# Programación Lineal y Entera

Balbina Virginia Casas Méndez

Apuntes de la asignatura. Primera parte.

MÁSTER EN TÉCNICAS ESTADÍSTICAS

*Curso 2009/10*

## Tema 1

- Introducción a la Investigación Operativa
- Programación lineal
- El Símplex

## Tema 1

Introducción a la Investigación Operativa
Programación lineal
El Símplex

## Tema 2

Programación lineal entera

## Tema 1

- Introducción a la Investigación Operativa
- Programación lineal
- El Símplex

## Tema 2

- Programación lineal entera

## Ejercicios

# Definición de Investigación Operativa

Es la aplicación del método científico a los problemas complejos que aparecen en la dirección y gestión de grandes sistemas de hombres, máquinas, materiales e inversiones económicas en la Industria, Medicina, Sociología, Administración y Defensa, entre otros campos.

Su característica fundamental consiste en construir un modelo matemático del sistema incorporando en ocasiones azar y riesgo, a partir del cual se pueden predecir y comparar los resultados de diferentes decisiones políticas, estrategias o controles alternativos.

El objetivo es ayudar a los dirigentes a determinar de forma científica sus “actuaciones". (*Operational Research Society* de Inglaterra.)

Tiene por objetivo decidir mediante métodos científicos, acerca de los mecanismos que optimizan el funcionamiento de los sistemas hombre-máquina, generalmente bajo condiciones que implican la utilización de recursos escasos. (*Operational Research Society* de América.)

Así pues el objetivo fundamental de esta disciplina es apoyar el proceso de toma de decisiones en diferentes problemas de la vida real, por medio de la construcción de modelos matemáticos adecuados.

Estos modelos matemáticos pueden ser tratados mediante algoritmos computacionales.

# Evolución histórica.

- Arquímedes y el rey de Siracusa (s. III A. D. C.): buscaban el método óptimo de emplear las armas para defender al pueblo de los ataques realizados por los barcos romanos.
- Monge (s. XVIII): estudiaba la forma más económica de organizar trabajos de desmonte en problemas relacionados con las obras públicas.
- Taylor (s. XIX): analizaba el problema de mover con una pala la mayor cantidad de material con el menor esfuerzo posible.

- Segunda Guerra Mundial: empieza a utilizarse el término Investigación Operativa como el conjunto de técnicas matemáticas empleadas para tomar decisiones de tipo militar. El primer equipo nace en el seno del Estado Mayor inglés impulsados los estrategas militares a buscar alternativas a los procedimientos clásicos que se venían utilizando para la toma de decisiones. El primer director de este equipo fue Blackett, Premio Nobel de Física. Fueron muchos los problemas que hubieron de resolver, por ejemplo, encontrar el tamaño óptimo de los convoyes marítimos, con el objetivo de minimizar las pérdidas que los submarinos alemanes podían causar. Tras la guerra muchos de los investigadores que participaran en el estudio de problemas militares, se incorporaron a las Universidades o al sector público y vieron que los modelos que se aplicaran a la estrategia militar podían ser aplicados en otros contextos.

- George B. Dantzig desarrolla en 1947 la primera técnica matemática ampliamente aceptada, conocida como método Símplex de programación lineal. Es considerado como uno de los diez algoritmos más importantes del siglo XX.
- Se funda RAND *corporation* por la fundación Ford y que intercambia sus avances científicos con distintas Universidades y empresas.

El desarrollo posterior ha ido ligado al de los ordenadores.

# Relación con distintas disciplinas y materias

- “An Optimization Based Heuristic for Political Districting". Management Science (1998), Volumen 44, pp. 1100-1114. A. Mehrotra, E. L. Johnson y G. L. Nemhauser.

  “Redistricting, the redrawing of congressional district boundaries within the states, may occur every 10 years on the basis of the population census. They present an optimization based heuristic incorporating universally agreed upon characteristics. They develop a specialized branch-and-price based solution methodology".

  Citado por: “A simulated annealing approach to police district design". Computers and Operations Research (2002), Volumen 29, pp. 667-684. S. J. D’Amico, S. J. Wang , R. C. M. Rump.

- “Papers in Caribbean Anthropology" chapter Jamaican fishing: a game theory analysis (1960), W. C. Davenport.

  Se explica el comportamiento de los pescadores desde un punto de vista funcionalista, por medio de un juego matricial el cual se puede resolver por medio de un modelo de programación lineal.
- Bioinformática. “Heuristic Approach to Sparse Approximation of Gene Regulatory Networks". Journal of Computational Biology (2008), 1173-1186. M. Andrecut, S. Huang, S. A. Kauffman.

  La estimación de la estructura de árboles genéticos a partir de la transcripción de perfiles de datos se puede resolver combinando técnicas de regresión y de programación lineal.

- “Exact algorithms for the minimum power symmetric connectivity problem in wireless networks". Computers & Operations Research (2005), 32, 2891-2904. R. Montemanni and L. M. Gambardella.
- En Salazar González (2000) se mencionan otras muchas aplicaciones interesantes, por ejemplo, en el contexto de encuestas:
  - Problema de descubrir datos ocultos.
  - Problemas de redondeos en una tabla.

# Aplicaciones recientes

- **Continental Airlines (2001)**: reorganizó su flota por medio de un Decision Support System.
- **UPS (2000-)**: genera ahorro por medio de un rediseño de la red de repartos.
- **NBC**: diseña estrategias de oferta de espacio publicitario para incrementar su beneficio.
- **British Telecom**: planifica los ingenieros de la plantilla para generar ahorro.

# Metodología en la Investigación Operativa.

- Definición de un problema. Alternativas, objetivos, restricciones y recogida de datos.
- Formulación de un modelo. Definición de funciones (para los objetivos y restricciones), selección de variables (para las alternativas), modelos de simulación y técnicas heurísticas. Los modelos pueden ser deterministas (programación lineal, entera, redes) o probabilísticos (colas).
- Solución del modelo.
- Validación de la solución.
- Puesta en la práctica de la solución.

# Tipos de modelos.

- **Modelos deterministas.**
  - Programación matemática.
    - Programación lineal.
    - Programación no lineal.
    - Programación entera.
    - Programación combinatoria.
    - Programación dinámica.
    - Programación multiobjetivo.
    - etc.

- **Modelos probabilísticos.**
    - Programación estocástica.
    - Simulación.
    - Teoría de colas.
    - Teoría de juegos.

# Ejemplo: Problema del transporte

Una empresa dispone de $n$ centros de producción que fabrican un determinado producto. Este producto debe ser transportado a $m$ centros de demanda (mercados). Transportar la mercancía de una fábrica a un mercado tiene un determinado precio.

Se quiere planificar el transporte de la mercancía de forma que se minimice el coste total del envío.

- **Definición y formulación del problema**
  - Determinar el objetivo de la empresa, las posibles decisiones y las restricciones o limitaciones sobre las decisiones.
  - Recogida de datos: producción en cada planta, demanda en cada mercado, coste unitario de transporte de cada planta a cada mercado.

- **Modelización**
  - Variables de decisión: $x_{ij}$, la cantidad a transportar de cada planta $i$ a cada mercado $j$.
  - Objetivo: minimizar el coste total.
  - Restricciones: técnicas, relativas a la demanda en cada mercado y a la producción en cada planta.

- **Obtención de la solución.**

Supongamos, concretamente, que tenemos 2 centros de producción y 3 mercados y que los costes de envío son 90 euros cada 100 km por unidad enviada.

Las distancias, $d_{ij}$, en cientos de km entre los centros de producción y los mercados vienen dados en la siguiente tabla.

Tabla 1. Distancias en un problema del transporte

| $d_{ij}$ | M1 | M2 | M3 | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|
| P1 | 2'5 | 1'8 | 1'8 | 300 |
| P2 | 2'5 | 1'8 | 1'4 | 600 |
| $b_j$ | 325 | 300 | 275 | |

# El modelo

- min $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}X_{ij}$

**sujeto a:**

- $\sum_{j=1}^{m} X_{ij} = a_i$ para $i = 1, \cdots, n$
- $\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = b_j$ para $j = 1, \cdots, m$
- $X_{ij} \geq 0$ para $i = 1, \cdots, n, j = 1, \cdots, m$

El ejemplo puede ser resuelto fácilmente con Solver de Excel, que nos proporciona, entre otra información, los envíos óptimos y el coste óptimo. Alternativamente podemos emplear OpenOffice (es gratuito y se descarga en la página web openoffice.org).

# Algunos comentarios

Vemos, por ejemplo, que es óptimo no enviar nada de P1 a M3 pero cabe preguntarse en cuánto se incrementaría la función objetivo si necesariamente hubiese que enviar una unidad.

Ese incremento sería de 36 euros, información que suministra Solver si se le requiere el denominado Informe de Sensibilidad.

La explicación es que si enviamos un artículo de P1 a M3, entonces, para mantener el balance producción/demanda debemos enviar una unidad menos de P2 a M3, una más de P2 a M2 y una menos de P1 a M2.

El incremento neto en distancias es 180-140+180-180=40 km, con un coste de 0'4$\times$90=36 euros.

# El problema del transporte con Maxima

Maxima se distribuye bajo la licencia GNU-GPL y tanto el código fuente como los manuales son de libre acceso a través de la página web del proyecto: http://maxima.sourceforge.net

Maxima (lo mismo que Maple) desciende del sistema Macsyma, desarrollado en el MIT (Massachusetts Institute of Technology) entre los años 1968 y 1982.

```
(%i1) load("simplex")$
(%i2) A: matrix([1,1,1,0,0,0], [0,0,0,1,1,1],
[1,0,0,1,0,0],[0,1,0,0,1,0],[0,0,1,0,0,1])$
(%i3) b: [300,600,325,300,275]$
(%i4) c: [225,162,162,225,162,126]$
(%i5) linear_program(A, b, c);
(%o5) [[0,300,0,325,0,275],156375]
```

# Otro ejemplo: un problema de “cortes"

Una empresa adquiere rollos de cable de 100 metros que necesita para suministrar trozos de cable a sus clientes. La empresa necesita suministrar:

- 90 trozos (piezas) de 45 metros,
- 600 trozos de 33 metros y
- 200 trozos de 31 metros.

Se desea conocer la manera de distribuir los cortes de cable en los rollos de 100 metros de manera que se consuman la menor cantidad posible de rollos para atender la demanda. Formular dicho problema como un problema de programación lineal.

Posibles esquemas para cortar un rollo de 100 metros y obtener trozos de algunas de las medidas deseadas:

1. Dos trozos de 45 metros.
2. Tres trozos de 33 metros.
3. Tres trozos de 31 metros.
4. Un trozo de 33 metros y dos trozos de 31 metros.
5. Dos trozos de 33 metros y un trozo de 31 metros.
6. Un trozo de 45 metros y otro de 33 metros.
7. Un trozo de 45 metros y otro de 31 metros.

$X_i$: número de rollos a cortar por el esquema $i$, $i = 1, \cdots, 7$.

Minimizar $\sum_{i=1}^{7} X_i$

sujeto a $2X_1 + X_6 + X_7 \geq 90$ (trozos de 45 metros)

$3X_2 + X_4 + 2X_5 + X_6 \geq 600$ (trozos de 33 metros)

$3X_3 + 2X_4 + X_5 + X_7 \geq 200$ (trozos de 31 metros)

$X_i \geq 0$ y enteras, $i = 1, \cdots, 7$.

# Introducción

La programación matemática es una herramienta de optimización con muchas aplicaciones prácticas.

Los elementos fundamentales de este tipo de problemas son:

- Objetivo a optimizar, por ejemplo, costes derivados de una planificación de aviones y sus tripulaciones.
- Variables, directamente relacionadas con las decisiones que hay que tomar y con las alternativas existentes, por ejemplo, los horarios de despegue de los aviones. Las variables del problema pueden ser todas continuas, todas enteras o una mezcla de ambos tipos, por lo que se habla de programación continua, programación entera o programación entera mixta.

- Restricciones o limitaciones a las variables, por ejemplo, los horarios de despegue de los aviones están restringidos por cuestiones de seguridad en el tráfico aéreo.
- Algoritmos de resolución del problema formulado.

La Programación Lineal (T. C. Koopmans, 1948) es la parte de la Programación Matemática en la cual, tanto la función objetivo como las restricciones son funciones lineales.

Ha adquirido gran importancia a raíz del desarrollo experimentado por la informática y de la aparición del método Símplex (Dantzig, 1947), que busca las soluciones entre un grupo muy reducido del total.

La formulación de un problema general de programación lineal es la siguiente:

**Objetivo**: minimizar o maximizar $c^T X = \sum_{j=1}^{n} c_j X_j$

**Restricciones**: sujeto a $\begin{cases} X_j \{\geq, \leq\} 0, & j = 1, \cdots, n \\ A X \{\geq, =, \leq\} b \end{cases}$

donde:

$c$: es un vector de $n$ componentes.
$X$: es un vector formado por las $n$ variables de decisión.
$A$: es una matriz $m \times n$.
$b$: es un vector de $m$ componentes.

Si un vector satisface las restricciones se denomina **solución factible**.

El conjunto de todas las soluciones factibles se denomina **región factible**. Puede ser vacía.

**Solución óptima** es áquella que proporciona el óptimo para la función objetivo. Podemos tener una única solución óptima finita, múltiples óptimos o una solución óptima no acotada.

# Un problema de análisis de actividades

Un fabricante dispone de cantidades fijas de varios recursos (mano de obra, materia prima, etc.) que se pueden combinar para producir unos ciertos productos y desea maximizar sus beneficios.

$m$: número de recursos.

$n$: número de productos.

$a_{ij}$: número de unidades de recurso $i$ para producir una unidad del producto $j$, $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$.

$b_i$: cantidad máxima de recurso $i$ que está disponible, $i = 1, \cdots, m$.

$c_j$: beneficio por unidad del producto $j$, $j = 1, \cdots, n$.

$X_j$: cantidad de unidades del producto $j$ que necesito producir, si quiero maximizar el beneficio, $j = 1, \cdots, n$.

Planteamiento del problema:

$$\text{Maximizar} \sum_{j=1}^{n} c_j X_j$$

$$\text{Sujeto a} \begin{cases} X_j \geq 0, & j = 1, \cdots, n \\ b_i \geq \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j, & i = 1, \cdots, m \end{cases}$$

# Ejemplo: un sistema multitarea.

Consideremos un ordenador de la Universidad con tres procesadores, que funciona al menos 9 horas diarias en aplicaciones de dos tipos, administrativas y académicas.

Cada tarea administrativa requiere 2 segundos de CPU en el primer procesador, 6 segundos de CPU en el segundo procesador y 4 segundos en el tercero. Cada tarea académica requiere 5 segundos de CPU en el primer procesador, 3 segundos de CPU en el segundo y 7 segundos de CPU en el tercer procesador.

Se desea programar la cantidad de tareas diarias que hay que asignar a cada procesador, con la condición de que se minimice el tiempo que el ordenador está ocupado con estos trabajos.

Vamos a denotar por $X_1$ y $X_2$ el número de tareas administrativas y académicas, respectivamente, que se van a ejecutar en el ordenador. Además, el ordenador se considera ocupado mientras que al menos uno de los procesadores no haya finalizado alguna tarea.

En consecuencia, el objetivo es

$$\text{minimizar maximo } \{2X_1 + 5X_2, 6X_1 + 3X_2, 4X_1 + 7X_2\},$$

que es un objetivo no lineal.

Para linealizar el objetivo introducimos una nueva variable $X_4$, donde

$$X_4 = \text{ maximo } \{2X_1 + 5X_2, 6X_1 + 3X_2, 4X_1 + 7X_2\} \geq 0.$$

Minimizar $X_4$

$$\text{Sujeto a } \begin{cases} X_j \geq 0, & j = 1, 2 \\ 2X_1 + 5X_2 \geq 9 \times 3.600 \\ 6X_1 + 3X_2 \geq 9 \times 3.600 \\ 4X_1 + 7X_2 \geq 9 \times 3.600 \\ X_4 \geq 2X_1 + 5X_2 \\ X_4 \geq 6X_1 + 3X_2 \\ X_4 \geq 4X_1 + 7X_2 \end{cases}$$

# Definiciones básicas.

**Aproximaciones a un problema de programación lineal:** los problemas de programación lineal se pueden estudiar desde un punto de vista algebraico, o bien (y equivalentemente) desde un punto de vista geométrico.

- Aproximación algebraica: consiste en plantear el problema de programación lineal de forma matemática y estudiar las propiedades, teniendo en cuenta la teoría de matrices.
- Aproximación geométrica: consiste en estudiar la región factible desde un punto de vista geométrico.

**Forma estándar de un problema de programación lineal:** hay muchas formas de plantear un problema de programación lineal. Una de ellas es la denominada *forma estándar* o *aumentada*:

minimizar $c^T X$

$$\text{sujeto a} \left\{ \begin{array}{rcl} X & \geq & 0 \\ \\ AX & = & b \end{array} \right.$$

Todos los problemas de programación lineal se pueden plantear en forma estándar.

# Ejemplo: Aproximación algebraica

maximizar $3X_1 + 5X_2$

$$\text{sujeto a} \begin{cases} X_1 \leq 180 \\ 2X_2 \leq 150 \\ 3X_1 + 2X_2 \leq 300 \\ X_1 \geq 0, \; X_2 \geq 0 \end{cases}$$

Estudiaremos las propiedades matriciales. En este caso de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} 180 \\ 150 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

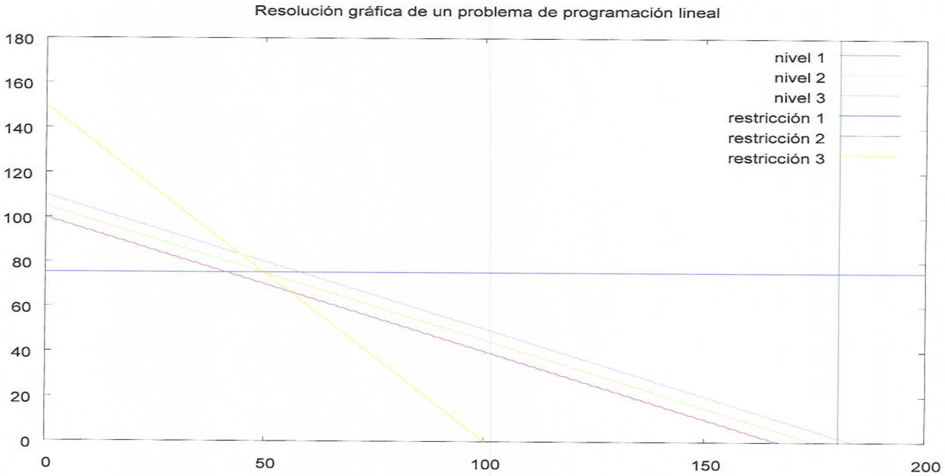
# Ejemplo: Aproximación geométrica

Se estudia la geometría de la región factible. La dirección de máximo ascenso es $(3, 5)$. La solución es $x^* = (50, 75)$. Se trata de un punto extremo o vértice de la región factible; esto siempre va a ser así en programación lineal. Con Maxima:

```
(%i1) load(draw)$
(%i2) draw2d(
key = “nivel 1",
line_width =1,
color = red,
implicit(3*x+5*y=500,x,0,200,y,0,180),
key = “nivel 2",
color = orange,
implicit(3*x+5*y=525,x,0,200,y,0,180),
```

```
key = “nivel 3",
color = violet,
implicit(3*x+5*y=550,x,0,200,y,0,180),
line_width=3,
color = blue,
key = “restricción 1",
implicit(2*y=150,x,0,200,y,0,180),
key = “restricción 2",
color = green,
implicit(x=180,x,0,200,y,0,180),
key = “restricción 3",
color = yellow,
implicit(3*x+2*y=300,x,0,200,y,0,180),
title= “Resolución gráfica de un problema de programación
lineal");
```

# Resolución gráfica con Maxima



# Planteamiento en forma estándar

- Dado el siguiente problema:

  minimizar $c^T X$

  $$\text{sujeto a } \begin{cases} X \geq 0 \\ AX \geq b \end{cases}$$

  Se puede plantear en forma estándar introduciendo lo que se denominan *variables de holgura*, $Y$:

  minimizar $c^T X$

  $$\text{sujeto a } \begin{cases} X, Y \geq 0 \\ AX - Y = b \end{cases}$$

- Si trabajamos con una variable $X_i$ que no está restringida, entonces se tiene que $X_i = Y_i - Z_i$ con $Y_i \geq 0$ y $Z_i \geq 0$.
- Si el problema de programación lineal consiste en maximizar una función objetivo, se puede transformar en uno en el que haya que minimizar una función:

$$\text{maximizar } c^T X = -\text{minimizar } - c^T X$$

**Punto extremo o vértice:** geométricamente, es un punto que es intersección de al menos $n$ caras o hiperplanos.

**Solución básica:** algebraicamente, si tenemos un problema de programación lineal en forma estándar, se dice que $x$ es una solución básica si $Ax = b$ y si las columnas de la matriz $A$ que están asociadas a un conjunto de elementos de $x$, de forma que los restantes elementos son nulos, son linealmente independientes. Dichas columnas se denominan **base** y se denotan por $B$. El resto de las columnas de $A$ forman una matriz que se denota por $N$. Así pues, se puede escribir $A = (B\ N)$ y se tiene que $\det(B) \neq 0$.

