Datos direccionales.

Proyecto Fin de Máster.

Leyenda Rodríguez, María

7 de junio de 2011

- En diversos campos surgen problemas estadísticos dónde los datos son dados mediante medidas angulares dando la orientación o angulos en el plano (datos circulares) o en el espacio (datos esféricos).
- Datos circulares es el caso más simple de esta categoría de datos llamada **datos direccionales**, dónde la única respuesta es no escalar, pero es angular o direccional.

Notación

- Las direcciones en el plano pueden ser observadas como vectores en el plano o como puntos en el círculo unidad. También se pueden observar, como ángulos o como números complejos.
- Escogemos direccción y orientación inicial.

Luego cada punto **x** en el círculo unidad puede ser representado por un ángulo θ o por un número complejo unitario z.

$$x = (cos\theta, sen\theta)$$
$$z = e^{i\theta} = cos\theta + isen\theta$$

Medidas de localización

- Sean $x_1, \ldots, x_n$ cuyos ángulos correspondientes θ_i, $i = 1, \ldots, n$.
- La dirección media $\bar{\theta}$ de $\theta_1, \ldots, \theta_n$ es la dirección de $x_1 + \ldots + x_n$. Es también el centro de masa $\bar{x}$ de $x_1, \ldots, xn$.
- Las coordenadas cartesianas de x_j son $(cos\theta_j, sen\theta_j)$
- Las coordenadas cartesianas del centro de masa son $(\bar{C}, \bar{S})$.

$$\bar{C} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} cos\theta_j$$

$$\bar{S} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} sen\theta_j$$

Medidas de localización

- Dónde $\bar{\theta}$ es la solución de las ecuaciones

$$\bar{C} = \bar{R}cos\bar{\theta}$$
$$\bar{S} = \bar{R}sen\bar{\theta}$$

- La media de la longitud resultante $\bar{R}$ es dada por

$$\bar{R} = \sqrt{\bar{C}^2 + \bar{S}^2}$$

Medidas de localización

- Notemos que $\bar{\theta}$ no está definida cuando $\bar{R} = 0$
- Cuando $\bar{R} > 0$, $\bar{\theta}$ es dada por

$$\bar{\theta} = \begin{cases} tan^{-1}(\bar{S}/\bar{C}) & \text{si} \quad \bar{C} \geq 0 \\ tan^{-1}(\bar{S}/\bar{C}) + \pi & \text{si} \quad \bar{C} < 0 \end{cases}$$

Notemos que en el contexto de estadística circular $\bar{\theta}$ no es la media $(\theta_1 + \ldots + \theta_n)/n$

Medidas de localización

- Notemos que la media muestral de la dirección es equivariante bajo rotación.
- Diferentes estadísticos utilizando diferentes sistemas de coordenadas estarán de acuerdo en dónde está la media la muestral, a pesar de que puede usar números diferentes para describir su posición

Medidas de localización

- La mediana muestral de la dirección $\bar{\theta}$ de los ángulos $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ es algún ángulo ϕ tal que
  1. La mitad de los puntos se encuentran en el arco $[\phi, \phi + \pi)$
  2. la mayoría de los puntos están más cerca de ϕ que de $\phi + \pi$
- Cuando n es par, la mediana coincide con uno de ellos.
- Cuando n es impar, es conveniente tomar la mediana como el punto medio de dos puntos adyacentes adecuados.

Medidas de concentración y dispersión

- $\bar{R} = \sqrt{\bar{C}^2 + \bar{S}^2}$, entonces si $x_1, \ldots, x_n$ son vectores unitarios, $0 \leq \bar{R} \leq 1$.
- Si las direcciones $\theta_1, \ldots, \theta_n$ están estrechamente agrupadas luego $\bar{R} = 1$.
- Si $\theta_1, \ldots, \theta_n$ están muy dispersas luego $\bar{R}$ será prácticamente 0.

Por tanto, $\bar{R}$ **es una medida de concentración del conjunto de datos.**

- $\bar{R}$ es invariante bajo rotaciones.
- La longitud resultante $\bar{R}$ es la longitud del vector resultante $x_1 + \ldots + x_n$.
- $R = n\bar{R}$

Medidas de concentración y dispersión

- La media de longitud resultante $\bar{R}$ es la medida de dispersión más importante.
- A veces emplearemos otras medidas de dispersión de datos circulares, para comparar con datos en línea: la medida más simple es la **varianza circular muestral**

$$V = 1 - \bar{R}$$

- **Desviación circular estándard**

$$v = \sqrt{-2 log \bar{R}}$$

Otras medidas de dispersión

- Distancia entre dos ángulos θ y ξ

$$min(\theta - \xi, 2\pi - (\theta - \xi)) = \pi - |\pi - |\theta - \xi||$$

- Medida de dispersión de los ángulos $\theta_1, \ldots, \theta_n$ sobre un ángulo dado α es

$$d_0(\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\pi - |\pi - |\theta_i - \alpha||)$$

- la función d_0 toma el mínimo en la mediana muestral $\tilde{\theta}$. La desviación circular media es $d_0(\tilde{\theta})$

Distribución circular

- Una distribución circular es una distribución de probabilidad la cual está concentrada en la circunferencia de círculo unidad.
- Las distribuciones circulares son de dos tipos:
  1. Discretas- asignan masas de probabilidad solo a un número de direcciones
  2. Absolutamente contínuas
- Existe la función de densidad $f(\theta)$
  1. $f(\theta) \geq 0$
  2. $\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 1$
  3. $f(\theta) = f(\theta + 2\pi)$

Distribución lattice

$$Pr(\theta = v + \frac{2\pi r}{m}) = p_r \;\; r = 0, 1, \cdots, m-1$$
$$p_r \geq 0, \; \sum_{r=0}^{m-1} p_r = 1$$

- Los puntos $\frac{2\pi r}{m}$ son los vértices de un polígono de m lados inscrito en el círculo unidad.
- Si los pesos son $p_r = \frac{1}{m}$, entonces se le denomina distribución uniforme discretizada en m puntos.

Distribución uniforme

- A menudo usada como modelo nulo.
- Es la única distribución en el círculo la cual es invariante bajo rotación y reflexión.
- Su función de masa de probabilidad

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi}$$

Distribución von Mises

Definición

$$g(\theta;\mu,k)=\frac{1}{2\pi I_0(k)}e^{kcos(\theta-\mu)}$$

- I_0 denota la función de Bessel modificada de primer tipo y orden 0,

$$I_0(k)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{kcos\theta}d\theta,\ \ I_0(k)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(r!)^2}(\frac{k}{2})^{2r}$$

- El parámetro μ es la media de las direcciones
- k es el parámetro de concentración.

Distribución von Mises

Relación v,$\bar{R}$,S_n^2 y parámetro de concentración

1. Generamos una muestra $M(\pi, k)$ de tamaño 3000 para distintos valores del párametro k (75 valores).
2. Para cada una de las muestras calculamos
   - La varianza definida de forma análoga que en el caso lineal con respecto a la distancia euclídea y a la distancia definida por la longitud de arco,
   - el parámetro de concentración $\bar{R} = \sqrt{\bar{C}^2 + \bar{S}^2}$ y
   - la desviación circular estándard $\sqrt{-2log(\bar{R})}$.
3. Representamos la estimador local-lineal de cada una de las estimaciones anteriores frente al parámetro de von-Mises.

Distribución von Mises

Relación v,$\bar{R}$,S_n^2 y parámetro de concentración

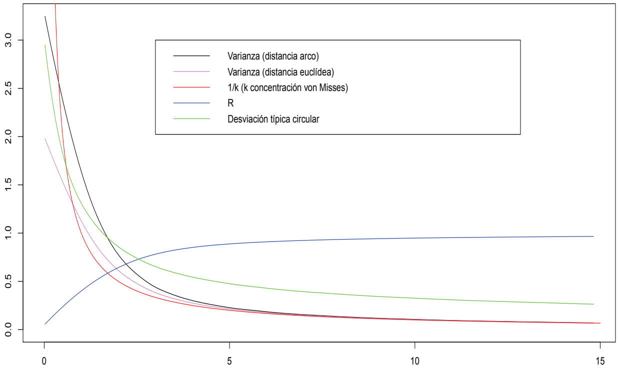
$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d^2(\theta_i, \theta)$$

$$\theta = min_y \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d^2(\theta_i, y)$$

$$d^2(\theta_i, \theta j) = \pi - |\pi - |\theta_i - \theta_j||$$

$$d^2(\theta_i, \theta j) = 2(1 - (cos(\theta_i - \theta_j)))$$

Distribución von Mises

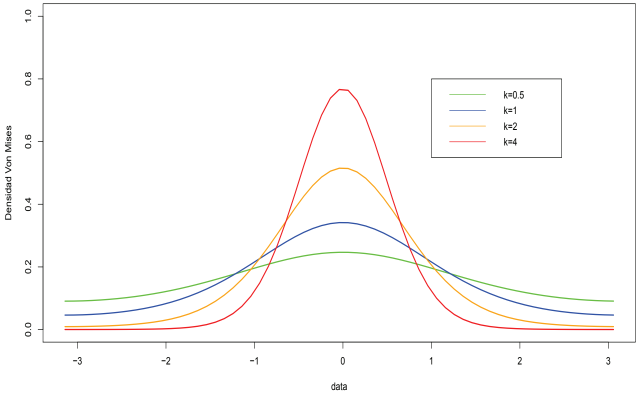


Distribución von Mises

Forma

- La distribución es unimodal y es simétrica sobre $\theta = \mu$
- La moda se encuentra en $\theta = \mu$ y la antimoda en $\theta = \mu + \pi$
- la relación de la moda de la densidad y la antimoda viene dada por e^{2k}, así que cuanto mayor sea el valor de k, mayor es el agrupamiento acerca de la moda.

