Programación Multicriterio

Balbina Virginia Casas Méndez

Curso de Programación Matemática: bloque II

Máster en Técnicas Estadísticas

Curso 2010/11

- Introducción
  - Ejemplos
- Programación multicriterio (fundamentos teóricos)
  - Formulación del problema y conceptos de solución
  - Condiciones para la eficiencia
- Métodos de obtención de soluciones
  - Optimización lexicográfica
  - Suma ponderada de objetivos
  - Programación por metas
- Algoritmos
  - El símplex multicriterio
- Dualidad y sensibilidad
  - La teoría de la dualidad multicriterio
  - Análisis de sensibilidad en programación multicriterio

Ejemplo de inversiones bancarias (Eatman and Sealey, 1979)

Un banco tiene 20 millones de euros de capital, 150 millones en cuentas corrientes y 80 millones en cuentas de ahorro y certificados de depósito.

Tabla 1. Oportunidades de inversión

Categoría	**Ganancia (%)**	**Parte líquida (%)**	**Existencia de riesgo (%)**
1: Pagos	0’0	100’0	No
2: Corto plazo	4’0	99’5	No
3: Gobierno 1-5 años	4’5	96’0	No
4: Gobierno 5-10 años	5’5	90’0	No
5: Gobierno 10- años	7’0	85’0	No
6: Préstamos a plazo	10’5	0’0	Sí
7: Préstamos hipotecarios	8’5	0’0	Sí
8: Préstamos comerciales	9’2	0’0	Sí

Variables:

X_j =cantidad invertida en la categoría j (millones de euros)
$j = 1, \ldots, 8$

Objetivos:

- max 0'040X_2+0'045X_3+0'055X_4+0'070X_5+0'105X_6 +0'085X_7+0'092X_8 (<u>beneficio</u>)
- min $\dfrac{1}{20}$ (X_6+X_7+X_8) (<u>riesgo</u>)

Restricciones:

- $X_1 + \cdots + X_8 = (20 + 150 + 80)$ (<u>inversión total</u>)
- $X_1 \geq 0'14(150) + 0'04(80)$ (<u>reserva para pagos</u>)
- $1'00X_1 + 0'995X_2 + 0'960X_3 + 0'900X_4$ $+0'850X_5 \geq 0'47(150) + 0'36(80)$ (<u>liquidez</u>)

- $X_j \geq 0'05(20 + 150 + 80)$ para todo $j = 1, \ldots, 8$ (diversificación)
- $X_8 \geq 0'30(20 + 150 + 80)$ (comercial)
- $X_1, \ldots, X_8 \geq 0$ (no negatividad)

En el trabajo se incluye otra función a minimizar usando como medida del riesgo la denominada “ratio de adecuación del capital” relacionada con el capital requerido para garantizar la solvencia.

El diseño de un dinamómetro (Singh and Agarwal, 1983)

Variables:

$W =$ anchura del anillo (en centímetros).

$T =$ espesor de la superficie exterior (en centímetros).

$R =$ radio de las dos aberturas (en centímetros).

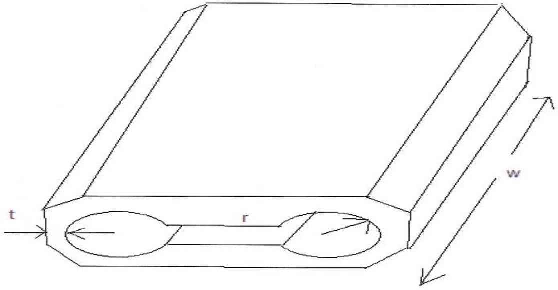
Objetivos:

- $\max \dfrac{0'7R}{EWT^2}$ (sensitividad)

  donde $E = 2'1 \times 10^6$ es el módulo de elasticidad de Young.

- $\max \dfrac{EWT^3}{R^3}$ (rigidez)

Figura 1.