Si $x$ es una solución básica, es posible descomponerlo en dos subvectores: los valores de $x$ asociados a la base, $x_B$, y los valores de $x$ asociados a las columnas no básicas, $x_N$, cuyas componentes son todas iguales a cero. Si además $x_B \geq 0$, entonces $x$ se denomina **solución básica factible**.

**Resultado:** el número de soluciones básicas factibles es finito.

**Resultado:** un vértice es equivalente a una solución básica factible.

**Teorema fundamental de la programación lineal:** Si un problema de programación lineal posee al menos un vector finito que satisface las restricciones entonces admite una solución de base factible finita. Si el problema de programación lineal posee al menos un vector finito que satisface las restricciones y además optimiza la función objetivo entonces admite una solución de base factible finita que es optimal.

**Conclusión:** Como un vértice es equivalente a una solución básica factible y el número de soluciones básicas factibles es finito, entonces para encontrar una solución basta con buscarla en los vértices de la región factible. Ésta es la base del algoritmo Símplex.

Finalmente, hemos de destacar que en un problema de programación lineal podemos tener una solución óptima única (un vértice), infinitas soluciones óptimas (una arista, una cara, la región factible), una solución óptima no acotada o una región factible vacía. El símplex busca las soluciones entre un grupo muy reducido del total.

- **Método símplex**: 1947
- **Primer problema de programación lineal**: un problema de la dieta con 9 restricciones y 77 variables. Se hicieron cálculos electrónicos.
- **Primera implementación del símplex con ordenador**: 1952. Se resolvió un problema de programación lineal con 48 restricciones y 71 variables.

# El método Símplex (Dantzig, 1947).

Vamos a suponer un problema de programación lineal en forma estándar y que $m < n$ (puesto que en otro caso el sistema $Ax = b$ tendría filas redundantes, no sería factible o definiría un solo punto).

El método del símplex sirve para cualquier problema de programación lineal. Esquemáticamente hace lo siguiente.

- Se detecta una solución básica factible inicial, esto es, un vértice.
- Calcula una solución básica factible vecina o adyacente (cambiando sólo una coordenada) que mejora o deja igual a la función del objetivo. El paso importante en cada iteración va a ser decidir el cambio que vamos a hacer en la base $B$.

- Evita el ciclaje (volver a la solución básica factible de partida).
- Detecta el óptimo en un número finito de pasos.

Como consecuencia de varios resultados matemáticos se puede dar el siguiente algoritmo.

# Algoritmo del símplex

- 1. Se determina una solución básica factible $x_B = B^{-1}b$ para una cierta base $B$ ($x_B \geq 0$ y $x_N = 0$). Sea $I$ el conjunto de índices de la base y $J$ el conjunto restante.

Si la base $B$ está formada por $m$ vectores del conjunto original de $n$ vectores, podemos escribir:

$$A_1 = \alpha_{11}A_1 + \alpha_{21}A_2 + \cdots + \alpha_{m1}A_m$$

$$A_2 = \alpha_{12}A_1 + \alpha_{22}A_2 + \cdots + \alpha_{m2}A_m$$

$$\vdots$$

$$A_n = \alpha_{1n}A_1 + \alpha_{2n}A_2 + \cdots + \alpha_{mn}A_m.$$

- 2. Determinar $z_j = c_1\alpha_{1j} + c_2\alpha_{2j} + \cdots + c_m\alpha_{mj}$.
- 3. Comprobar los valores $z_j - c_j$, para todo $j \in J$.
  - Si para todo $j \in J$, $z_j - c_j \leq 0$, entonces $x_B$ es minimal y hemos terminado.
  - Sea $J_1 \subset J$ tal que $z_j - c_j > 0$ para todo $j \in J_1$.
- 4. Comprobar $\alpha_j$ para todo $j \in J_1$.
  - Si para algún $j \in J_1$, $\alpha_j \leq 0$, entonces no existe solución finita.
  - Determinar $k$ tal que:

$$\mid z_k - c_k \mid = max_{j \in J_1} \mid z_j - c_j \mid \text{ (criterio de entrada)}$$

y determinar $l$ por

$$\frac{x_l}{\alpha_{lk}} = min_{\alpha_{sk}>0} \frac{x_s}{\alpha_{sk}} \text{ (criterio de salida).}$$

- 5. Cambiar $B$ por $B'$. Sea $\alpha_{lk}$: elemento pivote. Modificar la matriz $(\alpha_{ij})$ de la siguiente forma:
  - Dividir la fila $l$ por $\alpha_{lk}$.
  - Sustituir la columna $k$ por un vector con todo ceros, excepto un 1 en el lugar $l$.
  - Redefinir los restantes elementos de la siguiente forma: $\alpha'_{ij} = \alpha_{ij} - \frac{\alpha_{lj}\alpha_{ik}}{\alpha_{lk}}$.
    Volver al paso 2.

# Ejemplo del algoritmo del Símplex

Minimizar $-107X_4 - X_5 - 2X_6$

$$\text{sujeto a} \begin{cases} 3X_1 + 14X_4 + X_5 - X_6 = 7 \\ X_2 + 16X_4 + \frac{1}{2}X_5 - 2X_6 = 5 \\ X_3 + 3X_4 = 0 \\ X_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 6. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 14/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 16 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -107 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Escogemos como base $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tenemos entonces $x_B = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $x_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, con $I = \{1, 2, 3\}$ y $J = \{4, 5, 6\}$.

# TABLA DEL SÍMPLEX de la primera iteración.

| | | $c_j$ | 0 | 0 | 0 | -107 | -1 | -2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Base | $c_B$ | $b$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ |
| $A_1$ | 0 | 7/3 | 1 | 0 | 0 | 14/3 | 1/3 | -1/3 |
| $A_2$ | 0 | 5 | 0 | 1 | 0 | 16 | 1/2 | -2 |
| $A_3$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | 0 | 0 |
| $z_j - c_j$ | | | 0 | 0 | 0 | 107 | 1 | 2 |

Como $(107, 1, 2) > 0$ y $(-1/3, -2, 0) \leq 0$, no existe solución minimal finita.

# Ejemplo del algoritmo del Símplex

Minimizar $-5X_1 + 2X_2 - 3X_3$

$$\text{sujeto a} \begin{cases} 2X_1 + 2X_2 - X_3 \leq 4 \\ 3X_1 - X_2 + X_3 \leq 3 \\ 2X_1 + X_2 + 3X_3 \leq 5 \\ X_i \geq 0, \; i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Problema en forma estándar (con variables de holgura):

Minimizar $Z = -5X_1 + 2X_2 - 3X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6$

$$\text{sujeto a} \begin{cases} 2X_1 + 2X_2 - X_3 + X_4 = 4 \\ 3X_1 - X_2 + X_3 + X_5 = 3 \\ 2X_1 + X_2 + 3X_3 + X_6 = 5 \\ X_i \geq 0, \; i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

# Primera iteración

| | | $c_j$ | -5 | 2 | -3 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Base | $c_B$ | $b$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | |
| $A_4$ | 0 | 4 | 2 | 2 | -1 | 1 | 0 | 0 | 2 |
| $A_5$ | 0 | 3 | **3** | -1 | 1 | 0 | 1 | 0 | **1** |
| $A_6$ | 0 | 5 | 2 | 1 | 3 | 0 | 0 | 1 | 5/2 |
| $z, z_j$ | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $z_j - c_j$ | | | 5 | -2 | 3 | 0 | 0 | 0 | |

El vector que entra en la base es el $A_1$ y el que sale de la base es el $A_5$, de manera que el elemento pivote es el 3, que se genera en el cruce del vector que entra y el vector que sale. El proceso se repite de forma iterativa hasta que se verifica que $z_j - c_j \leq 0$ para todo $j = 1, \cdots, n$.

# Segunda iteración

| | | $c_j$ | -5 | 2 | -3 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Base | $c_B$ | $b$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | |
| $A_4$ | 0 | 2 | 0 | 8/3 | -5/3 | 1 | -2/3 | 0 | – |
| $A_1$ | -5 | 1 | 1 | -1/3 | 1/3 | 0 | 1/3 | 0 | 3 |
| $A_6$ | 0 | 3 | 0 | 5/3 | **7/3** | 0 | -2/3 | 1 | **9/7** |
| $z, z_j$ | | -5 | -5 | 5/3 | -5/3 | 0 | -5/3 | 0 | 9/7 |
| $z_j - c_j$ | | | 0 | -1/3 | **4/3** | 0 | -5/3 | 0 | |

El vector que entra en la base es el $A_3$ y el que sale de la base es el $A_6$.

# Tercera iteración

| Base | $c_B$ | $c_j$ / $b$ | -5 / $A_1$ | 2 / $A_2$ | -3 / $A_3$ | 0 / $A_4$ | 0 / $A_5$ | 0 / $A_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_4$ | 0 | 29/7=4'1448 | 0 | 27/7 | 0 | 1 | -8/7 | 5/7 |
| $A_1$ | -5 | 4/7=0'5714 | 1 | -4/7 | 0 | 0 | 3/7 | -1/7 |
| $A_3$ | -3 | 9/7=1'2857 | 0 | 5/7 | 1 | 0 | -2/7 | 3/7 |
| $z, z_j$ | | -47/7=-6'7142 | -5 | 5/7 | -3 | 0 | -9/7 | -4/7 |
| $z_j - c_j$ | | | 0 | -9/7 | 0 | 0 | -9/7 | -4/7 |

Observando la tabla, se tiene que $z_j - c_j \leq 0$ para todo $j = 1, \cdots, n$, por lo que hemos llegado a la etapa final. Para buscar la solución dentro de la tabla, miramos la columna $b$ y encontramos:

$$x_1 = 4/7 = 0'5714, \; x_2 = 0, \; x_3 = 9/7 = 1'2857, \; z = -6'7142.$$

# Determinación de una base inicial

En el algoritmo del símplex partimos de una primera solución extrema a la que se asocia una base canónica. Siempre es posible conseguir esto.

Si al introducir las variables de holgura necesarias para escribir el problema en forma estándar (esto es, convertir desigualdades en igualdades) ya tenemos la base canónica, entonces se puede iniciar el algoritmo.

Si no estamos en la situación anterior, para conseguir una base canónica haremos uso de lo que se conoce como variables artificiales. Se introducirán las variables artificiales necesarias para, junto con las variables de holgura, tener una base canónica. A continuación, vemos un método que permite resolver problemas que contienen variables artificiales.

# Método de las penalizaciones

Modificamos la función objetivo para que se imponga una penalización muy grande a las variables artificiales, en el caso de que adquieran valores mayores que cero. De esa forma, las iteraciones del algoritmo del símplex fuerzan automáticamente a las variables artificiales a desaparecer (esto es, a volverse cero), hasta quedar todas fuera de la solución.

Partimos de un problema de programación lineal en la forma estándar:

Minimizar $Z = c^T X$

$$\text{sujeto a } \begin{cases} AX = b \\ \\ X \geq 0 \end{cases}$$

Se incorporan en las restricciones las variables artificiales necesarias para tener una base canónica con la que iniciar el algoritmo del símplex, resultando:

$$AX + IX_a = b$$

$$X \geq 0,\ X_a \geq 0$$

Como queremos que salgan las variables artificiales y que entren las otras variables, les asociamos a las primeras un valor muy grande ($M$, y que no es necesario especificar) en la función objetivo, resultando el siguiente problema:

Minimizar $Z = c^T X + MX_a$

$$\text{sujeto a} \left\{ \begin{array}{l} AX + IX_a = b \\ \\ X \geq 0,\ X_a \geq 0 \end{array} \right.$$

# Ejemplo del método de las penalizaciones

Minimizar $Z = 2X_1 + 3X_2$

$$\text{sujeto a} \begin{cases} 1/2X_1 + 1/4X_2 \leq 4 \\ X_1 + 3X_2 \geq 20 \\ X_1 + X_2 = 10 \\ X_i \geq 0 \; i = 1, 2 \end{cases}$$

Planteamos el problema en forma estándar.

Para ello introducimos variables de holgura ($S_i \geq 0$) en las restricciones en las que aparece menor o igual y restamos variables que denominamos de exceso ($e_i \geq 0$) en las restricciones en las que aparece mayor o igual.

Como no tenemos una solución con la que comenzar el algoritmo del simplex, introducimos variables artificiales ($a_i$).

Para forzar que las variables artificiales sean nulas, penalizamos su valor en la función objetivo. El problema con las nuevas variables queda de la siguiente forma:

Minimizar $Z = 2X_1 + 3X_2 + Ma_2 + Ma_3$

$$\text{sujeto a} \begin{cases} 1/2X_1 + 1/4X_2 + S_1 = 4 \\ X_1 + 3X_2 - e_2 + a_2 = 20 \\ X_1 + X_2 + a_3 = 10 \end{cases}$$

Con los datos del problema, se construye la TABLA DEL SIMPLEX:

# PRIMERA TABLA

| | | $c_j$ | 2 | 3 | 0 | 0 | M | M | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Base | $c_B$ | $b$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | |
| $A_3$ | 0 | 4 | 1/2 | 1/4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 16 |
| $A_5$ | M | 20 | 1 | **3** | 0 | -1 | 1 | 0 | 20/3 |
| $A_6$ | M | 10 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 10 |
| $z, z_j$ | | 30M | 2M | 4M | 0 | -M | M | M | 20/3 |
| $z_j - c_j$ | | | 2M-2 | 4M-3 | 0 | -M | 0 | 0 | |

El vector que entra en la base es el $A_2$ y el que sale de la base es el $A_5$, de manera que el elemento pivote es el 3.

# SEGUNDA TABLA

| | | $c_j$ | 2 | 3 | 0 | 0 | M | M | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Base | $c_B$ | $b$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | |
| $A_3$ | 0 | $\frac{7}{3}$ | $\frac{5}{12}$ | 0 | 1 | $\frac{1}{12}$ | – | 0 | $\frac{28}{5}$ |
| $A_2$ | 3 | $\frac{20}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 1 | 0 | $-\frac{1}{3}$ | – | 0 | 20 |
| $A_6$ | M | $\frac{10}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | – | 1 | 5 |
| $z, z_j$ | | $10\frac{M}{3}+20$ | $2\frac{M}{3}+1$ | 3 | 0 | $\frac{M}{3}-1$ | – | M | 5 |
| $z_j - c_j$ | | | $2\frac{M}{3}-1$ | 0 | 0 | $\frac{M}{3}-1$ | – | 0 | |

El vector que entra en la base es el $A_1$ y el que sale de la base es el $A_6$.

# TERCERA TABLA

| | | $c_j$ | 2 | 3 | 0 | 0 | M | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Base | $c_B$ | $b$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ |
| $A_3$ | 0 | 1/4 | 0 | 0 | 1 | -1/8 | – | – |
| $A_2$ | 3 | 5 | 0 | 1 | 0 | -1/2 | – | – |
| $A_1$ | 2 | 5 | 1 | 0 | 0 | 1/2 | – | – |
| $z, z_j$ | | 25 | 2 | 3 | 0 | -1/2 | – | – |
| $z_j - c_j$ | | | 0 | 0 | 0 | -1/2 | – | – |

Observando la tabla, se tiene que $z_j - c_j \leq 0$ para todo $j \in J$ y $a_i = 0$, por lo que hemos llegado a la etapa final. Para buscar la solución dentro de la tabla, miramos la columna $b$ y encontramos:

$$x_1 = 5, \; x_2 = 5, \; z = 25.$$

Otro método muy utilizado para obtener una solución inicial es el denominado **método de las dos fases.**

# Fundamentos matemáticos del símplex, Martín (2003)

Sea el problema de programación lineal:

$$\min z = c^t X$$

$$\text{s.a } AX = b$$

$$X \geq 0$$

donde $c = (c_1, \cdots, c_n)^t$, $b = (b_1, \cdots, b_m)^t$ y $X = (X_1, \cdots, X_n)^t$.

Supongamos que tenemos una solución factible básica, es decir, se conoce una solución de punto extremo en términos de $m$ vectores columna de $A$, $A_j$, del conjunto original de $n$ vectores. Podemos hacer que este conjunto de $m$ vectores linealmente independientes sean los $m$ primeros, es decir, que las variables nulas sean las $n - m$ finales. Tendré $x = (x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0)^t$ que verifica:

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_m A_m = b, \;\; x_j \geq 0 \; \forall j. \tag{1}$$

Como los vectores $A_1, A_2, \cdots, A_m$ forman una base en el espacio $m$-dimensional, podemos expresar cada uno de los $n$ dados como combinación lineal de los vectores base:

$$\begin{gathered}
\alpha_{11}A_1 + \alpha_{21}A_2 + \cdots + \alpha_{m1}A_m = A_1 \\
\alpha_{12}A_1 + \alpha_{22}A_2 + \cdots + \alpha_{m2}A_m = A_2 \\
\vdots \\
\alpha_{1j}A_1 + \alpha_{2j}A_2 + \cdots + \alpha_{mj}A_m = A_j \\
\vdots \\
\alpha_{1n}A_1 + \alpha_{2n}A_2 + \cdots + \alpha_{mn}A_m = A_n.
\end{gathered} \tag{2}$$

La función objetivo $z$ tomará en el vértice $x$ el valor:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m. \tag{3}$$

En (1), si $A_1, \cdots, A_m$ es la base canónica de los vectores unitarios entonces

$$x_1 = b_1,\ x_2 = b_2, \cdots, x_m = b_m.$$

Tomemos ahora un $j$ de modo que $A_j$ no pertenezca a la base dada.

A (1) le vamos a restar la ecuación $j$ de (2) multiplicada por un escalar $\theta_j$:

$$(x_1 - \theta_j \alpha_{1j}) A_1 + (x_2 - \theta_j \alpha_{2j}) A_2 + \cdots + (x_m - \theta_j \alpha_{mj}) A_m + \theta_j A_j = b \quad (4)$$

con lo cual, si elegimos $\theta_j \geq 0$ tal que $x_i - \theta_j \alpha_{ij} \geq 0$,

$i = 1, \cdots, m$ se tiene que $x' = (x'_1, \cdots, x'_n)^t$ es

un nuevo punto factible, con:

$$
\begin{aligned}
x_i' = x_i - \theta_j \alpha_{ij} \geq 0,\ i = 1, \cdots, m \\
x_i' = \theta_j \geq 0,\ i = j \\
x_i' = 0,\ \text{en otro caso.}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

La función objetivo en $x'$ toma el valor

$$
z' = c_1 x_1' + c_2 x_2' + \cdots + c_m x_m' + c_j \theta_j
$$

$$
= c_1(x_1 - \theta_j \alpha_{1j}) + c_2(x_2 - \theta_j \alpha_{2j}) + \cdots + c_m(x_m - \theta_j \alpha_{mj}) + \theta_j c_j
$$

$$
= z - \theta_j (z_j - c_j) \tag{6}
$$

con

$$
z_j = c_1 \alpha_{1j} + c_2 \alpha_{2j} + \cdots + c_m \alpha_{mj} \tag{7}
$$

y $z$ es la función objetivo en $x$.

En (6) vemos que hay que seleccionar $j$ de forma que verificándose (5) se tenga que $\theta_j(z_j - c_j)$ sea positivo y máximo, con lo cual $z' < z$ y así la nueva solución factible mejorará la función objetivo. Las diferencias $z_j - c_j$ se denominan **costes reducidos** y miden la disminución de la función objetivo por unidad de la variable, $x_j$, al cambiar la solución básica y entrar en la base dicha variable $x_j$.