Distribución von Mises



Distribución von Mises

Relación con otras distribuciones

- Si k=0, entonces $M(\mu, k)$ es la distribución uniforme.
- La aproximación $exp(x) \cong 1 + x$, muestra que para k pequeños $M(\mu, k) \cong C(\mu, k/2)$, dónde $C(\mu, k/2)$ denota una distribución Cardioide.
- Cualquier von Mises puede ser aproximada por una distribución normal wrapped.

$$M(\mu, k) \cong WN(\mu, A(k)),\ \ k \to \infty$$
$$A_k = I_1(k)/I_0(k)$$

Distribución von Mises

Función de distribución

$$F(\theta; 0, k) = \frac{1}{I_0(k)} \int_0^{\theta} e^{kcosu} du$$

Distribución von Mises

Convolución

- La convolución de dos von Mises no es una distribución von Mises.
- La convolución de dos distribuciones normal wrapped, $WN(\mu_1, A(k_1))$ y $WN(\mu_2, A(k_2))$ es la distribución wrapped normal $WN(\mu_1 + \mu_2, A(k_1)A(k_2))$. La cual puede ser aproximada por$M(\mu_1 + \mu_2, A^{-1}(A(k_1)A(k_2)))$

$$\theta_1 + \theta_2 \sim M(\mu_1 + \mu_2, A^{-1}(A(k_1)A(k_2)))$$

Distribución Cardioide

- Perturbación de la densidad uniforme por la función coseno da lugar a una distribución Cardioide $C(\mu, \rho)$
- Función de masa de probabilidad

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi}(1 + 2\rho cos(\theta - \mu)) \ |\rho| < \frac{1}{2}$$

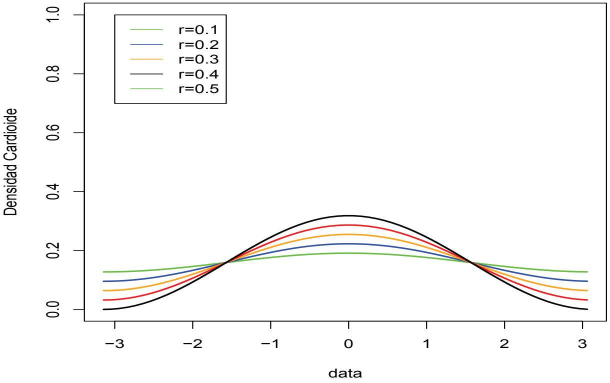
- La media de longitud resultante es ρ
- La media de la dirección es μ
- La distribución es simétrica y unimodal en μ (si $\rho > 0$).
- Si $\rho = 0$ la distribución se reduce a la distribución uniforme.
- El principal uso de estas distribuciones es como aproximaciones de poca concentración a las distribuciones von Mises

Distribución Cardioide

$$\theta_i \sim C(\mu_i, \rho_i)(i = 1, 2) \Rightarrow \theta_1 + \theta_2 \sim C(\mu_1 + \mu_2, \rho_2\rho_2)$$

El conjunto de distribuciones Cardioides es cerrado bajo convolución

Distribución Cardioide



Distribución Normal proyectada

- Las distribuciones en el círculo pueden ser obtenidas mediante proyección radial de la distribución en el plano.
- Sea x un vector aleatorio bidimensional, Pr(x=0)=0. Luego $||x||^{-1}x$ es un punto aleatorio sobre el círculo unidad.
- Un ejemplo importante es aquel en el que x tiene una distribución normal bivariante $N_2(\mu, \sum)$, en cuyo caso $||x||^{-1}x$ se dice que sigue una distribución normal proyectada $PN_2(\mu, \sum)$.

Distribución Normal proyectada

Aplicación

Meteorología: Cuando la velocidad del viento es modelada mediante una distribución normal bivariante, la resultante distribución marginal para la dirección del viento es una distribución normal proyectada.

Distribución Normal proyectada

$$p(\theta;\mu,\sum) = \frac{\phi(\theta;0,\sum)+|\sum|^{-1/2}D(\theta)\phi(D(\theta))\phi(|\sum|^{-1/2}(x^T\sum^{-1}x)^{-1/2}\mu\wedge x)}{x^T\sum^{-1}x}$$

- $\phi(\cdot;0,\sum)$ denota la función de masa de probabilidad, ϕ y Φ denotan la función de masa de probabilidad y la función de densidad acumulada de N(0,1), $x=(cos\theta, sen\theta)^T$

$$D(\theta)=\frac{\mu^T\sum^{-1}x}{(x^T\sum^{-1}x)^{1/2}}$$

$$\mu\wedge x=\mu_1 sen\theta-\mu_2 cos\theta \;\; \mu=(\mu_1,\mu_2)^T$$

Distribución Wrapped

Definición

- Dada una distribución en la línea, se puede envolver alrededor de la circunferencia del círculo de radio uno.
- Si x es una variable aleatoria en la línea, la variable aleatoria correspondiente x_w de la distribución wrapped viene dada por

$$x_w = x(mod 2\pi)$$

- Si el círculo es identificado con el conjunto de números complejos de módulo la unidad luego el mapa wraping $x \to x_w$ pueden ser escrito como

$$x \to e^{2\pi i x}$$

Distribución Wrapped

Definición

- Si x tiene como función de distribución F $\Rightarrow$ la función de distribución F_w de x_w viene dada por

$$F_w(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{F(\theta + 2\pi k) - F(2\pi k)\}$$

- Si x tiene como función de masa de probilidad f $\Rightarrow$ la función de masa de probabilidad f_w de x_w es

$$f_w(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\theta + 2\pi k)$$

Distribución Wrapped

Propiedades

1. $(x+y)_w = x_w + y_w$
2. Si la función característica de x es ϕ entonces la función característica $\{\phi_p : p = 0, \pm 1, \ldots\}$ de x_w es dada por $\phi_p = \phi(p)$
3. Si ϕ es integrable entonces x tiene función una densidad y

$$f_w(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\theta + 2\pi k) = \frac{1}{2\pi}[1 + 2\sum_{p=1}^{\infty}(\alpha_p cosp\theta + \beta_p senp\theta)]$$

$$\Phi(p) = \alpha_p + i\beta_p$$

Distribución Wrapped

Propiedades

- Hay muchas distribuciones en las líneas las cuales pueden ser envueltas en cualquier distribución dada en el círculo.
- Sea g la función de masa de probabilidad de una distribución en el círculo y define una función de masa de probabilidad en la línea por

$$f(x) = p_r g(x)$$

$$2\pi r < x \leq 2\pi(r+1) \;\; r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

- p_r son números no negativos tales que, $\sum_{r=-\infty}^{\infty} p_r = 1$.

- Dada una muestra aleatoria de ángulos $\theta_1, \ldots, \theta_n \in [0, 2\pi]$.
- Consideraremos que el estimador no parametrico de la densidad con función núcleo la distribución von Mises, viene dado por

$$\hat{f}(\theta, \nu) = \frac{c_0(\nu)}{n} \sum_{i=1}^{n} L(\nu cos(\theta - \theta_i))$$

$$c_0(\nu) = \frac{1}{2\pi I_0(\nu)} \quad L(x) = e^x$$

- Dónde $I_r(\nu)$ es la función de Bessel modificada de orden r.
- El parámetro de concentración ν ahora ha asumido el papel de (la inversa del) parámetro de suavizado.

- El error asintótico cuadrático medio integrado es

$$AMISE(\nu) = 3\kappa^2 I_2(2\kappa) / \left\{32\pi\nu^2 I_0(\kappa)^2\right\}$$

- El error asintótico cuadrático medio integrado es de la forma $a\nu^{-2} + b\nu^{1/2}$ la cual puede ser minimizada diferenciando respecto de ν e igualando a cero.
- Esto permite una Regla plug-in von Mises-escala" para el parámetro de suavizado ν basado en la estimación de κ.

Regla plug-in von Mises-escala

$$\nu = [3n\hat{\kappa}^2 I_2(2\hat{\kappa}) \left\{4\pi^{1/2} I_0(hat\kappa)^2\right\}^{-1}]^{2/5}$$

$$\nu = Cn^{2/5}$$

$$C = [3\hat{\kappa}^2 I_2(2\hat{\kappa}) \left\{4\pi^{1/2} I_0(\hat{\kappa})^2\right\}^{-1}]^{2/5}$$

- Introducimos la validación cruzada para minimizar la función pérdida dada por error cuadrático medio y la función de pérdida dada por Kullback-Leiber.
- Consideremos la estimación de la densidad construída dejando fuera el valor θ_j de la muestra.

$$\hat{f}_j(\theta,\nu) = \frac{c_0(\nu)}{n}\sum_{i\neq j} L(\nu cos(\theta-\theta_i))$$

$$c_0(\nu) = \frac{1}{2\pi I_0(\nu)} \quad L(x) = e^x$$

- Sea

$$cv_2(\nu) = 2n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\hat{f}_i(\theta_i,\nu) - \int \hat{f}^2(\theta,\nu)d\theta$$

$$cv_{KL} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\hat{f}_i(\theta_i,\nu)$$

- Luego $-cv_2(\nu) + \int f^2$ y $-cv_{KL}(\nu) + \int flog(f)$ son estimaciones insesgadas de la perdida del error cuadrático $L_2(\nu)$ y la pérdida dada por Kullback-Leiber, respectivamente.

$$v_2 = argmin_{\nu \geq 0} - cv_2(\nu)$$
$$v_{KL} = argmin_{\nu \geq 0} - cv_{KL}(\nu)$$

- De estas dos expresiones obtenemos dos posibles valores para el parámetro de suavizado.