Ejemplo de diseño de un dinamómetro

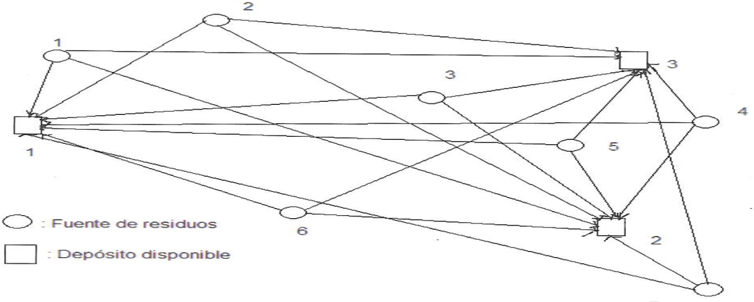
Restricciones:

- $5'0 \leq W \leq 10'0$
- $0'1 \leq T \leq 2'0$
- $1'25 \leq R \leq 20'0$

El problema se puede linealizar tomando logaritmos en las variables y en las funciones objetivo.

Destrucción de residuos peligrosos (ReVelle, Cohon and Shobrys, 1991)

Figura 2.



Ejemplo de residuos peligrosos y lugares de depósito

Tabla 2. Residuos peligrosos

		j=1		j=2		j=3		s_i
i		**k=1**	**k=2**	**k=1**	**k=2**	**k=1**	**k=2**	
1	Distancia	200	280	850	1090	900	1100	1’2
	Población	50	15	300	80	400	190	
2	Distancia	400	530	730	860	450	600	0’5
	Población	105	60	380	210	350	160	
3	Distancia	600	735	550	600	210	240	0’3
	Población	300	130	520	220	270	140	
4	Distancia	900	1060	450	570	180	360	0’7
	Población	620	410	700	430	800	280	
5	Distancia	600	640	390	440	360	510	0’6
	Población	205	180	440	370	680	330	
6	Distancia	900	1240	100	120	640	800	0’1
	Población	390	125	80	30	800	410	
7	Distancia	1230	1410	400	460	1305	1500	0’2
	Población	465	310	180	105	1245	790	

Parámetros:

$s_i =$ cantidad de residuo que se espera produzca la fuente i

$d_{i,j,k} =$ distancia de la fuente i al depósito j por el camino k

$p_{i,j,k} =$ población de la fuente i al depósito j por el camino k

Variables:

$$Y_j = \begin{cases} 1 & \text{si se abre el sitio } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$X_{i,j,k} =$ cantidad transportada de la fuente i al sitio j por la ruta k

Objetivo:

- min $\sum_{i=1}^{7} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{2} d_{i,j,k} X_{i,j,k}$ (distancia)
- min $\sum_{i=1}^{7} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{2} p_{i,j,k} X_{i,j,k}$ (población)

Restricciones:

- $\sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{2} X_{i,j,k} = s_i \; i = 1, \cdots, 7$ (<u>fuentes</u>)
- $\sum_{j=1}^{3} Y_j = 2$ (<u>depósitos</u>)
- $X_{i,j,k} \leq s_i Y_j \; i = 1, \cdots, 7; \; j = 1, 2, 3; \; k = 1, 2$
- $X_{i,j,k} \geq 0 \; i = 1, \cdots, 7; \; j = 1, 2, 3; \; k = 1, 2$
- $Y_j = 0$ o $1 \; j = 1, 2, 3$

Algunas aplicaciones recientes

Ehrgott, M. and Ryan, D. M. (2002)
Constructing robust crew schedules with bicriteria optimization.
Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, 11 (3): 139-150.

Algunas aplicaciones recientes

Ehrgott, M. and Ryan, D. M. (2002)
Constructing robust crew schedules with bicriteria optimization.
Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, 11 (3): 139-150.

Küfer, K. H., Scherrer, A., Monz, M., Alonso, F., Trinkaus, H., Bortfeld, T. and Thieke, C. (2003)
Intensity-modulated radiotherapy. A large scale multi-criteria programming problem.
OR Spectrum, 25 (2): 223-249.

Algunas aplicaciones recientes

Ehrgott, M. and Ryan, D. M. (2002)
Constructing robust crew schedules with bicriteria optimization.
Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, 11 (3): 139-150.