Nos fijamos en (5) y distinguimos 2 casos para $j$ con $z_j - c_j > 0$:

- Si $\alpha_{ij} \leq 0$, $\forall i$ con $\theta_j \geq 0$, como $0 \leq x_i' = x_i - \theta_j \alpha_{ij}$ entonces $\theta_j \geq \dfrac{x_i}{\alpha_{ij}}$. Por otro lado, como consideramos $z_j - c_j > 0$ y se tiene que $z' = z - \theta_j(z_j - c_j)$, al poder elegir $\theta_j$ tan grande como se quiera, $z' \longrightarrow -\infty$ y en este caso, por tanto, NO EXISTE SOLUCIÓN FINITA.

- Si $\alpha_{ij} > 0$ para algún $i$, como $x_i' = x_i - \theta_j \alpha_{ij} \geq 0$ entonces $\theta_j \leq \dfrac{x_i}{\alpha_{ij}}$ $\forall i$ y tomaremos

$$\theta_j = \min\{\frac{x_i}{\alpha_{ij}} \ : \ \alpha_{ij} > 0\}. \tag{8}$$

Por otro lado nos quedamos con el índice $j$ que hace mayor $(z_j - c_j)$. Supongamos que éste es $j = m + 1$ y que el mínimo en (8) se alcanza para $i = 1$, *i.e.*:

$$\theta_{m+1} = \min_i\{\frac{x_i}{\alpha_{i,m+1}} \ : \ \alpha_{i,m+1} > 0\} = \frac{x_1}{\alpha_{1,m+1}}. \tag{9}$$

(Es decir, la columna $A_1$ dejaría de estar en la base, la columna $A_{m+1}$ entraría a formar parte de la base, y $\alpha_{1,m+1}$ es lo que denominamos "pivote".)

Esto implica que

$x'_1 = x_1 - \theta_{m+1}\alpha_{1,m+1} = x_1 - \dfrac{x_1}{\alpha_{1,m+1}}\alpha_{1,m+1} = 0$, por lo que la nueva solución factible queda

$$x' = (0, x'_2, \cdots, x'_m, \theta_{m+1}, 0, \cdots, 0)^t$$

y será un vértice si los vectores $A_2, A_3, \cdots, A_{m+1}$ son linealmente independientes.

Para probarlo supongamos que $A_2, A_3, \cdots, A_{m+1}$ son linealmente dependientes, entonces puedo escribir

$$\lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_{m+1} A_{m+1} = 0 \qquad (10)$$

con algún $\lambda_i \neq 0$.

Como $A_2, \cdots, A_m$ son linealmente independientes, $\lambda_{m+1} \neq 0$ y así $A_{m+1} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_{m+1}}A_2 - \cdots - \frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}}A_m$ con lo que se puede escribir

$$A_{m+1} = \gamma_2 A_2 + \cdots + \gamma_m A_m. \tag{11}$$

Si ahora restamos (11) de (2) con $j = m + 1$:

$$0 = \alpha_{1,m+1}A_1 + (\alpha_{2,m+1} - \gamma_2)A_2 + \cdots + (\alpha_{m,m+1} - \gamma_m)A_m.$$

Como $A_1, \cdots, A_m$ son linealmente independientes, entonces $\alpha_{1,m+1} = 0$ pero por (9), $\alpha_{1,m+1} > 0$.

Por tanto $A_2, \cdots, A_{m+1}$ son linealmente independientes. De esta forma, $x'$ es una <u>solución factible básica</u>.

El proceso se repetiría hasta encontrar $z_j - c_j \leq 0 \; \forall j$ que es el caso en el cual se habrá ALCANZADO EL MÍNIMO.

En la práctica, cuando en cada iteración recalculamos la nueva solución básica estamos utilizando las expresiones (5) y (9) anteriores. Al recalcular los coeficientes $\alpha_{ij}$ usamos fórmulas da cambio de base conocidas.

Geométricamente, con este algoritmo vamos recorriendo los vértices de la región factible de forma que pasamos de uno a otro moviéndonos por una arista y de manera que el objetivo mejora o queda igual.

A continuación comentamos dos casos especiales: DEGENERACIÓN y MÚLTIPLES ÓPTIMOS.

# La degeneración en el algoritmo del símplex

En cada iteración, al seleccionar la variable que sale de la base, se determina el mínimo de una serie de cocientes. Puede ocurrir que dos de esos cocientes sean iguales al mínimo y distintas variables podrían salir. Elegida una, en la siguiente iteración las variables no elegidas que permanecen en la base se anulan, obteniéndose lo que se denomina una **solución básica degenerada**. Esto no supone ninguna dificultad y continuando el algoritmo se alcanza el óptimo, pero se observa que hay iteraciones en las que aunque se cambie de base, el valor del objetivo no se modifica. Por ejemplo:

Minimizar $z = -3x_1 - 4x_2$

$$\text{Sujeto a} \left\{ \begin{array}{c} -x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 29 \\ x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ x_i \geq 0, \ i = 1, 2 \end{array} \right.$$

# Forma estándar y tablas del símplex

Minimizar $z = -3x_1 - 4x_2$

$$\text{Sujeto a} \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_5 = 29 \\ x_1 - 2x_2 + x_6 = 4 \\ x_i \geq 0, \ i = 1, \cdots, 6 \end{cases}$$

| | | $c_j$ | -3 | -4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Base | $c_B$ | $b$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ |
| $A_3$ | 0 | 3 | -1 | **1** | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $A_4$ | 0 | 10 | -1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $A_5$ | 0 | 29 | 2 | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $A_6$ | 0 | 4 | 1 | -2 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $z, z_j$ | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $z_j - c_j$ | | | 3 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | $c_j$ | -3 | -4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Base | $c_B$ | $b$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ |
| $A_2$ | -4 | 3 | -1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $A_4$ | 0 | 4 | **1** | 0 | -2 | 1 | 0 | 0 |
| $A_5$ | 0 | 20 | 5 | 0 | -3 | 0 | 1 | 0 |
| $A_6$ | 0 | 10 | -1 | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 |
| $z, z_j$ | | -12 | 4 | -4 | -4 | 0 | 0 | 0 |
| $z_j - c_j$ | | | 7 | 0 | -4 | 0 | 0 | 0 |

| | | $c_j$ | -3 | -4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Base | $c_B$ | $b$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ |
| $A_2$ | -4 | 7 | 0 | 1 | -1 | 1 | 0 | 0 |
| $A_1$ | -3 | 4 | 1 | 0 | -2 | 1 | 0 | 0 |
| $A_5$ | 0 | 0 | 0 | 0 | **7** | -5 | 1 | 0 |
| $A_6$ | 0 | 14 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $z, z_j$ | | -40 | -3 | -4 | 10 | -7 | 0 | 0 |
| $z_j - c_j$ | | | 0 | 0 | 10 | -7 | 0 | 0 |

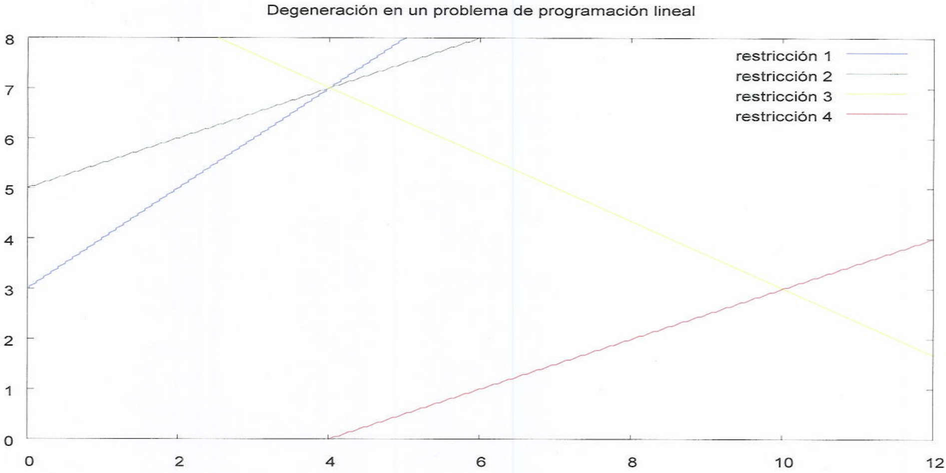
| | | $c_j$ | -3 | -4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Base | $c_B$ | $b$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ |
| $A_2$ | -4 | 7 | 0 | 1 | 0 | 2/7 | 1/7 | 0 |
| $A_1$ | -3 | 4 | 1 | 0 | 0 | -3/7 | 2/7 | 0 |
| $A_3$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -5/7 | 1/7 | 0 |
| $A_6$ | 0 | 14 | 0 | 0 | 0 | **1** | 0 | 1 |
| $z, z_j$ | | -40 | -3 | -4 | 0 | 1/7 | -10/7 | 0 |
| $z_j - c_j$ | | | 0 | 0 | 0 | 1/7 | -10/7 | 0 |

| | | $c_j$ | -3 | -4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Base | $c_B$ | $b$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ |
| $A_2$ | -4 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1/7 | -2/7 |
| $A_1$ | -3 | 10 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2/7 | 3/7 |
| $A_3$ | 0 | 10 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1/7 | 5/7 |
| $A_4$ | 0 | 14 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $z, z_j$ | | -42 | -3 | -4 | 0 | 0 | -10/7 | -1/7 |
| $z_j - c_j$ | | | 0 | 0 | 0 | 0 | -10/7 | -1/7 |

La degeneración ha aparecido al pasar de la segunda tabla a la tercera, puesto que dos elementos eran ambos válidos como pívot. Así, en la tercera tabla la variable básica $x_5$ se hace cero. En realidad, tanto el vértice asociado como el valor del objetivo son el mismo en las tablas tercera y cuarta, a pesar de haberse producido un cambio de base.

En la gráfica de la región factible, vemos que en el vértice (4,7) se cortan tres restricciones, una de las cuales, la segunda, es redundante. Si se elimina del sistema de restricciones, se evitaría la degeneración.

# Un ejemplo con restricciones redundantes



# Múltiples óptimos

En un problema de programación lineal, distintos puntos de la región factible pueden proporcionar el valor óptimo para la función objetivo.

En la tabla óptima del símplex, esto se detecta si asociado a una variable no básica, el coeficiente $z_j - c_j$ toma el valor cero, lo cual indica que esta variable, no básica, puede entrar a formar parte de la solución básica, sin alterar el valor, óptimo, de la función objetivo.

# Otro ejemplo: diseño de terapia de radiación, Hillier y Lieberman (2005)

Para tratar un tumor de vejiga se quiere diseñar el tratamiento de radiación, concretamente las dosis, en kilorads, de dos rayos (para simplificar, pero en la realidad se consideran docenas de rayos posibles). La siguiente tabla recoge los datos estimados de interés.

La primera columna presenta una lista de áreas del cuerpo que deben considerarse. El tejido crítico se refiere a tejidos vitales cercanos que deben evitarse, como el recto, y estructura ósea, como el fémur, que atenuarán la radiación. Las columnas segunda y tercera proporcionan la fracción de la dosis de radiación de cada rayo en el punto de entrada que absorben las áreas respectivas. La última columna presenta las restricciones sobre la dosis total de ambos rayos que se absorben en promedio en las diferentes partes del cuerpo.

# Datos para el diseño del tratamiento de radiación

| | Fracción de la dosis de entrada | absorbida por área (promedio) | Restricción sobre la dosis promedio total |
|---|---|---|---|
| **Área** | **Rayo 1** | **Rayo 2** | **(kilorads)** |
| Anatomía sana | 0'4 | 0'5 | Minimizar |
| Tejido crítico | 0'3 | 0'1 | $\leq 2'7$ |
| Región del tumor | 0'5 | 0'5 | =6 |
| Centro del tumor | 0'6 | 0'4 | $\geq 6$ |

Más detalles de la solución general: D. Sonderman y P. G. Abrahamson (1985), “Radiotherapy Treatment Design Using Mathematical Programming Models", Operations Research, 33, 705-725.

Una impulsora: Prof. Eva K. Lee, del Georgia Institute of Technology.

# Problemas de clasificación y programación lineal

La clasificación se utiliza en ciencias sociales y en las ciencias de la vida:

- En individuos, según similitudes anatómicas, composición genética, relaciones evolutivas, etc. (C. Linneo, s. XVII, C. Darwin, s. XIX, entre otros.)
- En partidos políticos, para estudiar formación de coaliciones, o en actuaciones gubernamentales que determinan diversas implicaciones.
- ...

En problemas de clasificación, se dan dos conjuntos de puntos en el espacio $\mathbb{R}^n$. La cuestión es encontrar un hiperplano que separe los dos conjuntos adecuadamente. Ese hiperplano se utiliza para clasficar un nuevo punto que aparezca; si el nuevo punto está a un lado del hiperplano, lo clasificamos en el primer conjunto, mientras que si está del otro lado, lo clasificamos en el segundo conjunto.

La programación lineal puede ser usada para encontrar el hiperplano separador, que está definido para un vector $w \in \mathbb{R}^n$ y un escalar $t$. Idealmente, querríamos que cada punto $x$ en el primer conjunto satisfaga $w'x \geq t$, mientras que cada punto $x$ en el segundo satisfaga $w'x \leq t$.

Para evitar una respuesta trivial ($w = 0$ y $t = 0$) consideramos las condiciones más fuertes de que $w'x \geq t + 1$ para puntos en el primer conjunto y $w'x \leq t - 1$ para puntos en el segundo conjunto.

Los dos conjuntos generados pueden estar mezclados y así no hay una separación clara.

Se definirá la función objetivo del problema de programación lineal como la suma del promedio de incumplimientos en la clasificación sobre cada conjunto.

Planteamos el problema construyendo una matriz $M$, $m \times n$, cuya fila $i$ contiene las $n$ componentes del punto $i$ en el primer conjunto. De forma similar, se construye una matriz $B$, $k \times n$, a partir de los puntos del segundo conjunto.

El incumplimiento de la condición $w'x \geq t + 1$ para puntos del primer conjunto se miden por un vector $y$, definido por las desigualdades $y \geq -(Mw - te) + e$, $y \geq 0$, donde $e = (1, 1, \cdots, 1)' \in \mathbb{R}^m$. Similarmente, los incumplimientos de la condición $w'x \leq t - 1$ para puntos del segundo conjunto se miden por un vector $z$, definido por $z \geq (Bw - te) + e$, $z \geq 0$, donde $e \in \mathbb{R}^k$. En general, $e$ será un vector de unos de la dimensión apropiada.

El incumplimiento medio en el primer conjunto es $e'y/m$ y en el segundo es $e'z/k$.

# Un modelo de clasificación

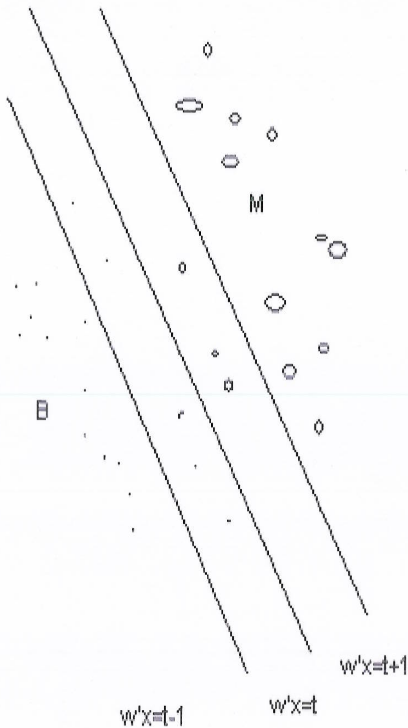
- $\min_{w,t,y,z} \quad \dfrac{1}{m}e'y + \dfrac{1}{k}e'z$

**sujeto a:**

- $y \geq -(Mw - te) + e,$
- $z \geq (Bw - te) + e,$
- $(y, z) \geq 0.$

Una aplicación se realizó en Mangasarian, Street y Wolberg (1995) a la diagnosis de un cierto tipo de cáncer. El primer conjunto se refiere a muestras tomadas de tumores malignos y el segundo a muestras de tumores benignos. Su localización en el espacio bidimensional se realiza por medio de medidas de dos propiedades, por ejemplo, el tamaño medio de la célula y la desviación media de la “redondez" de las células en la muestra.

Otra aplicación interesante de la programación lineal a la clasificación se describe en Bosch y Smith (1998) que usa un hiperplano separador en tres dimensiones que cuenta la frecuencia de ciertas palabras para determinar que 12 cuestionados artículos federalistas son probablemente atribuibles a James Madison antes que a Alexander Hamilton.




Clasificación usando el plano w'x=t

# Introducción a la dualidad en programación lineal

Consideremos el problema de programación lineal:

Maximizar $x^t c$,

sujeto a $\quad Ax \leq b,$

$$x \geq 0,$$

donde $A$ es una matriz $m \times n$, $c$ es un vector $n \times 1$, $b$ es un vector $m \times 1$ y $x$ es el vector $n \times 1$ de variables.

**Definición** El **dual del problema** anterior es el siguiente problema de programación (con $y$ un vector $m \times 1$ de variables):

Minimizar $y^t b$,

sujeto a $\quad A^t y \geq c,$

$$y \geq 0.$$

Si tenemos una pareja de problemas como los dos anteriores, nos referimos al primero como el **problema primal** (P) y al segundo como el **problema dual** (D).

# Teorema de dualidad

Consideremos un par de problemas de programación lineal duales como los dos anteriores, y supongamos que $x$ e $y$ son soluciones factibles de los problemas (P) y (D), respectivamente. Entonces, $x$ es una solución óptima de (P) e $y$ es una solución óptima de (D) si y sólo si $x^t c = y^t b$ (el valor en el óptimo de los objetivos de ambos problemas es el mismo).

**Notemos que**: podemos establecer una correspondencia entre cada variable de decisión del dual y cada restricción del primal y entre cada variable de decisión del primal y cada restricción del dual.

A veces, resulta **más eficiente** resolver el primal, resolviendo primero el dual cuando éste tiene menos restricciones, y a partir de su solución, obtener la del primal.

# Dualidad: un ejemplo

Consideremos el **problema del ebanista** (ejercicio 2):

Maximizar $5x_1 + 5x_2$,

$$\text{sujeto a}\quad \begin{aligned} 12x_1 + 8x_2 &\leq 96 \\ 6x_1 + 12x_2 &\leq 72 \\ -x_1 &\leq -2 \\ x &\geq 0, \end{aligned}$$

El **problema dual** es:

Minimizar $96y_1 + 72y_2 - 2y_3$,

$$\text{sujeto a}\quad \begin{aligned} 12y_1 + 6y_2 - y_3 &\geq 5 \\ 8y_1 + 12y_2 &\geq 5 \\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

# Unos cálculos con Maxima

```
(%i1) load(simplex)$
(%i2) minimize_lp(96*x+72*y-2*z, [12*x+6*y-z>=5,
8*x+12*y>=5]), nonegative_lp=true;
(%o2) [45,[z=0,y=5/24,x=5/16]]
(%i3) maximize_lp(5*x+5*y, [12*x+8*y<=96,
6*x+12*y<=72,x>=2]), nonegative_lp=true;
(%o3) [45,[y=3,x=6]]
(%i4) maximize_lp(5*x+5*y, [12*x+8*y<=97,
6*x+12*y<=72,x>=2]), nonegative_lp=true;
(%o4) [725/16,[y=47/16,x=49/8]]
(%i5) maximize_lp(5*x+5*y, [12*x+8*y<=96,
6*x+12*y<=73,x>=2]), nonegative_lp=true;
(%o5) [1085/24,[y=25/8,x=71/12]]
```

# Unos comentarios a los resultados (que se verifican siempre)

- La solución óptima del problema dual son los denominados **precios duales**: cada uno de ellos mide la "**mejora en la función objetivo**" cuando se **relaja una unidad** (hasta cierto límite) la correspondiente restricción en el problema primal.

  Si se trata de un problema de producción lineal, donde las restricciones vienen dadas por limitaciones en los recursos, el precio dual se interpreta como el "precio justo" del correspondiente recurso en el mercado, ya que mide el beneficio generado por cada unidad adicional de dicho recurso.

