,x_T)'$, $\tilde{\mu}_T=(\tilde{\mu},\ldots,\tilde{\mu})'$ con

$$\tilde{\mu}=E\left(\tilde{X}_t\right)=\tilde{c}/\left(1-\tilde{\phi}_1-\cdots-\tilde{\phi}_p\right)$$

y $\tilde{\mathbf{V}}_T$ es la matriz de varianzas-covarianzas del vector aleatorio $(\tilde{X}_1,\ldots,\tilde{X}_T)'$ procedente de un proceso ARMA(p,q) con parámetros $\tilde{c},\tilde{\phi}_1,\ldots,\tilde{\phi}_p,\tilde{\theta}_1,\ldots,\tilde{\theta}_q$ y $\tilde{\sigma}_a^2$.

Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

Introducción

Procesos ARMA: Construcción e identificación

Procesos ARMA: Estimación y diagnosis

Procesos ARMA: Selección del modelo y predicción

Procesos ARIMA: Construcción e identificación

Procesos ARMA: Estimación (máxima verosimilitud)

Ejemplo: Proceso AR(1) gaussiano $X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + a_t$

Se tiene que

$$L\left(\tilde{c}, \tilde{\phi}_1, \tilde{\sigma}_a^2\right) = \left(2\pi\tilde{\sigma}_a^2\right)^{-T/2} \left(1 - \tilde{\phi}_1^2\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{S\left(\tilde{c}, \tilde{\phi}_1\right)}{2\tilde{\sigma}_a^2}\right),$$

donde

$$S\left(\tilde{c}, \tilde{\phi}_1\right) = \left(1 - \tilde{\phi}_1^2\right)\left(x_1 - \frac{\tilde{c}}{1 - \tilde{\phi}_1}\right)^2 + \sum_{t=2}^{T}(x_t - \tilde{c} - \tilde{\phi}_1 x_{t-1})^2$$

Los valores de $\tilde{c}, \tilde{\phi}_1$ y $\tilde{\sigma}_a^2$ que maximizan a la función L dan lugar a los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros del AR(1) gaussiano.

Modelos Box-Jenkins

Procesos ARMA: Estimación (máxima verosimilitud)

Bajo condiciones adecuadas, se tiene que:

- Los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros $\mu, \phi_1, \ldots, \phi_p, \theta_1, \ldots, \theta_q$ de un ARMA(p,q) gaussiano son asintóticamente óptimos: Si el tamaño T de la serie es grande, se puede considerar que
  1. Son centrados (o insesgados).
  2. Son eficientes.
  3. Su distribución es normal.
- El estimador de máxima verosimilitud de σ_a^2 es consistente.

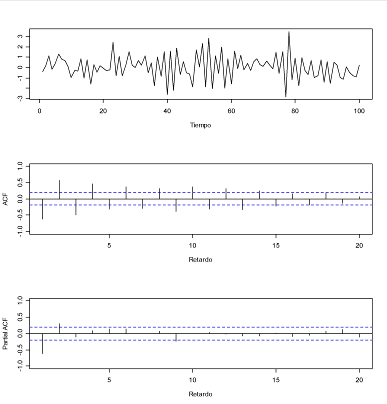
Nota: La importancia de la propiedad 3 radica en que nos permite construir intervalos/regiones de confianza y constrastes de hipótesis referentes a los parámetros. Las propiedades 1 y 3 se mantienen para estimadores basados en la verosimilitud gaussiana, aunque el proceso no sea gaussiano.

Modelos Box-Jenkins

Identificación

En un ejemplo anterior, habíamos hecho un análisis básico de cierta serie y de sus fas y fap muestrales (gráfico de la derecha). Dicho análisis sugería que la serie podría haber sido generada por un proceso AR(2).

Serie, fas y fap



Procesos ARMA: Estimación

Si estimamos sus parámetros por máxima verosimilitud resulta:

$$\widehat{\phi}_1 = -0.4201 \ (0.0942),\ \widehat{\phi}_2 = 0.3096 \ (0.0943),$$

$$\widehat{\mu} = 0.0473 \ (0.0794) \text{ y } \widehat{\sigma}_a^2 = 0.7799.$$

Observamos que, al 5%, la media μ no es significativamente distinta de cero. Pasamos por tanto a estimar un AR(2) con $\mu = 0$.

Nota: Estimar un ARMA(p,q) con $\mu = 0$ es lo mismo que estimar un ARMA(p,q) con $c = 0$, pues se tiene que

$$c = \mu\,(1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p).$$

Procesos ARMA: Estimación

Bajo la restricción $\mu = 0$, se obtienen las estimaciones:

$$\widehat{\phi}_1 = -0.4149\ (0.0939),\ \widehat{\phi}_2 = 0.315\ (0.094) \text{ y } \widehat{\sigma}_a^2 = 0.7826,$$

resultando todos sus parámetros significativamente distintos de cero (al 5%).