Küfer, K. H., Scherrer, A., Monz, M., Alonso, F., Trinkaus, H., Bortfeld, T. and Thieke, C. (2003)
Intensity-modulated radiotherapy. A large scale multi-criteria programming problem.
OR Spectrum, 25 (2): 223-249.

Romeijn, H. E. and Dempsey, J. F. (2008)
Intensity modulated radiation therapy treatment plan optimization.
TOP, 16 (2): 215-243.

Programación multicriterio (Ehrgott and Wiecek, 2005)

Un **programa multiobjetivo (multicriterio) (MOP)** (Gale, Kuhn and Tucker, 1951) se plantea como

$$\min(f_1(x), \cdots, f_p(x))$$
$$\text{sujeto a } x \in X$$

donde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ es una **función objetivo vectorial** y $X \subset \mathbb{R}^n$ es un **conjunto factible** a menudo dado ímplicitamente en forma de restricciones, es decir,

$$X := \{x \in S \subseteq \mathbb{R}^n \;:\; g_j(x) \leq 0,\, j = 1, \cdots, l;\; h_j(x) = 0,\, j = 1, \cdots, m\}.$$

[1] Todo problema multiobjetivo se puede plantear así.

Programación multicriterio (Ehrgott and Wiecek, 2005)

Un **programa multiobjetivo (multicriterio) (MOP)** (Gale, Kuhn and Tucker, 1951) se plantea como

$$\min(f_1(x), \cdots, f_p(x))$$
$$\text{sujeto a } x \in X$$

donde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ es una **función objetivo vectorial** y $X \subset \mathbb{R}^n$ es un **conjunto factible** a menudo dado ímplicitamente en forma de restricciones, es decir,

$$X := \{x \in S \subseteq \mathbb{R}^n \ : \ g_j(x) \leq 0, \ j = 1, \cdots, l; \quad h_j(x) = 0, \ j = 1, \cdots, m\}.$$

A veces se trata con una clase de MOP (MOP')[1] con conjunto factible definido por

$$X' := \{x \in S' \subseteq \mathbb{R}^n \ : \ g_j(x) \leq 0, \ j = 1, \cdots, l\}.$$

[1] Todo problema multiobjetivo se puede plantear así.

Conjunto de soluciones o resultados alcanzables en el espacio objetivo: $Y := f(X) \subset \mathbb{R}^p$.

En este contexto, “min” se entiende como encontrar soluciones preferidas en Y y su imagen inversa X.

Se dice que **una solución** y^1 **domina** (“es preferida a”) una solución y^2 con respecto a la **relación de Pareto**, $y^1 \succ_{Pareto} y^2$, si y sólo si $y^1_k \leq y^2_k$ para $k = 1, \cdots, p$ con una desigualdad estricta para al menos un k[2].

Denotaremos por $N(Y)$ el conjunto de resultados no dominados del MOP.

La imagen inversa de las soluciones no dominadas se llaman **soluciones eficientes** y el conjunto de todas ellas se denota por $E(X, f)$.

---

[2] Se puede dar una definición más general que involucre *otras nociones de preferencia* y la consideración de los subconjuntos de $\mathbb{R}^p$ denominados *conos*.

DEFINICIÓN (soluciones en el espacio de decisión)
Un punto $x \in X$ se llama:
Solución débilmente eficiente si no existe $x' \in X$ tal que $f(x') < f(x)$;
Solución eficiente si no existe $x' \in X$ tal que $f(x') \leq f(x)$ con $f(x') \neq f(x)$.

---

[3] Es cerrado el conjunto de los puntos factibles que en el espacio de objetivos "mejoran" a a, $\forall a \in \mathbb{R}$.

DEFINICIÓN (soluciones en el espacio de decisión)
Un punto $x \in X$ se llama:
Solución débilmente eficiente si no existe $x' \in X$ tal que $f(x') < f(x)$;
Solución eficiente si no existe $x' \in X$ tal que $f(x') \leq f(x)$ con $f(x') \neq f(x)$.

