



Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

Departamento de Matemáticas
Universidade da Coruña

Máster en Técnicas Estadísticas Curso 2009-10



Series de Tiempo

Germán
Aneiros Pérez

Introducción

El concepto
de serie de
tiempo:
Ejemplos

Descomposición
clásica de una
serie de
tiempo:
Ejemplos

Resumen

Part I

Análisis descriptivo de una serie de tiempo



Bibliografía

Series de
Tiempo

Germán
Aneiros Pérez

Introducción

El concepto
de serie de
tiempo:
Ejemplos

Descomposición
clásica de una
serie de
tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

Bibliografía



COWPERTWAIT, P.S.P. Y METCALFE, A.V. (2009)
Introductory Time Series with R. Springer.



GONZÁLEZ, M. Y DEL PUERTO, I.M. (2009)
Series Temporales. Colección manuales uex-60.



MAKRIDAKIS, S., WHEELWRIGHT, S.C. Y HYNDMAN,
R.J. (1998).
Forecasting. Methods and Applications. 3ª edición. Wiley.



PEÑA, D. (2005).
Análisis de Series Temporales. Alianza Editorial.



SHUMWAY, R.H. Y STOFFER, D.S. (2006)
*Time Series Analysis and Its Applications. With R
Examples*. 2ª edición. Springer.



Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

Introducción

El concepto de serie de tiempo:
Ejemplos

Descomposición clásica de una serie de tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

Introducción

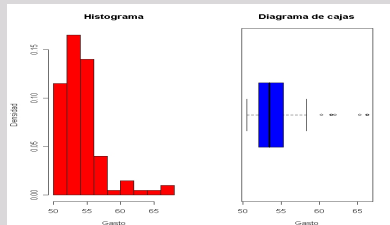
El objetivo de la estadística descriptiva es el dotarnos de métodos (tanto gráficos como cuantitativos) que nos permitan resumir y extraer información de un conjunto de observaciones de una variable.

Ejemplo

X : Gasto en Nochevieja 2008

$x_1 = 56.8, \dots, x_{100} = 53.7$

- $\bar{x} = 54.2$
- $Me = 53.4$
- $s = 3.2$





Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de Tiempo

Germán
Aneiros Pérez

Introducción

El concepto
de serie de
tiempo:
Ejemplos

Descomposición
clásica de una
serie de
tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

Introducción

En el contexto particular de las series de tiempo, las observaciones de la variable se toman secuencialmente a lo largo del tiempo.

La estadística descriptiva tratará entonces de dotarnos de métodos básicos que nos permitan comprender la **evolución** de las observaciones a lo largo del tiempo.

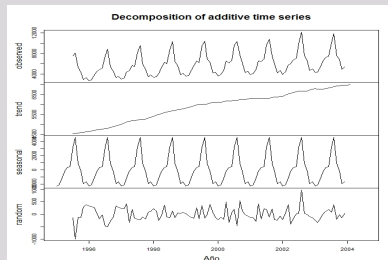
Ejemplo

X_t : N° de turistas el mes t

$$x_1 = 2698170$$

$\vdots$

$$x_{116} = 1179677$$





Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

Introducción

El concepto de serie de tiempo: Ejemplos

Descomposición clásica de una serie de tiempo: Ejemplos

Resumen

El concepto de serie de tiempo: Ejemplos

Una **serie de tiempo** es una colección de observaciones de una variable X tomadas secuencialmente a lo largo del tiempo.

Por ejemplo:

- X : "Temperatura media en A Coruña"
Frecuencia de observación: mensual
Serie de tiempo: 11.5, 11.1, 11.7, 13.2, 14.7, ...
- X : ("Euríbor" , "Cotización del barril de crudo")
Frecuencia de observación: diaria
Serie de tiempo: (4.32 , 87.95), (4.33 , 88.40), ...

Nos restringiremos a variables unidimensionales, y por tanto trataremos con series de tiempo univariantes.



Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de
Tiempo

Germán
Aneiros Pérez

Introducción

El concepto
de serie de
tiempo:
Ejemplos

Descomposición
clásica de una
serie de
tiempo:
Ejemplos

Resumen

El concepto de serie de tiempo: Ejemplos

Las observaciones las tomaremos en intervalos regulares de tiempo (cada hora, cada día, cada mes, ...).

Sin pérdida de generalidad, supondremos que la variable X ha sido observada en los instantes $1, 2, \dots, T$.

