

Datos direccionales.

Proyecto Fin de Máster.

Leyenda Rodríguez, María

7 de junio de 2011

- ▶ En diversos campos surgen problemas estadísticos dónde los datos son dados mediante medidas angulares dando la orientación o angulos en el plano (datos circulares) o en el espacio (datos esféricos).
- ▶ Datos circulares es el caso más simple de esta categoría de datos llamada **datos direccionales**, dónde la única respuesta es no escalar, pero es angular o direccional.

Notación

- ▶ Las direcciones en el plano pueden ser observadas como vectores en el plano o como puntos en el círculo unidad. También se pueden observar, como ángulos o como números complejos.
- ▶ Escogemos dirección y orientación inicial.

Luego cada punto x en el círculo unidad puede ser representado por un ángulo θ o por un número complejo unitario z .

$$x = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$$
$$z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$$

Medidas de localización

- ▶ Sean x_1, \dots, x_n cuyos ángulos correspondientes θ_i , $i = 1, \dots, n$.
- ▶ La dirección media $\bar{\theta}$ de $\theta_1, \dots, \theta_n$ es la dirección de $x_1 + \dots + x_n$. Es también el centro de masa \bar{x} de x_1, \dots, x_n .
- ▶ Las coordenadas cartesianas de x_j son $(\cos\theta_j, \operatorname{sen}\theta_j)$
- ▶ Las coordenadas cartesianas del centro de masa son (\bar{C}, \bar{S}) .

$$\bar{C} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cos\theta_j$$

$$\bar{S} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \operatorname{sen}\theta_j$$

Medidas de localización

- ▶ Dónde $\bar{\theta}$ es la solución de las ecuaciones

$$\bar{C} = \bar{R}\cos\bar{\theta}$$

$$\bar{S} = \bar{R}\sen\bar{\theta}$$

- ▶ La media de la longitud resultante \bar{R} es dada por

$$\bar{R} = \sqrt{\bar{C}^2 + \bar{S}^2}$$

Medidas de localización

- ▶ Notemos que $\bar{\theta}$ no está definida cuando $\bar{R} = 0$
- ▶ Cuando $\bar{R} > 0$, $\bar{\theta}$ es dada por

$$\bar{\theta} = \begin{cases} \tan^{-1}(\bar{S}/\bar{C}) & \text{si } \bar{C} \geq 0 \\ \tan^{-1}(\bar{S}/\bar{C}) + \pi & \text{si } \bar{C} < 0 \end{cases}$$

Notemos que en el contexto de estadística circular $\bar{\theta}$ no es la media $(\theta_1 + \dots + \theta_n)/n$

Medidas de localización

- ▶ Notemos que la media muestral de la dirección es equivariante bajo rotación.
- ▶ Diferentes estadísticos utilizando diferentes sistemas de coordenadas estarán de acuerdo en dónde está la media muestral, a pesar de que puede usar números diferentes para describir su posición

Medidas de localización

- ▶ La mediana muestral de la dirección $\bar{\theta}$ de los ángulos $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ es algún ángulo ϕ tal que
 1. La mitad de los puntos se encuentran en el arco $[\phi, \phi + \pi)$
 2. la mayoría de los puntos están más cerca de ϕ que de $\phi + \pi$
- ▶ Cuando n es par, la mediana coincide con uno de ellos.
- ▶ Cuando n es impar, es conveniente tomar la mediana como el punto medio de dos puntos adyacentes adecuados.

Medidas de concentración y dispersión

- ▶ $\bar{R} = \sqrt{\bar{C}^2 + \bar{S}^2}$, entonces si x_1, \dots, x_n son vectores unitarios, $0 \leq \bar{R} \leq 1$.
- ▶ Si las direcciones $\theta_1, \dots, \theta_n$ están estrechamente agrupadas luego $\bar{R} = 1$.
- ▶ Si $\theta_1, \dots, \theta_n$ están muy dispersas luego \bar{R} será prácticamente 0.

Por tanto, \bar{R} es una medida de concentración del conjunto de datos.

- ▶ \bar{R} es invariante bajo rotaciones.
- ▶ La longitud resultante \bar{R} es la longitud del vector resultante $x_1 + \dots + x_n$.
- ▶ $R = n\bar{R}$

Medidas de concentración y dispersión

- ▶ La media de longitud resultante \bar{R} es la medida de dispersión más importante.
- ▶ A veces emplearemos otras medidas de dispersión de datos circulares, para comparar con datos en línea: la medida más simple es la **varianza circular muestral**

$$V = 1 - \bar{R}$$

- ▶ **Desviación circular estándar**

$$v = \sqrt{-2 \log \bar{R}}$$

Medidas de concentración y dispersión

Otras medidas de dispersión

- ▶ Distancia entre dos ángulos θ y ξ

$$\min(\theta - \xi, 2\pi - (\theta - \xi)) = \pi - |\pi - |\theta - \xi||$$

- ▶ Medida de dispersión de los ángulos $\theta_1, \dots, \theta_n$ sobre un ángulo dado α es

$$d_0(\alpha) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\pi - |\pi - |\theta_i - \alpha||)$$

- ▶ la función d_0 toma el mínimo en la mediana muestral $\tilde{\theta}$. La desviación circular media es $d_0(\tilde{\theta})$

Distribución circular

- ▶ Una distribución circular es una distribución de probabilidad la cual está concentrada en la circunferencia de círculo unidad.
- ▶ Las distribuciones circulares son de dos tipos:
 1. Discretas- asignan masas de probabilidad solo a un número de direcciones
 2. Absolutamente continuas
- ▶ Existe la función de densidad $f(\theta)$
 1. $f(\theta) \geq 0$
 2. $\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 1$
 3. $f(\theta) = f(\theta + 2\pi)$

Distribución lattice

$$Pr(\theta = v + \frac{2\pi r}{m}) = p_r \quad r = 0, 1, \dots, m - 1$$

$$p_r \geq 0, \quad \sum_{r=0}^{m-1} p_r = 1$$

- ▶ Los puntos $\frac{2\pi r}{m}$ son los vértices de un polígono de m lados inscrito en el círculo unidad.
- ▶ Si los pesos son $p_r = \frac{1}{m}$, entonces se le denomina distribución uniforme discretizada en m puntos.

Distribución uniforme

- ▶ A menudo usada como modelo nulo.
- ▶ Es la única distribución en el círculo la cual es invariante bajo rotación y reflexión.
- ▶ Su función de masa de probabilidad

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi}$$

Distribución von Mises

Definición

$$g(\theta; \mu, k) = \frac{1}{2\pi I_0(k)} e^{k \cos(\theta - \mu)}$$

- ▶ I_0 denota la función de Bessel modificada de primer tipo y orden 0,

$$I_0(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{k \cos \theta} d\theta, \quad I_0(k) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(r!)^2} \left(\frac{k}{2}\right)^{2r}$$

- ▶ El parámetro μ es la media de las direcciones
- ▶ k es el parámetro de concentración.

Distribución von Mises

Relación v, \bar{R}, S_n^2 y parámetro de concentración

1. Generamos una muestra $M(\pi, k)$ de tamaño 3000 para distintos valores del parámetro k (75 valores).
2. Para cada una de las muestras calculamos
 - ▶ La varianza definida de forma análoga que en el caso lineal con respecto a la distancia euclídea y a la distancia definida por la longitud de arco,
 - ▶ el parámetro de concentración $\bar{R} = \sqrt{\bar{C}^2 + \bar{S}^2}$ y
 - ▶ la desviación circular estándar $\sqrt{-2\log(\bar{R})}$.
3. Representamos la estimador local-lineal de cada una de las estimaciones anteriores frente al parámetro de von-Mises.

Distribución von Mises

Relación v, \bar{R}, S_n^2 y parámetro de concentración

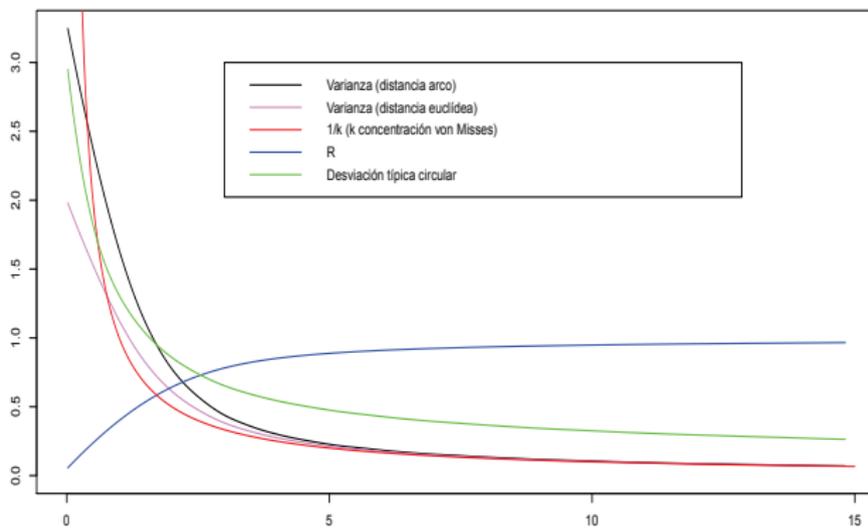
$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d^2(\theta_i, \theta)$$

$$\theta = \min_y \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d^2(\theta_i, y)$$

$$d^2(\theta_i, \theta_j) = \pi - |\pi - |\theta_i - \theta_j||$$

$$d^2(\theta_i, \theta_j) = 2(1 - (\cos(\theta_i - \theta_j)))$$

Distribución von Mises

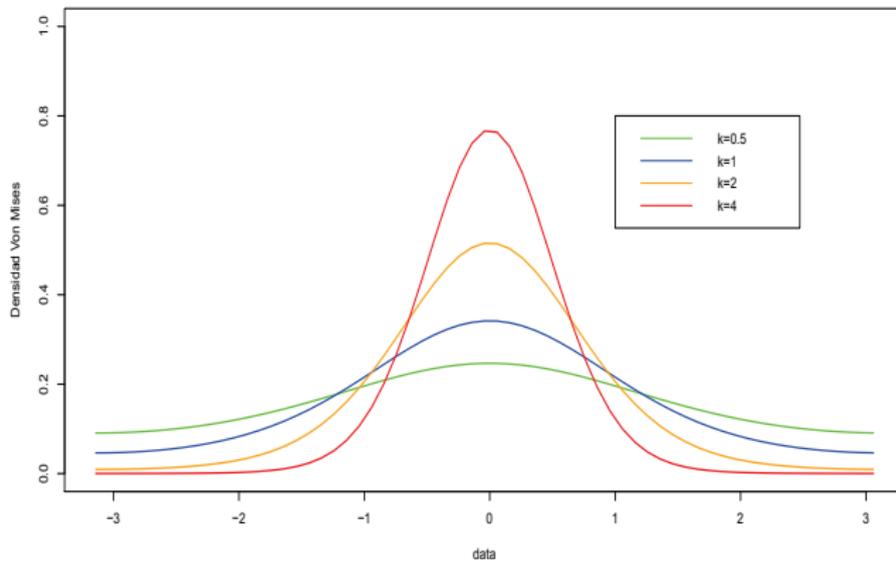


Distribución von Mises

Forma

- ▶ La distribución es unimodal y es simétrica sobre $\theta = \mu$
- ▶ La moda se encuentra en $\theta = \mu$ y la antimoda en $\theta = \mu + \pi$
- ▶ la relación de la moda de la densidad y la antimoda viene dada por e^{2k} , así que cuanto mayor sea el valor de k , mayor es el agrupamiento acerca de la moda.