- Dadas n observaciones de una variable direccional explicativa $\theta_1, \ldots, \theta_n$ y una variable respuesta lineal $y_1, \ldots, y_n$
- Suponemos que $y_i = m(\theta_i) + \epsilon i$, dónde *epsiloni* son variables con media cero, independientes e identicamente distribuídos.
- la estimación de la regresión tipo núcleo de $m(\theta)$ viene dada por

$$\hat(m)(\theta;\kappa) = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i g(\theta - \theta_i, 0, \kappa)}{\sum_{i=1}^{n} g(\theta - \theta_i, 0, \kappa)} \quad (1)$$

- Análoga al estimador de Nadaraya-Watson.

- La elección del grado de suavizado es crucial para la estimación tipo núcleo de la regresión.
- Existen varios métodos para seleccionar el parámetro de suavizaso subjetivamente o automáticamente.
- Por ejemplo, cuando el núcleo de suavizado evaluado sobre datos lineales es un núcleo Gausiano, Silverman recomienda un parámetro de suavizado de $0.9\hat{\sigma}n^{1/5}$ y el valor $h_s = 1.06\hat{\sigma}n^{1/5}$ es sugerido por Scott.
- Ambas pueden estar conectadas con el parámetro κ en la distribución de von Mises usando el siguiente enlace conocido entre la distribución de von Mises y la distribución Gausiana propiedad de la distribución von Mises (ver Mardia y Jupp).

- Si θ es distribuída de acuerdo con la distribución von Mises centrada en μ y con parámetro κ, luego

$$\kappa^{-1/2}(\theta - \mu) \rightarrow_D N(0,1) \ \kappa \rightarrow \infty$$

- Esto sugiere la elección del parámetro de concentración κ mediante

$$\kappa = \frac{1}{h_s^2}$$

- Otra opción es seleccionar κ por validación cruzada de mínimos cuadráticos (LCV).
- Como en el caso lineal, escogemos κ de modo que minimize a la función dónde son las estimaciones sn el dato j-ésimo.

$$CV(\kappa) = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} [y_j - \hat{m}^{-j}(\theta_j; \kappa)]^2$$

$$\hat{m}^{-j}(\theta_j; \kappa) = \frac{\sum_{i \neq j}^{n} y_i g(\theta_j - \theta_i, 0, \kappa)}{\sum_{i \neq j}^{n} g(\theta - \theta_i, 0, \kappa)}$$

- La estimación tipo núcleo seleccionando el parámetro de suavizado mediante LCV puede ser inconsistente bajo una variedad de circunstancias.
  - para datos discretos con múltiples valores repetidos
  - validación cruzada tiende a sugerir parámetros de suavizado que suavizan muy poco, es decir, κ tiende a ser muy grande.
- Por tanto valores de κ escogidos de acuerdo $\kappa = \frac{1}{h_s^2}$ serán preferidos en este caso.

Autocorrelación k-lag circular

$$\phi_i = \theta_{i+k},\ \ i = 1, \dots, n-k$$

$$(\phi_1, \theta_1), (\phi_2, \theta_2), \dots, (\phi_{n-k}, \theta_{n-k})$$

$$\hat{\rho}_{k\,T} = \frac{\sum_{1\leq i<j\leq n-k} sen(\theta_i - \theta_j) sen(\phi_i - \phi_j)}{\sum_{1\leq i<j\leq n-k} sen^2(\theta_i - \theta_j) \sum_{1\leq i<j\leq n-k} sen^2(\phi_i - \phi_j)}$$

- La componente determinística del modelo de regresión estudiado por Downs y Mardia(2002) une a la variable angular dependiente v con la variable angular independiente u mediante

$$tan\frac{1}{2}(v-\beta)=\omega tan\frac{1}{2}(u-\alpha)$$

$$v=\beta+2tan^{-1}\left\{\omega tan\frac{1}{2}(u-\alpha)\right\}$$

- $\omega\in[-1,1]$ es el parámetro pendiente.
- $-\pi\leq\alpha,\beta<\pi$ son los parámetros angulares de localización.

- Reemplazamos el ángulo v por θ_t y el ángulo u por θ_{t-1}, $t = 2, \ldots, n$. $\alpha = \beta$

$$tan\frac{1}{2}(\theta_t - \alpha) = \omega tan\frac{1}{2}(\theta_{t-1} - \alpha)$$

$$\theta_t = \alpha + 2tan^{-1}\left\{\omega tan\frac{1}{2}(\theta_{t-1} - \alpha)\right\}$$

$$\theta_t|\theta_{t-1} \sim M(\alpha + 2tan^{-1}\left\{\omega tan\frac{1}{2}(\theta_{t-1} - \alpha)\right\}, k)$$

- Por tanto el modelo de serie de tiempo se convierte en

$$\theta_t = \alpha + 2tan^{-1}\left\{\omega tan\frac{1}{2}(\theta_{t-1} - \alpha)\right\} + \epsilon_t$$

$$\epsilon_t \sim M(0, k)$$

$$\mu_t = \alpha + 2tan^{-1}\left\{\omega tan\frac{1}{2}(\theta_{t-1} - \alpha)\right\}$$

- Estimamos los parámetros α y ω mediante máxima verosimiltud; es decir, maximizando la función

$$l(\alpha, \beta) = \sum_{i=2}^{n} cos\left[\theta_t - \alpha - 2tan^{-1}\left\{\omega tan\frac{1}{2}(\theta_{t-1} - \alpha)\right\}\right]$$

- La maximización la haremos usando la función *nlm* de R pero minimizando la función $-l_C(\alpha, \omega)$ para numerosos conjuntos de datos.
- Una vez que $l(\alpha, \omega)$ ha sido máximizada con respecto a α y ω, una aproximación mediante verosimilitud puede ser usada para obtener una estimación mediante máxima verosimilitud de κ, maximizando

$$l_C(\hat{\alpha}, \hat{\omega}, \kappa) = const. - (n-1) log I_0 \kappa + \kappa l_{\hat{\alpha}, \hat{\omega}}$$

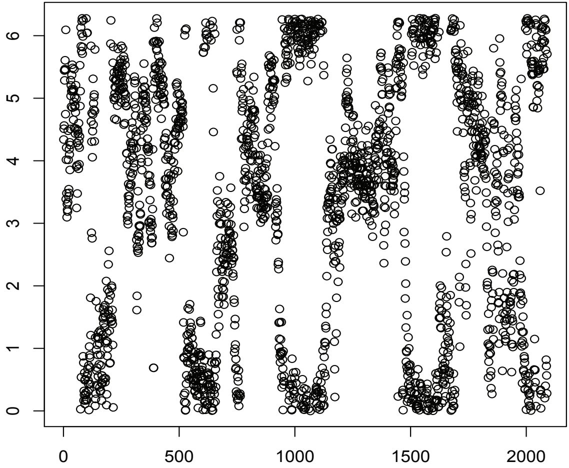
respecto de κ.

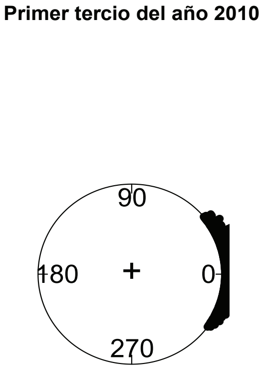
- Diferenciando respecto de κ y teniendo en cuenta que $d(I_0(\kappa))/d\kappa = I_1(\kappa)$, la función de Bessel de primer tipo y de orden uno, obtenemos

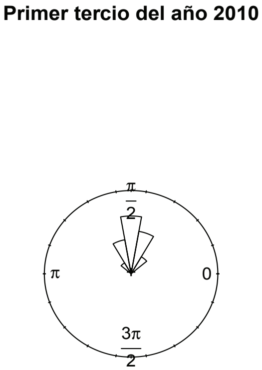
$$\frac{\partial}{\partial\kappa}[l_C(\hat{\alpha},\hat{\omega},\kappa)] = -(n-1)\frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)} + l_{\hat{\alpha},\hat{\omega}},$$

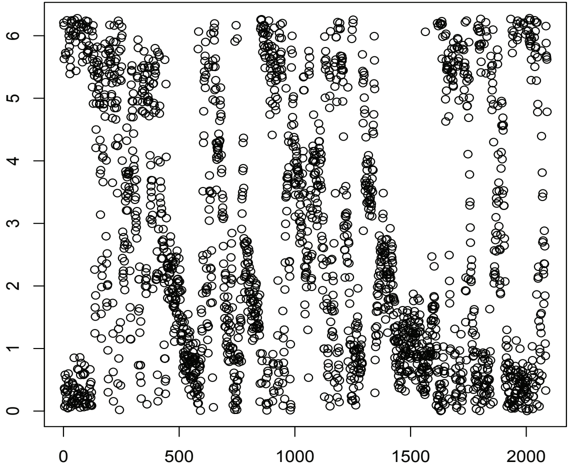
así que κ es la solución de

$$\frac{I_1(\hat{\kappa})}{I_0(\kappa)} = \frac{l_{\hat{\alpha},\hat{\omega}}}{n-1}.$$