La serie de tiempo observada de la variable X será representada por $x_1, x_2, \dots, x_T$.

Así, en el ejemplo referente a la variable X : "Temperatura media en A Coruña", tendríamos que:

$$x_1 = 11.5, x_2 = 11.1, x_3 = 11.7, x_4 = 13.2, x_5 = 14.7, \dots$$



Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

Introducción

El concepto de serie de tiempo: Ejemplos

Descomposición clásica de una serie de tiempo: Ejemplos

Recapitulación

El concepto de serie de tiempo: Ejemplos

Para analizar una serie de tiempo, lo primero que se debe hacer es representar su **gráfico de secuencia**; esto es, representar gráficamente cada observación x_t frente al instante t en que se observa, y luego unir con segmentos cada uno de los T puntos.

El gráfico de secuencia permite observar cómo evoluciona la serie a lo largo del tiempo; específicamente, muestra las principales características de la serie de tiempo, que son:

- Posible presencia de **tendencia**: comportamiento a largo plazo de la serie.
- Posible presencia de **estacionalidad**: comportamiento periódico de la serie.
- Posible presencia de **heterocedasticidad**: la variabilidad de la serie no es constante (por ejemplo, depende de su nivel)



Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

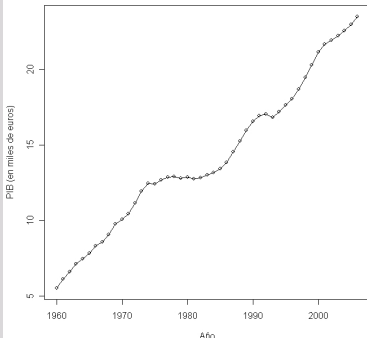
Introducción

El concepto de serie de tiempo:
Ejemplos

Descomposición clásica de una serie de tiempo:
Ejemplos

Resumen

Producto interior bruto per capita (PIB)



Información sobre la serie

Lugar: España

Frecuencia de observ.: Anual

Cantidad de observaciones: 47
(1960-2006)

La serie presenta tendencia.



Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

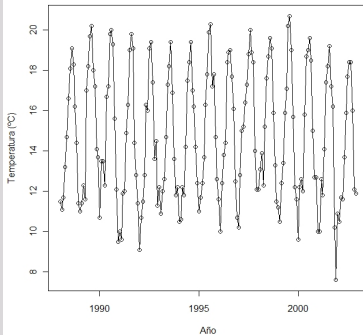
Introducción

El concepto de serie de tiempo: Ejemplos

Descomposición clásica de una serie de tiempo: Ejemplos

Recapitulación

Temperatura media



Información sobre la serie

Lugar: A Coruña

Frecuencia de observ.: Mensual

Cantidad de observaciones: 180
(enero 1988-diciembre 2002)

La serie presenta componente estacional.



Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

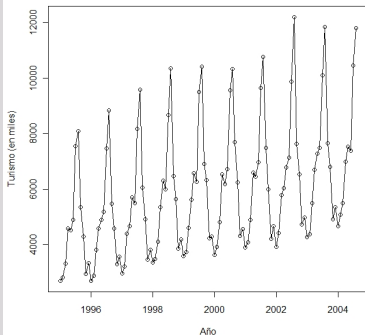
Introducción

El concepto de serie de tiempo: Ejemplos

Descomposición clásica de una serie de tiempo: Ejemplos

Resumen

Turismo



Información sobre la serie

Lugar: España

Frecuencia de observ.: Mensual

Cantidad de observaciones: 116
(enero 1995-agosto 2004)

La serie presenta tendencia y componente estacional.



Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

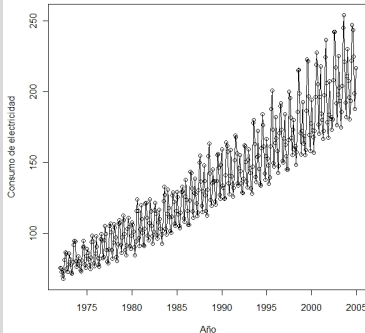
Introducción

El concepto de serie de tiempo:
Ejemplos

Descomposición clásica de una serie de tiempo:
Ejemplos

Resumen

Consumo de electricidad



Información sobre la serie

Lugar: EE.UU.

Frecuencia de observ.: Mensual

Cantidad de observaciones: 396
(enero 1972-diciembre 2004)

La serie presenta tendencia, componente estacional y heterocedasticidad.



Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de
Tiempo

Germán
Aneiros Pérez

Introducción

El concepto
de serie de
tiempo:
Ejemplos

Descomposición
clásica de una
serie de
tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

Descomposición clásica de una serie de tiempo: Ejemplos

Objetivo: construir un modelo que describa de una manera sencilla la **evolución de la serie a lo largo del tiempo**.

Suponemos que las observaciones x_t pueden expresarse como una función de una componente de tendencia T_t , de una componente estacional S_t y de una componente irregular a_t :

- T_t modeliza el comportamiento a largo plazo de la serie.
- S_t modeliza el comportamiento periódico de la serie, esto es, un patrón que se repite cada s instantes de tiempo ($S_t = S_{t+s} = S_{t-s}$, donde s es el **periodo estacional**).
- a_t aglutina el efecto de diversos factores de poca importancia y que a menudo desconocemos. Representa la parte impredecible o aleatoria de la serie. No contiene tendencia, ni estacionalidad ni heterocedasticidad.



Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

Introducción

El concepto de serie de tiempo:
Ejemplos

Descomposición clásica de una serie de tiempo:
Ejemplos

Resumen

Descomposición clásica de una serie de tiempo: Ejemplos

Los modelos que se utilizan con más frecuencia son:

- **Modelo aditivo:** $x_t = T_t + S_t + a_t$,
donde la componente irregular a_t fluctúa en torno al 0.
- **Modelo multiplicativo:** $x_t = T_t \times S_t \times a_t$,
donde la componente irregular a_t fluctúa en torno al 1.

La elección de uno de estos dos modelos se hará de manera que el modelo seleccionado sea capaz de aglutinar la principales características (observadas en el gráfico de secuencia) de la serie en estudio.



Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

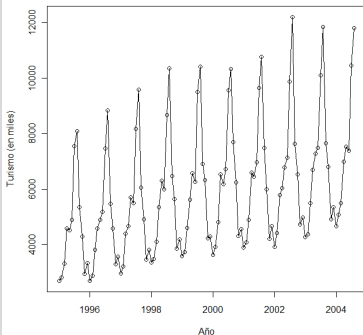
Introducción

El concepto de serie de tiempo:
Ejemplos

Descomposición clásica de una serie de tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

Turismo



Algunas descomposiciones

Modelo aditivo:

$$x_t = T_t + S_t + a_t$$

Este modelo es apropiado cuando la magnitud de las fluctuaciones estacionales de la serie no varía al hacerlo la tendencia.



Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

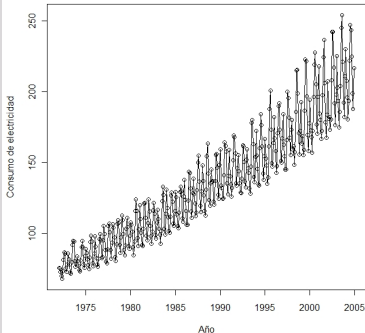
Introducción

El concepto de serie de tiempo:
Ejemplos

Descomposición clásica de una serie de tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

Consumo de electricidad



Algunas descomposiciones

Modelo multiplicativo:

$$x_t = T_t \times S_t \times a_t$$

Este modelo es apropiado cuando la magnitud de las fluctuaciones estacionales de la serie crece y decrece proporcionalmente con los crecimientos y decrecimientos de la tendencia, respectiv.



Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de
Tiempo

Germán
Aneiros Pérez

Introducción

El concepto
de serie de
tiempo:
Ejemplos

Descomposición
clásica de una
serie de
tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

Descomposición clásica de una serie de tiempo: Ejemplos

Una vez seleccionado un modelo para describir la evolución de nuestra serie de tiempo x_t , el siguiente paso será **estimar** la tendencia T_t , la componente estacional S_t y la componente irregular a_t .

En cuanto a la componente estacional, S_t ($t = 1, \dots, T$), es suficiente conocer s de sus valores consecutivos en el tiempo (pues $S_t = S_{t+s} = S_{t-s}$). Por tanto, basta con estimar los valores **$S_1, \dots, S_s$** , los cuales se denominan **índices estacionales**.