Distribución von Mises



Distribución von Mises

Relación con otras distribuciones

- ▶ Si $k=0$, entonces $M(\mu, k)$ es la distribución uniforme.
- ▶ La aproximación $\exp(x) \cong 1 + x$, muestra que para k pequeños $M(\mu, k) \cong C(\mu, k/2)$, donde $C(\mu, k/2)$ denota una distribución Cardioide.
- ▶ Cualquier von Mises puede ser aproximada por una distribución normal wrapped.

$$M(\mu, k) \cong WN(\mu, A(k)), \quad k \rightarrow \infty$$
$$A_k = I_1(k)/I_0(k)$$

Distribución von Mises

Función de distribución

$$F(\theta; 0, k) = \frac{1}{I_0(k)} \int_0^\theta e^{k \cos u} du$$

Distribución von Mises

Convolución

- ▶ La convolución de dos von Mises no es una distribución von Mises.
- ▶ La convolución de dos distribuciones normal wrapped, $WN(\mu_1, A(k_1))$ y $WN(\mu_2, A(k_2))$ es la distribución wrapped normal $WN(\mu_1 + \mu_2, A(k_1)A(k_2))$. La cual puede ser aproximada por $M(\mu_1 + \mu_2, A^{-1}(A(k_1)A(k_2)))$

$$\theta_1 + \theta_2 \sim M(\mu_1 + \mu_2, A^{-1}(A(k_1)A(k_2)))$$

Distribución Cardioide

- ▶ Perturbación de la densidad uniforme por la función coseno da lugar a una distribución Cardioide $C(\mu, \rho)$
- ▶ Función de masa de probabilidad

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi}(1 + 2\rho\cos(\theta - \mu)) \quad |\rho| < \frac{1}{2}$$

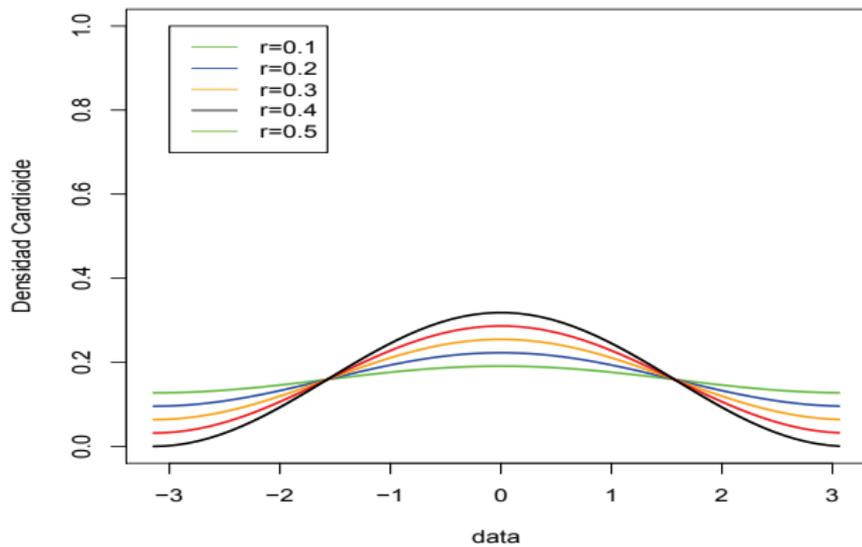
- ▶ La media de longitud resultante es ρ
- ▶ La media de la dirección es μ
- ▶ La distribución es simétrica y unimodal en μ (si $\rho > 0$).
- ▶ Si $\rho = 0$ la distribución se reduce a la distribución uniforme.
- ▶ El principal uso de estas distribuciones es como aproximaciones de poca concentración a las distribuciones von Mises

Distribución Cardioide

$$\theta_i \sim C(\mu_i, \rho_i) (i = 1, 2) \Rightarrow \theta_1 + \theta_2 \sim C(\mu_1 + \mu_2, \rho_1 \rho_2)$$

El conjunto de distribuciones Cardioides es cerrado bajo convolución

Distribución Cardioide



Distribución Normal proyectada

- ▶ Las distribuciones en el círculo pueden ser obtenidas mediante proyección radial de la distribución en el plano.
- ▶ Sea x un vector aleatorio bidimensional, $\Pr(x=0)=0$. Luego $\|x\|^{-1}x$ es un punto aleatorio sobre el círculo unidad.
- ▶ Un ejemplo importante es aquel en el que x tiene una distribución normal bivalente $N_2(\mu, \Sigma)$, en cuyo caso $\|x\|^{-1}x$ se dice que sigue una distribución normal proyectada $PN_2(\mu, \Sigma)$.

Distribución Normal proyectada

Aplicación

Meteorología: Cuando la velocidad del viento es modelada mediante una distribución normal bivariante, la resultante distribución marginal para la dirección del viento es una distribución normal proyectada.

Distribución Normal proyectada

$$\frac{\phi(\theta; 0, \Sigma) + |\Sigma|^{-1/2} D(\theta) \phi(D(\theta)) \phi(|\Sigma|^{-1/2} (x^T \Sigma^{-1} x)^{-1/2} \mu \wedge x)}{x^T \Sigma^{-1} x} = p(\theta; \mu, \Sigma)$$

- ▶ $\phi(\cdot; 0, \Sigma)$ denota la función de masa de probabilidad, ϕ y Φ denotan la función de masa de probabilidad y la función de densidad acumulada de $N(0,1)$, $x = (\cos\theta, \sin\theta)^T$

$$D(\theta) = \frac{\mu^T \Sigma^{-1} x}{(x^T \Sigma^{-1} x)^{1/2}}$$

$$\mu \wedge x = \mu_1 \sin\theta - \mu_2 \cos\theta \quad \mu = (\mu_1, \mu_2)^T$$

Distribución Wrapped

Definición

- ▶ Dada una distribución en la línea, se puede envolver alrededor de la circunferencia del círculo de radio uno.
- ▶ Si x es una variable aleatoria en la línea, la variable aleatoria correspondiente x_w de la distribución wrapped viene dada por

$$x_w = x(\text{mod}2\pi)$$

- ▶ Si el círculo es identificado con el conjunto de números complejos de módulo la unidad luego el mapa wrapping $x \rightarrow x_w$ pueden ser escrito como

$$x \rightarrow e^{2\pi ix}$$

Distribución Wrapped

Definición

- ▶ Si x tiene como función de distribución $F \Rightarrow$ la función de distribución F_w de x_w viene dada por

$$F_w(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{F(\theta + 2\pi k) - F(2\pi k)\}$$

- ▶ Si x tiene como función de masa de probabilidad $f \Rightarrow$ la función de masa de probabilidad f_w de x_w es

$$f_w(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\theta + 2\pi k)$$

Distribución Wrapped

Propiedades

1. $(x + y)_w = x_w + y_w$
2. Si la función característica de x es ϕ entonces la función característica $\{\phi_p : p = 0, \pm 1, \dots\}$ de x_w es dada por $\phi_p = \phi(p)$
3. Si ϕ es integrable entonces x tiene función una densidad y

$$f_w(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\theta + 2\pi k) = \frac{1}{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} (\alpha_p \cos p\theta + \beta_p \sin p\theta) \right]$$

$$\Phi(p) = \alpha_p + i\beta_p$$

Distribución Wrapped

Propiedades

- ▶ Hay muchas distribuciones en las líneas las cuales pueden ser envueltas en cualquier distribución dada en el círculo.
- ▶ Sea g la función de masa de probabilidad de una distribución en el círculo y define una función de masa de probabilidad en la línea por

$$f(x) = p_r g(x)$$

$$2\pi r < x \leq 2\pi(r + 1) \quad r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

- ▶ p_r son números no negativos tales que, $\sum_{r=-\infty}^{\infty} p_r = 1$.

- ▶ Dada una muestra aleatoria de ángulos $\theta_1, \dots, \theta_n \in [0, 2\pi]$.
- ▶ Consideraremos que el estimador no paramétrico de la densidad con función núcleo la distribución von Mises, viene dado por

$$\hat{f}(\theta, \nu) = \frac{c_0(\nu)}{n} \sum_{i=1}^n L(\nu \cos(\theta - \theta_i))$$

$$c_0(\nu) = \frac{1}{2\pi I_0(\nu)} \quad L(x) = e^x$$

- ▶ Donde $I_r(\nu)$ es la función de Bessel modificada de orden r .
- ▶ El parámetro de concentración ν ahora ha asumido el papel de (la inversa del) parámetro de suavizado.

- ▶ El error asintótico cuadrático medio integrado es

$$AMISE(\nu) = 3\kappa^2 I_2(2\kappa) / \{32\pi\nu^2 I_0(\kappa)^2\}$$

- ▶ El error asintótico cuadrático medio integrado es de la forma $a\nu^{-2} + b\nu^{1/2}$ la cual puede ser minimizada diferenciando respecto de ν e igualando a cero.
- ▶ Esto permite una Regla plug-in von Mises-escala" para el parámetro de suavizado ν basado en la estimación de κ .

Regla plug-in von Mises-escala

$$\nu = [3n\hat{\kappa}^2 I_2(2\hat{\kappa}) \{4\pi^{1/2} I_0(\hat{\kappa})^2\}^{-1}]^{2/5}$$

$$\nu = Cn^{2/5}$$

$$C = [3\hat{\kappa}^2 I_2(2\hat{\kappa}) \{4\pi^{1/2} I_0(\hat{\kappa})^2\}^{-1}]^{2/5}$$

- ▶ Introducimos la validación cruzada para minimizar la función pérdida dada por error cuadrático medio y la función de pérdida dada por Kullback-Leiber.
- ▶ Consideremos la estimación de la densidad construída dejando fuera el valor θ_j de la muestra.

$$\hat{f}_j(\theta, \nu) = \frac{c_0(\nu)}{n} \sum_{i \neq j} L(\nu \cos(\theta - \theta_i))$$

$$c_0(\nu) = \frac{1}{2\pi I_0(\nu)} \quad L(x) = e^x$$

- ▶ Sea

$$cv_2(\nu) = 2n^{-1} \sum_{i=1}^n \hat{f}_i(\theta_i, \nu) - \int \hat{f}^2(\theta, \nu) d\theta$$

$$cv_{KL} = n^{-1} \sum_{i=1}^n \hat{f}_i(\theta_i, \nu)$$

- ▶ Luego $-cv_2(\nu) + \int f^2$ y $-cv_{KL}(\nu) + \int f \log(f)$ son estimaciones insesgadas de la pérdida del error cuadrático $L_2(\nu)$ y la pérdida dada por Kullback-Leiber, respectivamente.

$$v_2 = \operatorname{argmin}_{\nu \geq 0} -cv_2(\nu)$$

$$v_{KL} = \operatorname{argmin}_{\nu \geq 0} -cv_{KL}(\nu)$$

- ▶ De estas dos expresiones obtenemos dos posibles valores para el parámetro de suavizado.

- ▶ Dadas n observaciones de una variable direccional explicativa $\theta_1, \dots, \theta_n$ y una variable respuesta lineal y_1, \dots, y_n
- ▶ Suponemos que $y_i = m(\theta_i) + \epsilon_i$, donde ϵ_i son variables con media cero, independientes e idénticamente distribuidos.
- ▶ la estimación de la regresión tipo núcleo de $m(\theta)$ viene dada por

$$\hat{m}(\theta; \kappa) = \frac{\sum_{i=1}^n y_i g(\theta - \theta_i, 0, \kappa)}{\sum_{i=1}^n g(\theta - \theta_i, 0, \kappa)} \quad (1)$$

- ▶ Análoga al estimador de Nadaraya-Watson.

- ▶ La elección del grado de suavizado es crucial para la estimación tipo núcleo de la regresión.
- ▶ Existen varios métodos para seleccionar el parámetro de suavizado subjetivamente o automáticamente.
- ▶ Por ejemplo, cuando el núcleo de suavizado evaluado sobre datos lineales es un núcleo Gaussiano, Silverman recomienda un parámetro de suavizado de $0.9\hat{\sigma}n^{1/5}$ y el valor $h_s = 1.06\hat{\sigma}n^{1/5}$ es sugerido por Scott.
- ▶ Ambas pueden estar conectadas con el parámetro κ en la distribución de von Mises usando el siguiente enlace conocido entre la distribución de von Mises y la distribución Gaussiana propiedad de la distribución von Mises (ver Mardia y Jupp).

- ▶ Si θ es distribuída de acuerdo con la distribución von Mises centrada en μ y con parámetro κ , luego

$$\kappa^{-1/2}(\theta - \mu) \rightarrow_D N(0, 1) \quad \kappa \rightarrow \infty$$

- ▶ Esto sugiere la elección del parámetro de concentración κ mediante

$$\kappa = \frac{1}{h_s^2}$$

- ▶ Otra opción es seleccionar κ por validación cruzada de mínimos cuadrados (LCV).
- ▶ Como en el caso lineal, escogemos κ de modo que minimice a la función donde son las estimaciones sin el dato j -ésimo.

$$CV(\kappa) = n^{-1} \sum_{j=1}^n [y_j - \hat{m}^{-j}(\theta_j; \kappa)]^2$$

$$\hat{m}^{-j}(\theta_j; \kappa) = \frac{\sum_{i \neq j}^n y_i g(\theta_j - \theta_i, 0, \kappa)}{\sum_{i \neq j}^n g(\theta_j - \theta_i, 0, \kappa)}$$

- ▶ La estimación tipo núcleo seleccionando el parámetro de suavizado mediante LCV puede ser inconsistente bajo una variedad de circunstancias.
 - ▶ para datos discretos con múltiples valores repetidos
 - ▶ validación cruzada tiende a sugerir parámetros de suavizado que suavizan muy poco, es decir, κ tiende a ser muy grande.
- ▶ Por tanto valores de κ escogidos de acuerdo $\kappa = \frac{1}{h_s^2}$ serán preferidos en este caso.