0
1
2
3
4
5
6
0
500
1000
1500
2000

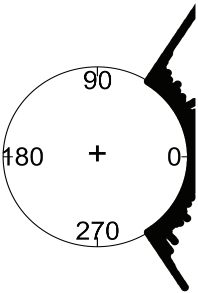

Primer tercio del año 2010
90
180
0
270


Primer tercio del año 2010
$\frac{\pi}{2}$
π
0
$\frac{3\pi}{2}$

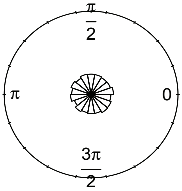


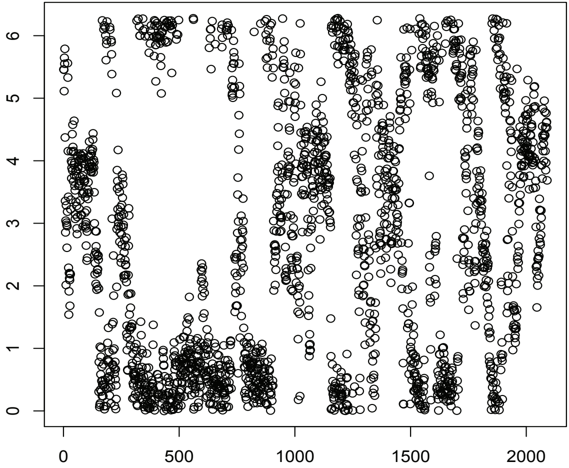
0
1
2
3
4
5
6
0
500
1000
1500
2000

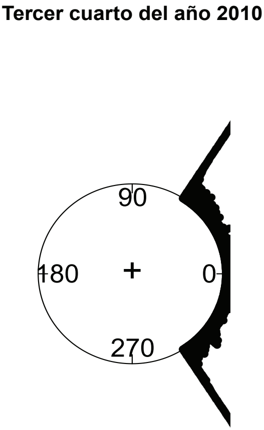
Segundo cuarto del año 2010

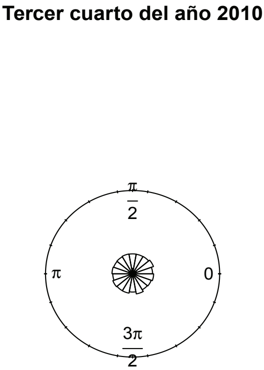


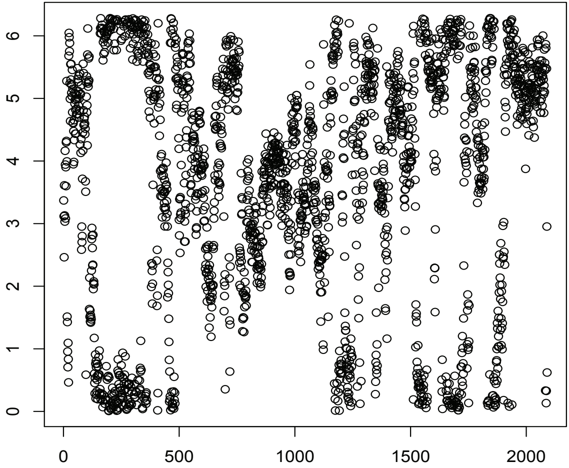
Segundo cuarto del año 2010



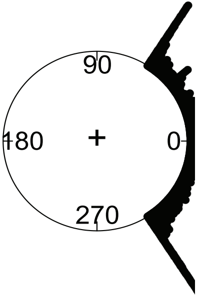

0
1
2
3
4
5
6
0
500
1000
1500
2000


Tercer cuarto del año 2010
90
180
0
270

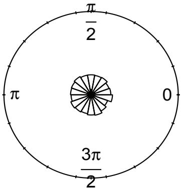

Tercer cuarto del año 2010
π/2
π
0
3π/2


0
1
2
3
4
5
6
0
500
1000
1500
2000

Cuarto cuarto del año 2010



Cuarto cuarto del año 2010



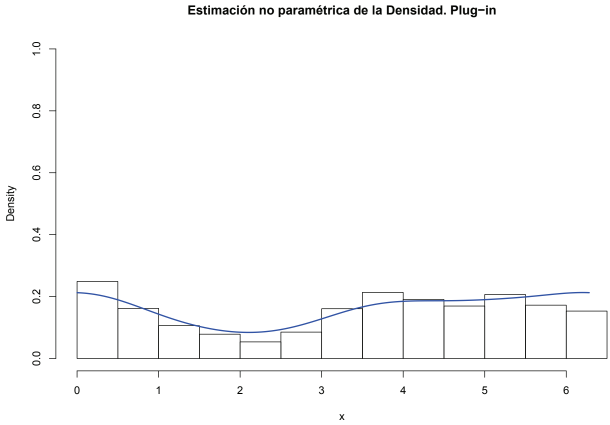


Figura: Estimación plug-in de la densidad del primer periodo de 2010

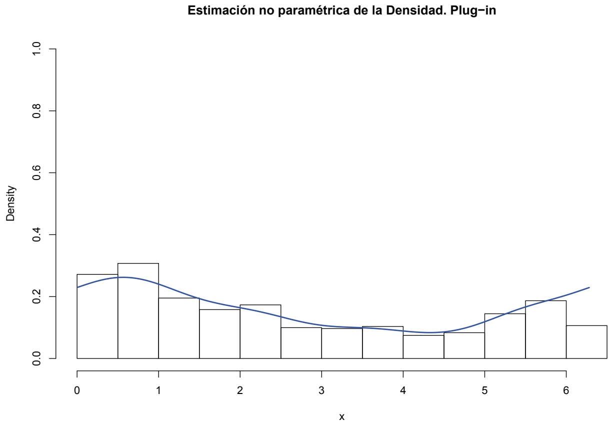


Figura: Estimación plug-in de la densidad del segundo periodo de 2010

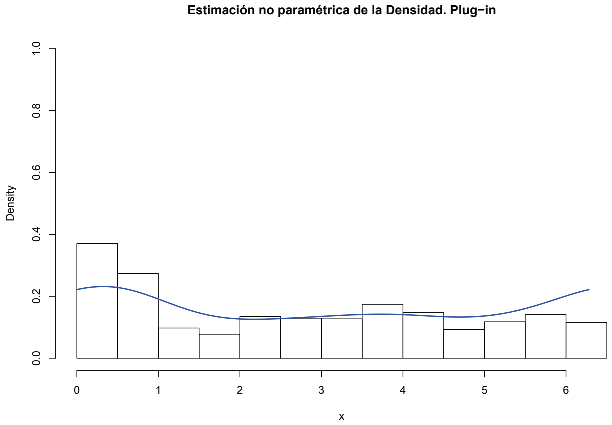


Figura: Estimación plug-in de la densidad del tercer periodo de 2010

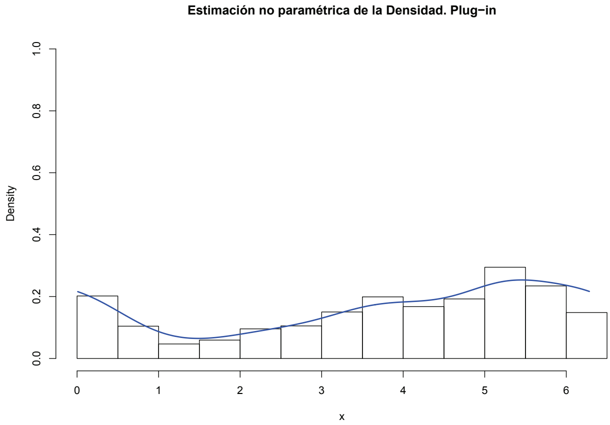


Figura: Estimación plug-in de la densidad del cuarto periodo de 2010

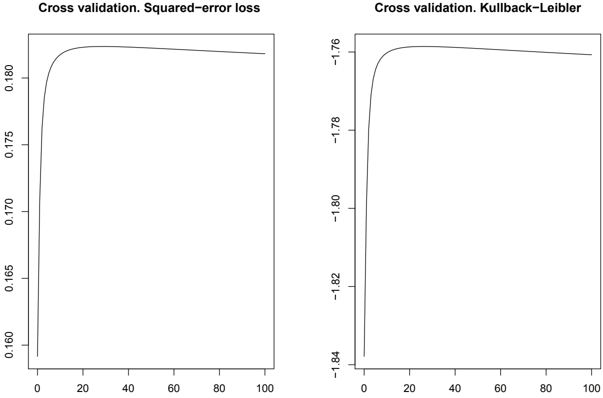


Figura: Validación cruzada del primer periodo de 2010

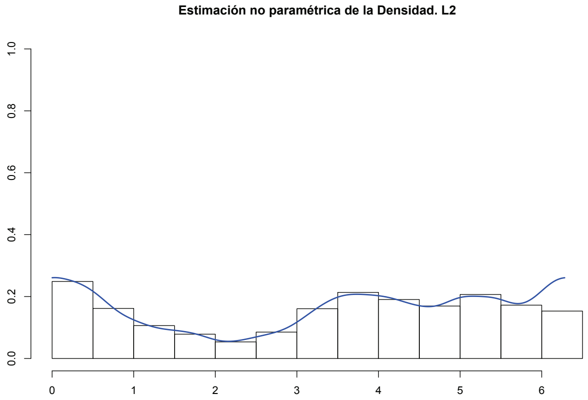


Figura: Estimación L2 de la densidad del primer periodo de 2010

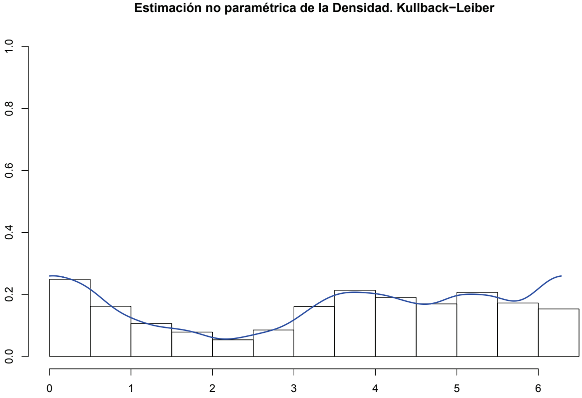