Nótese que:

- $S_1 + \dots + S_s = S_{t+1} + \dots + S_{t+s}, \forall t.$



Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de
Tiempo

Germán
Aneiros Pérez

Introducción

El concepto
de serie de
tiempo:
Ejemplos

Descomposición
clásica de una
serie de
tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

Descomposición clásica de una serie de tiempo: Ejemplos

En esencia, existen dos métodos para estimar la tendencia y las componentes estacional e irregular de una serie de tiempo:

- **Método paramétrico:** Se basa en
 - Proponer un modelo paramétrico para expresar la relación que guardan la tendencia y la componente estacional con el tiempo.
 - Ajustar dicho modelo a la serie de tiempo (por ejemplo, a través del método de mínimos cuadrados).
 - Estimar la tendencia y la componente estacional a través de la tendencia y la componente estacional ajustadas.
 - La componente irregular se estima despejándola en el modelo propuesto, y sustituyendo la tendencia y la componente estacional por sus estimaciones.



Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de
Tiempo

Germán
Aneiros Pérez

Introducción

El concepto
de serie de
tiempo:
Ejemplos

Descomposición
clásica de una
serie de
tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

Descomposición clásica de una serie de tiempo: Ejemplos

- **Método no paramétrico:** Se basa en
 - Asumir "suavidad" en la relación que guarda la tendencia con el tiempo.
 - Estimar la tendencia y la componente estacional aplicando algún tipo de suavización a las observaciones.
 - La componente irregular se estima despejándola en el modelo propuesto, y sustituyendo la tendencia y la componente estacional por sus estimaciones.

Nosotros nos centraremos en el método no paramétrico que suaviza a través de **medias móviles** (MA).



Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

Introducción

El concepto de serie de tiempo: Ejemplos

Descomposición clásica de una serie de tiempo: Ejemplos

Recapitulación

Descomposición clásica de una serie de tiempo: Ejemplos

- **Suavizador de medias móviles simple:**

Dado $k = 2q + 1$ un número impar, aplicarle una suavización k MA a la serie $\{x_t\}$ en el instante t consiste en transformar el valor x_t en la estimación

$$\frac{x_{t-q} + \dots + x_{t-1} + x_t + x_{t+1} + \dots + x_{t+q}}{k}$$

- **Suavizador de medias móviles centrado:**

Dado $k = 2q$ un número par, aplicarle una suavización $2 \times k$ MA a la serie $\{x_t\}$ en el instante t consiste en transformar el valor x_t en la estimación

$$\frac{0.5x_{t-q} + x_{t-(q-1)} + \dots + x_{t-1} + x_t + x_{t+1} + \dots + x_{t+q-1} + 0.5x_{t+q}}{k}.$$

La expresión anterior coincide con $(\tilde{x}_t^{(q-1)} + \tilde{x}_t^{(q)})/2$, donde

$$\tilde{x}_t^{(j)} = \frac{x_{t-j} + \dots + x_{t-1} + x_t + x_{t+1} + \dots + x_{t+k-(j+1)}}{k}$$



Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de
Tiempo

Germán
Aneiros Pérez

Introducción

El concepto
de serie de
tiempo:
Ejemplos

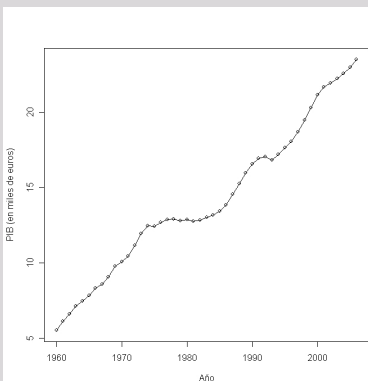
Descomposición
clásica de una
serie de
tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

SUAVIZACIÓN A TRAVÉS DE MEDIAS MÓVILES

Serie con tendencia y sin componente estacional

PIB



Modelo: $x_t = T_t + a_t$

Suavizador en t : k MA

$$\hat{T}_t = \frac{\sum_{j=-q}^q x_{t+j}}{k},$$

donde $k = 2q + 1$

Ejemplo: Si $k=5$, la tendencia en $t=6$ sería estimada por

$$\hat{T}_6 = \frac{x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8}{5}$$



Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

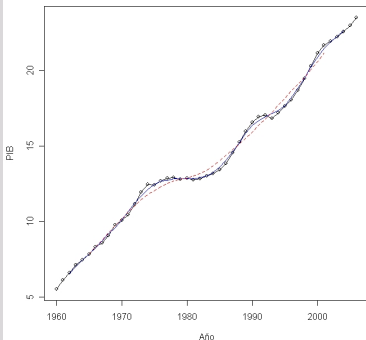
Introducción

El concepto de serie de tiempo:
Ejemplos

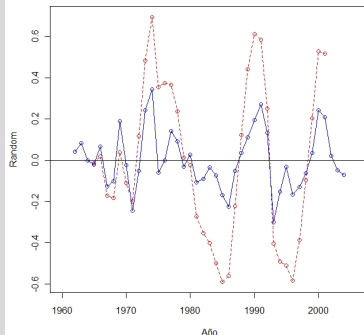
Descomposición clásica de una serie de tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

PIB (x_t) y dos suavizaciones ($\hat{T}_t$ con $k=5$, y $\hat{T}_t$ con $k=11$)



$$\hat{a}_t = x_t - \hat{T}_t$$





Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

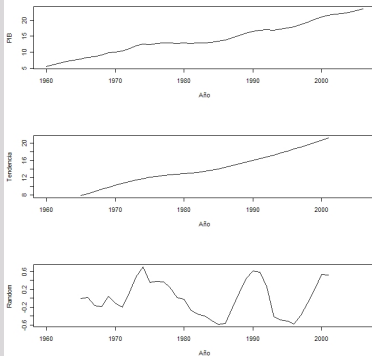
Introducción

El concepto de serie de tiempo:
Ejemplos

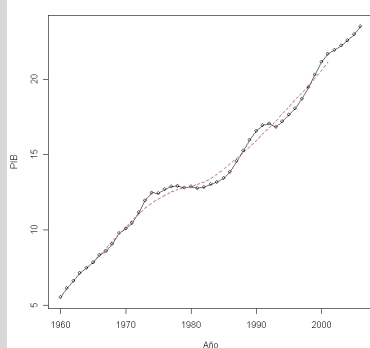
Descomposición clásica de una serie de tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

Descomposición ($k = 11$)



PIB y suavización





Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de
Tiempo

Germán
Aneiros Pérez

Introducción

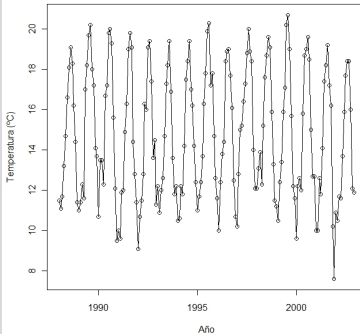
El concepto
de serie de
tiempo:
Ejemplos

Descomposición
clásica de una
serie de
tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

Serie con componente estacional y sin tendencia

Temperatura



Modelo: $x_t = \mu + S_t + a_t$

- 1 Asumimos que $S_1 + \dots + S_s = 0$
- 2 Estimamos la media μ a través de la media de $\{x_t\}_t$ (sobre periodos completos de s instantes de tiempo consecutivos).
- 3 Estimamos S_j ($j=1, \dots, s$) restándole $\hat{\mu}$ a la media de $\{x_{j+is}\}_i$ (sobre periodos completos. . .).



Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

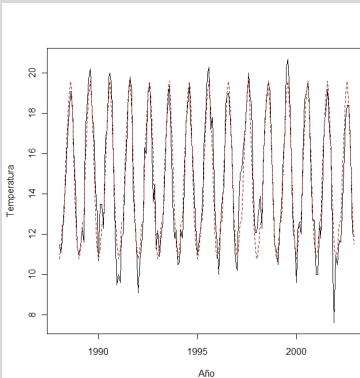
Introducción

El concepto de serie de tiempo:
Ejemplos

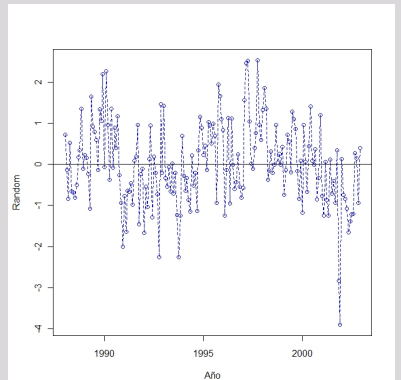
Descomposición clásica de una serie de tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