Autocorrelación k-lag circular

$$\begin{aligned} \phi_i &= \theta_{i+k}, \quad i = 1, \dots, n-k \\ &(\phi_1, \theta_1), (\phi_2, \theta_2), \dots, (\phi_{n-k}, \theta_{n-k}) \\ \hat{\rho}_{kT} &= \frac{\sum_{1 \leq i < j \leq n-k} \text{sen}(\theta_i - \theta_j) \text{sen}(\phi_i - \phi_j)}{\sum_{1 \leq i < j \leq n-k} \text{sen}^2(\theta_i - \theta_j) \sum_{1 \leq i < j \leq n-k} \text{sen}^2(\phi_i - \phi_j)} \end{aligned}$$

- ▶ La componente determinística del modelo de regresión estudiado por Downs y Mardia(2002) une a la variable angular dependiente v con la variable angular independiente u mediante

$$\tan\frac{1}{2}(v - \beta) = \omega \tan\frac{1}{2}(u - \alpha)$$
$$v = \beta + 2\tan^{-1} \left\{ \omega \tan\frac{1}{2}(u - \alpha) \right\}$$

- ▶ $\omega \in [-1, 1]$ es el parámetro pendiente.
- ▶ $-\pi \leq \alpha, \beta < \pi$ son los parámetros angulares de localización.

- ▶ Reemplazamos el ángulo v por θ_t y el ángulo u por θ_{t-1} ,
 $t = 2, \dots, n$. $\alpha = \beta$

$$\tan \frac{1}{2}(\theta_t - \alpha) = \omega \tan \frac{1}{2}(\theta_{t-1} - \alpha)$$

$$\theta_t = \alpha + 2 \tan^{-1} \left\{ \omega \tan \frac{1}{2}(\theta_{t-1} - \alpha) \right\}$$

$$\theta_t | \theta_{t-1} \sim M \left(\alpha + 2 \tan^{-1} \left\{ \omega \tan \frac{1}{2}(\theta_{t-1} - \alpha) \right\}, k \right)$$

- ▶ Por tanto el modelo de serie de tiempo se convierte en

$$\theta_t = \alpha + 2 \tan^{-1} \left\{ \omega \tan \frac{1}{2} (\theta_{t-1} - \alpha) \right\} + \epsilon_t$$

$$\epsilon_t \sim M(0, k)$$

$$\mu_t = \alpha + 2 \tan^{-1} \left\{ \omega \tan \frac{1}{2} (\theta_{t-1} - \alpha) \right\}$$

- ▶ Estimamos los parámetros α y ω mediante máxima verosimilitud; es decir, maximizando la función

$$l(\alpha, \beta) = \sum_{i=2}^n \cos \left[\theta_t - \alpha - 2 \tan^{-1} \left\{ \omega \tan \frac{1}{2} (\theta_{t-1} - \alpha) \right\} \right]$$

- ▶ La maximización la haremos usando la función n/m de R pero minimizando la función $-l_C(\alpha, \omega)$ para numerosos conjuntos de datos.
- ▶ Una vez que $l(\alpha, \omega)$ ha sido maximizada con respecto a α y ω , una aproximación mediante verosimilitud puede ser usada para obtener una estimación mediante máxima verosimilitud de κ , maximizando

$$l_C(\hat{\alpha}, \hat{\omega}, \kappa) = \text{const.} - (n - 1) \log l_0 \kappa + \kappa l_{\hat{\alpha}, \hat{\omega}}$$

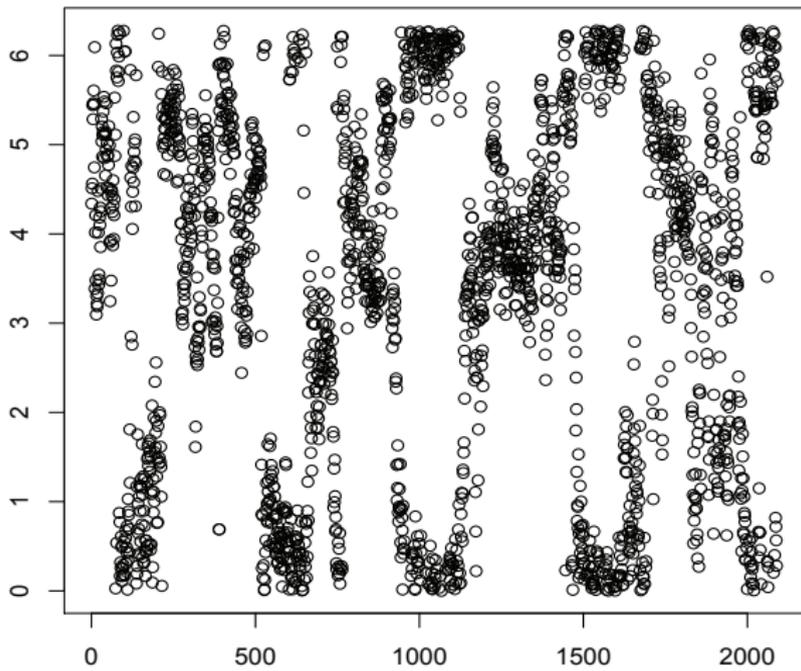
respecto de κ .

- Diferenciando respecto de κ y teniendo en cuenta que $d(l_0(\kappa))/d\kappa = l_1(\kappa)$, la función de Bessel de primer tipo y de orden uno, obtenemos

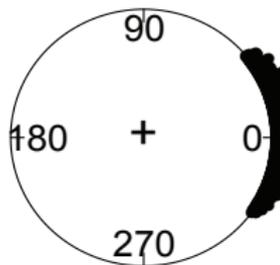
$$\frac{\partial}{\partial \kappa} [I_C(\hat{\alpha}, \hat{\omega}, \kappa)] = -(n-1) \frac{l_1(\kappa)}{l_0(\kappa)} + l_{\hat{\alpha}, \hat{\omega}},$$

así que κ es la solución de

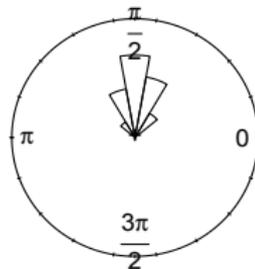
$$\frac{l_1(\hat{\kappa})}{l_0(\kappa)} = \frac{l_{\hat{\alpha}, \hat{\omega}}}{n-1}.$$

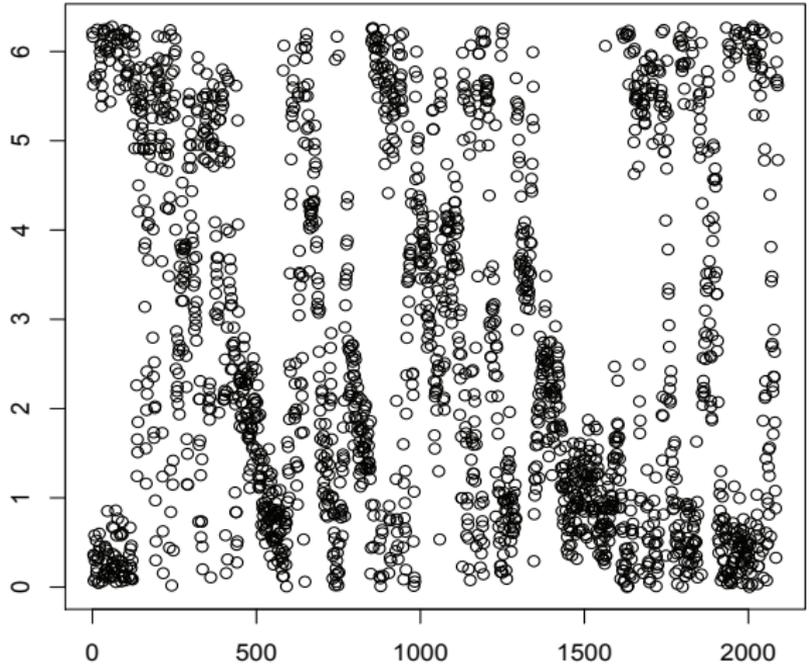


Primer tercio del año 2010



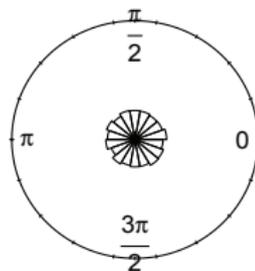
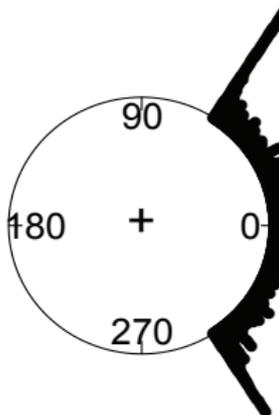
Primer tercio del año 2010

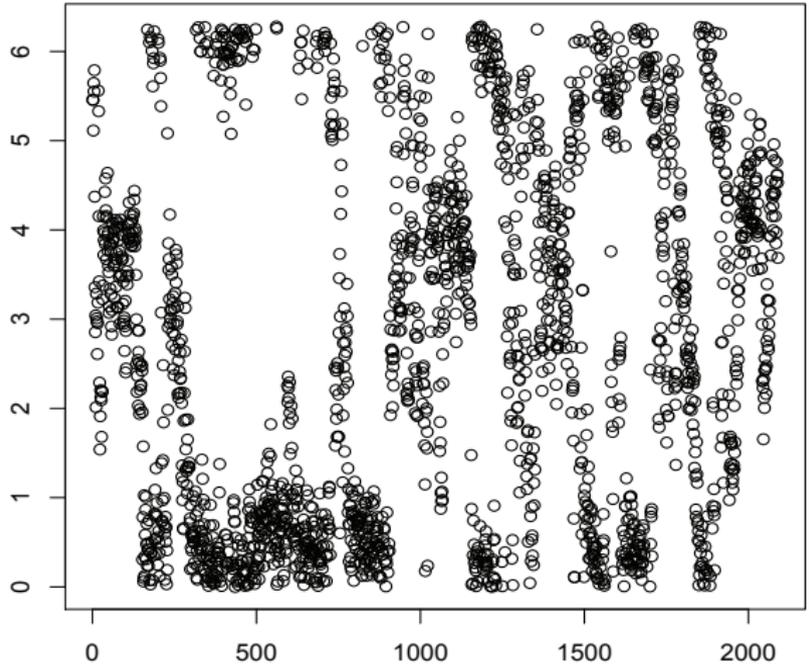




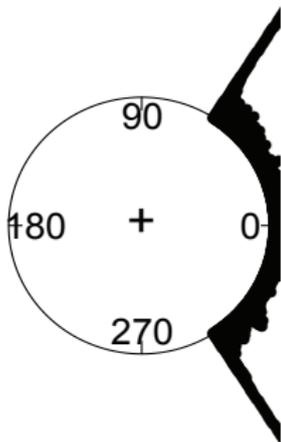
Segundo cuarto del año 2010

Segundo cuarto del año 2010

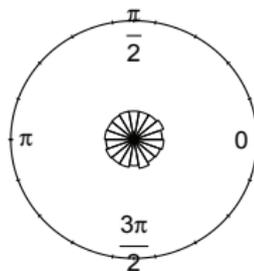


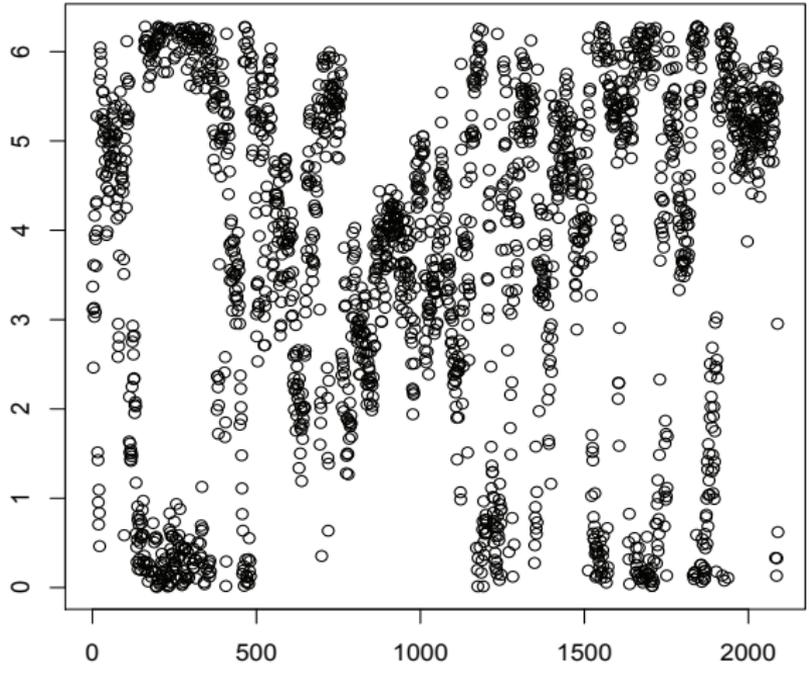


Tercer cuarto del año 2010



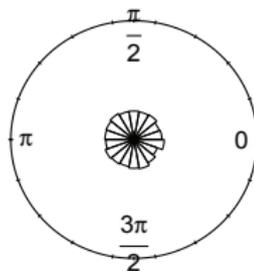
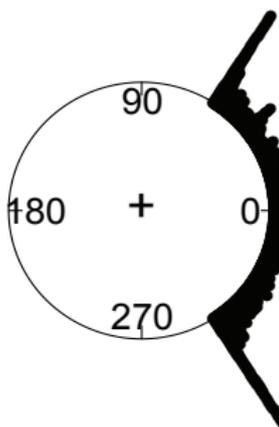
Tercer cuarto del año 2010