Por tanto, el AR(2) estimado es:

$$X_t = -0.4149 X_{t-1} + 0.315 X_{t-2} + a_t,$$

siendo 0.7826 la varianza del ruido blanco.

Procesos ARMA: Diagnosis

Una vez que un modelo ARMA ha sido ajustado, la siguiente etapa es la "comprobación" de que las hipótesis básicas realizadas sobre él se verifican. Esto se conoce como la diagnosis o chequeo del modelo ajustado.

- La hipótesis más importante es la que exige que las innovaciones $\{a_t\}_t$ sean ruido blanco, esto es:
  - Tengan media cero.
  - Tengan varianza constante.
  - Estén incorreladas.

  Su no verificación invalida al modelo ajustado como posible generador de la serie de tiempo en estudio.

Modelos Box-Jenkins

Procesos ARMA: Diagnosis

- La hipótesis de normalidad es conveniente por tres motivos:
  1. Bajo normalidad, el ruido blanco equivale a la independencia. Esto garantiza que no estamos dejando información por modelizar.
  2. Bajo normalidad, los estimadores que utilizamos (máxima verosimilitud gaussiana) son asintóticamente eficientes.
  3. Próximamente realizaremos predicciones de valores futuros del proceso, resultando conveniente que vayan acompañadas de intervalos de predicción. Si no tenemos normalidad, no podremos "garantizar" su nivel de confianza.

Modelos Box-Jenkins

Procesos ARMA: Diagnosis

A continuación, presentamos algunos gráficos que nos pueden asesorar acerca de si una muestra es o no una realización de un conjunto de variables aleatorias $a_1, \ldots, a_T$ procedentes de un proceso de ruido blanco gaussiano.

Procesos ARMA: Diagnosis

El gráfico de la muestra frente al tiempo

La representación gráfica de la muestra frente al tiempo puede ayudarnos a detectar de manera visual y rápida la presencia de:

- Tendencia.
- Componente estacional.
- Variabilidad no constante.
- Dependencia lineal
  - Positiva: tendencias que desaparecen a corto plazo (tendencias locales).
  - Negativa: valores altos son seguidos con frecuencia por valores bajos, y viceversa (zig-zag).

Cualquiera de estas situaciones invalidaría la hipótesis de ruido blanco.

Procesos ARMA: Diagnosis

El gráfico Q-Q normal

El gráfico Q-Q (Cuantil-Cuantil) normal representa a los cuantiles muestrales frente a los cuantiles de una distribución $N(0,1)$.

Si la muestra es i.i.d. con distribución normal, el gráfico Q-Q normal debería ser aproximadamente lineal.

Por tanto, la no linealidad del gráfico Q-Q normal sugiere ausencia de normalidad.

Procesos ARMA: Diagnosis

A continuación, presentamos varios contrastes de hipótesis diseñados para contrastar si una muestra es una realización de un conjunto de variables aleatorias $a_1, \ldots, a_T$:

- Independientes.
- Con media cero.
- Con distribución común gaussiana.

Procesos ARMA: Diagnosis

Contraste de independencia

Denotemos por $\widehat{\rho}_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ a la fas muestral.

Bajo la hipótesis nula de que $a_1, \ldots, a_T$ son i.i.d. con varianza finita, y asumiendo que el tamaño muestral T es "grande", se tiene que:

$$\widehat{\rho}_k \approx N\left(0, \frac{1}{\sqrt{T}}\right).$$

Por tanto, rechazaremos la independencia (al 5%) si

$$|\widehat{\rho}_k| \geq \frac{1.96}{\sqrt{T}}$$

Procesos ARMA: Diagnosis

Contraste de independencia

Utilicemos ahora además la notación

$$Q_H = T\,(T+2)\sum_{k=1}^{H} \frac{\widehat{\rho}_k^2}{T-k}$$

Bajo la hipótesis nula de que $a_1, \ldots, a_T$ son i.i.d. con varianza finita, y asumiendo que el tamaño muestral T es "grande", se tiene que:

$$Q_H \approx \chi_H^2$$

Por tanto, rechazaremos la independencia (al 5%) si el valor de Q_H es mayor o igual que el percentil 0.95 de la distribución χ_H^2. Este contraste se conoce como contraste de Ljung-Box.

Procesos ARMA: Diagnosis

Contraste de media cero

Utilicemos ahora la notación $\bar{a}$ y s^2 para denotar a la media y a la varianza muestrales, respectivamente.