- Los precios duales, los obtenemos en la **tabla óptima del símplex** para el problema primal, en la fila de $z_j - c_j$, cambiando de signo los valores en las columnas correspondientes a las variables de holgura: estos valores verifican las restricciones del problema dual y dan al objetivo de este problema el mismo valor que el objetivo del primal en el óptimo. Si en la fila de $z_j - c_j$, cambiamos de signo los valores en las columnas correspondientes a las variables de decisión se obtienen los valores óptimos de las variables de holgura en el problema dual. Efectivamente:

$$(b_1, \cdots, b_m)(z_{n+1}, \cdots, z_{n+m})^t$$

$$= b^t(c_B^t B^{-1} A_{n+1}, \cdots, c_B^t B^{-1} A_{n+m})^t$$

$$= b^t c_B^t B^{-1} = c_B^t B^{-1} b = c_B^t x_B = c^t x.$$

- Los precios duales distintos de cero se corresponden con restricciones saturadas cuando consideramos la solución óptima del problema primal. Las restricciones no saturadas (variable de holgura no nula, i. e., básica y por tanto $z_j - c_j$=0) cuando consideramos la solución óptima del problema primal se corresponden con precios duales nulos. Esto es lo que se conoce como **propiedad de holguras complementarias**.

Comparamos las soluciones del problema de producción lineal del ebanista y la solución del problema dual:

$$
\begin{array}{ll}
\hline
x_1 = 6 \rightarrow & y_4 = 0 \\
x_2 = 3 \rightarrow & y_5 = 0 \\
x_3 = 0 \rightarrow & y_1 = 5/16 \\
x_4 = 0 \rightarrow & y_2 = 5/24 \\
x_5 = 4 \rightarrow & y_3 = 0 \\
\hline
\end{array}
$$

Hacemos corresponder cada variable de decisión del primal $(x_1, x_2)$ con una de holgura del dual $(y_4, y_5)$ y cada variable de holgura del primal $(x_3, x_4, x_5)$ con una de decisión del dual $(y_1, y_2, y_3)$. Notemos que si, en el óptimo, una restricción del primal no está saturada (“sobran recursos, no los utilizamos todos"), el correspondiente precio dual es cero (no vamos a ganar más por poseer unidades adicionales de ese recurso).

# Otros resultados de dualidad

- El problema dual del problema dual es el primal.
- (**Dualidad débil**) Si $x_0$ es una solución factible del primal e $y_0$ es una solución factible del dual, entonces $c^t x_0 \leq b^t y_0$.
- (**Dualidad fuerte**)
  - Si uno de los problemas, el primal o el dual, no está acotado, entonces el otro no es factible.
  - Si uno de los problemas tiene solución óptima finita, entonces también el otro.

# Teorema débil de holguras complementarias

Consideremos un par de problemas de programación lineal duales como los dos iniciales, y supongamos que $x$ e $y$ son soluciones factibles de los problemas (P) y (D), respectivamente. Entonces, $x$ es una solución óptima de (P) e $y$ es una solución óptima de (D) si y sólo si

$$y^t(Ax - b) = 0 \text{ y}$$

$$x^t(c - A^t y) = 0,$$

esto es, se verifican las propiedades de holgura complementaria.

# Condiciones de optimalidad de Karush, Kuhn & Tucker

**TEOREMA** Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $\overline{x}$ resuelve el problema primal

$$\min_{x} z = p^t x$$

$$\text{sujeto a } Ax - b \geq 0,\ x \geq 0.$$

2. Existen $\overline{x}$ y $\overline{u}$ que satisfacen $A\overline{x} \geq b$, $\overline{x} \geq 0$, $A^t\overline{u} \leq p$, $\overline{u} \geq 0$, y

$$\overline{u}_i(A_i\overline{x} - b_i) = 0,\ \overline{x}_j(-A_j^t\overline{u} + p_j) = 0,\ \forall\ i, j.$$

3. $\overline{x}$ es factible para el primal, algún $\overline{u}$ es factible para el problema dual y $p^t\overline{x} = b^t\overline{u}$.

# Análisis de sensibilidad

Después de resolver un problema de programación lineal, puede ser interesante **investigar si el cambio de algunos parámetros afecta a la solución óptima**.

Esto puede ser interesante ya que los valores de parámetros tales como dosis de radiación absorbida, demandas, ingresos, o costes usados como entradas en la formulación del problema son normalmente estimaciones que posiblemente se desvíen de su valor cuando la solución realmente se implemente. Tales análisis de sensibilidad (post-optimalidad) son parte importante de cualquier aplicación de la programación lineal. Por tanto, es importante comentar varios asuntos relativos al análisis de sensibilidad. El estudio realizado de los precios duales forma parte de ese análisis.

El análisis de sensibilidad es un proceso que se aplica a la tabla óptima del símplex de un problema de programación lineal cuando se proponen algunos cambios en el problema original. Una vez obtenida la solución óptima del problema, puede interesar conocer el efecto sobre la solución de posibles cambios en los parámetros. Los posibles cambios se pueden producir en:

- Los coeficientes de la función objetivo (los “costes").
- Los lados derechos de las restricciones (las “capacidades" o “recursos").
- La matriz de coeficientes de las restricciones (los “coeficientes técnicos").

# Cambios en el vector de costes

En general, una vez obtenida la solución óptima, va a ser posible cambiar cada uno de los costes dentro de un cierto intervalo de manera que no se altere la solución óptima, si bien se modifica, lógicamente, el valor de la función objetivo. Variaciones de los costes, fuera de esos intervalos, producirán cambios en la solución óptima que implicarán la necesidad de volver a aplicar el algoritmo del símplex, para su obtención. Veamos cómo se procede con un **ejemplo**.

Considerar el problema de Max. $z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$

$$\text{sujeto a} \left\{ \begin{array}{c} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 11 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ x_i \geq 0, \ \ i = 1, 2, 3 \end{array} \right.$$

Se conoce la Tabla Óptima que indica que la solución óptima es (2,0,3) (y holguras nulas) con un valor del objetivo de 16. Queremos responder a tres cuestiones:

| | | $c_j$ | 2 | 3 | 4 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Base | $c_B$ | $b$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ |
| $A_3$ | 4 | 3 | 0 | 1/4 | 1 | 1/2 | -1/4 |
| $A_1$ | 2 | 2 | 1 | 5/4 | 0 | -1/2 | 3/4 |
| $z, z_j$ | | 16 | 2 | 14/4 | 4 | 1 | 2/4 |
| $z_j - c_j$ | | | 0 | 1/2 | 0 | 1 | 1/2 |

1. Dentro de qué rango se puede variar $c_1$ sin que cambie la solución óptima.
2. Dentro de qué rango se puede variar $c_2$ sin que cambie la solución óptima.
3. Discutir el efecto del cambio de los costes 2,3,4 a 1,2,2.

Respecto a la **primera cuestión**, como $c_1$ está asociado a una variable básica, su cambio afectará a los costes reducidos de las variables no básicas, de forma que la solución seguirá siendo óptima si éstos son todos mayores o iguales que cero (el objetivo es maximizar):

$$z_2 - c_2 = (4, c_1)\begin{pmatrix} 1/4 \\ 5/4 \end{pmatrix} - 3 \geq 0 \Longrightarrow c_1 \geq 8/5$$

$$z_4 - c_4 = (4, c_1)\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \geq 0 \Longrightarrow c_1 \leq 4$$

$$z_5 - c_5 = (4, c_1)\begin{pmatrix} -1/4 \\ 3/4 \end{pmatrix} \geq 0 \Longrightarrow c_1 \geq 4/3$$

El valor $c_1 \in [8/5, 4]$ satisface las tres desigualdades anteriores y éste es el rango en el que $c_1$ puede variar sin afectar a la optimalidad.

En cuanto a la **segunda cuestión**, como $x_2$ NO es una variable básica, el cambio en $c_2$ sólo afecta a $z_2 - c_2$.

$$z_2 - c_2 = 14/4 - c_2 \geq 0 \Longrightarrow c_2 \leq 7/2.$$

Así, para $c_2 \in (-\infty, 7/2]$ no hay cambios en la solución óptima.

Algunos programas que resuelven problemas de programación lineal, como Solver de Excel o Lindo, también nos proporcionan esos intervalos para los costes que acabamos de obtener, y las soluciones del problema dual.

En la **cuestión tercera**, se está sugiriendo el cambio de coeficientes de variables tanto básicas como no básicas, con lo que recalculamos todos los costes reducidos y el objetivo en la tabla óptima:

| | | $c_j$ | 1 | 2 | 2 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Base | $c_B$ | $b$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | |
| $A_3$ | 2 | 3 | 0 | 1/4 | 1 | 1/2 | -1/4 | 12 |
| $A_1$ | 1 | 2 | 1 | **5/4** | 0 | -1/2 | 3/4 | 8/5 |
| $z, z_j$ | | 8 | 1 | 7/4 | 2 | 1/2 | 1/4 | |
| $z_j - c_j$ | | | 0 | -1/4 | 0 | 1/2 | 1/4 | |

Por tanto, la optimalidad ya no es cierta, hay que seguir iterando, sacando $A_1$ de la base e incorporando $A_2$.

| | | $c_j$ | 1 | 2 | 2 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Base | $c_B$ | $b$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ |
| $A_3$ | 2 | 13/5 | -1/5 | 0 | 1 | 3/5 | -2/5 |
| $A_2$ | 2 | 8/5 | 4/5 | 1 | 0 | -2/5 | 3/5 |
| $z, z_j$ | | 42/5 | 6/5 | 2 | 2 | 2/5 | 2/5 |
| $z_j - c_j$ | | | 1/5 | 0 | 0 | 2/5 | 2/5 |

Por tanto, con los nuevos costes la solución óptima es (0,8/5,13/5) (y holguras nulas) con un valor del objetivo de 42/5.

# Cambios en los lados derechos

Dada la tabla óptima del problema, cambios en los lados derechos van a afectar al valor de la solución óptima y al de la función objetivo, pero no a los valores de los costes reducidos. De esta manera, vamos a tener dos casos:

1. Si el nuevo valor de la solución sigue siendo factible (cuando sus componentes sean mayores o iguales que cero), va a seguir siendo óptima, al no cambiar los costes reducidos.
2. Si el nuevo valor no es factible, porque alguna componente es negativa, habrá que hacer nuevas iteraciones, y o bien, volvemos a aplicar el símplex desde el principio o aplicamos el denominado **algoritmo dual del símplex** que permite avanzar a partir de una iteración en la que se obtengan valores negativos para una variable básica.

En el primer caso, cabe preguntarse cuál es el intervalo dentro del cual podemos incrementar, $\Delta b_k$, el lado derecho, $b_k$, de la restricción $k$ de tal forma que la solución asociada a la base actual siga siendo factible y por tanto óptima. Cálculos algebraicos muy sencillos nos permiten dar la respuesta:

$$\max_{i \in R}\{\frac{x_i}{-\beta_{ik}} \ : \ \beta_{ik} > 0\} \leq \Delta b_k \leq \min_{i \in R}\{\frac{x_i}{-\beta_{ik}} \ : \ \beta_{ik} < 0\}$$

donde $R = \{1, \cdots, m\}$ representa el conjunto de índicadores de las restricciones, $x_i$ es la componente de la solución óptima que aparece en la fila $i$ de la tabla del símplex y $\beta_{ik}$ representa el elemento en la fila $i$ y columna $k$ de la matriz $B^{-1}$, inversa de la matriz básica. Algunos programas, también nos dan esta información automáticamente.

Es inmediato que las columnas de esa matriz son las que se encuentran en la tabla del símplex en las columnas correspondientes a las variables de holgura, cuando tenemos una variable de holgura con signo positivo en cada restricción.

Veamos cómo se procede con un **ejemplo.**

Considerar el problema de Max. $z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$

$$\text{sujeto a} \left\{ \begin{array}{c} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 43 \\ 3x_1 + 2x_3 \leq 46 \\ x_1 + 4x_2 \leq 42 \\ x_i \geq 0, \;\; i = 1, 2, 3 \end{array} \right.$$

Se conoce la Tabla Óptima que indica que la solución óptima es (0,10,23) (dos holguras nulas y la tercera de 2) con un valor del objetivo de 135. Queremos responder a tres cuestiones:

1. Encontrar la solución óptima cuando $b = (43, 46, 42)^t$ se cambia por $b' = (60, 64, 59)^t$.
2. Comprobar que si se cambia $b$ por $b'' = (45, 46, 40)^t$ la solución asociada a la base óptima no es factible.
3. Indicar dentro de qué rango la primera componente del vector de lados derechos de las restricciones se puede variar de modo que la base óptima no se altere.

| | | $c_j$ | 3 | 2 | 5 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Base | $c_B$ | $b$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ |
| $A_2$ | 2 | 10 | -1/4 | 1 | 0 | 1/2 | -1/4 | 0 |
| $A_3$ | 5 | 23 | 3/2 | 0 | 1 | 0 | 1/2 | 0 |
| $A_6$ | 0 | 2 | 2 | 0 | 0 | -2 | 1 | 1 |
| $z, z_j$ | | 135 | 7 | 2 | 5 | 1 | 2 | 0 |
| $z_j - c_j$ | | | 4 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 |

Para resolver la **primera cuestión** calculamos $B^{-1}b'$ con la ayuda de Maxima:

(%i1) IB:matrix([0.5,-0.25,0],[0,0.5,0],[-2,1,1])$

(%i2) b1:[60,64,59]$

(%i3) IB.b1;

(%03) [14,32,3]

Con lo que la solución óptima es (0,14,32) (dos holguras nulas y la tercera de 3) con un valor del objetivo de $14 \times 2 + 32 \times 5 = 188$.

Para resolver la **segunda cuestión** calculamos $B^{-1}b''$ con la ayuda de Maxima:

(%i4) b2:[45,46,40]$

(%i5) IB.b2;

(%o3) [11,23,-4]

Con lo que, con los nuevos lados derechos, asociada a la matriz básica en el óptimo inicial tenemos una solución básica que NO es factible y que lógicamente ya no es óptima. Así que tendríamos que reiniciar el algoritmo (o seguir iterando con el denominado algoritmo dual).

Para responder a la **tercera cuestión**, usamos la fórmula vista para $\Delta b_k$, teniendo en cuenta que $k = 1$,

$\max\{10/(-1/2) = -20\} \leq \Delta b_1 \leq \min\{2/(2) = 1\} \Rightarrow 23 \leq b \leq 44.$

# Cambios en la matriz de restricciones

En general, este tipo de cambios, van a resultar en diferentes bases óptimas y diferentes soluciones óptimas. Se pueden considerar diferentes posibles cambios:

- Inclusión de una nueva restricción.
- Inclusión de una nueva variable.
- Eliminación de una restricción.
- Eliminación de una variable.
- Cambio en alguna columna de la matriz $A$.

Vamos a ver un ejemplo del segundo tipo.

En Kasana y Kumar (2004), por ejemplo, puede ampliarse el estudio de la sensibilidad con un enfoque bastante intuitivo a la vez que formal.

# Adición de una variable: un ejemplo

$$\text{Min. } z = 2x_1 + x_2 + MR_1 + MR_2$$

$$\text{sujeto a} \begin{cases} 3x_1 + x_2 + R_1 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - s_2 + R_2 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + s_3 = 3 \end{cases}$$

Supongamos que se incluye en el modelo una variable $x_3$ con coste 1/2 y columna $A_3 = (0, 5, 2)^t$ en la matriz $A$. Tenemos entonces que reprocesar la tabla óptima del problema (en la página siguiente) para obtener la solución óptima del nuevo problema.

Veamos, con ayuda de Maxima, cuál es el coste reducido asociado a la nueva variable:

$$z_3 - c_3 = c_B^t \alpha_3 - c_3 = c_B^t B^{-1} A_3 - c_3.$$

| | | $c_j$ | 2 | 1 | 0 | M | M | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Base | $c_B$ | $b$ | $x_1$ | $x_2$ | $s_2$ | $R_1$ | $R_2$ | $s_3$ |
| $x_1$ | 2 | 3/5 | 1 | 0 | 1/5 | 3/5 | -1/5 | 0 |
| $x_2$ | 1 | 6/5 | 0 | 1 | -3/5 | -4/5 | 3/5 | 0 |
| $s_3$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | -1 | 1 |
| $z, z_j$ | 12/5 | | 2 | 1 | -1/5 | 2/5 | 1/5 | 0 |
| $z_j - c_j$ | | | 0 | 0 | -1/5 | 2/5-M | 1/5-M | 0 |

```
(%i1) B:matrix([3,1,0],[4,3,0],[1,2,1]);
(%i2) IB:invert(%);
(%i3) A3:[0,5,2];
(%i4) cB:[2,1,0];
(%i5) cB.IB.A3;
(%o5) 1
```

Como $z_3 - c_3 = 1 - 1/2 = 1/2 > 0$, se pierde la optimalidad y hay que modificar la tabla (introducir $x_3$, $\alpha_3$ y $z_3 - c_3$) y seguir iterando.

| | | $c_j$ | 2 | 1 | 1/2 | 0 | M | M | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Base | $c_B$ | $b$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3 \downarrow$ | $s_2$ | $R_1$ | $R_2$ | $s_3$ |
| $x_1$ | 2 | 3/5 | 1 | 0 | -1 | 1/5 | 3/5 | -1/5 | 0 |
| $\leftarrow x_2$ | 1 | 6/5 | 0 | 1 | **3** | -3/5 | -4/5 | 3/5 | 0 |
| $s_3$ | 0 | 0 | 0 | 0 | -3 | 1 | 1 | -1 | 1 |
| $z, z_j$ | 12/5 | | 2 | 1 | 1 | -1/5 | 2/5 | 1/5 | 0 |
| $z_j - c_j$ | | | 0 | 0 | 1/2 | -1/5 | 2/5-M | 1/5-M | 0 |

(%i6) IB.A3;

(%o6) matrix([-1],[3],[-3])

| | | $c_j$ | 2 | 1 | 1/2 | 0 | M | M | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Base | $c_B$ | $b$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_2$ | $R_1$ | $R_2$ | $s_3$ |
| $x_1$ | 2 | 1 | 1 | 1/3 | 0 | 0 | 1/3 | 0 | 0 |
| $x_3$ | 1/2 | 2/5 | 0 | 1/3 | 1 | -1/5 | -4/15 | 1/5 | 0 |
| $s_3$ | 0 | 6/5 | 0 | 1 | 0 | 2/5 | 1/5 | -2/5 | 1 |
| $z, z_j$ | 11/5 | | 2 | 5/6 | 1/2 | -1/10 | 8/15 | 1/10 | 0 |
| $z_j - c_j$ | | | 0 | -1/6 | 0 | -1/10 | 8/15-M | 1/10-M | 0 |

Solución óptima: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2/5$ y $z = 11/5$.

*Nota:* En el caso en el que la nueva variable $x_3$ tuviese un coste de 3 y hubiese que incorporar a la matriz $A$ la columna $(1, 2, 3)^t$, para el nuevo problema:

$$z_3 - c_3 = c_B^t B^{-1} A_3 - c_3 = -11/5,$$

con lo que en este caso no haría falta hacer nada más puesto que la optimalidad no se ve alterada con el cambio.

# Complejidad del algoritmo del símplex

La complejidad del algoritmo del símplex depende del número total de iteraciones y del número de operaciones requerido en cada iteración. Diferentes procedimientos de implementación resultan en complejidades diferentes. Se han creado variantes del método del símplex para obtener mejores rendimientos computacionales.

Se puede estimar que el método original del símplex debido a Dantzig requiere aproximadamente $m(n-m)+n+1$ multiplicaciones y $m(n-1+1)$ sumas en cada iteración, es decir, la complejidad a nivel operacional es del orden $mn$. En cuanto al número de iteraciones, para un problema de programación lineal en forma estándar, la región factible contiene como mucho $C(n,m) = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ vértices que el algoritmo tendría que posiblemente recorrer.

Se tiene que:

$$C(n,m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} \geq (\frac{n}{m})^m \geq 2^m \text{ siempre que } n \geq 2m.$$

Por tanto, parece verosímil requerir un orden exponencial de iteraciones. Y este hecho se confirma a la vista de determinados ejemplos del “peor caso que se puede presentar", creados a propósito a tal efecto. Ahora bien, los “malos ejemplos" raramente aparecen en los problemas de la “vida real", en los que se ha observado que el símplex requiere entre $4m$ y $6m$ iteraciones, de donde se concluye la eficiencia del algoritmo en la práctica aunque en teoría su complejidad es exponencial.

De todas formas, en 1984, Karmarkar propuso un algoritmo denominado **algoritmo de punto interior** para resolver problemas de programación lineal eficientemente. El principal interés del nuevo enfoque es que proporciona complejidad polinomial a la búsqueda de la solución. Se mostró que el algoritmo de Karmarkar resolvió problemas con 150000 variables y 12000 restricciones en una hora mientras que el símplex precisaba cuatro horas para resolver un problema menor de 36000 variables y 10000 restricciones.