Cuarto cuarto del año 2010

Cuarto cuarto del año 2010



Estimación no paramétrica de la Densidad. Plug-in

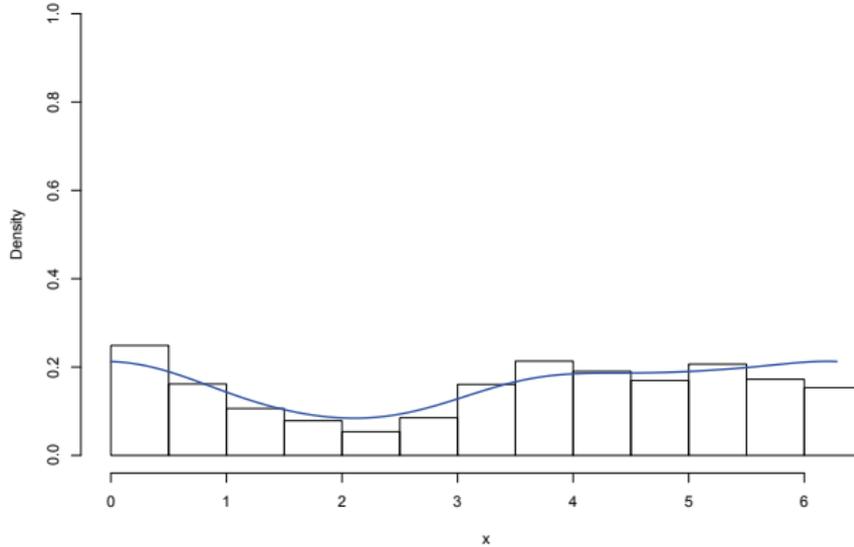


Figura: Estimación plug-in de la densidad del primer periodo de 2010

Estimación no paramétrica de la Densidad. Plug-in

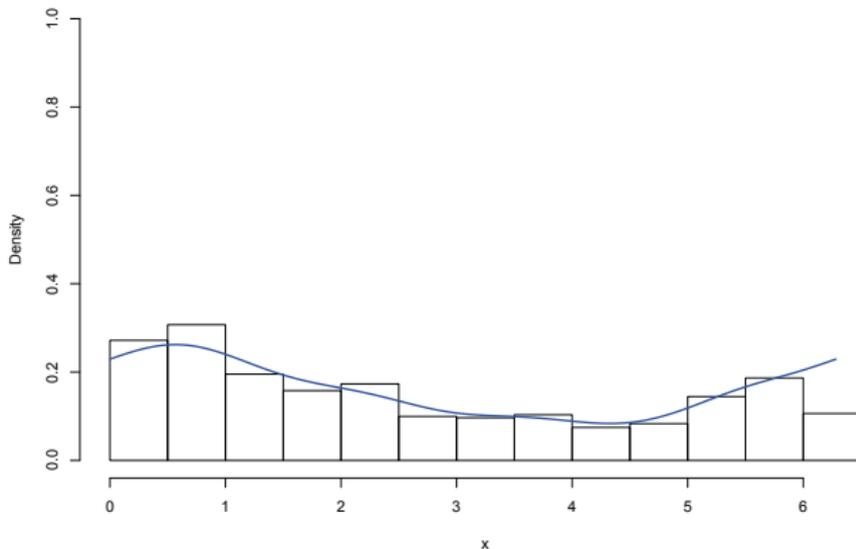


Figura: Estimación plug-in de la densidad del segundo periodo de 2010

Estimación no paramétrica de la Densidad. Plug-in

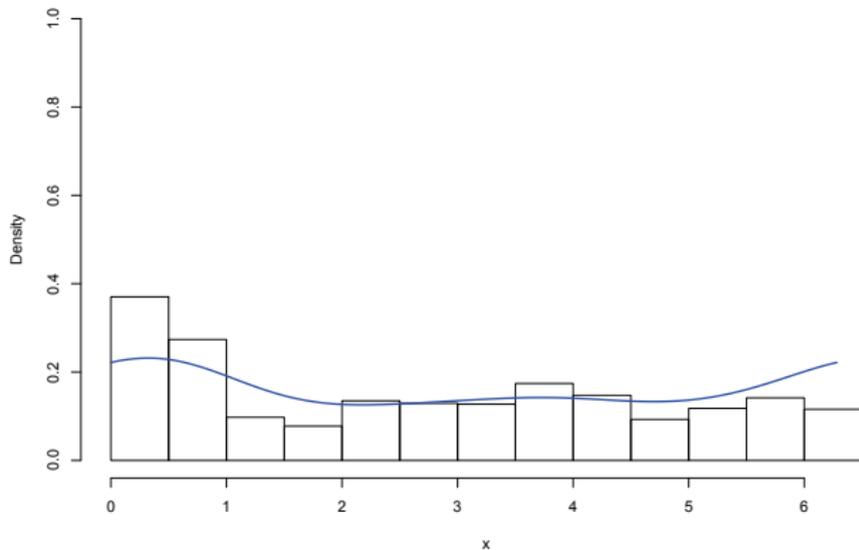


Figura: Estimación plug-in de la densidad del tercer periodo de 2010

Estimación no paramétrica de la Densidad. Plug-in

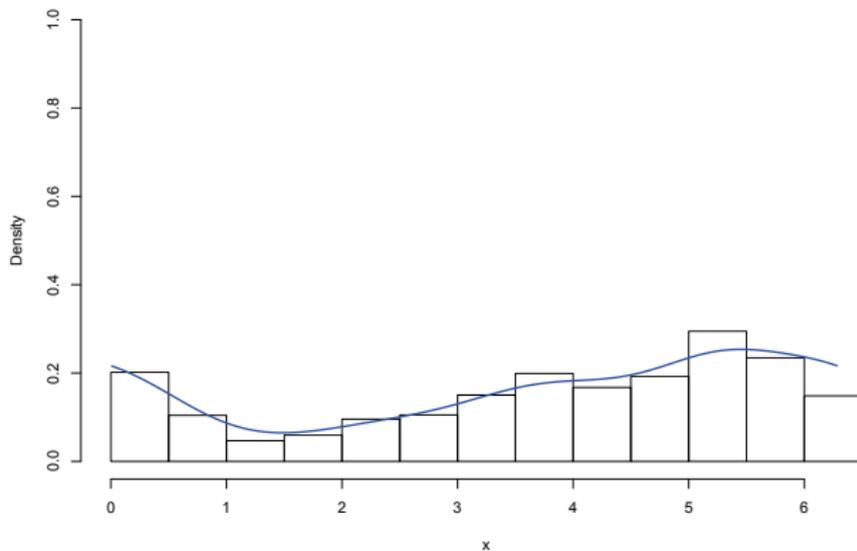


Figura: Estimación plug-in de la densidad del cuarto periodo de 2010

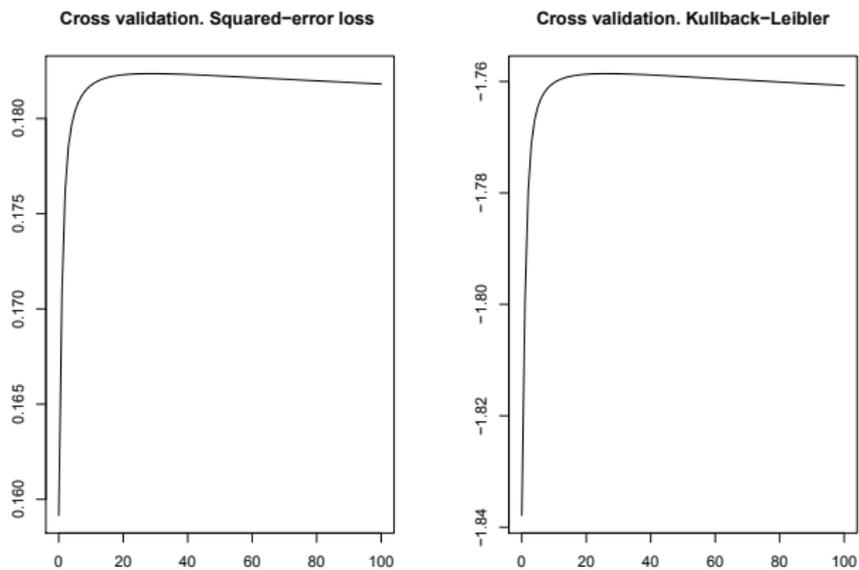


Figura: Validación cruzada del primer periodo de 2010

Estimación no paramétrica de la Densidad. L2

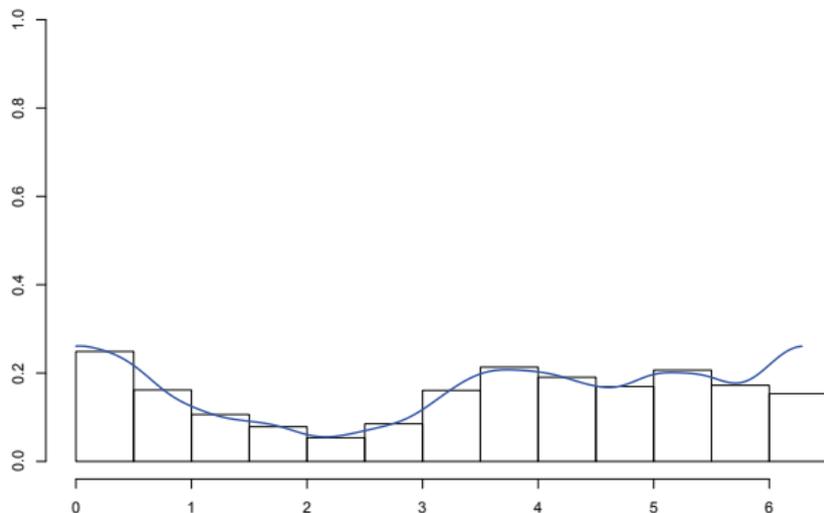


Figura: Estimación L2 de la densidad del primer periodo de 2010

Estimación no paramétrica de la Densidad. Kullback-Leiber

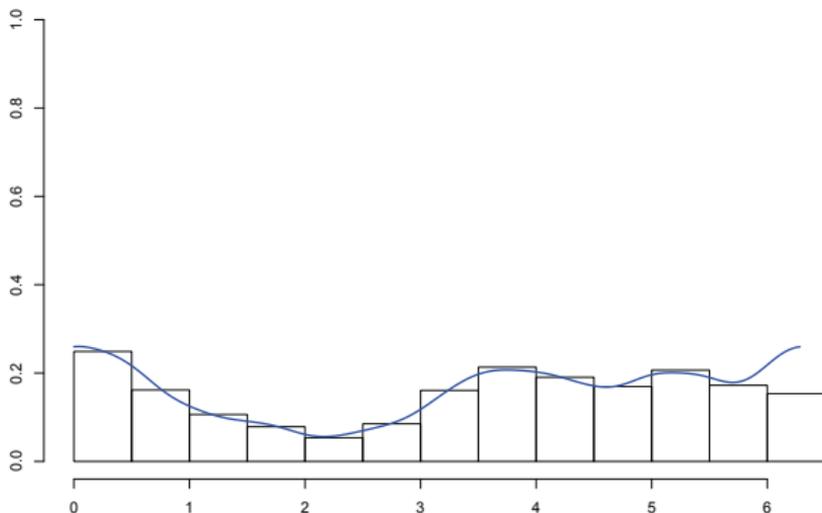


Figura: Estimación KL de la densidad del primer periodo de 2010

