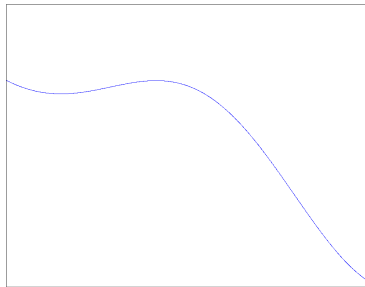
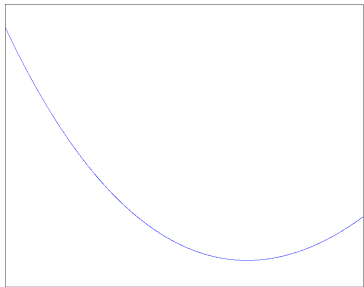


Optimización Global (I)

Emilio Carrizosa

Dpto. de Estadística e Investigación Operativa
Universidad de Sevilla

Diciembre de 2010



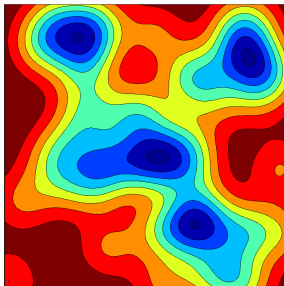
- Optimización global.
- Funciones dc: Propiedades básicas y su optimización.
-

$$\begin{array}{ll} \min & f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \text{s.a} & x \in S \end{array}$$

- Si f : convexa, y S : convexo, los óptimos locales son óptimos globales.
- Si no, usando un método numérico de búsqueda local, podemos quedar atrapados en un óptimo local no global

$\Phi_a : \downarrow$

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{a \in A} \Phi_a(\|x - a\|)$$



- Algunos problemas se transforman en (son equivalentes a) otros de minimización convexa (o maximización cóncava) sobre convexos.
- Otros pueden ser resueltos examinando **explícita o implícitamente** los puntos candidatos a solución óptima

Ejemplo. Estimadores de máxima verosimilitud

- Consideremos $x^1, \dots, x^k$: m.a.s. con f.d.d.
 $f_{\vartheta}(x) = c(x)e^{h(x, \vartheta)}$, con $\vartheta \mapsto h(x, \vartheta)$: **cóncava** $\forall x$,
 $\vartheta \in \Theta \subset \mathbb{R}^n$ (convexo)

- EMV:

$$\max_{\vartheta \in \Theta} \prod c(x^i) e^{h(x^i, \vartheta)}$$

- Tomando logs ...

$$\max_{\vartheta \in \Theta} \log\left(\prod c(x^i)\right) + \sum_{i=1}^k h(x^i, \vartheta)$$

- Maximización cóncava sobre convexo!

Ejemplo. Maximizando una función lineal sobre una superficie esférica

Para $c \neq 0$, sea

$$\begin{array}{ll} \min & c^\top x \\ \text{s.a.} & x^\top x = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min & c^\top x \\ \text{s.a.} & x^\top x \leq 1 \end{array}$$

- Los problemas son equivalentes
- El segundo, tiene función objetivo y restricciones convexas.

Ejemplo. Maximización cuadrática convexa sobre una superficie esférica

$$\begin{aligned} \max \quad & x^\top Q x \\ \text{s.a.} \quad & x^\top x = 1, \end{aligned}$$

Q : simétrica semidefinida **positiva**

Condiciones de optimalidad

$$\begin{aligned} Qx &= \lambda x \\ x^\top Qx &= \lambda x^\top x = \lambda \end{aligned}$$

- λ autovalor máximo de Q
- x : autovector unitario asociado a λ

En cambio ...

maximizar una cuadrática convexa sobre un cubo es NP-duro: P. Pardalos y S.A. Vavasis. "Quadratic programming with one negative eigenvalue is NP-hard". *Journal of Global Optimization* 1 (1991) 15–22

$$\begin{array}{ll} \max & \frac{1}{2}x^T Qx \\ \text{s.a.} & 0 \leq x_i \leq 1 \forall i = 1, 2, \dots, n \end{array}$$

Q : simétrica semidefinida **positiva**

$$\begin{array}{llll} Qx & = & \lambda - \mu & \\ \lambda_i(1 - x_i) & = & 0 & \forall i = 1, 2, \dots, n \\ \mu_i x_i & = & 0 & \forall i = 1, 2, \dots, n \\ x_i & \geq & 0 & \forall i = 1, 2, \dots, n \\ x_i & \leq & 1 & \forall i = 1, 2, \dots, n \\ \lambda_i, \mu_i & \geq & 0 & \forall i = 1, 2, \dots, n \end{array}$$

Consideremos

$$\begin{array}{ll} \min & f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \text{s.a} & x \in S \end{array}$$

con f : **cuasiconvexa** continua y S : politopo. Entonces, existe una solución óptima en un vértice de S .

Aplicación

- Localización de mínimo coste de transporte en grafos
- Localización de mínimo coste de transporte en el plano y distancias medidas con la ℓ_1
- Regresión ortogonal (suma de distancias): E.Carrizosa y F.Plastria. "Optimal expected-distance separating halfspace". *Mathematics of Operations Research* 33 (2008) 662–677.

Maximización convexa sobre politopos

S : politopo (poliedro acotado) en $\mathbb{R}^n$, γ : calibrador,
 $\omega_a > 0 \forall a \in A$.

$$\max_{x \in S} \sum_{a \in A} \omega_a \gamma(x - a)$$

Localización maxmin en el plano

$$\max_{x \in S} \min_{a \in A} \|x - a\|_2$$

$$\max_{a \in A} \left\{ \max_{x \in \text{SnV}(a)} \min_{a \in A} \|x - a\|_2 \right\}$$

Una solución óptima ...

en un vértice de un $V(a) \cap S$:

- vértice de S
- intersección de arista de S con frontera de una celda
- intersección de fronteras de dos celdas

Localización de soluciones. E.Carrizosa y F.Plastria.
"Dominators for multiple-objective quasiconvex maximization problems". *Journal of Global Optimization* 18, (2000) 35–58

Consideremos

$$\begin{array}{ll} \max & \Phi(f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_k(x_1, x_2, \dots, x_n)) \\ \text{s.a} & x \in S \end{array}$$

con $f_1, \dots, f_k$: cuasiconvexas, Φ : no decreciente, y S : politopo.
Entonces, existe una solución óptima en un **eje** de S .

Aplicación

- Problemas fraccionales multiplicativos
- ...