# Algunos paquetes informáticos para programación lineal y entera

- AMPL
- Lindo
- Maple/Maxima
- Matlab/Octave
- R
- Solver de Excel/Open Office
- X-Press
- ...

# La programación lineal y entera

Los modelos de programación entera son una extensión de los modelos lineales en los que algunas variables toman valores enteros.

En ocasiones estas variables enteras sólo toman valores 0-1, ya que este tipo de variables permiten representar condiciones lógicas.

Este tipo de modelos permite representar sistemas más complejos.

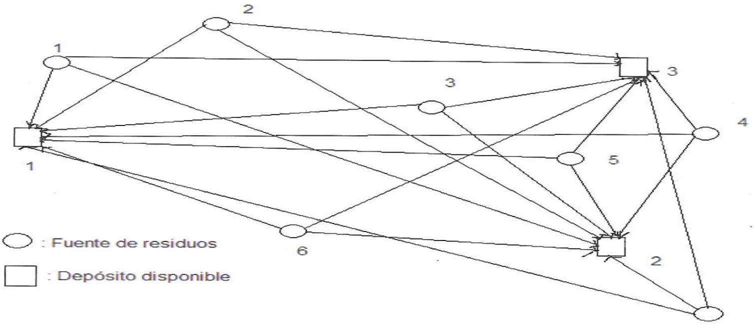
A cambio, la resolución de los mismos se complica.

Algunos modelos básicos son, entre otros:

- El problema del transporte.
- Los problemas de asignación.
- El problema del viajante.
- . . .

El siguiente ejemplo se enmarca en el contexto de los problemas de tratamiento de residuos.

# Destrucción de residuos peligrosos (ReVelle, Cohon and Shobrys, 1991)




Ejemplo de residuos peligrosos y lugares de depósito

## Tabla de los residuos peligrosos

| | | j=1 | | j=2 | | j=3 | | $s_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **i** | | **k=1** | **k=2** | **k=1** | **k=2** | **k=1** | **k=2** | |
| 1 | Distancia | 200 | 280 | 850 | 1090 | 900 | 1100 | 1'2 |
| | Población | 50 | 15 | 300 | 80 | 400 | 190 | |
| 2 | Distancia | 400 | 530 | 730 | 860 | 450 | 600 | 0'5 |
| | Población | 105 | 60 | 380 | 210 | 350 | 160 | |
| 3 | Distancia | 600 | 735 | 550 | 600 | 210 | 240 | 0'3 |
| | Población | 300 | 130 | 520 | 220 | 270 | 140 | |
| 4 | Distancia | 900 | 1060 | 450 | 570 | 180 | 360 | 0'7 |
| | Población | 620 | 410 | 700 | 430 | 800 | 280 | |
| 5 | Distancia | 600 | 640 | 390 | 440 | 360 | 510 | 0'6 |
| | Población | 205 | 180 | 440 | 370 | 680 | 330 | |
| 6 | Distancia | 900 | 1240 | 100 | 120 | 640 | 800 | 0'1 |
| | Población | 390 | 125 | 80 | 30 | 800 | 410 | |
| 7 | Distancia | 1230 | 1410 | 400 | 460 | 1305 | 1500 | 0'2 |
| | Población | 465 | 310 | 180 | 105 | 1245 | 790 | |

**Parámetros:**

$s_i$ = cantidad de residuo que se espera produzca la fuente $i$

$d_{i,j,k}$ = distancia de la fuente $i$ al depósito $j$ por el camino $k$

$p_{i,j,k}$ = población de la fuente $i$ al depósito $j$ por el camino $k$

**Variables:**

$$Y_j = \begin{cases} 1 & \text{si se abre el sitio } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$X_{i,j,k}$ = cantidad transportada de la fuente $i$ al sitio $j$ por la ruta $k$

**Objetivo:**

- min $\sum_{i=1}^{7} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{2} d_{i,j,k} X_{i,j,k}$ (<u>distancia</u>)
- min $\sum_{i=1}^{7} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{2} p_{i,j,k} X_{i,j,k}$ (<u>población</u>)

**Restricciones:**

- $\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{2} X_{i,j,k} = s_i \; i = 1, \cdots, 7$ (fuentes)
- $\sum_{j=1}^{3} Y_j = 2$ (depósitos)
- $X_{i,j,k} \leq s_i Y_j \; i = 1, \cdots, 7; \; j = 1, 2, 3; \; k = 1, 2$
- $X_{i,j,k} \geq 0 \; i = 1, \cdots, 7; \; j = 1, 2, 3; \; k = 1, 2$
- $Y_j = 0$ o $1 \; j = 1, 2, 3$

# Otro ejemplo: planificar la ruta de una cosechadora

Supongamos una cooperativa agraria con un gran número de socios que desea planificar la ruta a seguir por una cosechadora que tiene que recoger en primavera la hierba de las diferentes fincas de sus socios para luego depositarse esta hierba en silos.

Se definen unas variables binarias de decisión $X_{ijk}$ donde: $i$ representa la finca origen, $j$ representa la finca destino, y $k$ es un período inicial de tiempo. Además $X_{ijk}$

- vale 1 si $i$ empieza a ser procesada en el período k y después, j es procesada,
- vale 0 en otro caso,

con $i, j = 1, \cdots, n$, $i \neq j$, $k = 1, \cdots, h$,
siendo $n$ el número total de fincas y $h$ el número de períodos de tiempo disponibles.

Las variables definen una ruta que la cosechadora va a seguir y simultáneamente una planificación del tiempo especificando el instante en el que se comienza a procesar cada finca.

El objetivo es minimizar el tiempo total de desplazamiento:

$$\min \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in H} a_{ij} X_{ijk}$$

con $a_{ij}$ denotando *el tiempo mínimo de desplazamiento entre las fincas* $i$ y $j$, para todo $i, j$, $i \neq j$. Como las cosechadoras son máquinas bastante pesadas, tienen una velocidad constante en todo tipo de vías y se pueden obtener los tiempos de desplazamiento a partir de las distancias que son conocidas.

El modelo, incluye diferentes restricciones, p. e., cada finca es procesada sólo una vez:

$$\sum_{j \in N} \sum_{k \in H} X_{ijk} = 1, \ \forall i.$$

Otras restricciones a modelar convenientemente serían: cada finca necesita un tiempo de procesado y el camino entre cada par de fincas requiere un tiempo para ser recorrido, no tienen sentido los ciclos en la ruta de la cosechadora, cada socio puede exigir que todas sus fincas sean procesadas en bloque, cada socio puede solicitar un instante de inicio de trabajo en sus fincas con un intervalo de tolerancia en cuanto al cumplimiento de esta solicitud, etc.

Notemos que si la cooperativa está un mes entero ocupada en la recogida de la hierba y el trabajo de la cosechadora se factura en períodos de tiempo de 5 minutos, el parámetro $h$ puede ser bastante elevado lo que incrementa el número de variables y de restricciones.

En la práctica, un técnico encargado de la planificación, podría hacer una planificación inicial para todo el mes, y luego, semanalmente, revisiones de la misma que contemplasen incidencias tales como nuevas solicitudes, incumplimientos por averías de la máquina, inclemencias meteorológicas, etc.

# Resolución del problema

La primera idea a la hora de abordar la resolución de un problema de programación entera es redondear la solución obtenida al relajar la condición de integralidad. Pero no es una buena estrategia ya que:

1. No siempre proporciona la solución óptima.
2. No garantiza la obtención de soluciones factibles.

- min $z = x_1 - 11x_2$

**sujeto a:**

- $-x_1 + 10x_2 \leq 40$
- $10x_1 + 10x_2 \leq 205$
- $x_1, x_2 \geq 0$ y enteras.

La solución óptima sin considerar que las variables son enteras es $x_1 = 15$ y $x_2 = 5'5$. Posibles redondeos son $x_1 = 15$ y $x_2 = 6$ que no verifica la primera restricción y $x_1 = 15$ y $x_2 = 5$ que es factible con $z = -40$. La solución $x_1 = 10$ y $x_2 = 5$ es factible y $z = -45$.

Otra idea es que dado que un problema lineal continuo es “sencillo" de resolver, vamos a desarrollar métodos que empleen la programación lineal continua como herramienta para resolver el problema entero.

Los métodos más usados parten de la *relajación* del problema, esto es, eliminar la condición de que las variables tomen valores enteros.

El gran problema es que los vértices de la región factible continua no tienen porqué ser enteros y obtener la envoltura convexa puede ser muy costoso.

Los métodos más extendidos de solución son:

- Métodos enumerativos: consisten en enumerar de forma implíta las soluciones y mediante tests o cotas para la función objetivo ir descartándolas antes de conocerlas explícitamente. De entre estos métodos, el más conocido es el de Branch & Bound (ramificación y acotación) que divide el problema en problemas menores (ramificación) y descarta algunos de ellos (acotación).
- Métodos de planos de corte: introduce nuevas restricciones al problema relajado hasta lograr que la solución óptima del nuevo problema sea entero.
- Métodos híbridos: combinan las dos estrategias anteriores (branch & cut).

# Motivación y ejemplo branch & bound

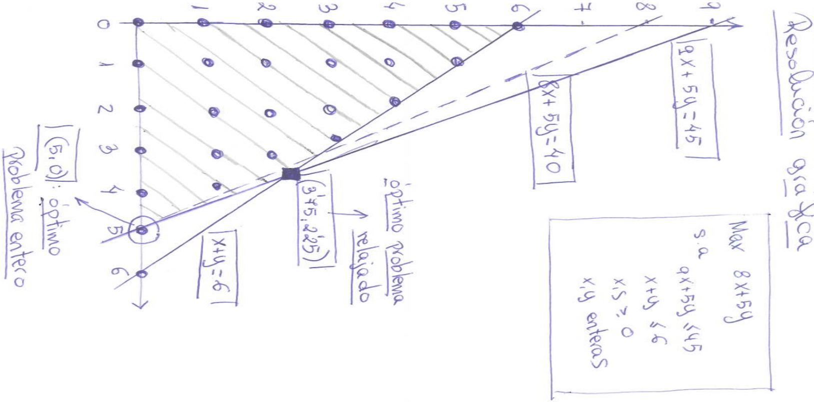
- max $z = 8x_1 + 5x_2$

**sujeto a:**

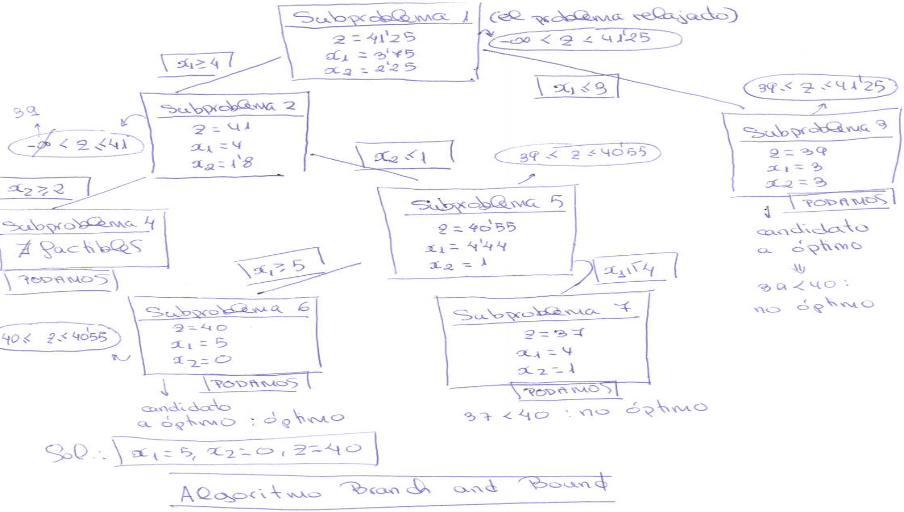
- $x_1 + x_2 \leq 6$
- $9x_1 + 5x_2 \leq 45$
- $x_1, x_2 \geq 0$ y enteras.

En el dibujo siguiente vemos que la solución al problema relajado es el punto (3'75,2'25) pero la solución al problema entero es (5,0). Los puntos representan las soluciones factibles (enteras al problema).

# Gráfica del ejemplo entero



# Solución del ejemplo mediante ramificación y acotación



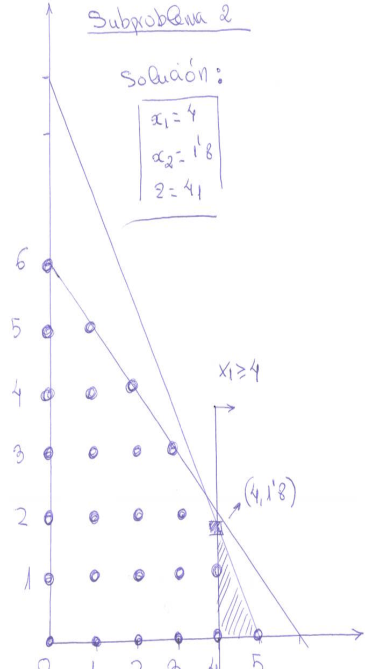
## Subproblema 2

Solución:

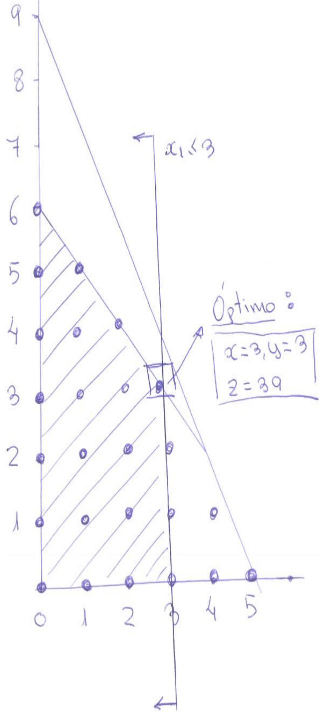
$x_1 = 4$

$x_2 = 1'8$

$z = 4_1$



Subproblema 3

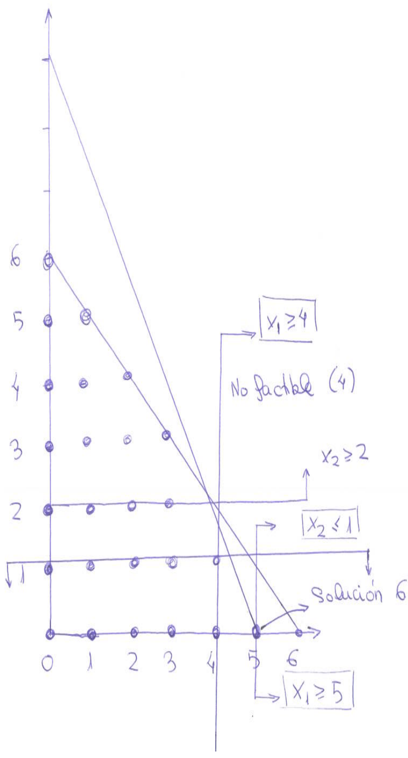



Óptimo:

$$\boxed{\begin{gathered} x = 3,\ y = 3 \\ z = 39 \end{gathered}}$$

Subproblemas

4 y 6



# Método Branch & Bound: ideas generales

- Descompone el problema en varios con región factible más pequeña.
- Resuelve los subproblemas: descompone recursivamente en problemas de menor tamaño.
- Usa cotas superiores, a partir de subproblemas con solución entera, para identificar los subproblemas que no van a generar la solución.

# El Método Branch & Bound (para minimizar una función $z$)

- **Paso 0** Resolver el problema original relajado (sin considerar la restricción de que las variables han de ser enteras). Si el problema no es factible se para. Si la solución es entera será la óptima. Si no, considerar la cota superior para $z^*$ (el óptimo de $z$) como $+\infty$ y la inferior como la función objetivo del problema relajado. Ir al Paso 1.
- **Paso 1** Ramificar: se escoge una variable que ha de ser entera y no lo es y se generan mediante ramificación dos problemas. Estos problemas se colocan ordenadamente en una lista de problemas que se resuelven, en serie o paralelo. Ir al Paso 2.

- **Paso 2**
  - Si la solución de un subproblema es entera se poda. Si el valor de la función objetivo es menor que la cota superior actual, entonces se actualiza con el nuevo valor, disponemos de un candidato a óptimo y se actualizan todas las cotas superiores. Si no, se desecha esta solución. Ir a Paso 3.
  - Si la solución no es entera y el valor de la función objetivo es mayor que la cota inferior de su nodo, entonces se actualiza dicha cota. Ir al Paso 1.
  - Si la solución no es entera y el valor de la función objetivo es mayor que la cota superior de su nodo, entonces se poda. Ir a Paso 3.
  - Si la solución es infactible, entonces se poda. Ir al Paso 3.
- **Paso 3** Si se han resuelto todos los problemas de la lista el procedimiento concluye con un candidato que será el óptimo. Si no, resolver los problemas pendientes de procesar e ir al Paso 2.

# Branch & Bound: comentarios

- Es necesario decidir qué variable utilizar para las ramificaciones.
- Los problemas almacenados a resolver se pueden tratar mediante estrategias en anchura, en profundidad o mixtas.
- El método se aplica a problemas enteros puros o a problemas enteros mixtos.
- Actualmente, se pueden resolver eficazmente problemas de programación entera de más de 10000 variables.

# Otro ejemplo de Branch & Bound

Se quiere realizar un experimento con animales de una cierta especie en dos entornos ambientales A y B. La siguiente tabla muestra los tiempos (en minutos) necesarios para completar el experimento con cada animal en cada uno de los dos entornos según el animal sea macho o hembra y también los tiempos mínimos totales que se quieren utilizar en cada uno de los entornos.

| | M | H | Tiempos mínimos |
|---|---|---|---|
| Entorno A | 20 m. | 25 m. | 750 m. |
| Entorno B | 20 m. | 15 m. | 600 m. |

Se desea planificar el experimento de forma que se minimice el número total de animales requeridos para realizar el experimento.

# El modelo del problema del experimento con animales

**Variables**: $X_M$ y $X_H$: número de animales machos y hembras, respectivamente, requeridos en el experimento.

Minimizar $X_M + X_H$

sujeto a $20X_M + 25X_H \geq 750$ (tiempo en entorno A)

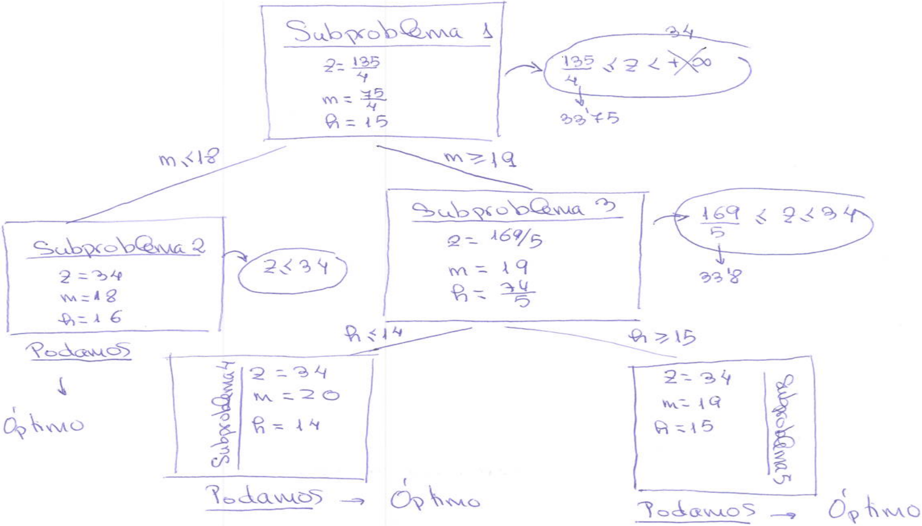
$20X_M + 15X_H \geq 600$ (tiempo en entorno B)

$X_M, X_H \geq 0$ y enteras.

Resolvemos el problema por el algoritmo **Branch** & **Bound**. Se muestra el **esquema global de la resolución** y la resolución con **Máxima** de los diferentes subproblemas.

La solución no es única. Se obtiene que el número mínimo de animales es 34, pudiendo ser 18 machos y 16 hembras, 20 machos y 14 hembras o 19 machos y 15 hembras.