Estimación no paramétrica de la Densidad. Kullback-Leiber

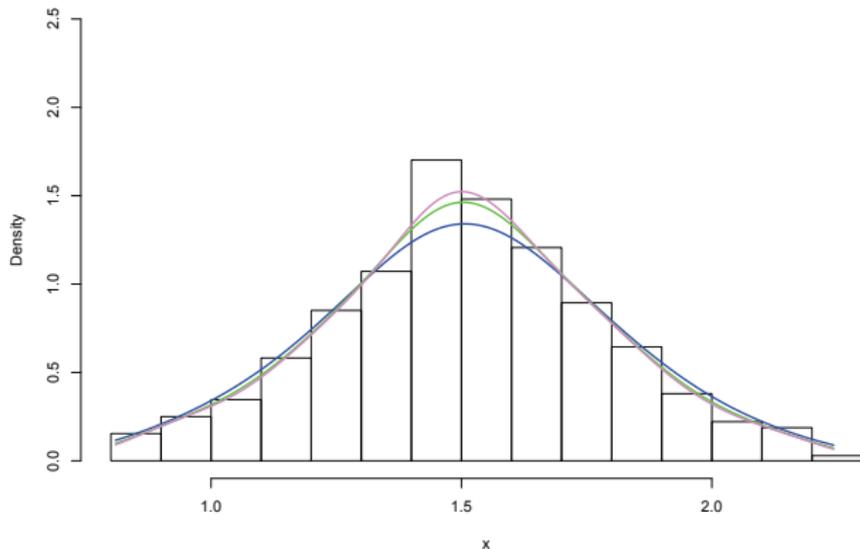


Figura: Estimación no paramétrica de la Densidad KL del primer periodo de 2010. $v=50$ (azul), $v=100$ (verde), $v=150$ (violeta)

Estimación no paramétrica de la Densidad.

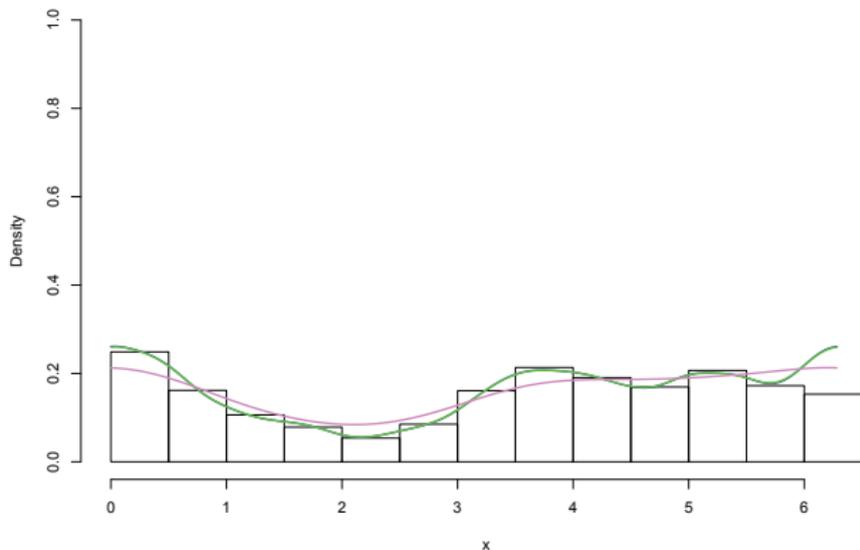


Figura: Estimación no paramétrica de la Densidad. L2 (azul), KL (verde), plug-in (violeta)

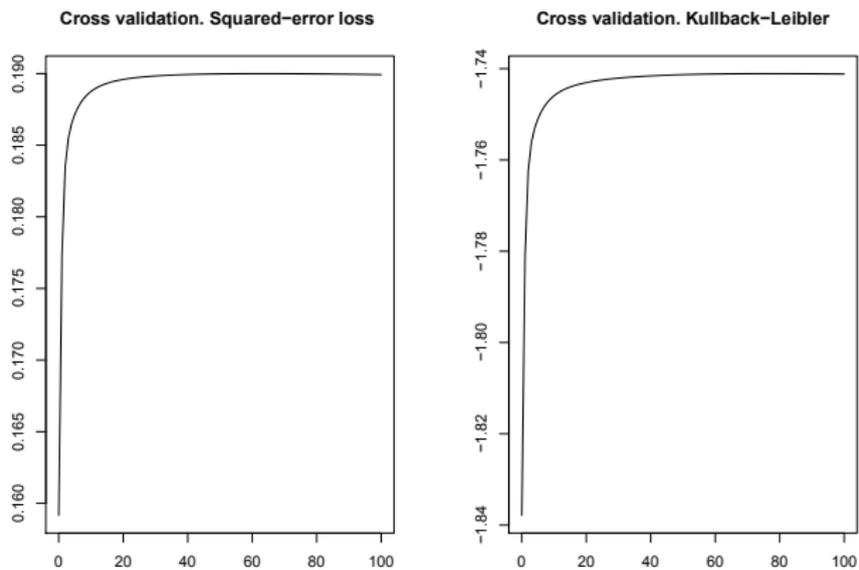


Figura: Validación cruzada del segundo periodo de 2010

Estimación no paramétrica de la Densidad. L2

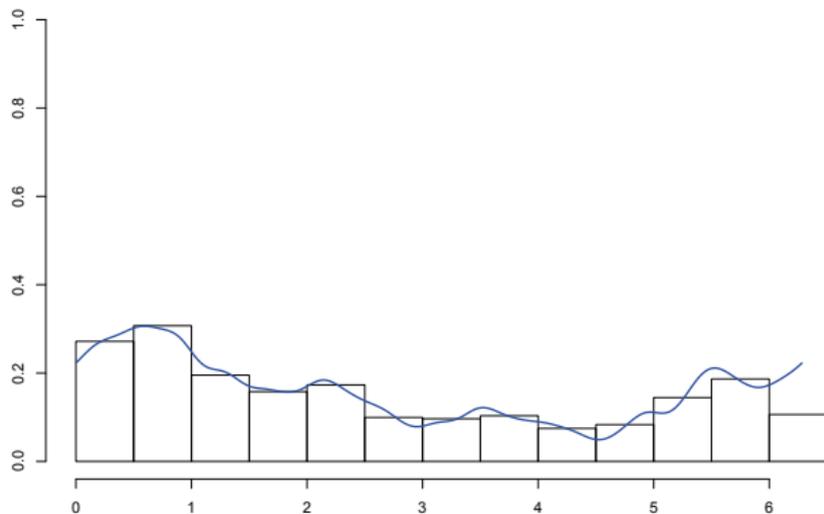


Figura: Estimación L2 de la densidad del segundo periodo de 2010

Estimación no paramétrica de la Densidad. Kullback-Leiber

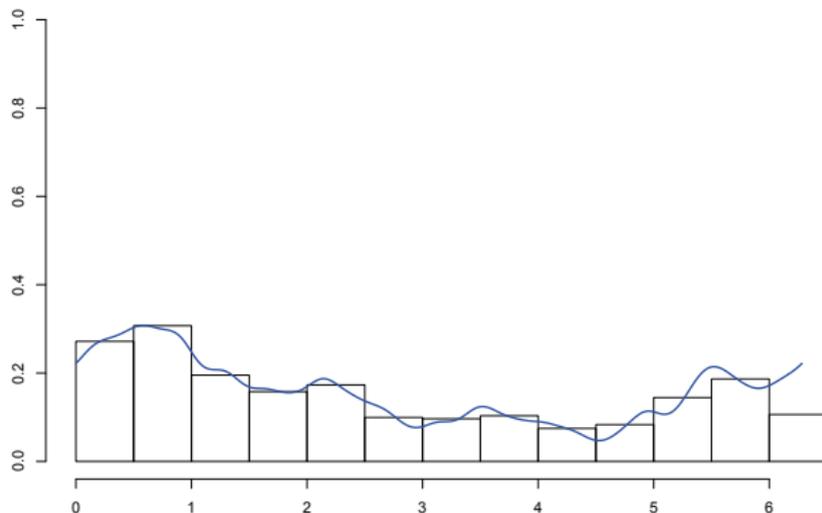


Figura: Estimación KL de la densidad del segundo periodo de 2010

Estimación no paramétrica de la Densidad. Kullback-Leiber

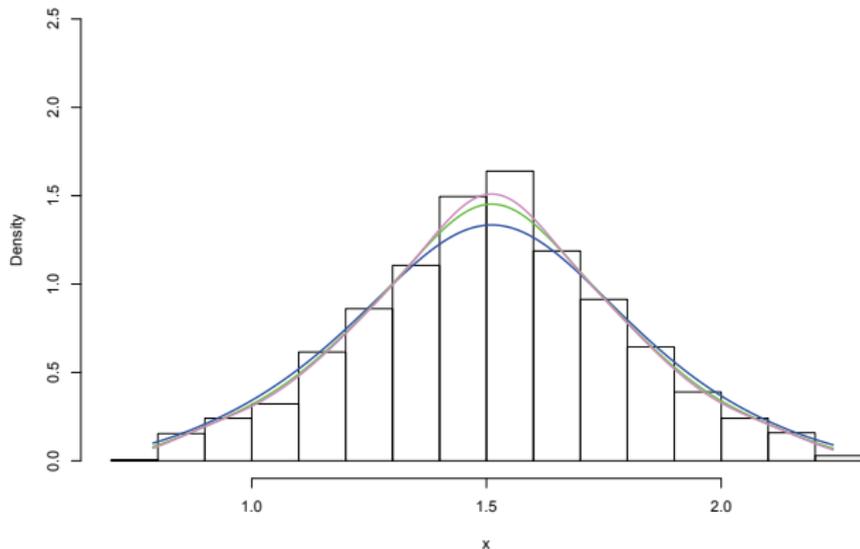


Figura: Estimación no paramétrica de la Densidad KL del segundo periodo de 2010. $v=50$ (azul), $v=100$ (verde), $v=150$ (violeta)

Estimación no paramétrica de la Densidad.