Figura: Estimación KL de la densidad del primer periodo de 2010

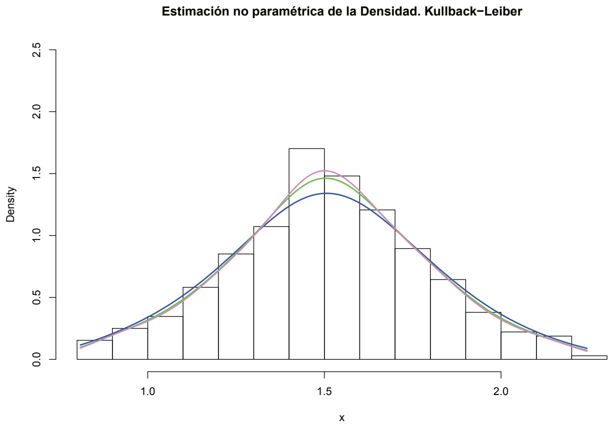


Figura: Estimación no paramétrica de la Densidad KL del primer periodo de 2010. v=50 (azul), v=100 (verde), v=150 (violeta)

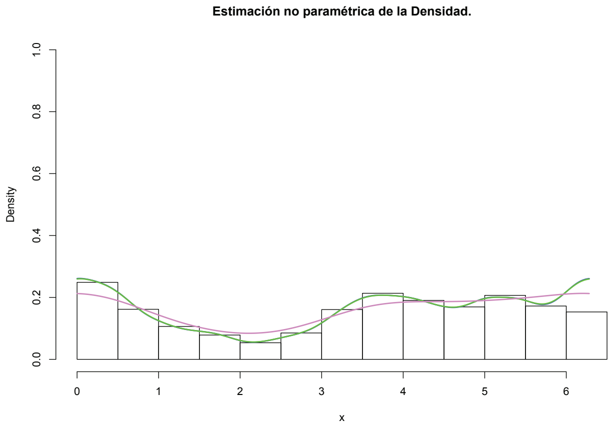


Figura: Estimación no paramétrica de la Densidad. L2 (azul), KL (verde), plug-in (violeta)

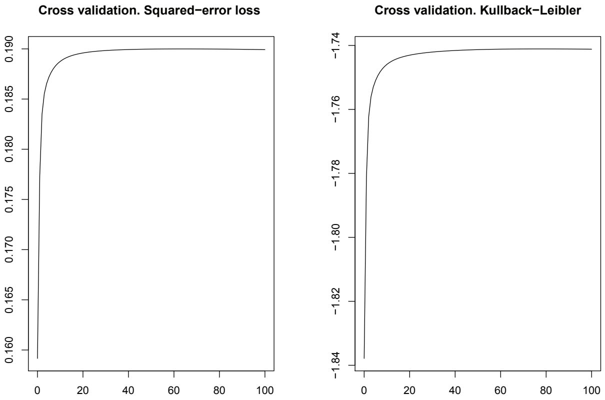


Figura: Validación cruzada del segundo periodo de 2010

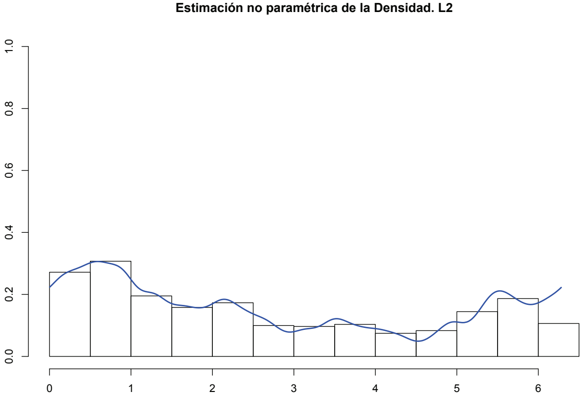


Figura: Estimación L2 de la densidad del segundo periodo de 2010

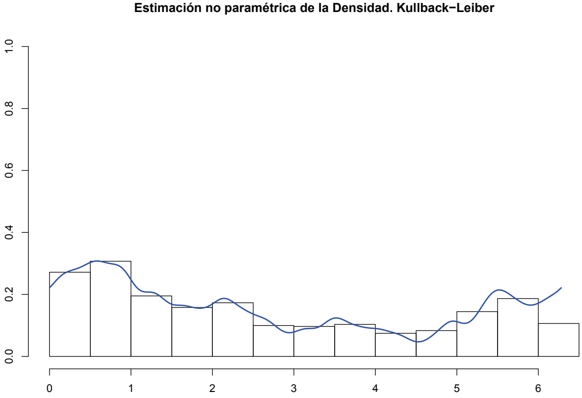


Figura: Estimación KL de la densidad del segundo periodo de 2010

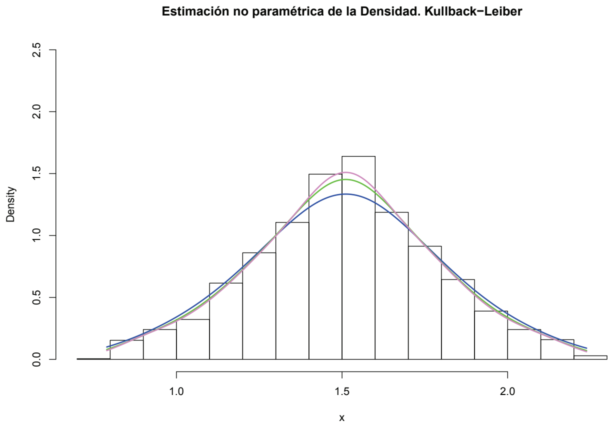


Figura: Estimación no paramétrica de la Densidad KL del segundo periodo de 2010. v=50 (azul), v=100 (verde), v=150 (violeta)

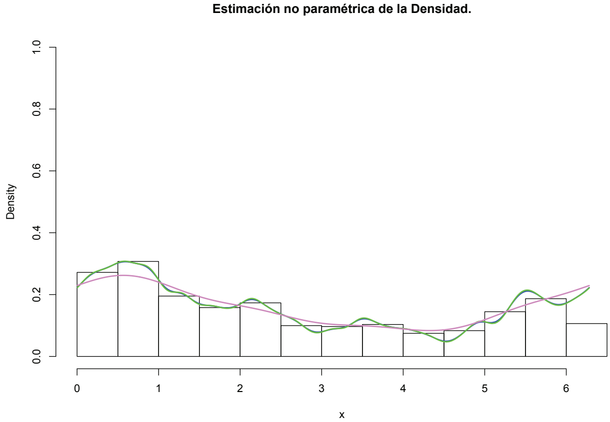


Figura: Estimación no paramétrica de la Densidad. L2 (azul), KL (verde), plug-in (violeta)

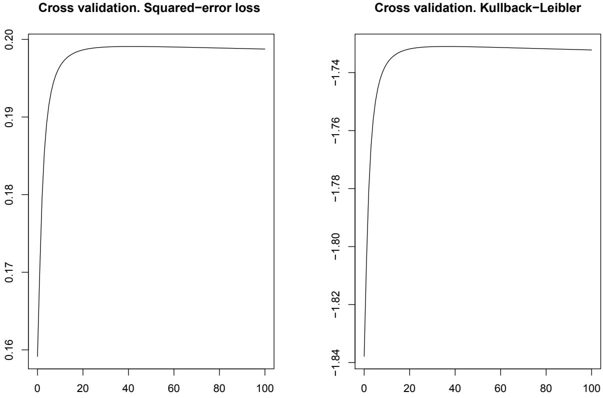


Figura: Validación cruzada del tercer periodo de 2010

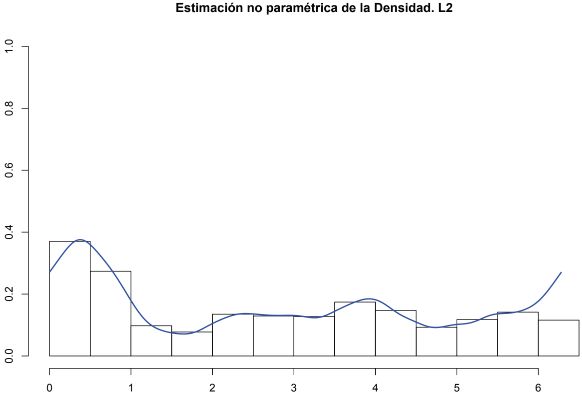


Figura: Estimación L2 de la densidad del tercer periodo de 2010

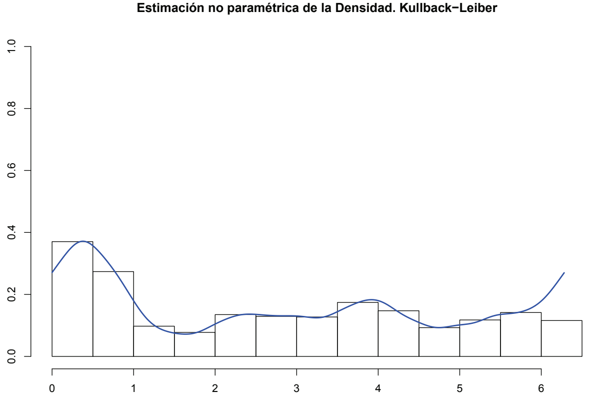


Figura: Estimación KL de la densidad del tercer periodo de 2010

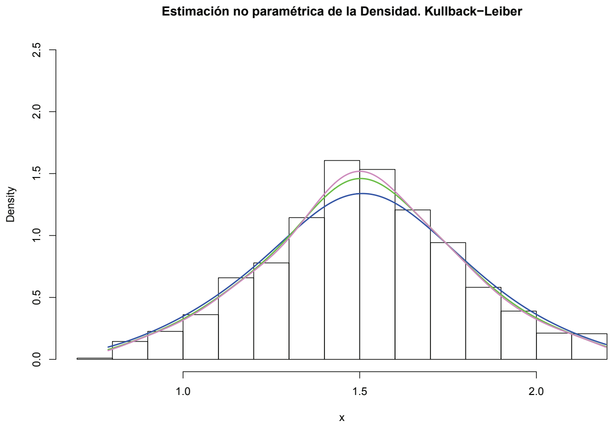


Figura: Estimación no paramétrica de la Densidad KL del tercer periodo de 2010. v=50 (azul), v=100 (verde), v=150 (violeta)