Temperatura (x_t) y ajuste ($\hat{\mu} + \hat{S}_t$)



$$\hat{a}_t = x_t - \hat{\mu} - \hat{S}_t$$





Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

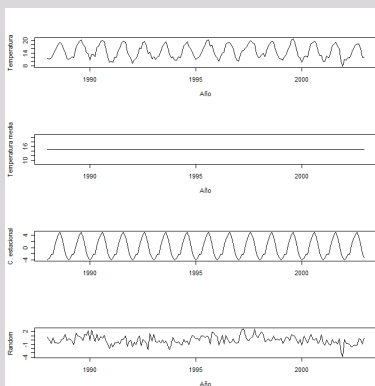
Introducción

El concepto de serie de tiempo:
Ejemplos

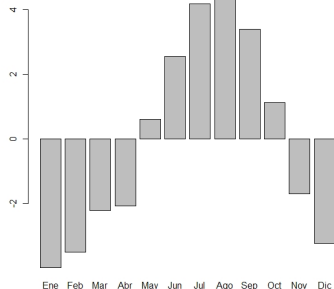
Descomposición clásica de una serie de tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

Descomposición



Índices estacionales ($\hat{S}_j$)





Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de
Tiempo

Germán
Aneiros Pérez

Introducción

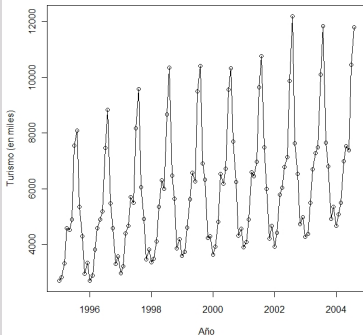
El concepto
de serie de
tiempo:
Ejemplos

Descomposición
clásica de una
serie de
tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

Serie homocedástica con tendencia y componente estacional

Turismo



Modelo: $x_t = T_t + S_t + a_t$

- 1 Asumimos que $S_1 + \dots + S_s = 0$
- 2 Estimamos la tendencia $\hat{T}_t$ (s MA ó $2 \times s$ MA).
- 3 Construimos la nueva serie $x_t - \hat{T}_t \approx S_t + a_t$.
- 4 Estimamos S_j ($j=1, \dots, s$) restandole a la media de $\{x_{j+is} - \hat{T}_{j+is}\}_i$ la media de $\{x_t - \hat{T}_t\}_t$ (sobre periodos completos ...).



Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

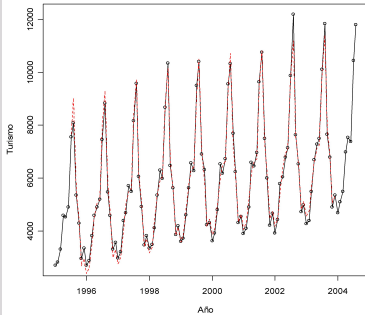
Introducción

El concepto de serie de tiempo:
Ejemplos

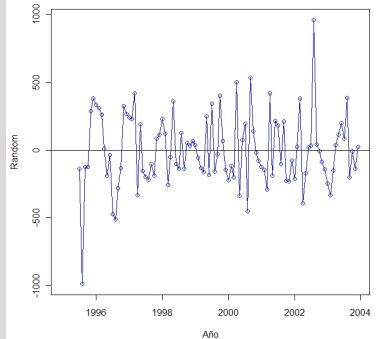
Descomposición clásica de una serie de tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

Turismo (x_t) y ajuste ($\hat{T}_t + \hat{S}_t$)



$\hat{a}_t = x_t - \hat{T}_t - \hat{S}_t$





Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de Tiempo

Germán
Aneiros Pérez

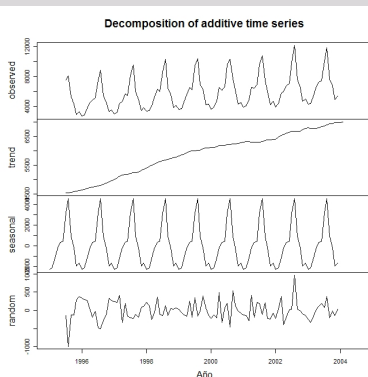
Introducción

El concepto
de serie de
tiempo:
Ejemplos

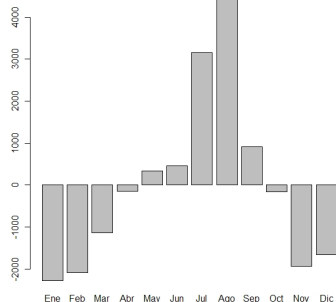
Descomposición
clásica de una
serie de
tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

Descomposición



Índices estacionales ($\hat{S}_j$)





Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de
Tiempo

Germán
Aneiros Pérez

Introducción

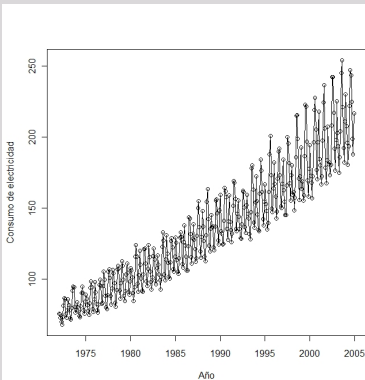
El concepto
de serie de
tiempo:
Ejemplos

Descomposición
clásica de una
serie de
tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

Serie con tendencia, componente estacional y heterocedasticidad

Consumo de electricidad



Modelo: $x_t = T_t \times S_t \times a_t$

- 1 Asumimos que $S_1 + \dots + S_s = s$
- 2 Estimamos la tendencia $\hat{T}_t$ (s MA ó $2 \times s$ MA).
- 3 Construimos la nueva serie $x_t / \hat{T}_t \approx S_t \times a_t$.
- 4 Estimamos S_j ($j=1, \dots, s$) dividiendo la media de $\{x_{j+is} / \hat{T}_{j+is}\}_i$ entre la media de $\{x_t / \hat{T}_t\}_t$ (sobre periodos completos ...).



Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de
Tiempo

Germán
Aneiros Pérez

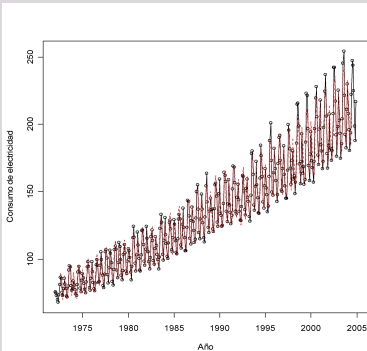
Introducción

El concepto
de serie de
tiempo:
Ejemplos

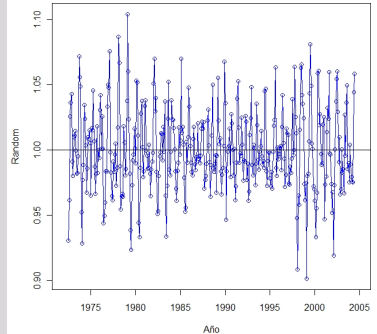
Descomposición
clásica de una
serie de
tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

Consumo de electricidad (x_t) y
ajuste ($\hat{T}_t \times \hat{S}_t$)



$\hat{a}_t = x_t / (\hat{T}_t \times \hat{S}_t)$





Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de Tiempo

Germán
Aneiros Pérez

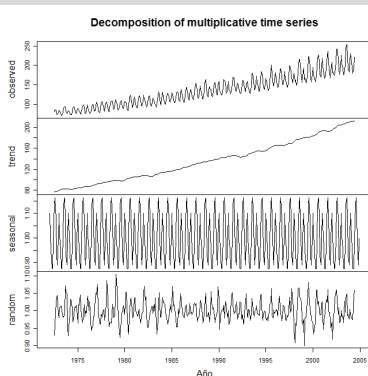
Introducción

El concepto
de serie de
tiempo:
Ejemplos

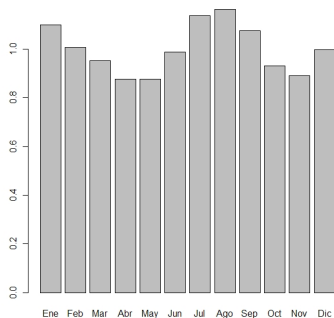
Descomposición
clásica de una
serie de
tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

Descomposición



Índices estacionales ($\hat{S}_j$)





Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de
Tiempo

Germán
Aneiros Pérez

Introducción

El concepto
de serie de
tiempo:
Ejemplos

Descomposición
clásica de una
serie de
tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

Recapitulación

A lo largo de este tema:

- Se ha definido el concepto de **serie tiempo**.
- Se ha establecido la base de la **descomposición clásica** de una serie de tiempo:
"La serie de tiempo puede expresarse como una función de una **tendencia**, una **componente estacional** y una **componente irregular**"
- Se han propuesto dos métodos para **estimar** cada componente de la descomposición clásica de una serie de tiempo:
 - 1 Método paramétrico.
 - 2 Método no paramétrico.