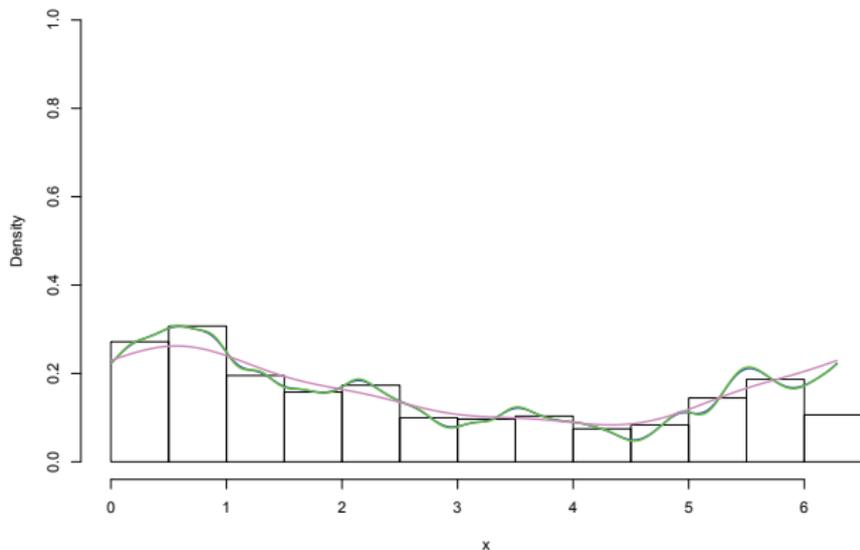


Figura: Estimación no paramétrica de la Densidad. L2 (azul), KL (verde), plug-in (violeta)

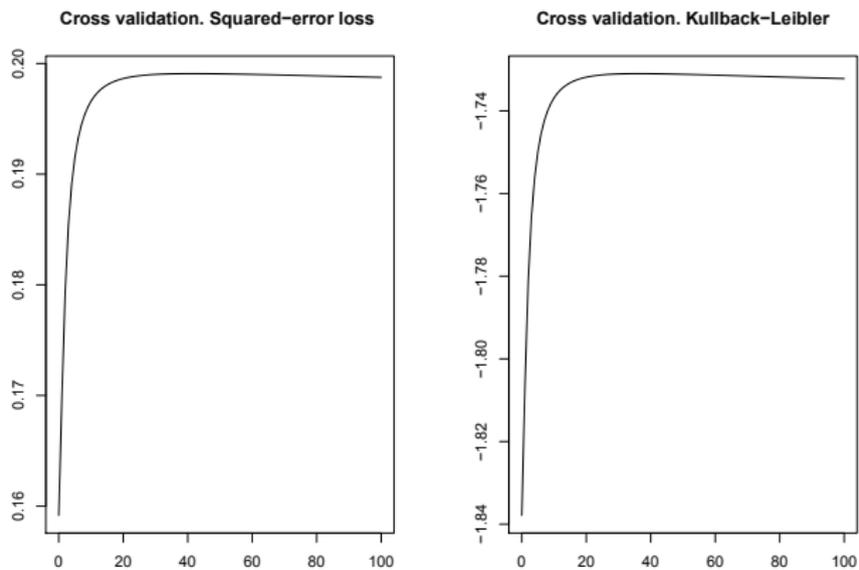


Figura: Validación cruzada del tercer periodo de 2010

Estimación no paramétrica de la Densidad. L2

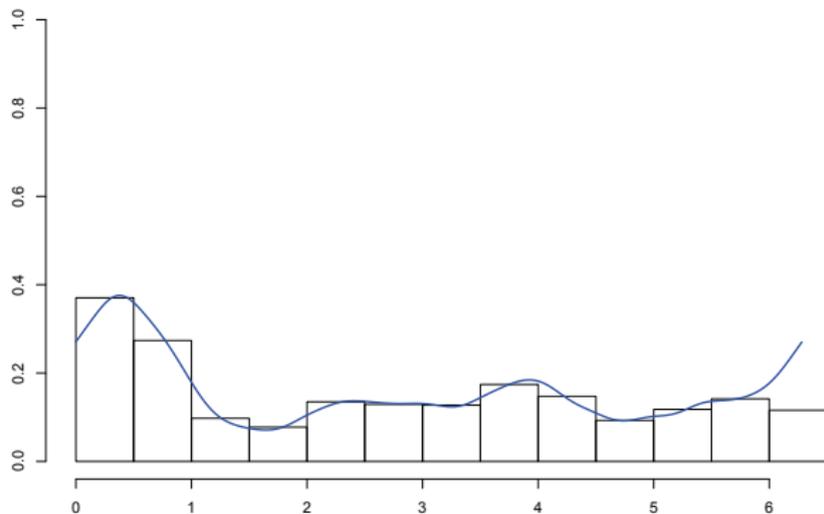


Figura: Estimación L2 de la densidad del tercer periodo de 2010

Estimación no paramétrica de la Densidad. Kullback-Leiber

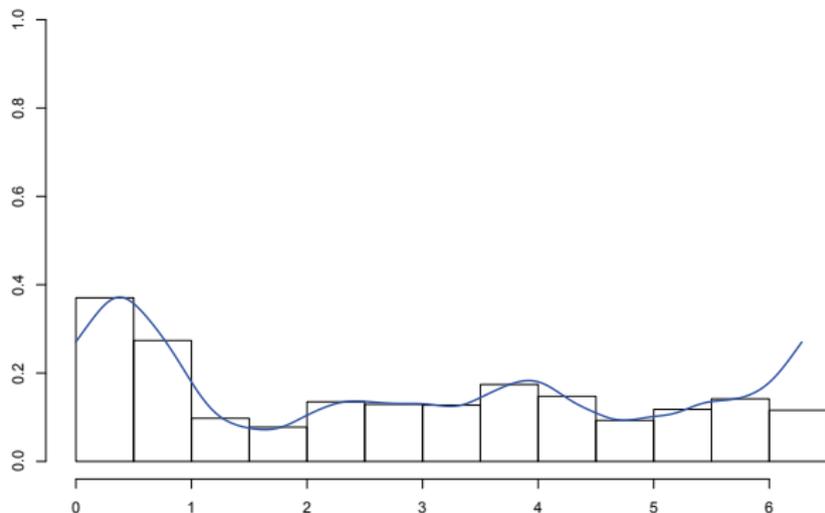


Figura: Estimación KL de la densidad del tercer periodo de 2010

Estimación no paramétrica de la Densidad. Kullback-Leiber

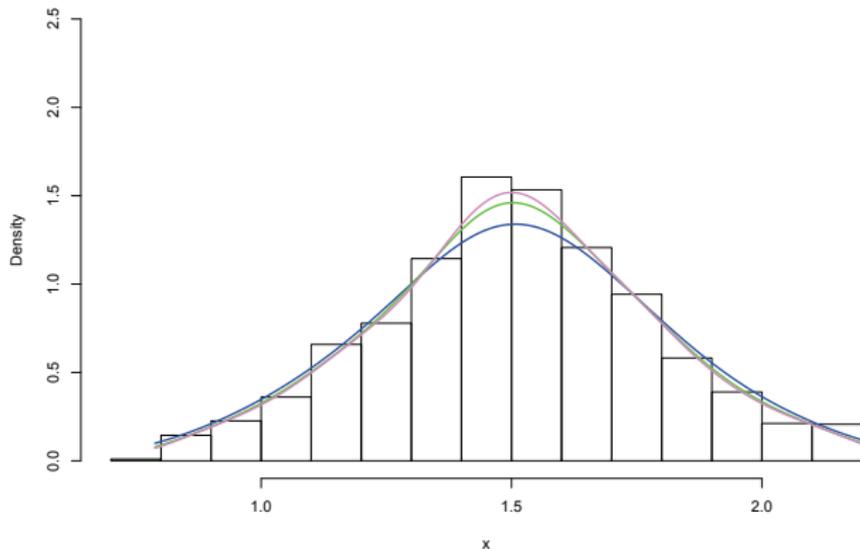


Figura: Estimación no paramétrica de la Densidad KL del tercer periodo de 2010. $v=50$ (azul), $v=100$ (verde), $v=150$ (violeta)

Estimación no paramétrica de la Densidad.

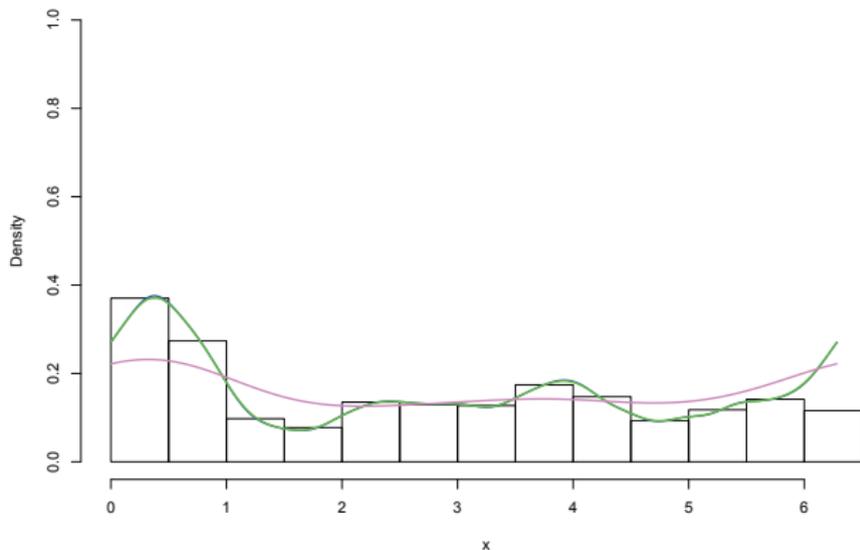


Figura: Estimación no paramétrica de la Densidad. L2 (azul), KL (verde), plug-in (violeta)

