Ejercicios Programación Matemática. Parte II

Programación Matemática. Curso 2010-2011

Leyenda Rodríguez, María

Índice

1. Ejercicio 1

Prueba que cono $K \subset \Re^n$ es convexo $\Leftrightarrow$ K=K+K SOLUCIÓN
$\Rightarrow$
Si $K \subset \Re^n$ es un cono entoces K verifica que

$$x \in K \Rightarrow \lambda x \in K, \lambda \in \Re_+ \tag{1}$$

Además si K es convexo entonces se tiene que

$$x, y \in K \Rightarrow (1-\lambda)x + \lambda y \in K, \lambda \in [0,1] \tag{2}$$

Luego, por ser K cono convexo tenemos$\mu[(1-\lambda)x + \lambda y] \in K, \mu \in \Re_+$. Por tanto, $K + K \subset K$ pues cualquier elemento del conjunto K+K está en K. Notemos que la inclusión $K + K \subset K$ es trivial, con lo que tenemos la igualdad.
$\Leftarrow$
Sea $K \subset \Re^n$ un cono(1) tal que $K = K + K$, veamos entonces que es convexo (2). Sean $x, y \in K$, como K es un cono $\mu x, \lambda y \in K, \lambda, \mu \in [0,1]$. Además como K+K=K se tiene que $\mu x + \lambda y \in K$. En particular si tomamos $\mu = (1-\lambda)$, podemos afirmar que K es convexo.

2. Ejercicio 2

Calcula el cono normal en un punto $x \in X$ de los siguientes conjuntos X:
Consideremos en primer lugar la definición de cono normal,

$$N_X(x) = \left\{\rho \in \Re^n : \rho^T(y - x) \leq 0, \forall y \in X\right\} \tag{3}$$

2.1. $X = \left\{x \in \Re^n : c^T x = c_0\right\}$

$$\rho \in N_{\Re^n}(x)$$

$\Leftrightarrow$

$$\rho^T x \geq \rho^T y \geq max_{c^T y = c_0} \rho^T y \equiv min_{c^T u = \rho^T} u^T c_0$$

$\Leftrightarrow$

$$\exists u \in \Re^n, c^T u = \rho^T | \rho^T x \geq u^T c_0$$

$\Leftrightarrow$

$$\exists u \in \Re^n, c^T u = \rho^T | u^T c x \geq u^T c_0$$

$\Leftrightarrow$

$$\exists u \in \Re^n, c^T u = \rho^T | u^T (cx - c_0) \geq 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\exists u \in \Re^n, c^T u = \rho^T | u^T (cx - c_0) = 0$$

Entonces, el cono normal(3) viene dado por

$$N_{\Re^n}(x) = \left\{c^T u \in \Re^n : u^T(cx - c_0) = 0, u \in \Re^n\right\} \tag{4}$$

2.2. $X = x \in \Re^n : x^T x \leq 1$

$$\rho \in N_{\Re^n}(x)$$

$\Leftrightarrow$

$$\rho^T x \geq \rho^T y \geq max_{y^T y \leq 1} \rho^T y \equiv min_{u^T u = \rho, u \geq 0} u^T$$

$\Leftrightarrow$

$$\exists u \geq 0, u^T u = \rho | \rho^T x \geq u^T$$

$\Leftrightarrow$

$$\exists u \geq 0, u^T u = \rho | u^T u x \geq u^T$$

$\Leftrightarrow$

$$\exists u \geq 0, u^T u = \rho | u^T (ux - 1) \geq 0$$

Entonces, el cono normal(3) viene dado por

$$N_{\Re^n}(x) = \left\{ u^T u \in \Re^n : u^T(ux - 1) = 0, u \geq 0 \right\} \tag{5}$$

3. Ejercicio 5

Sea $f : S \in \Re^n \rightarrow \Re$; convexa en el convexo S, y $g : \Re \rightarrow \Re$ cóncava. Estudia la convexidad en S de la función $g \circ f$ suponiendo que g es

3.1. no creciente

Tenemos que ver si se verifica que $g \circ f$ es convexa por lo que se verificaría que

$$x, y \in S \Rightarrow (g \circ f)((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)(g \circ f)(x) + \lambda(g \circ f)(y)\lambda \in [0, 1] \tag{6}$$

En primer lugar como f es convexa tenemos que

$$x, y \in S \Rightarrow f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)\lambda \in [0, 1]$$

Como g es **no creciente**se tiene que

$$x, y \in S \Rightarrow g(f((1-\lambda)x + \lambda y)) \geq (g(1-\lambda)f(x) + \lambda f(y))\lambda \in [0, 1]$$

Finalmente, por ser g cóncava se tiene que

$$x, y \in S \Rightarrow g(f((1-\lambda)x+\lambda y)) \geq (g(1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)) \geq \lambda(1-\lambda)(g \circ f)(x)+\lambda(g \circ f)(y) \in [0, 1]$$

Por tanto, $g \circ f$ no es convexa sino que es cóncava.