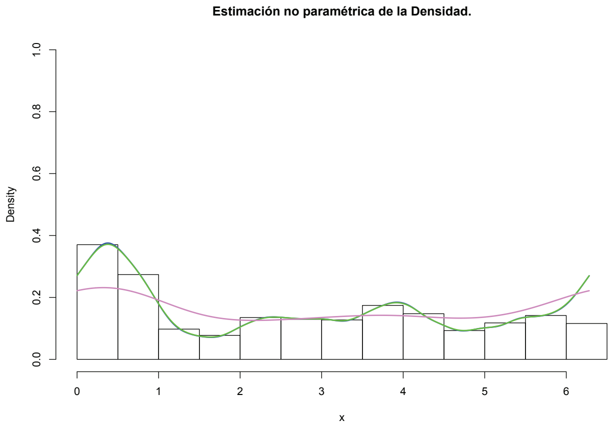


Figura: Estimación no paramétrica de la Densidad. L2 (azul), KL (verde), plug-in (violeta)

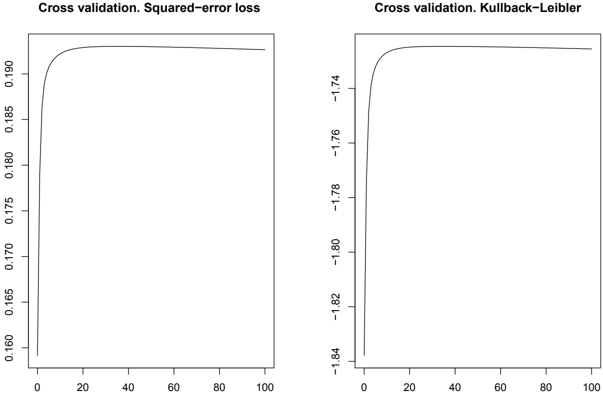


Figura: Validación cruzada del cuarto periodo de 2010

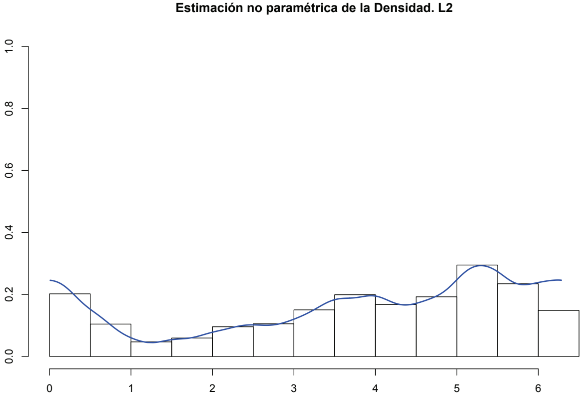


Figura: Estimación L2 de la densidad del cuarto periodo de 2010

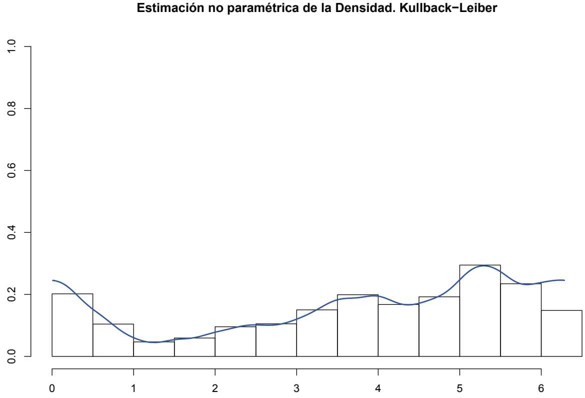


Figura: Estimación KL de la densidad del cuarto periodo de 2010

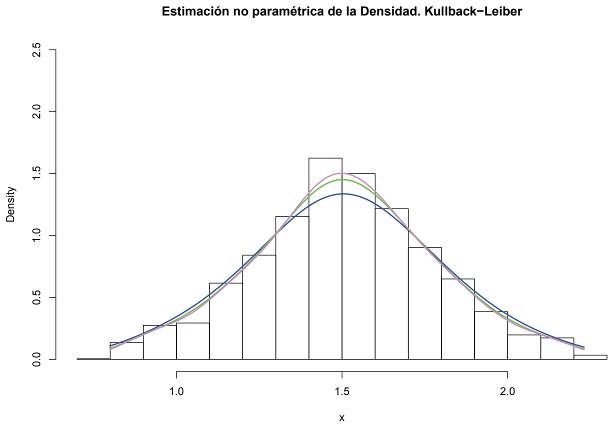


Figura: Estimación no paramétrica de la Densidad KL del cuarto periodo de 2010. v=50 (azul), v=100 (verde), v=150 (violeta)

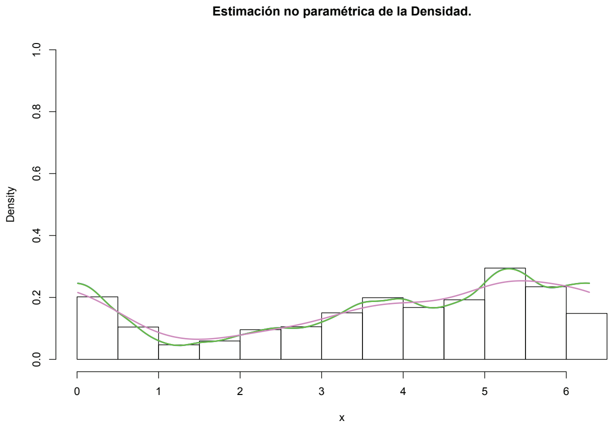


Figura: Estimación no paramétrica de la Densidad. L2 (azul), KL (verde), plug-in (violeta)

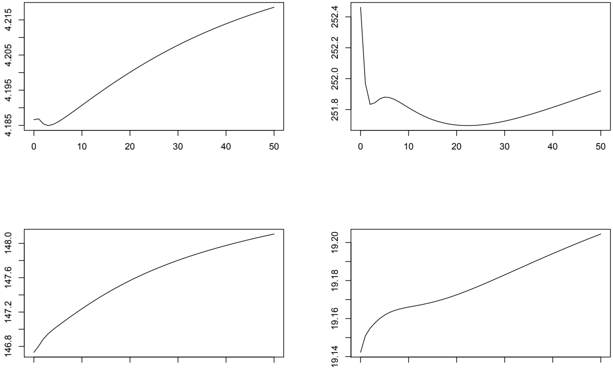


Figura: Validación cruzada en la estación B1

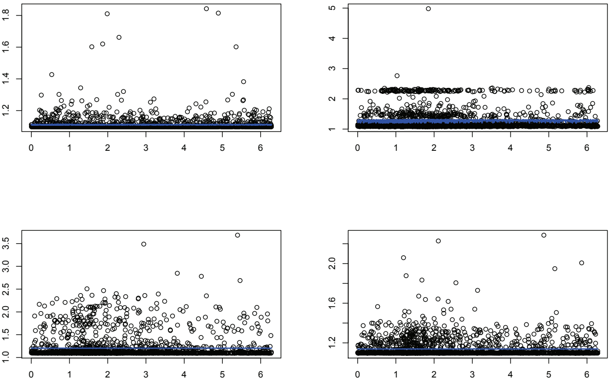


Figura: Estimación de la función de regresión circular lineal en B1. Estimación del parámetro de suavizado mediante validación cruzada.

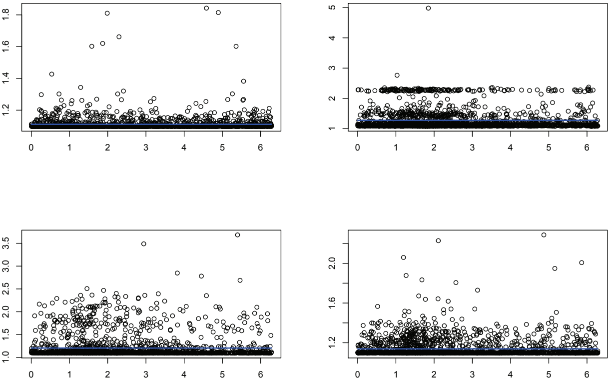


Figura: Estimación de la función de regresión circular lineal en B1. Estimación del parámetro de suavizado mediante $1/h_s^2$.