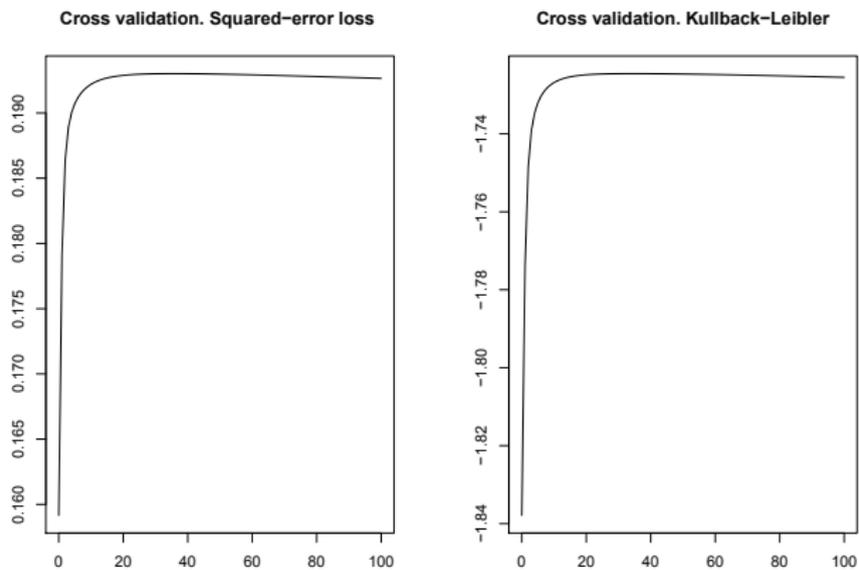


Figura: Validación cruzada del cuarto periodo de 2010

Estimación no paramétrica de la Densidad. L2

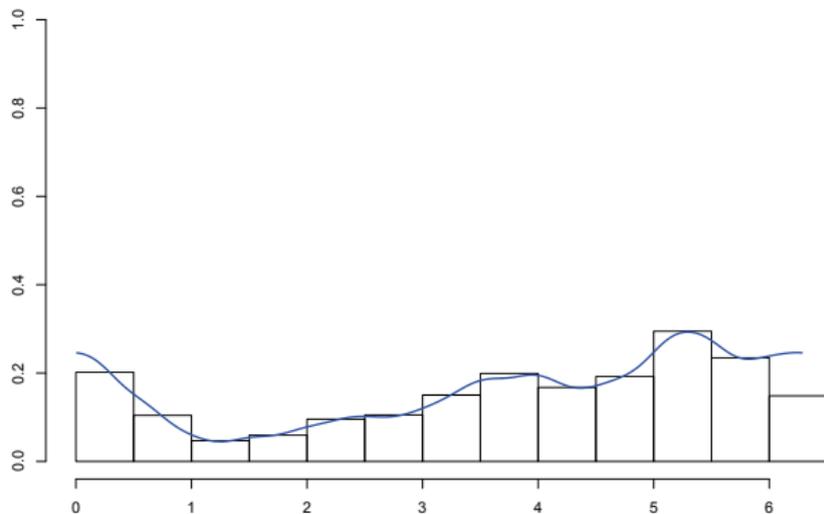


Figura: Estimación L2 de la densidad del cuarto periodo de 2010

Estimación no paramétrica de la Densidad. Kullback-Leiber

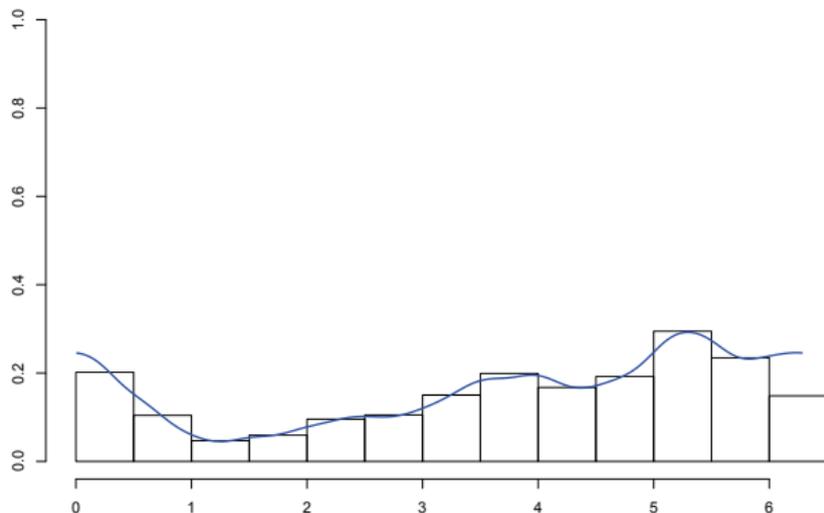


Figura: Estimación KL de la densidad del cuarto periodo de 2010

Estimación no paramétrica de la Densidad. Kullback-Leiber

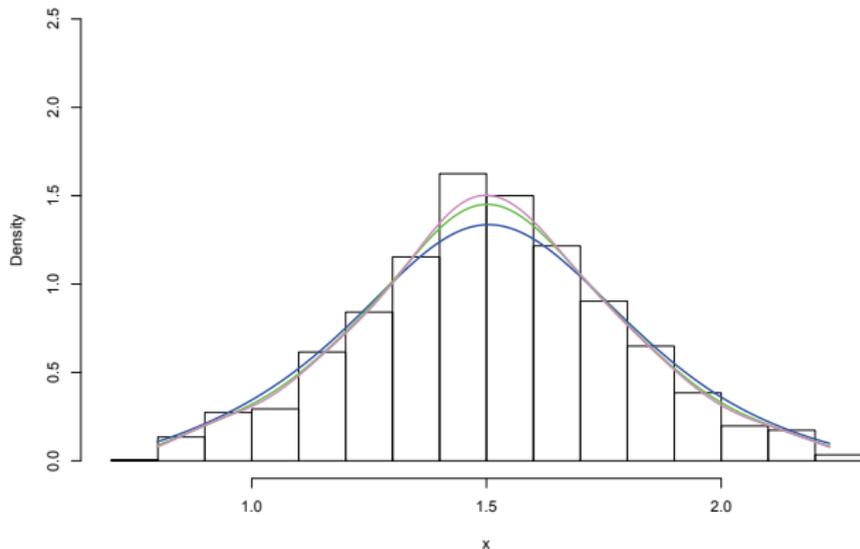


Figura: Estimación no paramétrica de la Densidad KL del cuarto periodo de 2010. $v=50$ (azul), $v=100$ (verde), $v=150$ (violeta)

Estimación no paramétrica de la Densidad.

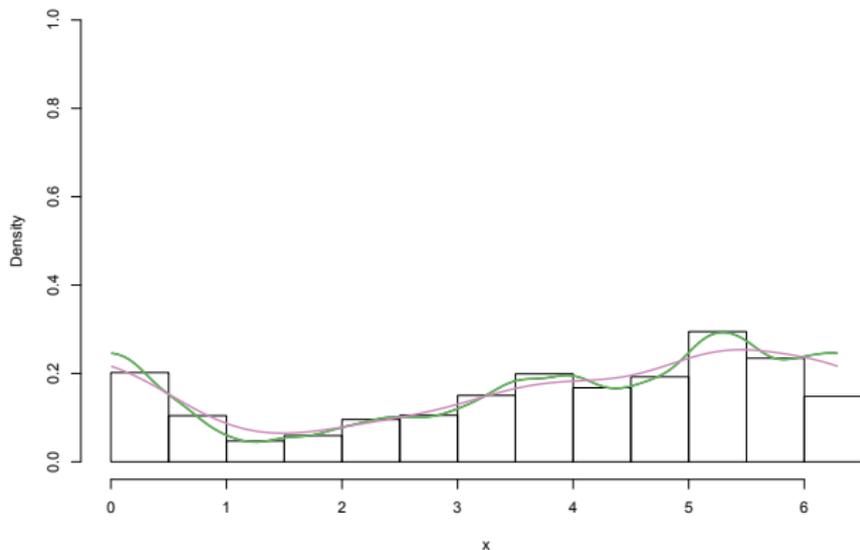


Figura: Estimación no paramétrica de la Densidad. L2 (azul), KL (verde), plug-in (violeta)

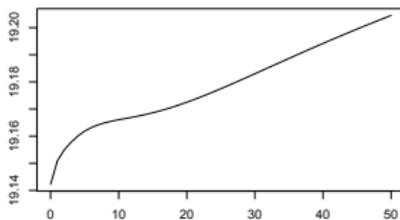
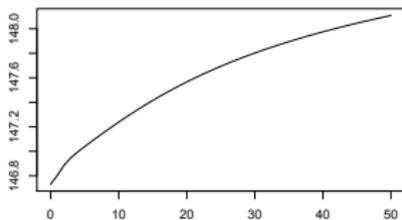
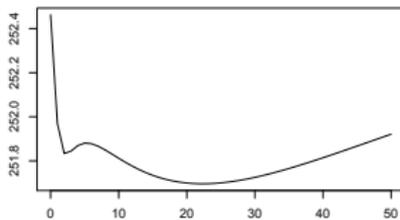
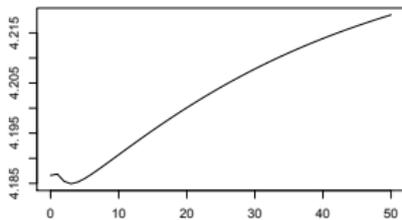


Figura: Validación cruzada en la estación B1

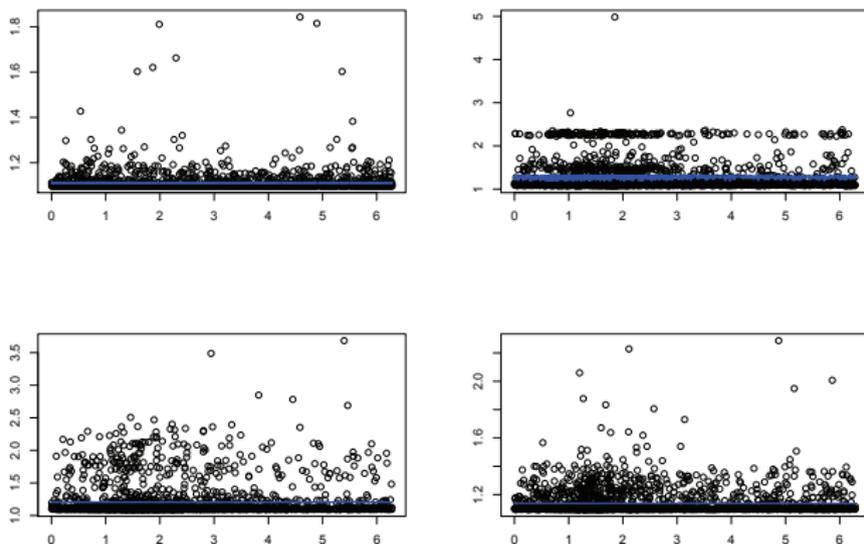


Figura: Estimación de la función de regresión circular lineal en B1.
 Estimación del parámetro de suavizado mediante validación cruzada.

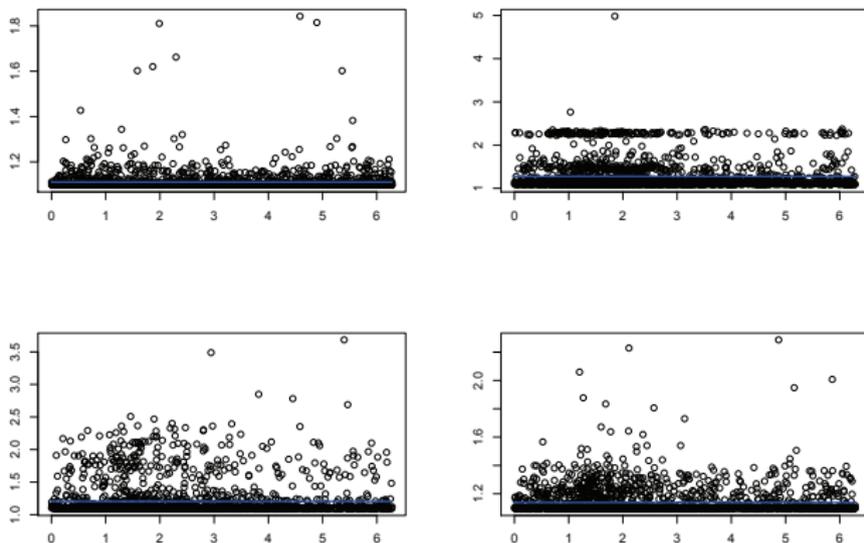


Figura: Estimación de la función de regresión circular lineal en B1.
 Estimación del parámetro de suavizado mediante $1/h_s^2$.

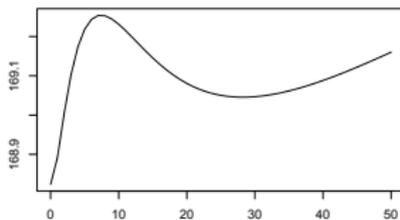
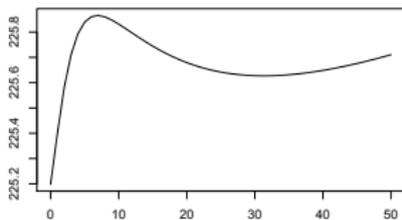
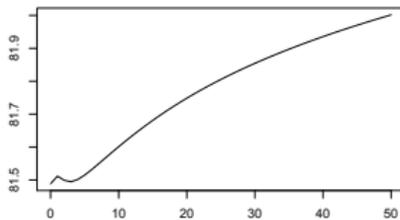
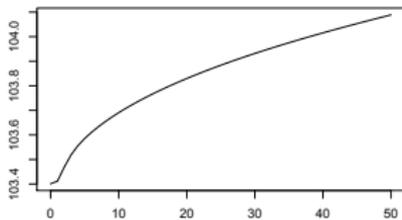


Figura: Validación cruzada en la estación B2

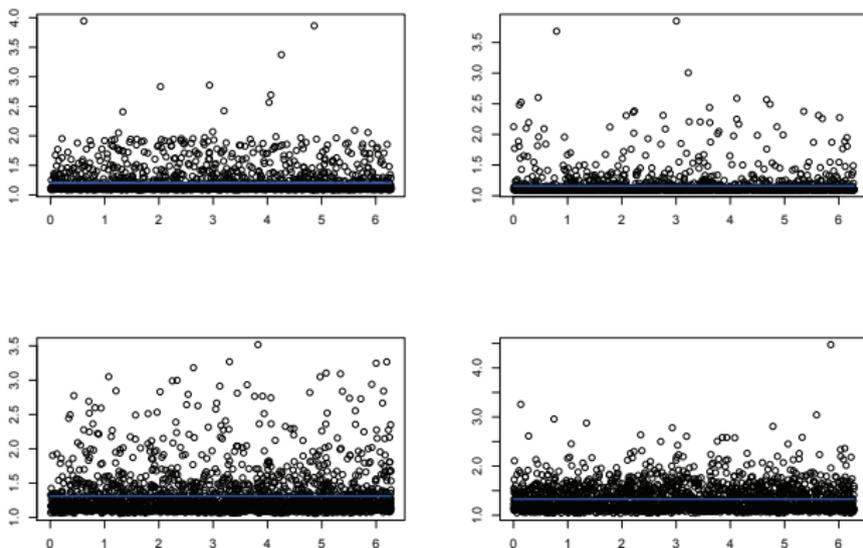


Figura: Estimación de la función de regresión circular lineal en B2.
 Estimación del parámetro de suavizado mediante validación cruzada.

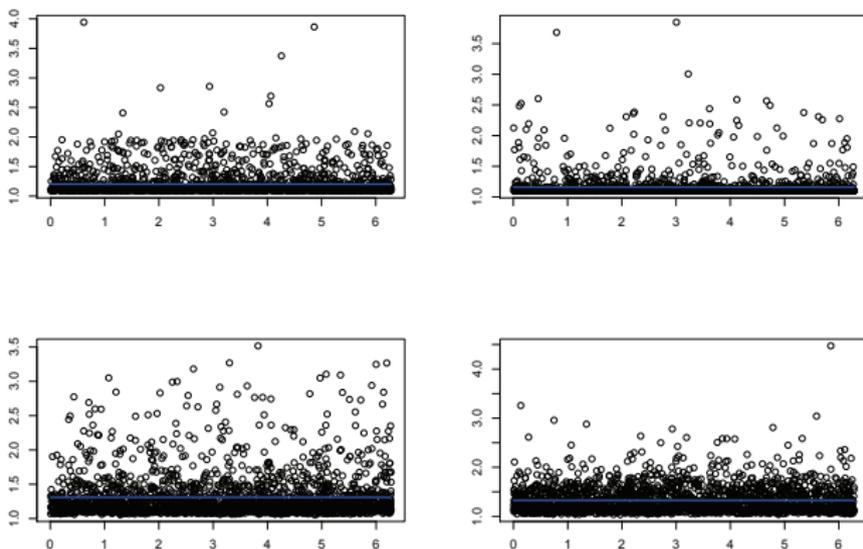


Figura: Estimación de la función de regresión circular lineal en B2.
 Estimación del parámetro de suavizado mediante $1/h_s^2$.