# Esquema de la resolución Branch & Bound

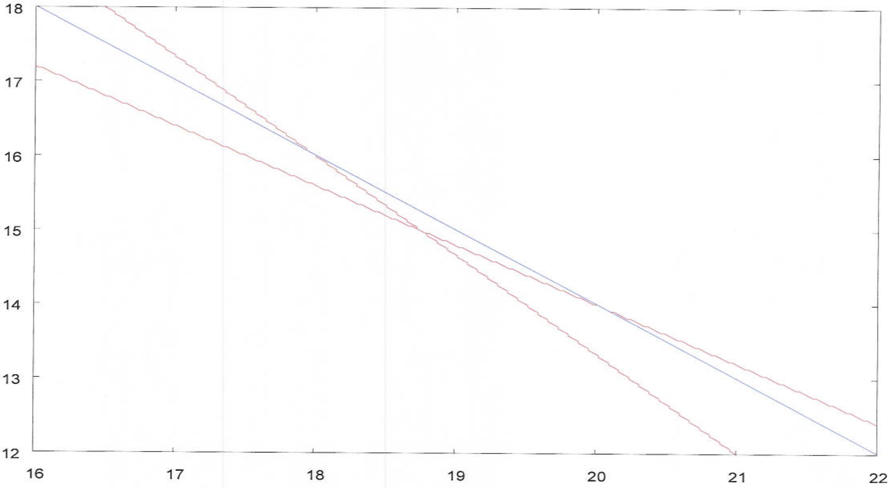


# Comandos de Maxima

```
(%i1) load(simplex)$
(%i2) minimize_lp(m+h, [20*m+25*h>=750,
20*m+15*h>=600,m>=0,h>=0]);
(%o2) [135/4,[m=75/4,h=15]]
(%i3) minimize_lp(m+h, [20*m+25*h>=750,
20*m+15*h>=600,m>=0,h>=0,m<=18]);
(%o3) [34,[m=18,h=16]]
(%i4) minimize_lp(m+h, [20*m+25*h>=750,
20*m+15*h>=600,m>=0,h>=0,m>=19]);
(%o4) [169/5,[m=19,h=74/5]]
(%i5) minimize_lp(m+h, [20*m+25*h>=750,
20*m+15*h>=600,m>=0,h>=0,m>=19,h<=14]);
(%o5) [34,[m=20,h=14]]
```

```
(%i6) minimize_lp(m+h, [20*m+25*h>=750,
20*m+15*h>=600,m>=0,h>=0,m>=19,h>=15]);
(%o6) [34,[m=19,h=15]]
(%i7) load(draw)$
(%i8) draw2d(color =
red,implicit(20*m+25*h=750,m,16,22,h,12,18),
color=red,implicit(20*m+15*h=600,m,16,22,h,12,18), color =
blue,implicit(m+h=34,m,16,22,h,12,18));
```

# Gráfica: región factible y solución óptima entera



# Algoritmo del símplex dual

El algoritmo dual del símplex fue desarrollado por Lemke y tiene aplicaciones, por ejemplo, en análisis de sensibilidad y en implementaciones de algoritmos de programación entera como el de planos de corte. Se utiliza cuando en la tabla inicial del símplex se satisface el criterio de optimalidad pero no la factibilidad. El nombre del algoritmo se debe a que las reglas de entrada y salida de las variables básicas se derivan del problema dual aunque se usan en el primal.

# El algoritmo

- 1. Determinar una base $B$ del primal tal que $z_j - c_j \leq 0$ (minimizando) o $\geq 0$ (maximizando) para todo $j \in J$.
- 2. Sea $\overline{x}_B = B^{-1}b$.
  - 2. 1. Si $\overline{x}_B \geq 0$: es minimal (maximal).
  - 2. 2. En otro caso, sea $I_1 = \{s \in I \ : \ \overline{x}_s < 0\}$.
- 3. Calcular $y_{s_j}$, $s \in I_1$, $j \in J$.
  - 3. 1. Si $y_{s_j} \geq 0, \forall j \in J$, para al menos un índice $s \in I_1$, el primal no tiene solución óptima.
  - 3. 2. En otro caso, determinar $\overline{x}_l = \min_{s \in I_1}\{\overline{x}_s\}$: **CRITERIO DE SALIDA** y determinar $k$ tal que (**CRITERIO DE ENTRADA**):

$$\left| \frac{z_k - c_k}{y_{lk}} \right| = \min_{j \,:\, y_{lj} < 0} \left| \frac{z_j - c_j}{y_{lj}} \right|.$$

- 4. Sea $B' = B \backslash \{A_l\} \cup \{A_k\}$. Determinar $\overline{x}'_B$, $y'$ y $z'_j$ y repetir el algoritmo desde 2.

# Un ejemplo del algoritmo del símplex dual

$$\begin{aligned}
\text{Minimizar } & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\
\text{sujeto a } & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 5 \\
& 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Las restricciones se pueden escribir como:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - s_1 = 5 \Leftrightarrow -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + s_1 = -5$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 - s_2 = 6 \Leftrightarrow -2x_1 - 2x_2 - x_3 + s_2 = -6$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0$$

| | | $c_j$ | 3 | 4 | 5 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Base | $c_B$ | $b$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ |
| $s_1$ | 0 | -5 | -1 | -2 | -3 | 1 | 0 |
| $s_2$ | 0 | -6 | **-2** | -2 | -1 | 0 | 1 |
| $z, z_j$ | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $z_j - c_j$ | | | -3 | -4 | -5 | 0 | 0 |

El punto (0,0,0) es una solución básica del primal con holguras asociadas (-5,-6) pero no factible (no se verifican las restricciones de no negatividad).

El punto (0,0) es una solución factible del problema dual con holguras asociadas de (3,4,5).

$I_1 = \{s_1, s_2\}$. $\min\limits_{s \in I_1}\{\overline{x}_s\} = \min\{-5, -6\} = -6 \Rightarrow$ Sale $s_2$.

$\min\{\frac{-3}{-2}, \frac{-4}{-2}, \frac{-5}{-1}\} = \frac{3}{2} \Rightarrow$ Entra $A_1$.

| | | $c_j$ | 3 | 4 | 5 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Base | $c_B$ | $b$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ |
| $s_1$ | 0 | -2 | 0 | **-1** | -5/2 | 1 | -1/2 |
| $A_1$ | 3 | 3 | 1 | 1 | 1/2 | 0 | -1/2 |
| $z, z_j$ | | 9 | 3 | 3 | 3/2 | 0 | -3/2 |
| $z_j - c_j$ | | | 0 | -1 | -7/2 | 0 | -3/2 |

El punto (3,0,0) es una solución básica del primal con holguras asociadas (-2,0) pero no factible (no se verifican las restricciones de no negatividad).

El punto (0,3/2) es una solución factible del problema dual con holguras asociadas de (0,1,7/2).

$I_1 = \{s_1\}$. $\min_{s\in I_1}\{\overline{x}_s\} = \min\{-2\} = -2 \Rightarrow$ Sale $s_1$.

$\min\{\frac{-1}{-1}, \frac{-7/2}{-5/2}, \frac{-3/2}{-1/2}\} = 1 \Rightarrow$ Entra $A_2$.

| | | $c_j$ | 3 | 4 | 5 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Base | $c_B$ | $b$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ |
| $A_2$ | 4 | 2 | 0 | 1 | 5/2 | -1 | 1/2 |
| $A_1$ | 3 | 1 | 1 | 0 | -2 | 1 | -1 |
| $z, z_j$ | | 11 | 3 | 4 | 4 | -1 | -1 |
| $z_j - c_j$ | | | 0 | 0 | -1 | -1 | -1 |

El punto (1,2,0) es una solución básica del primal con holguras asociadas (0,0), factible (se verifican las restricciones de no negatividad) y es óptima.

El punto (1,1) es una solución factible del problema dual con holguras asociadas de (0,0,1) y es óptima.

# El problema dual

$$\begin{aligned}
\text{Maximizar } 5y_1 + 6y_2 &\Leftrightarrow \text{-Minimizar } -5y_1 - 6y_2 \\
\text{sujeto a } y_1 + 2y_2 \leq 3 &\Leftrightarrow y_1 + 2y_2 + s_1 = 3 \\
2y_1 + 2y_2 \leq 4 &\Leftrightarrow 2y_1 + 2y_2 + s_2 = 4 \\
3y_1 + y_2 \leq 5 &\Leftrightarrow 3y_1 + y_2 + s_3 = 5 \\
y_1, y_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Notemos que, con este algoritmo, llegamos al óptimo del problema primal, pasando por soluciones no factibles del mismo, y paralelamente vamos pasando por soluciones factibles del problema dual hasta llegar a una óptima.

Para ver mejor la relación entre los dos algoritmos (símplex ordinario y símplex dual) y sus consecuencias en los dos problemas, primal y dual, hacemos la primera iteración correspondiente a la resolución de este problema dual mediante el símplex ordinario.

# Primera iteración para el problema dual con el símplex

| | | $c_j$ | -5 | -6 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Base | $c_B$ | $b$ | $y_1$ | $y_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ |
| $s_1$ | 0 | 3 | 1 | **2** | 1 | 0 | 0 |
| $s_2$ | 0 | 4 | 2 | 2 | 0 | 1 | 0 |
| $s_3$ | 0 | 5 | 3 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $z, z_j$ | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $z_j - c_j$ | | | 5 | 6 | 0 | 0 | 0 |

$\max\{5, 6\} = 6 \Rightarrow$ Entra $y_2$ en la base del dual. Por tanto, su coste reducido asociado se hace cero en la siguiente iteración, coste reducido que, por otro lado, origina el valor de la segunda variable de holgura, $s_2$, del primal (dual del dual) (la segunda variable de decisión del dual “se corresponde" con la segunda de holgura del primal). Al hacerse cero es porque $s_2$ “deja de ser básica", como se obtenía en la primera tabla del símplex dual aplicado al primal.

$\min\{\frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1}\} = \frac{3}{2} \Rightarrow$ Sale $s_1$ (primera de holgura) de la base del dual. Su coste reducido se hará distinto de cero en la siguiente iteración, coste que genera un valor para la variable $x_1$ del primal, que al pasar de cero a distinto de cero indica que la variable, que no era básica en el primal, entra en la base. En la primera tabla del símplex dual aplicado al primal, decidimos que $x_1$ ($A_1$) tenía que entrar en la base.

Vemos que hacemos las mismas “operaciones" de entrada y salida al resolver el problema primal por el símplex dual que al resolver el dual por el símplex ordinario. Las filas en una de las tablas, aparecen en la otra tabla como columnas.

Concretamente, los elementos que más interesan de cada problema, que se ven en las dos tablas, en fila o en columna, con el mismo valor (salvo el signo) y en cada tabla con una interpretación son:

| Resolviendo el Primal por el Símplex Dual | Resolviendo el Dual por el Símplex Ordinario |
|---|---|
| (-5,-6): solución básica (no factible) | (5,6): costes reducidos (no nulos) |
| (-3,-4,-5): costes reducidos (no nulos) | (3,4,5): solución básica (factible) |

# El algoritmo de planos de corte de Gomory (1953)

**Plano de corte**: es una restricción lineal que verifican las soluciones enteras y aisla las soluciones obtenidas por relajación.

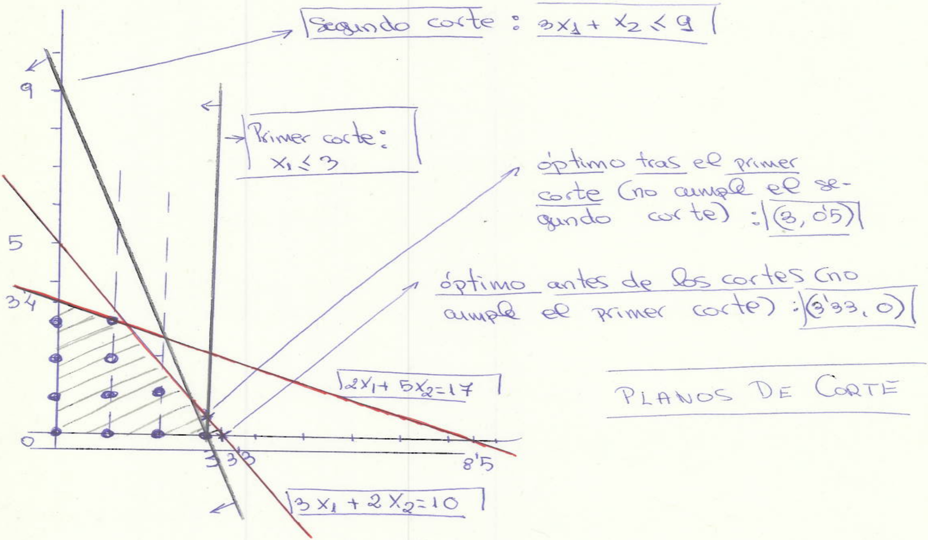
**Idea del algoritmo**: se van introduciendo planos de corte (lo que supone ir incorporando nuevas restricciones) de forma tal que se intenta que la solución del problema relajado obtenido coincida con la del problema entero. El algoritmo converge, pero es bastante lento, ya que intenta reconstruir la envoltura convexa de las soluciones factibles enteras. Verifica:

- Acaba en un número finito de pasos.
- Fácil de implementar.
- Opera con decimales, lo que puede implicar problemas de errores de redondeos.
- En cada iteración se van aumentando las restricciones.

# Ejemplo del algoritmo de planos de corte

$$
\begin{aligned}
\text{Maximizar } z &= 2x_1 + x_2 \\
\text{sujeto a } 2x_1 + 5x_2 &\leq 17 \\
3x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\
x_1, x_2 &\geq 0 \text{ y enteras}
\end{aligned}
$$

# Gráfica del ejemplo



# Resolución del ejemplo

Planteamos el problema con restricciones de igualdad y lo resolvemos por el símplex:

$$
\begin{aligned}
\text{Maximizar } & 2x_1 + x_2 \\
\text{sujeto a } & 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 17 \\
& 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

| | | $c_j$ | 2 | 1 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Base | $c_B$ | $b$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | |
| $x_3$ | 0 | 17 | 2 | 5 | 1 | 0 | 17/2 |
| $x_4$ | 0 | 10 | **3** | 2 | 0 | 1 | 10/3 |
| $z, z_j$ | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| $z_j - c_j$ | | | -2 | -1 | 0 | 0 | |

La siguiente es ya la tabla óptima:

| | | $c_j$ | 2 | 1 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Base | $c_B$ | $b$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ |
| $x_3$ | 0 | 31/3 | 0 | 11/3 | 1 | -2/3 |
| $x_1$ | 2 | 10/3 | 1 | 2/3 | 0 | 1/3 |
| $z, z_j$ | | 20/3 | 2 | 4/3 | 0 | 2/3 |
| $z_j - c_j$ | | | 0 | 1/3 | 0 | 2/3 |

Si $x$ es un punto que verifica las restricciones funcionales del problema se tiene que:

$$\frac{31}{3} = 0x_1 + \frac{11}{3}x_2 + 1x_3 - \frac{2}{3}x_4 \text{ y}$$

$$\frac{10}{3} = 1x_1 + \frac{2}{3}x_2 + 0x_3 + \frac{1}{3}x_4$$

Esto es consecuencia de que:

$x \in \mathbb{R}^n$ verifica las restricciones funcionales si y sólo si:

$$Ax = b.$$

Lo cual equivale, tomando una matriz básica $B$, $m \times m$, a:

$$B^{-1}Ax = B^{-1}b.$$

En esta última igualdad, tenemos en cuenta que:

- $B^{-1}A$ es una matriz $m \times n$, cuyas columnas resultan de expresar las columnas de $A$ como combinación lineal de las columnas de la base $B$: son las columnas que aparecen en la tabla del símplex frente a los distintos "$A_i$".
- $B^{-1}b$ es la solución básica (elementos no nulos) asociada a las columnas, linealmente independientes, de $B$: son los números que aparecen en la tabla del símplex frente a "$b$".

$$\text{Consideramos } \frac{10}{3} = x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4.$$

Se descompone cada coeficiente en su parte entera y su parte fraccionaria:

$$3 + \frac{1}{3} = x_1 + (0 + \frac{2}{3})x_2 + (0 + \frac{1}{3})x_4.$$

Se dejan en un miembro todos los términos con coeficientes enteros:

$$\frac{1}{3} - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4 = x_1 - 3.$$

Considero una nueva restricción para el problema:

$$\frac{1}{3} - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4 = x_1 - 3 \leq 0.$$

La solución al problema relajado no la verifica. Además, las soluciones factibles enteras del problema inicial no dejan de verificarla.

Escribimos la desigualdad como $\frac{1}{3} - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4 \leq 0$.

Y operamos para poder operar con el **símplex dual** (dejando el término independiente con signo menos), introduciendo una nueva variable de holgura:

$$-\frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4 \leq -\frac{1}{3} \Leftrightarrow -2x_2 - x_4 \leq -1 \Leftrightarrow -2x_2 - x_4 + x_5 = -1.$$

De modo similar a como se extrajeron las ecuaciones que verificaban las soluciones factibles de la tabla del símplex, **se incorpora a la tabla la ecuación anterior** y se completa la tabla teniendo en cuenta la nueva variable $x_5$ y la nueva columna a ella asociada en la matriz $A$.

| | | $c_j$ | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Base | $c_B$ | $b$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ |
| $x_3$ | 0 | 31/3 | 0 | 11/3 | 1 | -2/3 | 0 |
| $x_1$ | 2 | 10/3 | 1 | 2/3 | 0 | 1/3 | 0 |
| $x_5$ | 0 | -1 | 0 | **-2** | 0 | -1 | 1 |
| $z, z_j$ | | 20/3 | 2 | 4/3 | 0 | 2/3 | 0 |
| $z_j - c_j$ | | | 0 | 1/3 | 0 | 2/3 | 0 |

Aplicando los criterios del símplex dual, sale $x_5$.

$$\min\{\left|\frac{1/3}{-2}\right|, \left|\frac{2/3}{-1}\right|\} = \frac{1}{6} \Rightarrow \text{Entra } x_2.$$

| | | $c_j$ | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Base | $c_B$ | $b$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ |
| $x_3$ | 0 | 17/2 | 0 | 0 | 1 | -5/2 | 11/6 |
| $x_1$ | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1/3 |
| $x_2$ | 1 | 1/2 | 0 | 1 | 0 | 1/2 | -1/2 |
| $z, z_j$ | | 13/2 | 2 | 1 | 0 | 1/2 | 1/6 |
| $z_j - c_j$ | | | 0 | 0 | 0 | 1/2 | 1/6 |

Tabla óptima y nuevo corte:

$$\frac{1}{2} = x_2 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = x_2 + \frac{1}{2}x_4 + (-1 + \frac{1}{2})x_5$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 = x_2 - x_5 \leq 0$$

$$-\frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -x_4 - x_5 \leq -1$$

$$-x_4 - x_5 + x_6 = -1$$

| | | $c_j$ | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Base | $c_B$ | $b$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ |
| $x_3$ | 0 | 17/2 | 0 | 0 | 1 | -5/2 | 11/6 | 0 |
| $x_1$ | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1/3 | 0 |
| $x_2$ | 1 | 1/2 | 0 | 1 | 0 | 1/2 | -1/2 | 0 |
| $x_6$ | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | 1 |
| $z, z_j$ | | 13/2 | 2 | 1 | 0 | 1/2 | 1/6 | 0 |
| $z_j - c_j$ | | | 0 | 0 | 0 | 1/2 | 1/6 | 0 |

... Tras tres pasos más se obtiene $x_1 = 3$, $x_2 = 0$ y $z = 6$.

- 1. Una compañía aérea *low-cost* opera entre 5 ciudades: Madrid, Barcelona, Milán, Roma y París. Se desea planificar un vuelo desde Madrid a cada una de las otras cuatro ciudades. Sólo se dispone de 3 momentos para el despegue de sus aviones: a las 8 a.m., a las 10 a.m. y a las 12 a.m. Además, la compañía sólo tiene asignados dos puertos de embarque en Madrid-Barajas por lo que como mucho pueden salir dos aviones en cada uno de los tres momentos asignados. Los beneficios (en euros) estimados de la compañía para cada vuelo y momento de salida son:

| | 8 a.m. | 10 a.m. | 12 a.m. |
|---|---|---|---|
| Barcelona | 10000 | 9000 | 8500 |
| Milán | 17000 | 16000 | 15000 |
| Roma | 11000 | 10500 | 9500 |
| París | 6400 | 2500 | -1000 |

Formular un modelo de programación que permita a la compañía planificar los vuelos desde Madrid.