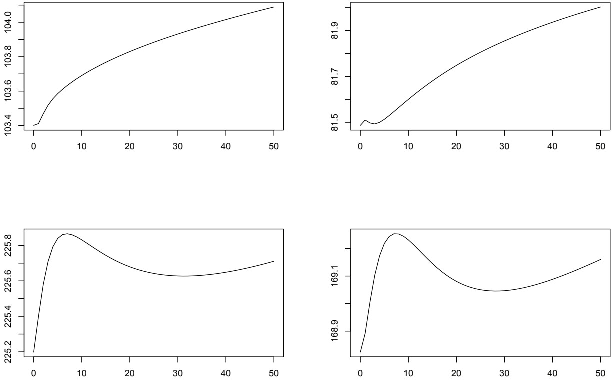


Figura: Validación cruzada en la estación B2

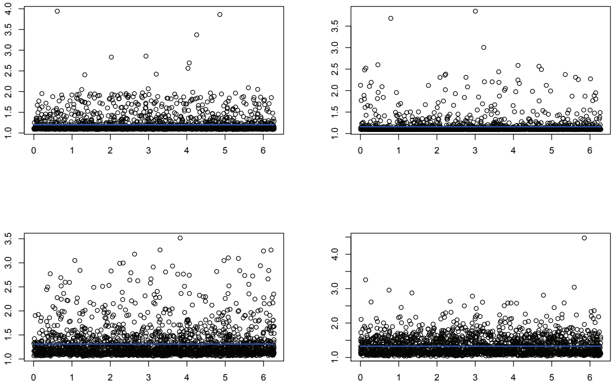


Figura: Estimación de la función de regresión circular lineal en B2. Estimación del parámetro de suavizado mediante validación cruzada.

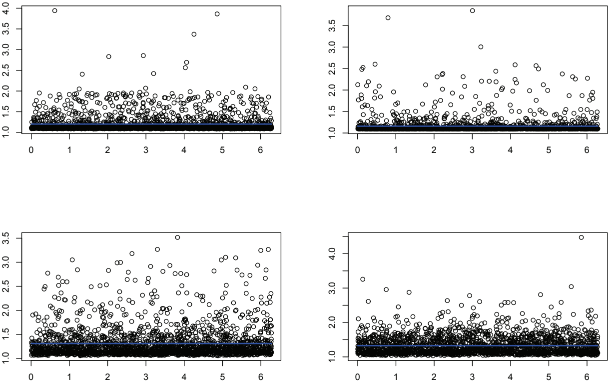


Figura: Estimación de la función de regresión circular lineal en B2. Estimación del parámetro de suavizado mediante $1/h_s^2$.

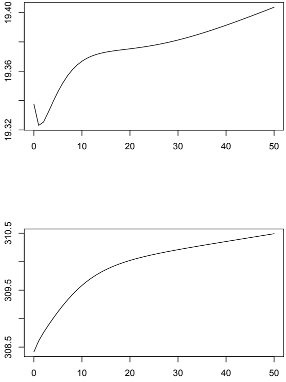


Figura: Validación cruzada en la estación C9

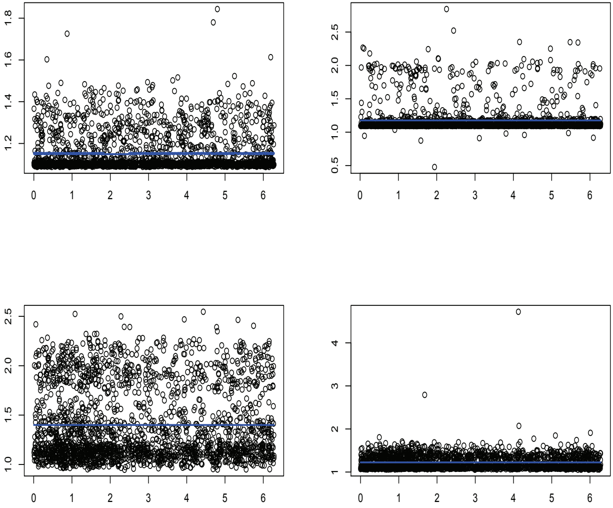


Figura: Estimación de la función de regresión circular lineal en C9. Estimación del parámetro de suavizado mediante validación cruzada

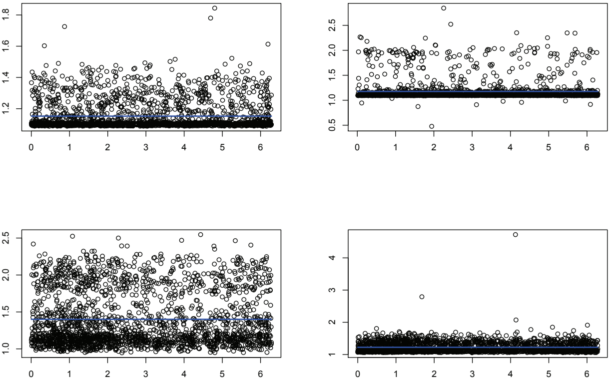


Figura: Estimación de la función de regresión circular lineal en C9. Estimación del parámetro de suavizado mediante $1/h_s^2$.

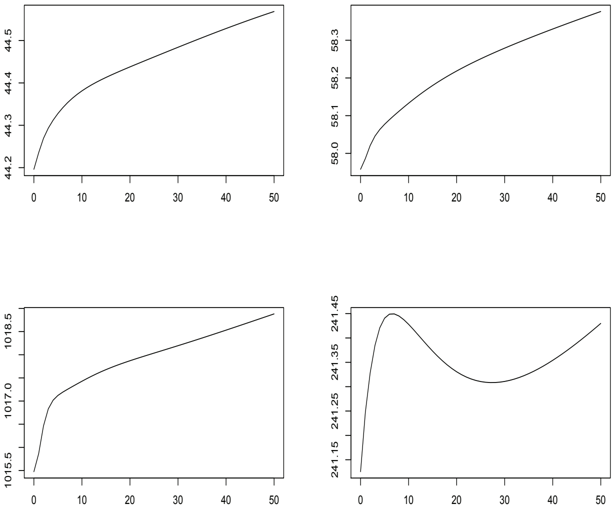


Figura: Validación cruzada en la estación F2

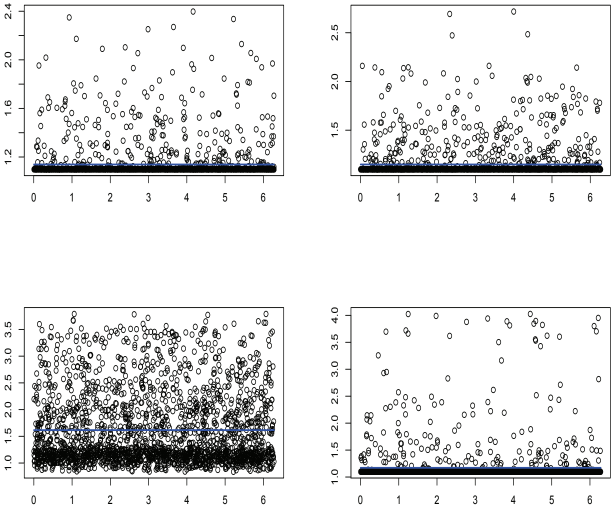


Figura: Estimación de la función de regresión circular lineal en F2. Estimación del parámetro de suavizado mediante validación cruzada

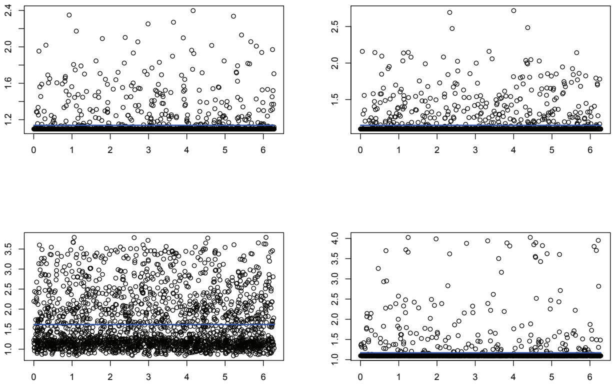


Figura: Estimación de la función de regresión circular lineal en F2. Estimación del parámetro de suavizado mediante $1/h_s^2$.

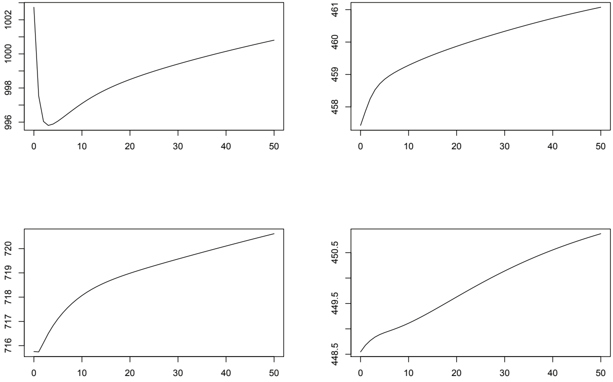


Figura: Validación cruzada en la estación G2

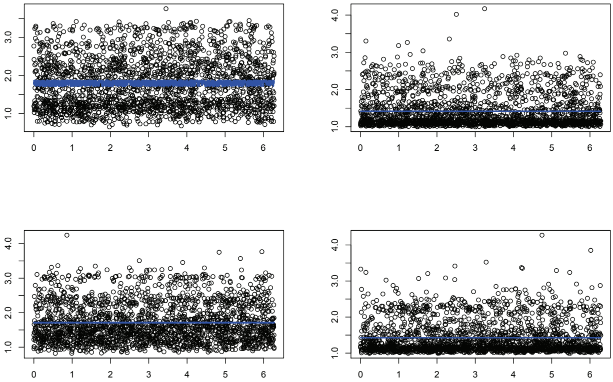


Figura: Estimación de la función de regresión circular lineal en G2. Estimación del parámetro de suavizado mediante validación cruzada.