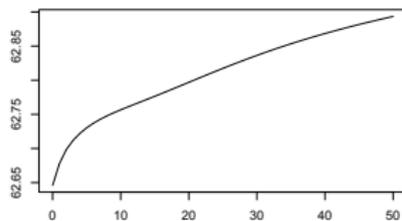
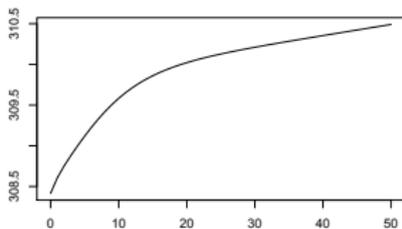
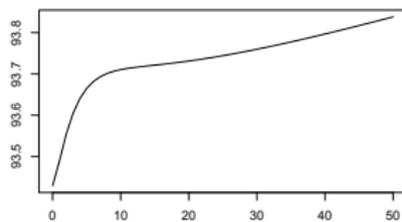
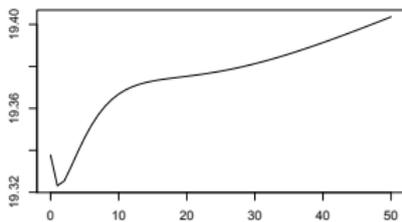


Figura: Validación cruzada en la estación C9

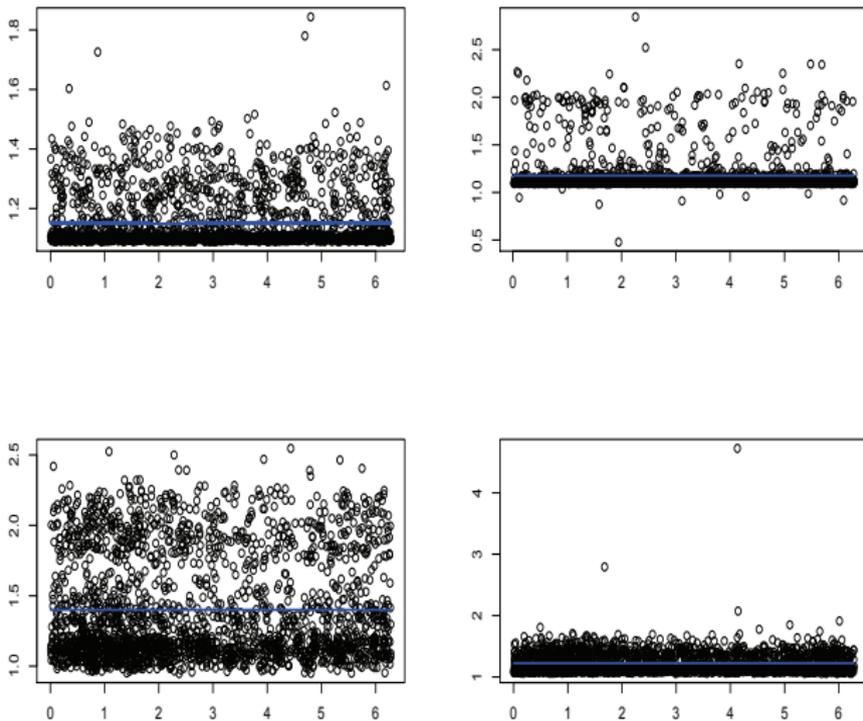


Figura: Estimación de la función de regresión circular lineal en C9.
 Estimación del parámetro de suavizado mediante validación cruzada

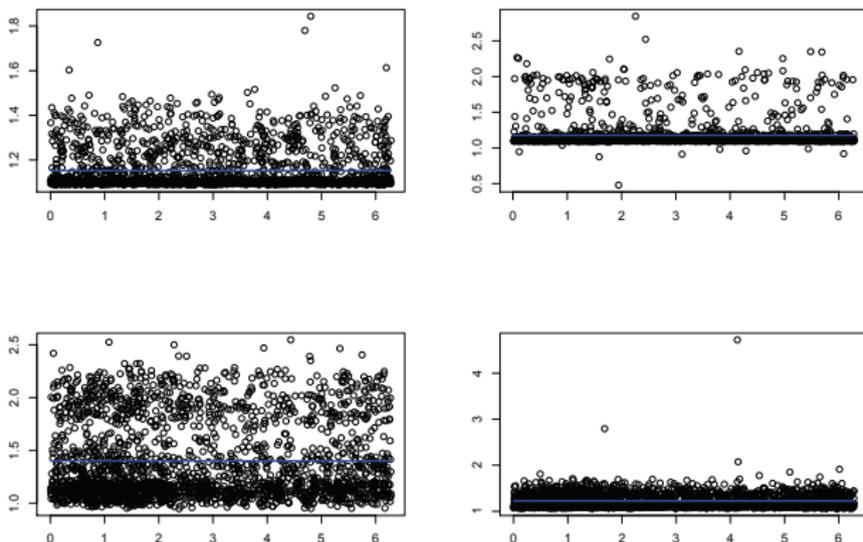


Figura: Estimación de la función de regresión circular lineal en C9.
 Estimación del parámetro de suavizado mediante $1/h_s^2$.

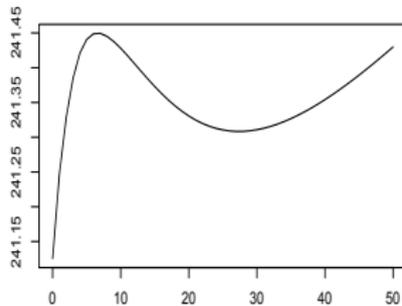
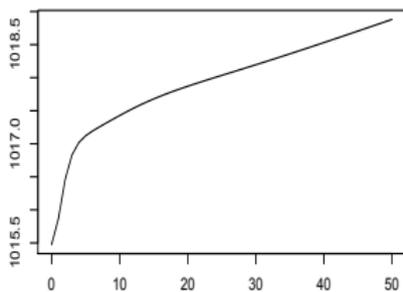
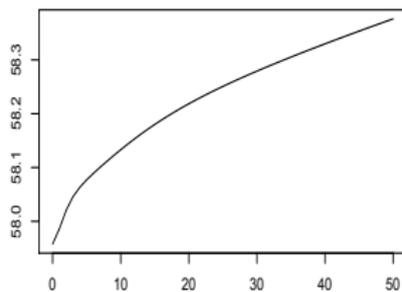
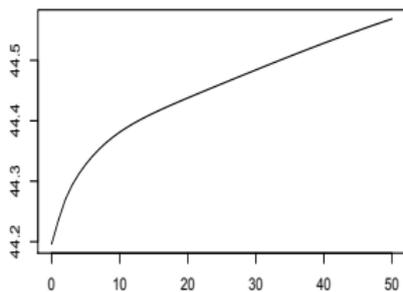


Figura: Validación cruzada en la estación F2

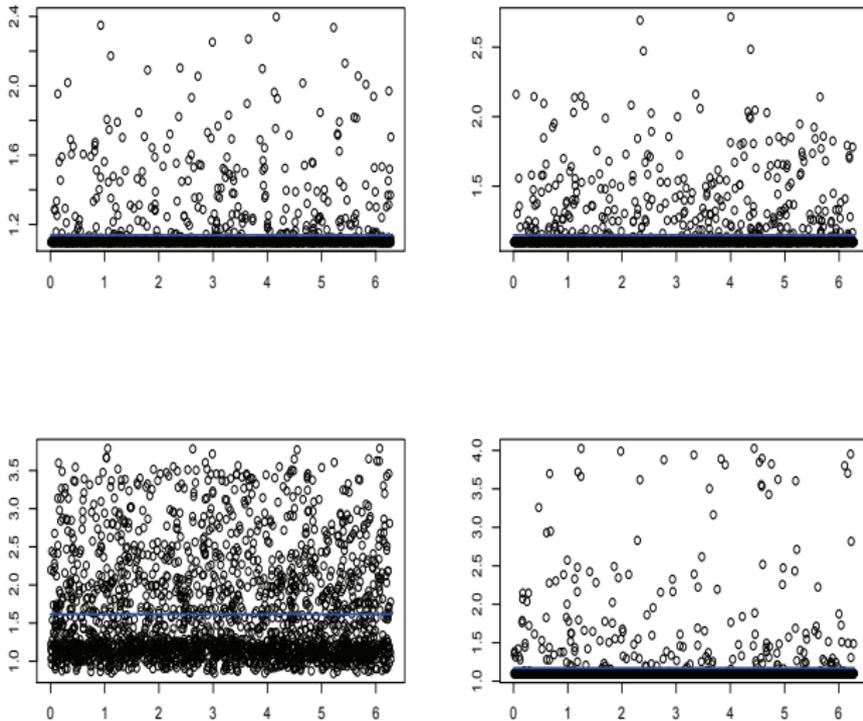


Figura: Estimación de la función de regresión circular lineal en F2.

Estimación del parámetro de suavizado mediante validación cruzada

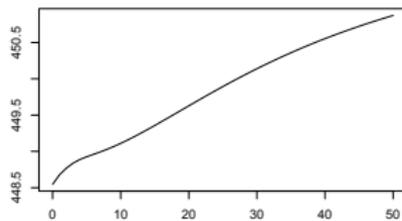
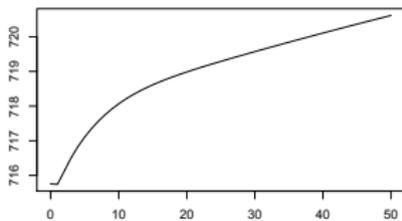
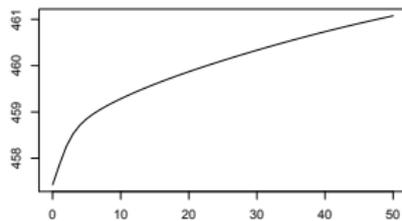
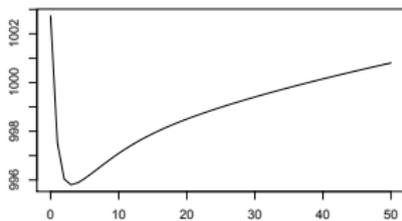


Figura: Validación cruzada en la estación G2

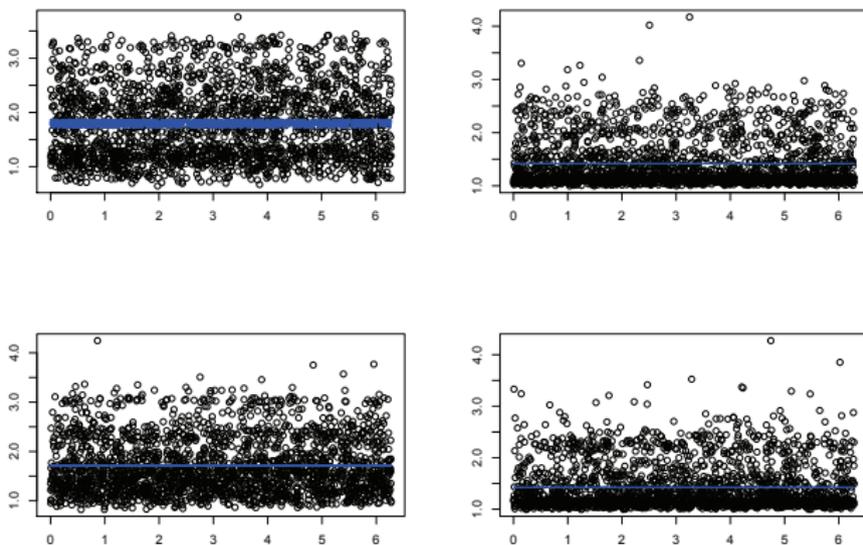


Figura: Estimación de la función de regresión circular lineal en G2.
 Estimación del parámetro de suavizado mediante validación cruzada.