- 2. Un ebanista quiere decidir las cantidades de producción para dos artículos: mesas y sillas. Dispone de 96 unidades de material y 72 horas de trabajo. Cada mesa requiere 12 unidades de material y 6 horas de trabajo. Las sillas requieren 8 unidades de material cada una y 12 horas de trabajo por silla. El margen de beneficio es de 5 euros por unidad, tanto para las mesas como para las sillas. El ebanista se comprometió a construir por lo menos 2 mesas.
  - Resolver el problema gráficamente con Maxima.
  - Encontrar la solución usando la herramienta Solver de Open Office y usando los comandos *linear_program* y *minimize_lp* del paquete *simplex* de Maxima.
  - Resolverlo “manualmente" utilizando el algoritmo del símplex.
- 3. Resolver con Open Office el ejemplo del sistema multitarea.

- 4. Resolver con Open Office el ejemplo de los “cortes" en los rollos de cable.
- 5. Resolver con Open Office el ejemplo de la compañía aérea que desea planificar sus vuelos desde Madrid.
- 6. Resolver el problema del diseño de terapia de radiación.
- 7. En el problema del tratamiento de radiación:
  - Dentro de qué rango puede variar la fracción de dosis del rayo uno que penetra en la anatomía sana tal que la optimalidad se vea inalterada.
  - Encontrar la solución óptima cuando se impone que la dosis sobre el centro del tumor sea al menos de 6’2 kilorads.
  - Discutir el efecto de considerar un tercer rayo que origine unas fracciones absorbidas sobre la anatomía sana, el tejido crítico, la región del tumor y el centro del mismo de 0’6, 0’02, 0’3 y 0,2 respectivamente.
- 8. En el problema del segundo ejemplo del algoritmo del símplex, plantea el problema dual y obtén su solución de la tabla óptima (última tabla del símplex) del problema primal.

- 9. Una empresa que fabrica vehículos quiere determinar un plan de producción semanal. Esta empresa dispone de 5 fábricas que producen distintos elementos del vehículo (motor, carrocería, acabado básico, medio y de lujo). Estos elementos posteriormente se ensamblan para producir tres versiones distintas de vehículo (básica, media y de lujo). A continuación se indican las capacidades de producción en cada fábrica (en horas por semana), los tiempos de fabricación en función de la fábrica y de la versión (en horas por semana y vehículo) y el beneficio neto que la empresa obtiene por cada versión de vehículo que vende (en euros).

| | | Tiempos | por | versión |
|---|---|---|---|---|
| Fábrica | Capacidad | Básica | Media | Lujo |
| Motor | 120 | 3 | 2 | 1 |
| Carrocería | 80 | 1 | 2 | 3 |
| Acabado básico | 96 | 2 | | |
| Acabado medio | 102 | | 3 | |
| Acabado lujo | 40 | | | 2 |
| Beneficio | | 840 | 1120 | 1200 |

- Escribe un modelo que permita a la empresa establecer un plan de producción semanal óptimo.
- Escribe el modelo anterior en forma estándar y encuentra un plan de producción inicial (solución básica factible).
- A partir de la solución anterior, realiza una iteración del método Simplex para encontrar un plan de producción mejor.
- Debido a un imprevisto, dentro de cuatro semanas la fábrica de motores tiene que disminuir en 10 horas su capacidad semanal. Sabiendo que el vector de precios duales en la solución óptima es (140, 420, 0, 0, 0), razona en cuánto disminuirá el beneficio de la empresa debido a este imprevisto.

- 10. Considerar el problema de Max. $z = 3x_1 + x_2 + 4x_3$

  Sujeto a $\left\{ \begin{array}{c} 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 25 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 20 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 3 \end{array} \right.$

  - Plantea y resuelve (gráficamente) el problema dual.
  - Aplicando las condiciones de holgura complementaria, proporciona las soluciones del problema original.

- 11. Considerar el problema de Max.
  $z = 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4$
  Sujeto a $\left\{ \begin{array}{c} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 8 \\ x_i \geq 0, \; i = 1, \cdots, 4 \end{array} \right.$

  - Plantea y resuelve (gráficamente) el problema dual.
  - Aplicando las condiciones de holgura complementaria, proporciona las soluciones del problema original.

- 12. **Problema de clasificación.** Se desea construir un hiperplano separador que permita clasificar nuevos tumores atendiendo a ciertas características morfológicas celulares. Se dispone de una muestra de tumores malignos (M) y de una de tumores benignos (B) y se han considerado para cada uno de ellos medidas del tamaño y del grado de simetría. Los datos aparecen recogidos en las siguientes matrices. Construir el hiperplano utilizando un modelo de programación lineal e indicar en qué grupo se clasificaría un tumor de tamaño 5 y simetría 4.

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \\ 5 & 1 \\ 6 & 0'5 \\ 7 & 0'2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 6 \\ 5 & 3 \\ 1 & 7'5 \\ 3 & 2 \\ 3'5 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 13. **Problema de clasificación.** Se desea construir un hiperplano separador que permita predecir la clasificación de una muestra de vino en aceptada o rechazada por los comités de cata de una cierta Denominación de Origen, atendiendo a ciertas características físico-químicas. Se dispone de seis muestras que fueron rechazadas (R) y de cinco muestras que fueron aceptadas (A) y se han considerado para cada uno de ellas medidas de Acidez Total y de Concentración de Anhídrido Sulfuroso Total.

  Los datos aparecen recogidos en las siguientes matrices. Construir el hiperplano utilizando un modelo de programación lineal e indicar en qué grupo se clasificaría una muestra de vino con una acidez total de 50 y una concentración de anhídrido sulfuroso total de 7.

$$A = \begin{pmatrix} 60 & 12 \\ 75 & 8 \\ 75 & 4 \\ 90 & 2 \\ 105 & 0'8 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ 36 & 8 \\ 90 & 5 \\ 18 & 9'8 \\ 54 & 4 \\ 60 & 3 \end{pmatrix}.$$

- 14. Resolver con el algoritmo del símplex dual el siguiente problema de programación lineal:

  Maximizar $z = -4x_1 - 6x_2 - 18x_3$

  $$\text{sujeto a } x_1 + 3x_3 \geq 3$$
  $$x_2 + 2x_3 \geq 5$$
  $$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- 15. **Problema de redondeos en una tabla**, Salazar González (2000). Un centro de Investigaciones Sociológicas dispone de la siguiente tabla y desea publicarla tras redondear cada valor numérico fraccionario a su entero por exceso o por defecto. Se quiere minimizar la suma de las diferencias entre los valores redondeados y los valores originales. Plantear un modelo matemático y resolver el problema.

| | hombre | mujer | TOTAL |
|---|---|---|---|
| infantil | 1’666666 | 2’666666 | 4’333332 |
| adulto | 2’000000 | 4’750000 | 6’750000 |
| anciano | 1’250000 | 4’250000 | 5’500000 |
| TOTAL | 4’916666 | 11’666666 | 16’583332 |

- 16. **Problema de optimizar llamadas**, Salazar González (2000). El presidente del gobierno necesita el máximo apoyo fuera de su partido para que se apruebe en el Congreso su plan de gastos para el próximo año. A través de sus consejeros ha sabido que hay 12 congresistas de Coalición Canaria y 16 congresistas del PNV que aún no tienen claro qué votar. El presidente decide entonces llamar por teléfono a estos congresistas indecisos para convencerles de que le apoyen, sabiendo que tiene una probabilidad de 0'9 de éxito con los miembros de Coalición Canaria y 0'6 con los miembros del PNV.

  Decídase cuántos congresistas de cada partido deberá telefonear para maximizar su probabilidad de éxito si no tiene tiempo para realizar un número total de llamadas superior a 20. Utilícese el algoritmo Branch & Bound.

- 17. **Problema de optimizar una localización**, Salazar González (2000). Se dispone de 3 posibles ubicaciones para localizar un servicio de ambulancias. Dependiendo de la ubicación, el posible servicio supondría un coste diario de mantenimiento y podría satisfacer una demanda total máxima, según la siguiente tabla:

| Ubicación | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| Coste de mantenimiento | 10 | 14 | 13 |
| Demanda total máxima | 25 | 32 | 30 |

  Cuatro grandes hospitales, cada uno con una cierta demanda estimada de servicios diarios deben ser atendidos exactamente por un servicio de ambulancias. Esta demanda, así como el coste medio por desplazamiento estimado de realizar un viaje de ambulancia desde cada servicio, está dado por la siguiente tabla:

| Hospital | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Demanda | 15 | 16 | 10 | 14 |
| Ubicación 1 | 4 | 2 | 3 | 2 |
| Ubicación 2 | 3 | 3 | 5 | 1 |
| Ubicación 3 | 1 | 5 | 2 | 4 |

Definir un modelo matemático y determinar qué servicios de ambulancias deben ser creados y a qué hospitales debe servir cada una, minimizando los costes de desplazamiento más los costes de mantenimiento.

- 18. Una empresa de “consulting" desea realizar una encuesta para elaborar un informe sobre el impacto en el mercado de un nuevo producto. La tabla siguiente muestra las cuotas de entrevistas que se desean realizar y las probabilidades de que los distintos encuestados respondan a las solicitudes según el período en el que se realice la llamada. Se requiere que:

- El número de llamadas matinales no puede exceder el número de llamadas por la tarde.
- El número de llamadas por la noche no puede superar la mitad del número de llamadas por la tarde.

| Tipo | cuota | Probabilidad matinal | de responder tarde | noche |
|---|---|---|---|---|
| Soltera | 50 | 0’1 | 0’1 | 0’5 |
| Casada sin hijos | 100 | 0’5 | 0’4 | 0’7 |
| Casada con hijos | 150 | 0’75 | 0’6 | 0’9 |

Decidir cómo deben distribuirse las llamadas a los tres tipos de amas de casa durante los tres tipos de períodos de tiempo de manera que se obtenga el número esperado de respuestas indicado por la columna “cuotas" con el menor número posible de llamadas.

- 19. Resolver utilizando el procedimiento de planos de corte (hacer sólo dos iteraciones).

  $$\begin{aligned} \text{Maximizar } z &= x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeto a } 2x_1 + 6x_2 &\leq 15 \\ 28x_1 + 8x_2 &\leq 77 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ y enteras} \end{aligned}$$

- 20. Resolver utilizando Branch & Bound.

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } z &= 14x_1 + 18x_2 \\ \text{sujeto a } -x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\ 7x_1 + x_2 &\leq 35 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ y enteras} \end{aligned}$$

# Soluciones e indicaciones de algunos ejercicios

**Ejercicio 1.** Denotamos por $i = 1, 2, 3, 4$ a cada una de las 4 ciudades destino y por $j = 1, 2, 3$ a cada uno de los 3 momentos diarios de despegue.

Variables de decisión son: $X_{ij} = 1$ si el vuelo sale de Madrid a la ciudad $i$ en el momento $j$ (y 0 en otro caso). Si $a_{ij}$ denotan los beneficios mostrados en la tabla, entonces el modelo es:

maximizar $\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} X_{ij}$

s. a $\displaystyle\sum_{j=1}^{3} X_{ij} = 1$ para $i = 1, 2, 3, 4$ (a cada ciudad un sólo vuelo)

$\displaystyle\sum_{i=1}^{4} X_{ij} \leq 2$ para $j = 1, 2, 3$ (a cada hora, como mucho dos vuelos)

$X_{ij} \in \{0, 1\}$

**Ejercicio 2.** El modelo: Variables de decisión son: $X_1 = 1$: número de mesas fabricadas y $X_2$ : número de sillas fabricadas.

maximizar $5X_1 + 5X_2$ (beneficios)

s. a $12X_1 + 8X_2 \leq 96$ (unidades de material)

$6X_1 + 12X_2 \leq 72$ (horas)

$X_1 \geq 2$ (número de mesas)

$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$ y enteras.

Resolución con Maxima:

```
(%i1) load(simplex)$
(%i2) maximize_lp(5*x+5*y, [12*x+8*y<=96,6*
x+12*y<=72,x>=2]), nonegative_lp=true;
(%o2) [45,[y=3,x=6]]
```

Con otro comando:

(%i3) A:matrix([12,8,1,0,0],[6,12,0,1,0],[1,0,0,0,-1])$

(%i4) b:[96,72,2]$

(%i5) c:[-5,-5,0,0,0]$

(%i6) linear_program(A,b,c);

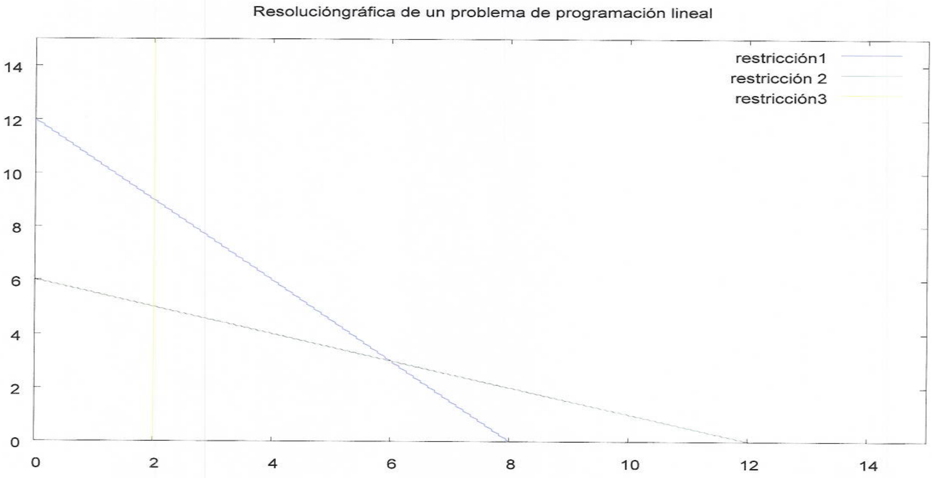
(%o6) [[6,3,0,0,4],-45]

Gráfica de la región factible:

(%i7) load(draw)$

(%i8) draw2d(color=blue,key=”restricción 1”,implicit(12*x+8*y=96,x,0,15,y,0,15),key=”restricción 2”,color= green,implicit(6*x+12*y=72,x,0,15,y,0,15),key=”restricción 3”,color=yellow,implicit(x=2,x,0,15,y,0,15),title= ”Resolución gráfica de un problema de programación lineal”);

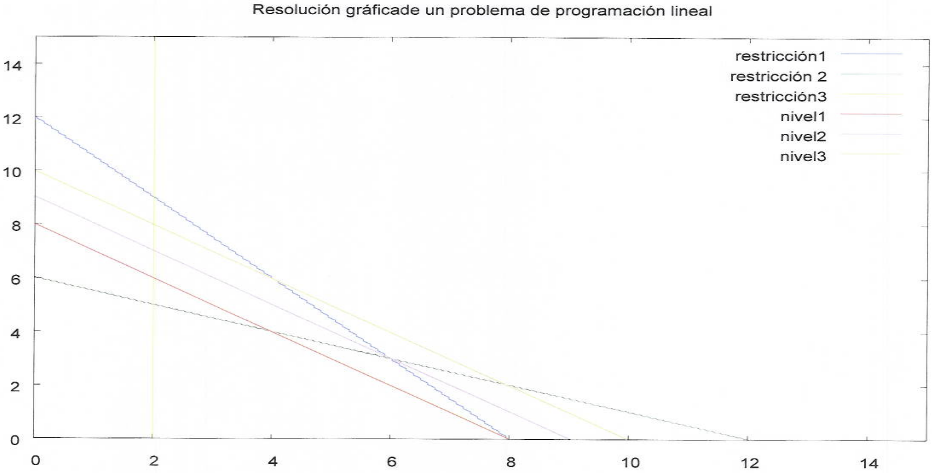
# La región factible



Resolución gráfica:

(%i9) draw2d(color=blue,key=”restricción 1”,implicit(12*x+8*y=96,x,0,15,y,0,15),key=”restricción 2”,color= green,implicit(6*x+12*y=72,x,0,15,y,0,15),key=”restricción 3”,color=yellow,implicit(x=2,x,0,15,y,0,15), color=red, key=”nivel 1”, implicit(5*x+5*y=40,x,0,15,y,0,15), color=violet, key=”nivel 2”, implicit(5*x+5*y=45,x,0,15,y,0,15), color=orange, key=”nivel 3”, implicit(5*x+5*y=50,x,0,15,y,0,15), title= ”Resolución gráfica de un problema de programación lineal”);

# Resolución gráfica



# Problema en forma estándar

-minimizar $-5X_1 - 5X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5 + MX_6$

s. a $12X_1 + 8X_2 + X_3 = 96$

$6X_1 + 12X_2 + X_4 = 72$

$X_1 - X_5 + X_6 = 2$

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \geq 0$ y enteras.

Con OpenOffice resolvemos el problema, utilizando la herramienta Solver o programando directamente el algoritmo del Símplex.

**Ejercicio 10** Problema dual: Min. $25y_1 + 20y_2$

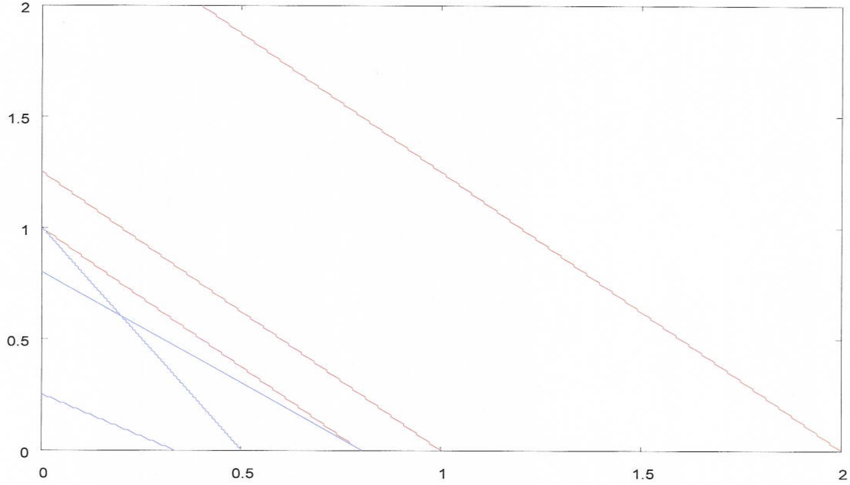
$$\text{Sujeto a } \begin{cases} 6y_1 + 3y_2 \geq 3 \\ 3y_1 + 4y_2 \geq 1 \\ 5y_1 + 5y_2 \geq 4 \\ y_i \geq 0,\ i = 1, 2 \end{cases}$$

```
(%i1) load(draw)$
```

```
(%i2) draw2d( color = red, implicit(25*x+20*y=50,x,0,2,y,0,2),
implicit(25*x+20*y=25,x,0,2,y,0,2),
implicit(25*x+20*y=20,x,0,2,y,0,2), color = blue,
implicit(6*x+3*y=3,x,0,2,y,0,2), implicit(3*x+4*y=1,x,0,2,y,0,2),
implicit(5*x+5*y=4,x,0,2,y,0,2) );
```

Vemos que la segunda restricción es redundante y por las curvas de nivel del objetivo vemos que el óptimo es el punto de corte de las otras dos restricciones:

# Resolución gráfica del problema dual



```
(%i3) e1:6*x+3*y=3;
(%i4) e2:5*x+5*y=4;
(%i5) algsys([e1,e2],[x,y]);
(%o5) [[x = 1/5 y =3/5]]
```

Con esta solución se saturan la primera y tercera restricción. La segunda restricción no se satura entonces, en el óptimo, la segunda variable de decisión del primal, $x_2$, es cero.

Las dos variables de decisión del dual son distintas de cero en el óptimo, entonces, el óptimo del primal satura las dos restricciones.

Resulta $6x_1 + 5x_3 = 25$ y $3x_1 + 5x_3 = 20$

```
(%i6) b1:6*x+5*y=25;
(%i7) b2:3*x+5*y=20;
(%i8) algsys([b1,b2],[x,y]);
(%o8) [[x=5/3,y=3]]
```

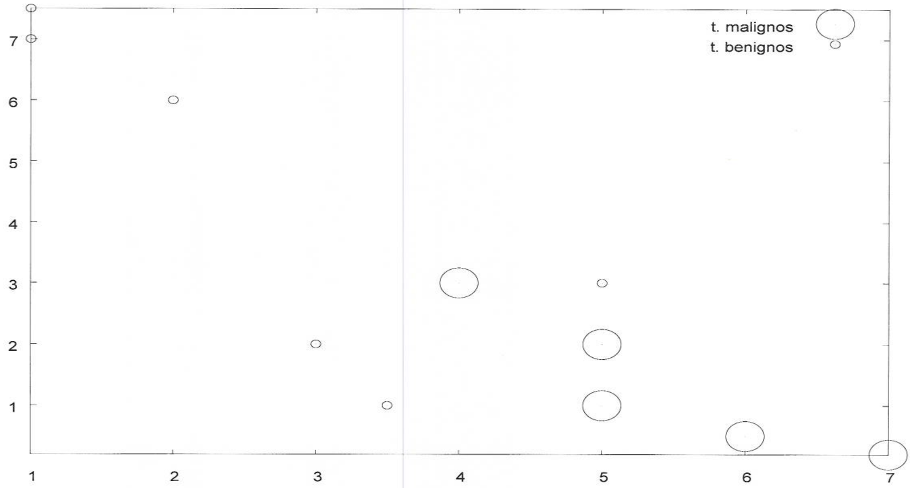
Por tanto, la solución del primal es (5/3,0,3) y el objetivo $3 \times 5/3 + 4 \times 3 = 17$.