Bajo la hipótesis nula de que $a_1, \ldots, a_T$ son i.i.d. con media cero y varianza finita, y asumiendo que el tamaño muestral T es "grande", se tiene que:

$$\bar{a} \approx N\left(0, \frac{s}{\sqrt{T}}\right)$$

Por tanto, rechazaremos que la media μ_a es cero (al 5%) si

$$|\bar{a}| \geq 1.96 \frac{s}{\sqrt{T}}$$

Procesos ARMA: Diagnosis

Contraste de normalidad

Utilicemos ahora la notación

$$G_1 = \frac{\sum_{t=1}^{T} (a_t - \bar{a})^3}{Ts^3} \text{ y } G_2 = \frac{\sum_{t=1}^{T} (a_t - \bar{a})^4}{Ts^4} - 3$$

Bajo la hipótesis nula de que $a_1, \ldots, a_T$ son i.i.d. con distribución gaussiana, y asumiendo que el tamaño muestral T es "grande", se tiene que:

$$T\left(\frac{G_1^2}{6} + \frac{G_2^2}{24}\right) \approx \chi_2^2$$

Rechazaremos la normalidad (al 5%) si el valor del estadístico es mayor o igual que el percentil 0.95 de la distribución χ_2^2. Este contraste se conoce como contraste de Jarque-Bera.

Modelos Box-Jenkins

Procesos ARMA: Diagnosis

Contraste de normalidad

Sea $\omega = \dfrac{\left(\sum_{t=1}^{[T/2]} b_{t,T}\left(a_{(T-t+1)} - a_{(t)}\right)\right)^2}{Ts^2}$, donde $a_{(t)}$ denota al estadístico ordenado de orden t y las constantes $b_{t,T}$ vienen dadas a partir de la inversa de la distribución normal estándar.

El estadístico ω puede interpretarse como el cuadrado del coeficiente de correlación lineal de los puntos muestrales dibujados sobre papel probabilístico normal. Puesto que bajo la hipótesis nula de que $a_1, \ldots, a_T$ son i.i.d. con distribución gaussiana dicho gráfico debería ser aproximadamente lineal, se rechaza la normalidad para valores pequeños de ω. Shapiro y Wilk tabularon los valores de $b_{t,T}$, y la distribución de ω bajo la hipótesis nula.

Procesos ARMA: Diagnosis

Los gráficos y contrastes de hipótesis que acabamos de presentar nos ayudarán en la verificación de si el modelo ARMA propuesto es o no adecuado como generador de nuestra serie de tiempo (etapa de chequeo o diagnosis).

Concretamente, nos asesorarán en la toma de la decisión referente a si las innovaciones a_t del modelo ARMA son o no ruido blanco con distribución gaussiana.

Puesto que las innovaciones a_t no son observables, lo que se hace es "estimarlas" y realizar el chequeo sobre dichas estimaciones (esto es, sobre los residuos $\hat{a}_t$ del modelo estimado o ajustado).

Procesos ARMA: Diagnosis

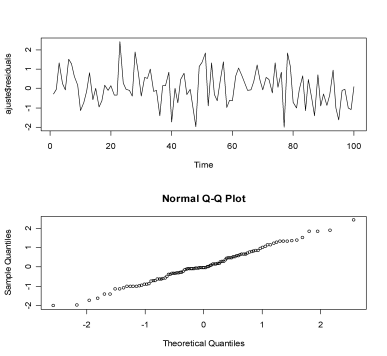
Los contrastes de independencia aplicados a los residuos $\hat{a}_t$ sufren las siguientes modificaciones (con respecto a su aplicación a las innovaciones a_t):

- Contraste basado en la distribución de cada autocorrelación muestral $\widehat{\rho}_k$: La varianza asintótica de $\widehat{\rho}_k$, para retardos k "pequeños", deja de ser $1/T$ (es menor que $1/T$).
- Contraste de Ljung-Box: Los grados de libertad de la distribución asintótica de Q_H pasan a ser $H-p-q-1$ o $H-p-q$, dependiendo de que el ARMA tenga o no constante, respectivamente.

En ambos casos, la región de rechazo resulta modificada.

A continuación, pasamos a realizar la diagnosis del modelo AR(2) que habíamos estimado para cierta serie. Para ello, utilizaremos los gráficos y contrastes que acabamos de proponer.

Gráficos de residuos y Q-Q normal

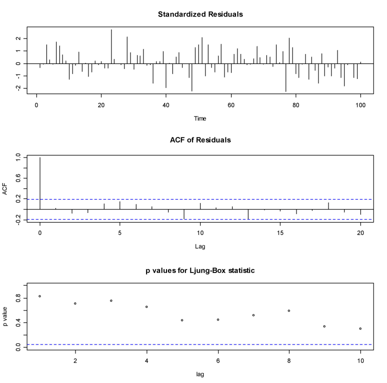


Modelos Box-Jenkins

Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

Contrastes de independencia



Contrastes de media cero y normalidad

- $\mu_a = 0$:
  $p - valor = 0.5637$
- Normalidad:
  - Jarque-Bera:
    $p - valor = 0.8715$
  - Shapiro-Wilk:
    $p - valor = 0.9016$

Conclusión: Un AR(2) gaussiano es un modelo apropiado como generador de la serie analizada.