3.2. no creciente

Tenemos que ver si se verifica que $g \circ f$ es convexa por lo que se verificaría que

$$x, y \in S \Rightarrow (g \circ f)((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)(g \circ f)(x) + \lambda(g \circ f)(y)\lambda \in [0, 1] \tag{7}$$

En primer lugar como f es convexa tenemos que

$$x, y \in S \Rightarrow f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)\lambda \in [0, 1]$$

Como g es **creciente**se tiene que

$$x, y \in S \Rightarrow g(f((1-\lambda)x + \lambda y)) \leq (g(1-\lambda)f(x) + \lambda f(y))\lambda \in [0, 1]$$

Finalmente, por ser g cóncava se tiene que

$$x, y \in S \Rightarrow g(f((1-\lambda)x+\lambda y)) \leq (g(1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)) \geq \lambda(1-\lambda)(g \circ f)(x)+\lambda(g \circ f)(y) \in [0, 1]$$

Por tanto, $g \circ f$ no es convexa ni es cóncava.

4. Ejercicio 6

4.1. Prueba que si γ es un calibrador en $\Re^n$; entonces su epigrafo es un cono convexo. ¿Es cierto el recíroco?

En primer lugar, definimos el calibrador $gamma_B$ con bola unidad B.

$$\gamma_B(x) = min\,\{t \geq 0 : x \in tB\} \tag{8}$$

Notemos que Sea $B \subset \Re^n$; convexo, compacto, con $0 \in int(B)$. En segundo lugar, definamos que es el epígrafe de una función f:

$$epif = \{(x, \mu) : x \in \Re^n, \mu \in \Re, f(x) \leq \mu\} \tag{9}$$

Probar que su epigrafo ($epi\gamma$) es un cono convexo es equivalente a probar que $epi\gamma+epi\gamma = epi\gamma$ (sección 1). Probemos entonces los dos contenidos.

$\supset$ Este contenido es trivial.

$\subset$ Tomemos $(x, \mu), (y, \lambda) \in epi\gamma$, entonces $(x, \mu)+(y, \lambda) \in epi\gamma+epi\gamma$. Veamos si $(x, \mu)+(y, \lambda) \in epi\gamma$ Para ello comprobaremos que $\gamma_B(x + y) \leq \mu + \lambda$.

$$\gamma_(B)(x + y) \leq gamma_(B)(x) + gamma_(B)(y) \leq \mu + \lambda$$

.

Veamos ahora si es cierto el recíproco. Tomemos la función f(x)=1, en (0,1) no es un calibrador. En cambio si verifica que su epigrafe sea un convexo pues epif+epif=epif,pues $(x, 1), (y, 1) \in epif$, entonces $(x, 1) + (y, 1) \in epif + epif$. Veamos si $(x, 1) + (y, 1) \in epif$ Para ello comprobaremos que $f(x + y) = 1 six + y \in (0, 1)$ y 0 en otro caso.

$$f(x + y) \leq 1$$

. Luego, $(x, 1), (y, 1) \in epif$.

5. Ejercicio 9

5.1. Construye un convexo $S \subset \Re^n$ y una función f convexa sobre S pero no continua en todos los puntos de S.

Sea S convexo en $\Re$, [-1,1] y definamos la función f como

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \\ \\ x+1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Esta función es convexa sobre S pero no continua en todos los puntos de S.

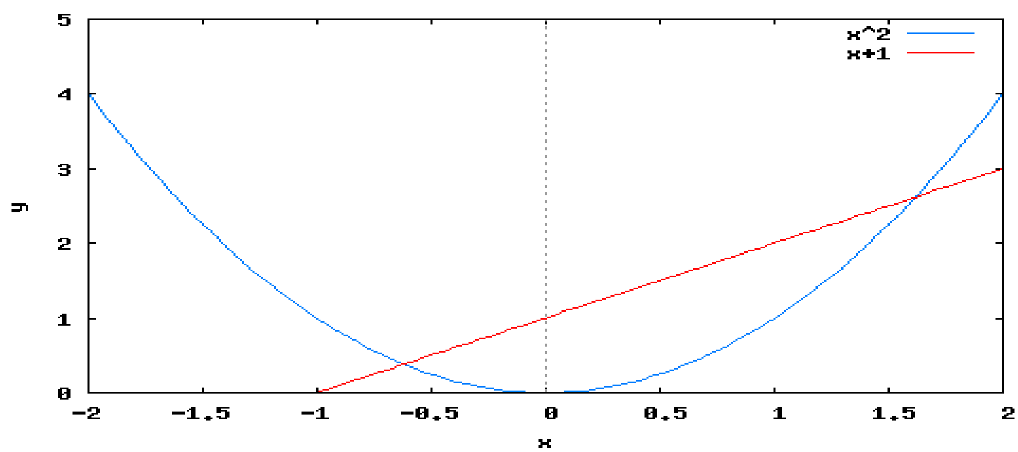

Figura 1: Representación gráfica

6. Ejercicio 26

Escribe un script en R que, dado un conjunto A de p puntos, encuentre (heurísticamente) el punto que minimiza la suma de los cuadrados de las $k \leq p$ menores distancias a los puntos de A.