**Ejercicio 12** Comenzamos representando gráficamente las dos muestras de tumores.

```
(%i1) load(draw)$
```

```
(%i2) draw2d(key="t. malignos", point_type = circle, point_size
= 4, points([4,5,5,6,7],[3,2,1,0.5,0.2]),key="t. benignos",
point_type = circle, point_size = 1,
points([1,2,1,3,3.5,5],[7,6,7.5,2,1,3]));
```

# Las muestras de tumores



Idealmente, buscamos un hiperplano de ecuación $w_1 x + w_2 y = t$ tal que cada punto $x$ en el primer conjunto satisfaga $w_1 x + w_2 y \geq t$ y que cada punto $x$ en el segundo conjunto satisfaga $w_1 x + w_2 y \leq t$. Para evitar condiciones triviales del tipo $w_1 = w_2 = t = 0$, consideramos las condiciones más fuertes de que $w_1 x + w_2 y \geq t + 1$ para puntos en el primer conjunto y $w_1 x + w_2 y \leq t - 1$ para puntos en el segundo conjunto.

Los dos conjuntos pueden estar mezclados y no haber una separación clara. El objetivo será minimizar, en promedio, los incumplimientos de las condiciones.

Si un punto del primer conjunto no verifica la condición, se tendrá que $w_1 x + w_2 y < t + 1$ y por tanto $0 < -w_1 x - w_2 y + t + 1 \leq a$ para algún $a$.

Si un punto del segundo conjunto no verifica la condición, se tendrá que $w_1 x + w_2 y > t - 1$ y por tanto $b \geq w_1 x + w_2 y - t + 1 > 0$ para algún $b$.

Con todas estas consideraciones se puede construir el modelo.

**Variables**: $w_1$, $w_2$ y $t$, que son las constantes que definen el hiperplano separador y no tienen restricciones de signo. Por otro lado, tantas variables mayores o iguales que cero como puntos de la muestra y que cuantifican los posibles incumplimientos: $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ (posibles incumplimientos o mal clasificación en el primer conjunto), $f$, $g$, $h$, $i$, $j$, $k$ (posibles incumplimientos o mal clasificación en el segundo conjunto).

**Objetivo**: minimizar $\dfrac{a+b+c+d+e}{5} + \dfrac{f+g+h+i+j+k}{6}$ (suma de incumplimientos medios)

**Restricciones** (Las variables $a, b, \cdots, k$ miden el posible incumplimiento de la condición en cada punto.)

a$>$=-4*$w_1$-3*$w_2$+t+1

b$>$=-5*$w_1$-2*$w_2$+t+1

c$>$=-5*$w_1$-1*$w_2$+t+1

d$>$=-6*$w_1$-0.5*$w_2$+t+1

e$>$=-7*$w_1$-0.2*$w_2$+t+1

f$>$=1*$w_1$+7*$w_2$-t+1

g$>$=2*$w_1$+6*$w_2$-t+1

h$>$=1*$w_1$+7.5*$w_2$-t+1

i$>$=3*$w_1$+2*$w_2$-t+1

j$>$=3.5*$w_1$+1*$w_2$-t+1

k$>$=5*$w_1$+3*$w_2$-t+1

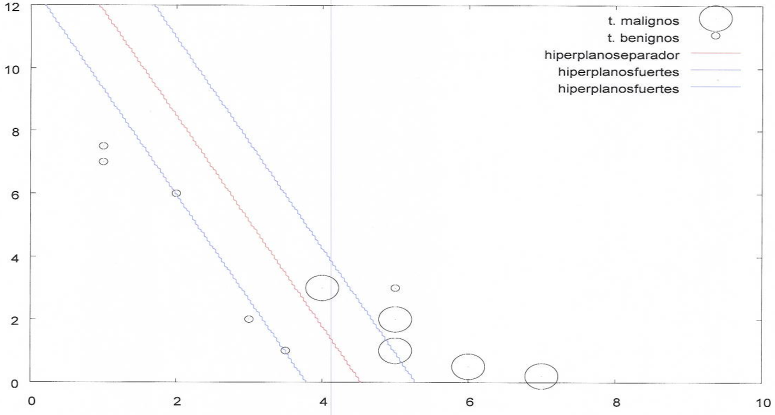
Con Maxima resolvemos el problema de programación lineal:

```
(%i3) load(simplex)$
(%i4) minimize_lp(0.2*a+0.2*b+0.2*c+0.2*d+0.2*e+
(1/6)*f+(1/6)*g+(1/6)*h+(1/6)*i+(1/6)*j+(1/6)*k,
[a>=-4*x-3*y+t+1,b>=-5*x-2*y+t+1,c>=-5*x-1*y+t+1,
d>=-6*x-0.5*y+t+1,e>=-7*x-0.2*y+t+1,
f>=1*x+7*y-t+1,g>=2*x+6*y-t+1,
h>=1*x+7.5*y-t+1,i>=3*x+2*y-t+1,j>=3.5*x+1*y-
t+1,k>=5*x+3*y-t+1,
a>=0,b>=0,c>=0,d>=0,e>=0,f>=0,g>=0,h>=0,i>=0,j>=0,k>=0]);
(%o4)[0.5733333333333333,[k=2.799999999999999,j=0.0,i=0.0,
h=0,g=0.0,f=0,e=0,d=0.0,c=0,b=0.0,
y=0.4,x=1.333333333333333,
t=6.066666666666663,a=0.5333333333333333]]
```

Se obtiene el hiperplano $1'34x + 0'4y = 6'067$, que representamos junto con los puntos de la muestra y los hiperplanos $1'34x + 0'4y = 6'067 - 1$ y $1'34x + 0'4y = 6'067 + 1$ que representan las condiciones fuertes de pertenencia a un conjunto u otro.

```
(%i5) draw2d(key="t. malignos", point_type = circle, point_size
= 4, points([4,5,5,6,7],[3,2,1,0.5,0.2]),key="t. benignos",
point_type = circle, point_size = 1,
points([1,2,1,3,3.5,5],[7,6,7.5,2,1,3]),key="hiperplano
separador",color=red,implicit(1.34*x
+0.4*y=6.067,x,0,10,y,0,12),key="hiperplanos
fuertes",color=blue,implicit(1.34*x +0.4*y=5.067,x,0,10,y,0,12)
,color=blue,implicit(1.34*x +0.4*y=7.067,x,0,10,y,0,12) );
```

# Clasificación de los tumores



En cuanto a la clasificación del nuevo punto:

(%i6) h:1.34*x+0.4*y;

(%o6) 0.4*y+1.34*x

(%i7) %,x=5,y=4;

(%o7) 8.300000000000001

De donde clasificamos al nuevo punto en el primer conjunto de tumores malignos.

## Ejercicio 14

(-) Minimizar $z = 4x_1 + 6x_2 + 18x_3$

$$\begin{aligned} \text{sujeto a } & x_1 + 3x_3 - s_1 = 3 \iff -x_1 - 3x_3 + s_1 = -3 \\ & x_2 + 2x_3 - s_2 = 5 \iff -x_2 - 2x_3 + s_2 = -5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

# Primera iteración

| Base | $c_B$ | $c_j$ / $b$ | 4 / $A_1$ | 6 / $A_2$ | 18 / $A_3$ | 0 / $A_4$ | 0 / $A_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | 0 | -3 | -1 | 0 | -3 | 1 | 0 |
| $s_2$ | 0 | -5 | 0 | **-1** | -2 | 0 | 1 |
| $z, z_j$ | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $z_j - c_j$ | | | -4 | -6 | -18 | 0 | 0 |

$I_1 = \{s_1, s_2\}$. $\min_{s \in I_1}\{\overline{x}_s\} = \min\{-3, -5\} = -5 \Rightarrow$ Sale $s_2$. Puedo verlo como un “coste reducido" que aparece si resuelvo el dual por el símplex, distinto de cero, asociado a una columna no básica, que entraría en la base por ser el “más negativo" (dual: maximizar). Lo estoy aquí sacando de la base y anulándolo, que es lo que ocurre cuando calculo el coste reducido asociado a una variable no básica.

$\min\{\frac{-6}{-1}, \frac{-18}{-2}\} = \frac{6}{1} \Rightarrow$ Entra $A_2$. Estoy haciendo los cocientes que efectuaría si estuviera resolviendo el dual directamente.

**Ejercicio 15** Posibles tablas redondeadas.

| | hombre | mujer | TOTAL |
|---|---|---|---|
| infantil | 2 | 3 | 5 |
| adulto | 2 | 5 | 7 |
| anciano | 1 | 4 | 5 |
| TOTAL | 5 | 12 | 17 |

| | hombre | mujer | TOTAL |
|---|---|---|---|
| infantil | 2 | 2 | 4 |
| adulto | 2 | 4 | 6 |
| anciano | 1 | 5 | 6 |
| TOTAL | 5 | 11 | 16 |

Asociado a cada celda (interior o marginal) se considera una variable $x_{ij}$ que vale:

- 1 si el redondeo en la celda (i,j) es por exceso.
- 0 si el redondeo en la celda (i,j) es por defecto.

El objetivo es minimizar:

$0'666666(1\text{-}x_{11})+0'333333x_{11}$
$+0'666666(1\text{-}x_{12})+0'333333x_{12}$
$+0'333333(1\text{-}x_{13})+0'666666x_{13}$
$+0'75(1\text{-}x_{22})+0'25x_{22}+0'75(1\text{-}x_{23})$
$+0'25x_{23}+0'25(1\text{-}x_{31})+0'75x_{31}$
$+0'25(1\text{-}x_{32})+0'75x_{32}$
$+0'5(1\text{-}x_{33})+0'5x_{33}+0'916666(1\text{-}x_{41})$
$+0'083334x_{41}$
$+0'666666(1\text{-}x_{42})+0'333333x_{42}$
$+0'583332(1\text{-}x_{43})+0'416668x_{43}$.

Con las restricciones:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{fila 1:} & (1+x_{11})+(2+x_{12}) & = & (4+x_{13}) \\
\text{fila 2:} & (2)+(4+x_{22}) & = & (6+x_{23}) \\
\text{fila 3:} & (1+x_{31})+(4+x_{32}) & = & (5+x_{33}) \\
\text{fila 4:} & (4+x_{41})+(11+x_{42}) & = & (16+x_{43}) \\
\text{columna 1:} & (1+x_{11})+(2)+(1+x_{31}) & = & (4+x_{41}) \\
\text{columna 2:} & (2+x_{12})+(4+x_{22})+(4+x_{32}) & = & (11+x_{42}) \\
\text{columna 3:} & (4+x_{13})+(6+x_{23})+(5+x_{33}) & = & (16+x_{43}) \\
 & x_{11},x_{12},x_{13},x_{22},x_{23},x_{31},x_{33} & \in & \{0,1\}.
\end{array}$$

**Ejercicio 16** $x_{CC}$ y $x_{PNV}$ representan el número de congresistas de Coalición Canaria y de PNV, respectivamente. El modelo resulta:

$$
\begin{aligned}
\text{Maximizar } & 0'9x_{CC} + 0'6x_{PNV} \\
\text{sujeto a } & x_{CC} + x_{PNV} \leq 20 \\
& x_{CC} \leq 12 \\
& x_{PNV} \leq 16 \\
& x_{CC}, x_{PNV} \geq 0 \text{ y enteras.}
\end{aligned}
$$

**Ejercicio 17** EL MODELO MATEMÁTICO:

Para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ y cada $j \in \{1, 2, 3\}$, definimos las variables:

$y_j$ que vale:

- 1 si se construye la planta en la ubicación $j$.
- 0 en otro caso.

$x_{ij}$ que vale:

- 1 si se asigna el hospital $i$ al servicio de ambulancias $j$.
- 0 en otro caso.

Objetivo: minimizar

$15(4x_{11}+3x_{12}+1x_{13})+16(2x_{21}+3x_{22}+5x_{23})+$

$10(3x_{31}+5x_{32}+2x_{33})+14(2x_{41}+1x_{42}+4x_{43})+10y_1+14y_2+13y_3$

Sujeto a:

$$
\begin{array}{rcl}
x_{11}+x_{12}+x_{13} & = & 1 \\
x_{21}+x_{22}+x_{23} & = & 1 \\
x_{31}+x_{32}+x_{33} & = & 1 \\
x_{41}+x_{42}+x_{43} & = & 1 \\
15x_{11}+16x_{21}+10x_{31}+14x_{41} & \leq & 25y_1 \\
15x_{12}+16x_{22}+10x_{32}+14x_{42} & \leq & 32y_2 \\
15x_{13}+16x_{23}+10x_{33}+14x_{43} & \leq & 30y_3
\end{array}
$$

Todas las variables son binarias.

- FERRIS, M. C. / MANGASARIAN, O. L. / WRIGHT, S. J. (2007): “Linear programming with MATLAB". Ed. MPS-SIAM Series on Optimization.
- HILLIER, F. / LIEBERMAN, G. (2005): “Introduction to operations research". McGraw-Hill.
- KASANA, H. S. / KUMAR, K. D. (2004): “Introductory Operations Research. Theory and Applications". Springer.
- MARTÍN, Q. (2003): “Investigación operativa". Pearson. Hespérides.
- MARTÍN, Q. / SANTOS, M. T. / SANTANA, Y. (2005): “Investigación operativa: problemas y ejercicios resueltos". Pearson.
- REVELLE, C. / COHON, J. / SHOBRYS, D. (1991): “Simultaneous siting and routing in the disposal of hazardous wastes". Transportation Science 25, 138-145.

- RODRÍGUEZ RIOTORTO, M. (2008): “Primeros pasos en Maxima". www.telefonica.net/web2/biomates
- SALAZAR GONZÁLEZ, J. S. (2000): “Lecciones de optimización". Servicio de Publicaciones de la Universidad de La Laguna.

# Método de las dos fases: obtención de una solución inicial

Partimos de un problema de programación lineal en la forma estándar:

Minimizar $Z = c^T X$

$$\text{sujeto a} \begin{cases} AX = b \\ \\ X \geq 0 \end{cases}$$

Se incorporan a las restricciones las variables artificiales, $X_a$, que se necesitan para tener en la primera Tabla del Simplex una base canónica, de forma que las restricciones pasan a ser:

$$\begin{cases} AX + IX_a = b \\ \\ X \geq 0, \ X_a \geq 0 \end{cases}$$

La resolución se efectuará en dos fases:

**Fase I:**

Se resuelve el siguiente problema:

Minimizar $Z = 1^T X_a$

$$\begin{cases} AX + IX_a = b \\ \\ X \geq 0, \; X_a \geq 0 \end{cases}$$

Si el problema original tiene solución factible, el mínimo de este problema se ha de alcanzar cuando las variables artificiales $X_a = 0$ y $Z = 0$.

**Fase II:**

Se resuelve el problema original utilizando como base la que aparece en la última matriz obtenida en la primera fase.

# Ejemplo del método de las dos fases

Resolver el problema de programación lineal
Minimizar $Z = X_1 - 2X_2$

$$\text{sujeto a} \begin{cases} X_1 + X_2 \geq 2 \\ -X_1 + X_2 \geq 1 \\ X_2 \leq 3 \\ X_i \geq 0 \; i = 1, 2 \end{cases}$$

Planteamos el problema con las variables de exceso, holgura y artificiales, así como la función objetivo de la primera fase:

Minimizar $Z = a_1 + a_2$

$$\text{sujeto a} \begin{cases} X_1 + X_2 - e_1 + a_1 = 2 \\ -X_1 + X_2 - e_2 + a_2 = 1 \\ X_2 + S_3 = 3 \end{cases}$$

Trasladamos estos datos a la TABLA DEL SIMPLEX y trabajamos de acuerdo con el algoritmo:

| | | $c_j$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Base | $c_B$ | $b$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | $A_7$ | $\theta$ |
| $A_4$ | 1 | 2 | 1 | 1 | -1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| $A_6$ | 1 | 1 | -1 | **1** | 0 | 0 | -1 | 1 | 0 | 1 |
| $A_7$ | 0 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 |
| $z, z_j, \theta_j$ | | 3 | 0 | 2 | -1 | 1 | -1 | 1 | 0 | 1 |
| $z_j - c_j$ | | | 0 | 2 | -1 | 0 | -1 | 0 | 0 | |

Entra $A_2$ en la base y sale $A_6$.

|  |  | $c_j$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |  |  |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Base | $c_B$ | $b$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | $A_7$ | $\theta_{A_1}$ | $\theta_{A_5}$ |
| $A_4$ | 1 | 1 | **2** | 0 | -1 | 1 | 1 | – | 0 | 1/2 | 1 |
| $A_2$ | 0 | 1 | -1 | 1 | 0 | 0 | -1 | – | 0 | – | – |
| $A_7$ | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | – | 1 | 2 | 2 |
| $z, z_j, \theta_j$ |  | 1 | 2 | 0 | -1 | 1 | 1 | – | 0 | 1/2 | 1 |
| $z_j - c_j$ |  |  | 2 | 0 | -1 | 0 | 1 | – | 0 |  |  |
| $\theta_j(z_j - c_j)$ |  |  | 1 | – | – | – | 1 | – |  |  |  |

Entra $A_1$ en la base y $A_4$ deja de ser básica, no volverá a entrar en la tabla y se puede eliminar. Se termina la primera fase al obtener en la nueva tabla $Z = 0$, con $a_1 = 0$ y $a_2 = 0$. Por tanto, comenzamos la segunda fase introduciendo la función objetivo del problema original, $minZ = X_1 - 2X_2$, y continuamos con el algoritmo del simplex.

| | | $c_j$ | 1 | -2 | 0 | 0 | 0 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Base | $c_B$ | $b$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_5$ | $A_7$ | $\theta_{A_1}$ | $\theta_{A_5}$ |
| $A_1$ | 1 | 1/2 | 1 | 0 | -1/2 | **1/2** | 0 | – | 1 |
| $A_2$ | -2 | 3/2 | 0 | 1 | -1/2 | -1/2 | 0 | – | – |
| $A_7$ | 0 | 3/2 | 0 | 0 | 1/2 | 1/2 | 1 | 3 | 3 |
| $z, z_j, \theta_j$ | | -5/2 | 1 | -2 | 1/2 | 3/2 | 0 | 3 | 1 |
| $z_j - c_j$ | | | 0 | 0 | 1/2 | 3/2 | 0 | | |
| $\theta_j(z_j - c_j)$ | | | – | – | 3/2 | 3/2 | – | | |

El valor máximo de $\theta_j(z_j - c_j)$ se alcanza en $A_3$ y en $A_5$. Tomamos $A_5$ por tener más $(z_j - c_j)$. Así pues, entra $A_5$ en la base y sale $A_1$.

| | | $c_j$ | 1 | -2 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Base | $c_B$ | $b$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_5$ | $A_7$ | $\theta_{A_3}$ |
| $A_5$ | 0 | 1 | 2 | 0 | -1 | 1 | 0 | – |
| $A_2$ | -2 | 2 | 1 | 1 | -1 | 0 | 0 | – |
| $A_7$ | 0 | 1 | -1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| $z, z_j, \theta_j$ | | -4 | -2 | -2 | 2 | 0 | 0 | |
| $z_j - c_j$ | | | -1 | 0 | 2 | 0 | 0 | |

Ahora, $A_7$ sale de la base y entra $A_3$.

| | | $c_j$ | 1 | -2 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Base | $c_B$ | $b$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_5$ | $A_7$ |
| $A_5$ | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $A_2$ | -2 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $A_3$ | 0 | 1 | -1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $z, z_j, \theta_j$ | | -6 | 0 | -2 | 0 | 0 | -2 |
| $z_j - c_j$ | | | -1 | 0 | 0 | 0 | -2 |

La solución óptima es $Z = -6$, $X_1 = 0$, $X_2 = 3$.