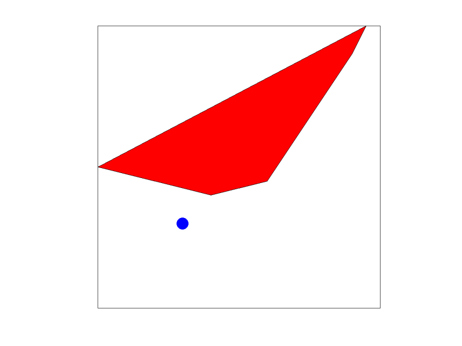
Optimización no diferenciable (II)

Emilio Carrizosa

Dpto. de Estadística e Investigación Operativa
Universidad de Sevilla

Diciembre de 2010

$$\min_{x \in S} \gamma(x - a)$$



Distancia a un conjunto convexo cerrado S

Dado γ : calibrador y S : convexo,

- $d_S(x) := \min_{y \in S} \gamma(y - x)$: convexa.
- $\partial d_S(x) = -\left\{u \in B^\circ : d_S(x) = \min_{y \in S} u^\top (y - x)\right\}$

Para hiperplanos . . .

Sea $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \neq 0$. Para $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha^\top x + \beta = 0\}$.

$$d_S(x) = \frac{|\alpha^\top x_0 + \beta|}{\gamma^\circ(\alpha)}$$

Métodos de punto ideal

$$\min_{x \in X} (f_1(x), \ldots, f_k(x))$$

Estrategia

- Construir $z^* \in \mathbb{R}^k$,

$$z_i^* = \min_{x \in \mathcal{X}} f_i(x), \ i = 1, 2, \ldots, k$$

  - Hallar $x^* \in X$: más cercano a z^*
    - Escoger una norma γ en $\mathbb{R}^k$, monótona en $\mathbb{R}^k_+$
    - Resolver

$$\min_{x \in X} \gamma(f_1(x) - z_1^*, \ldots, f_k(x) - z_k^*)$$

ℓ_1 ponderado. Minsum

$$\gamma(z_1, \ldots, z_k) = \sum_{j=1}^{k} \omega_j |z_j|$$

$$\gamma(f_1(x) - z_1^*, \ldots, f_k(x) - z_k^*) = \sum_{j=1}^{k} \omega_j f_j(x) - cnst.$$

$$\min_{x \in X} \gamma(f_1(x) - z_1^*, \ldots, f_k(x) - z_k^*) \Leftrightarrow \min_{x \in X} \sum_{j=1}^{k} \omega_j f_j(x)$$

ℓ_∞ ponderado.

$$\gamma(z_1, \ldots, z_k) = \max_j \omega_j |z_j|$$

$$\gamma(f_1(x) - z_1^*, \ldots, f_k(x) - z_k^*) = \max_j \omega_j (f_j(x) - z_j^*)$$

$$\min_{x \in X} \gamma(f_1(x) - z_1^*, \ldots, f_k(x) - z_k^*) \Leftrightarrow \min_{x \in X} \max_j \omega_j \left(f_j(x) - z_j^*\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ll} \min & \Delta \\ \text{s.a.} & x \in X \\ & \omega_j \left(f_j(x) - z_j^*\right) \leq \Delta \quad \forall j \end{array}$$

ℓ_∞ ponderado.

Para $x^* \in X$, con $f_i(x^*) > z_i^* \ \forall i = 1, 2, \ldots, k$, son equivalentes:

- x^* : débilmente eficiente para el problema $\min_{x \in X} (f_1(x), \ldots, f_k(x))$
- Existe $\omega \in \mathbb{R}^k_{++}$, con x^* : solución del método de punto ideal para $\gamma(u) = \max_i \omega_i |u_i|$.

Goal Programming no lineal

$$\begin{array}{lllll} f_i(x) & \geq & l_i & \forall i & \in & I_1 \\ f_i(x) & = & c_i & \forall i & \in & I_2 \\ f_i(x) & \leq & u_i & \forall i & \in & I_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{lccl} g_i(x) & := & \max\{l_i - f_i(x), 0\} & \forall i \in I_1 \\ g_i(x) & := & |f_i(x) - c_i| & \forall i \in I_2 \\ g_i(x) & := & \max\{f_i(x) - u_i, 0\} & \forall i \in I_3 \end{array}$$

Goal Programming

Punto Ideal