Es conocido que en los problemas de minimización (o maximización) de una función objetivo (escalar) $f(x)$ con $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ existe una solución óptima x^* si el conjunto X es compacto y la función f es **semicontinua inferior**[3] (respectivamente, superior), esto es, $\{x \ : \ f(x) \leq a\} = f^{-1}(-\infty, a]$ es cerrado $\forall a \in \mathbb{R}$ (respectivamente, $-f$ semicontinua inferior).

[3] Es cerrado el conjunto de los puntos factibles que en el espacio de objetivos "mejoran" a a, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Por ejemplo, la siguiente función es semicontinua superior pero no es semicontinua inferior:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

La propiedad de semicontinuidad superior o inferior es más débil que la de continuidad.

La siguiente función es semicontinua superior en $x = 1$ y no es continua por la derecha ni continua por la izquierda:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ \\ \frac{1}{2} + (1 - x) & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Soluciones eficientes y la frontera eficiente

Soluciones eficientes

Así pues, un punto factible de un modelo de optimización multiobjetivo es una **solución eficiente** (también llamada Pareto optimal o no dominada) si ninguna otra solución factible proporciona valores al menos tan buenos en todas las funciones objetivos y estrictamente mejor en una.

Soluciones eficientes y la frontera eficiente

Soluciones eficientes

Así pues, un punto factible de un modelo de optimización multiobjetivo es una **solución eficiente** (también llamada Pareto optimal o no dominada) si ninguna otra solución factible proporciona valores al menos tan buenos en todas las funciones objetivos y estrictamente mejor en una.

En el ejemplo del diseño del dinamómetro, la solución (5,0'1,20) es un punto eficiente **(f(5,0'1,20)=(1333'33.10^{-7}, 1'31))**. Sin embargo, la solución (7,1,3) **(f(7,1,3)=(1'43.10^{-7}, 544444'44))** no es un punto eficiente, ya que es dominado por (7,0'9,2'7) **(f(7,0'9,2'7)=(1'59.10^{-7}, 544444'44))**.

Identificando puntos eficientes gráficamente

Los puntos eficientes se manifiestan gráficamente como aquéllos para los cuales ningún punto factible distinto pertenece a la región acotada por los contornos de las funciones objetivo que pasan por el punto y que contienen las soluciones con igual o mejor valor de todos los objetivos.

Un ejemplo

Ejemplo numérico 1. Sea el problema biobjetivo:

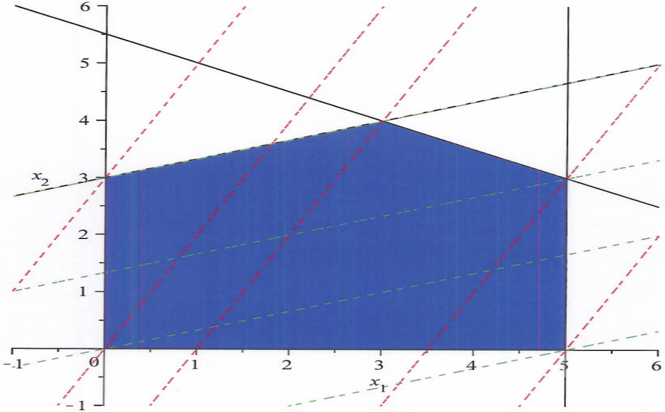
$$
\begin{aligned}
\max Z_1 &= 2X_1 - X_2\\
\max Z_2 &= -X_1 + 3X_2\\
\text{s. a } & X_1 + 2X_2 \leq 11\\
& -X_1 + 3X_2 \leq 9\\
& X_1 \leq 5\\
& X_1, X_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

a) Se representó gráficamente la región factible X.

b) Se estudian los puntos eficientes considerando los contornos de los objetivos.