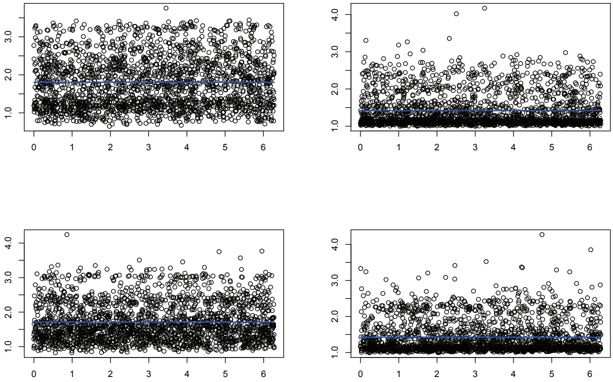
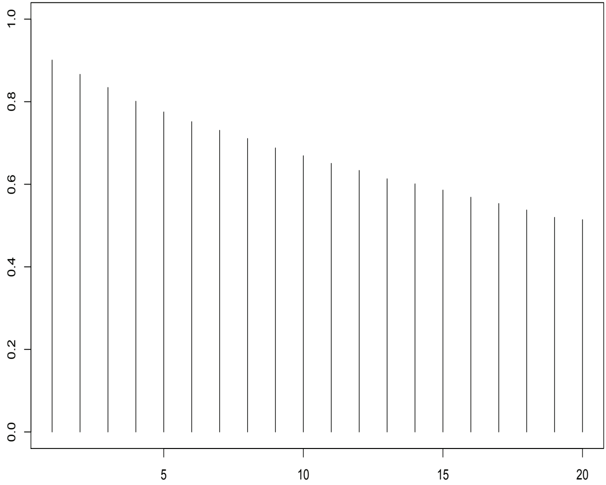
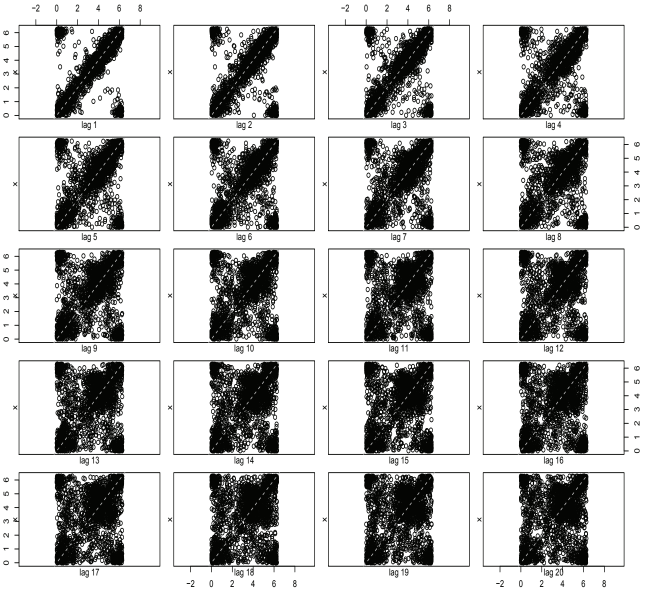


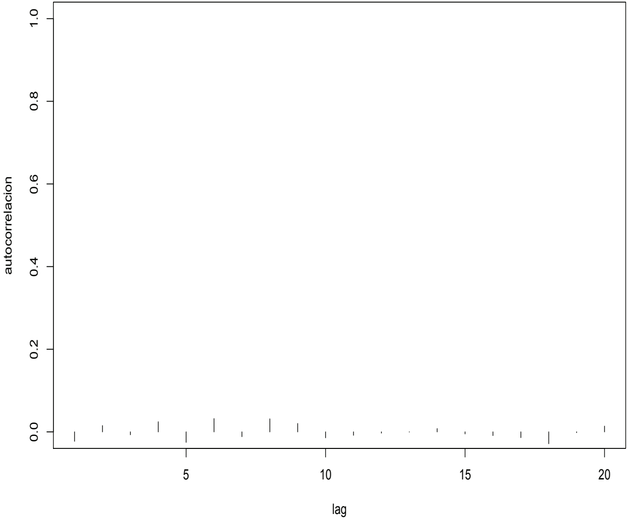
Figura: Estimación de la función de regresión circular lineal en G2. Estimación del parámetro de suavizado mediante $1/h_s^2$.

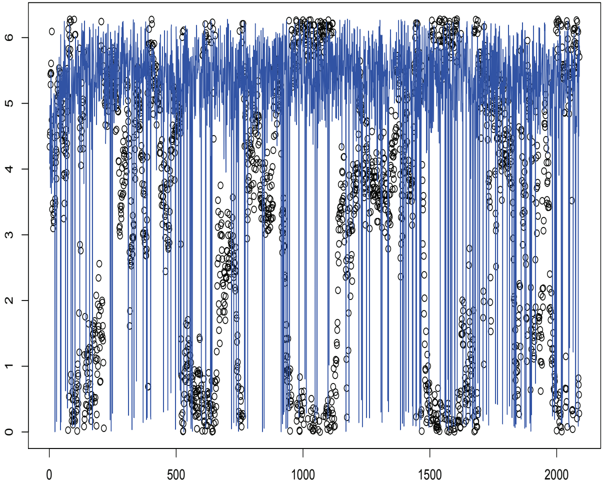


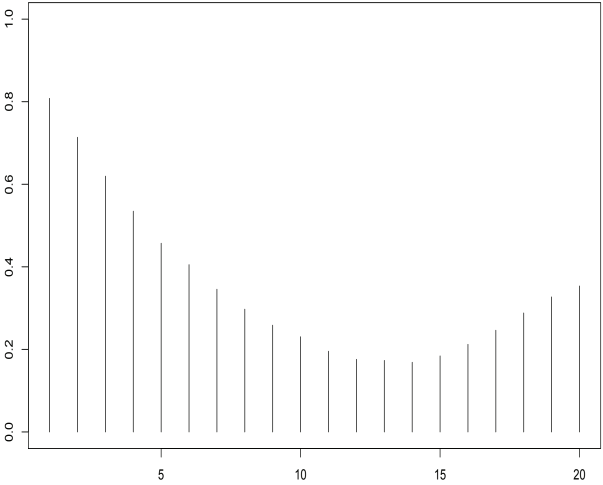
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
5
10
15
20

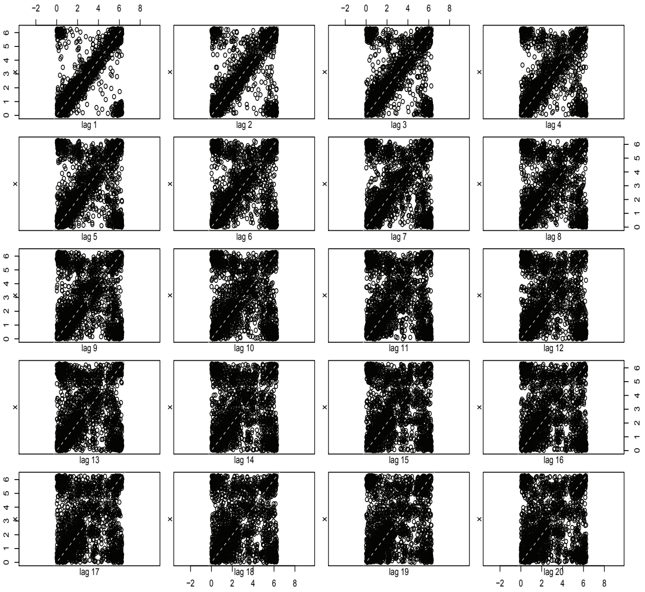


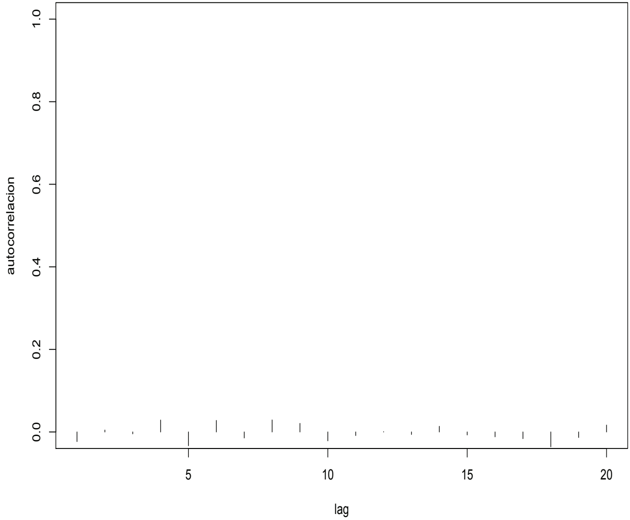
lag 1
lag 2
lag 3
lag 4
lag 5
lag 6
lag 7
lag 8
lag 9
lag 10
lag 11
lag 12
lag 13
lag 14
lag 15
lag 16
lag 17
lag 18
lag 19
lag 20
x


autocorrelacion
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
5
10
15
20
lag


0
1
2
3
4
5
6
0
500
1000
1500
2000


0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
5
10
15
20


lag 1
lag 2
lag 3
lag 4
lag 5
lag 6
lag 7
lag 8
lag 9
lag 10
lag 11
lag 12
lag 13
lag 14
lag 15
lag 16
lag 17
lag 18
lag 19
lag 20
x



autocorrelacion
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
5
10
15
20
lag