En nuesto caso minimizaremos las 20 menores distancias de los puntos de A. Para ello empezamos por un punto y obtenemos los 20 puntos más cercanos al punto inicial. Dentro de esos 20 puntos escogemos otro distinto y volvemos aempezar; y así sucesivamente hasta el número máximo de iteraciones permitidas.

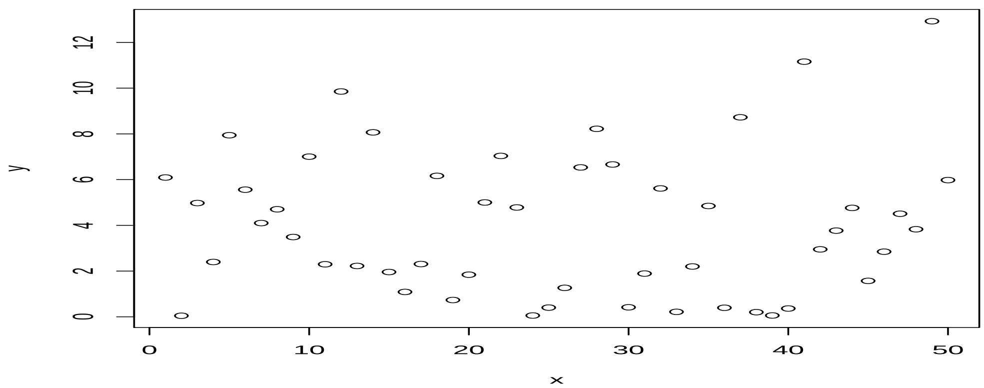

Figura 2: Representación gráfica del conjunto A

```
x<-c(1:50)
y<-abs(rnorm(50,2,5))
plot(x,y)
indsol<-numeric(20)
i<-numeric()
r=50
k=20
Item=1
i[Item]=1
while(Item<=r){
dist<-(x[length(i)]-x[-length(i)])^2+(y[length(i)]-y[-length(i)])^2
Sol=sort(dist)[1:k]
for(l in 1:k){
indsol[l]=which(Sol[l]==dist)+1
}
indsol=min(indsol[-i])
Item=Item+1
```

```
i[Item]=indsol
}
Sol
x[indsol]
y[indsol]

> Sol
 [1]   8.622653  11.165817  25.805021  37.478744  44.433370  49.270871
 [7]  53.886223  73.178540 107.824392 131.543681 156.053503 176.538644
[13] 177.371933 226.282259 227.178566 270.278667 322.211021 324.133660
[19] 377.713254 430.948547
> x[indsol]
[1] 32
> y[indsol]
[1] 5.614011
```

7. Ejercicio 27

Obten la desconposición dc para cada una de las siguientes funciones:

1. $f(x,y) = xy - x$ Al representar esta función(3) observamos que es cóncava en $(-\infty,0)\times(0,\infty)$ y $(0,\infty)\times(-\infty,0)$ (x e y signos distintos); es convexa en $(-\infty,0)\times(-\infty,0)$ y $(0,\infty)\times(0,\infty)$ (x e y mismo signo). Por tanto, f=g-h, siendo

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y) = xy + y & \text{si x,y tienen el mismo signo} \\ f(x,y) + \nabla f(x,y)(x,y) = xy + y + 2xy + y = 3xy + 2y & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$h(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si x,y tienen el mismo signo} \\ f(x,y) + \nabla f(x,y)(x,y) - f(x,y) = 2xy + y & \text{en otro caso} \end{cases}$$

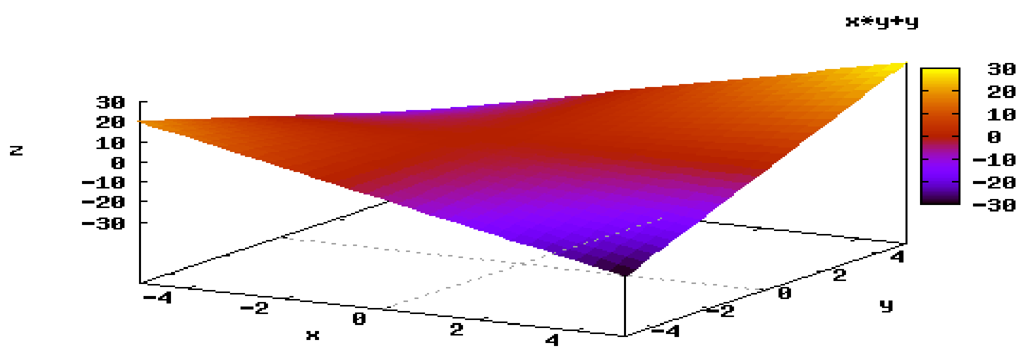

Figura 3: Representación gráfica

2. $f(x,y) = x^2 - y^2 + minx, 0$. Consideremos $g(x) = x^2 + minx, 0$ y $h(y) = y^2$, h es convexa, pues es una parábola

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \le 0 \\ x^2 + x & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$$

g es convexa por ser x^2 una función convexa y por ser $x^2 + x$ convexa, ya que es suma de dos funciones convexas.