Se verá en los resultados que la frontera eficiente en el espacio de decisión (región factible X) la forman el segmento que une los puntos (3,4) y (5,3) y el segmento que une los puntos (5,3) y (5,0).

```
> restart: with(plots):
> RES:=[x[1]+2*x[2]<=11,-x[1]+3*x[2]<=9,x[1]<=5,x[1]>=0,x[2]>=0]:
> RegionFactible:=inequal(RES, x[1]=-1..6,x[2]=-1..6,
  optionsfeasible=(color=blue),optionsexcluded=(color=white))
  :Contornosf1:=contourplot(2*x[1]-x[2],x[1]=-1..6,x[2]=-1..6,
  contours=[0,-3,2,7,10],linestyle=2,numpoints=2000,color=red):
> Contornosf2:=contourplot(-x[1]+3*x[2],x[1]=-1..6,x[2]=-1..6,
  contours=[0,9,9,4,-5],linestyle=2,numpoints=2000,color=green)
  :display([RegionFactible,Contornosf1,Contornosf2]);
```




```
>
```

Dibujo con Maxima de la región factible y de las curvas de nivel de los objetivos

```
(%i1) load(draw)$
(%i2) draw2d(
line_width=7,
color=orange,
implicit(2*x-y=-3,x,-1,6,y,-1,6),
color=red,
implicit(2*x-y=0,x,-1,6,y,-1,6),
implicit(2*x-y=2,x,-1,6,y,-1,6),
implicit(2*x-y=7,x,-1,6,y,-1,6),
implicit(2*x-y=10,x,-1,6,y,-1,6),
color=green,
implicit(-x+3*y=0,x,-1,6,y,-1,6),
implicit(-x+3*y=9,x,-1,6,y,-1,6),
implicit(-x+3*y=4,x,-1,6,y,-1,6),
color=yellow,
```

```
implicit(-x+3*y=-5,x,-1,6,y,-1,6),
color=black,
implicit(x+2*y=11,x,-1,6,y,-1,6),
implicit(-x+3*y=9,x,-1,6,y,-1,6),
implicit(x=5,x,-0.5,5.5,y,-1,6),
implicit(x=0,x,-1,6,y,-1,6),
implicit(y=0,x,-1,6,y,-1,6));
```

Análogamente, la frontera eficiente en el espacio de resultados de las funciones objetivo (Y) la forman el segmento que une los puntos (2,9) y (7,4) y el segmento que une los puntos (7,4) y (10,-5).

Representación del espacio de objetivos $Y = Z(X)$ con Maxima

```
(%i1) e1:-x+3*y=9$
(%i2) e2:x+2*y=11$
(%i3) algsys([e1,e2],[x,y]);
(%o3) [[x = 3, y = 4]]
(%i4) f1:2*x-y$
(%i5) z1:2*x-y$
(%i6) z2:-x+3*y$
(%i7) p1a:z1,x=0,y=3;
(%o7) - 3
(%i8) p1b:z2,x=0,y=3;
(%o8) 9
(%i9) p2a:z1,x=3,y=4;
(%o9) 2
(%i10) p2b:z2,x=3,y=4;
(%o10) 9
```

```
(%i11) p3a:z1,x=5,y=3;
(%o11) 7
(%i12) p3b:z2,x=5,y=3;
(%o12) 4
(%i13) p4a:z1,x=5,y=0;
(%o13) 10
(%i14) p4b:z2,x=5,y=0;
(%o14) - 5
(%i15) draw2d(xrange = [-5,15],
yrange = [-5,15],
point_size = 3,
point_type = circle,
color = blue,
points_joined = true,
line_type = dots,
point_type = circle,
color = red,
line_width = 7,
points([[0,0],[-3,9],[2,9],[7,4],[10,-5],[0,0]]) );
```

TEOREMA Supongamos el MOP planteado para max f.
Si $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto compacto
y se tiene que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p_+$ es tal que f_j $(j = 1, \cdots, p)$
es semicontinua superior[4],
entonces $E(X, f) \neq \emptyset$.
Demostración: ver Sawaragi et al., 1985[5].

---

[4]Como en el caso escalar, significa que es cerrado el conjunto de puntos factibles que en el espacio de resultados mejoran a y, $\forall y \in \mathbb{R}^p_+$.

[5]La demostración se hace para un caso general de preferencias, considerando conos y para funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.

Un ejemplo con $E(X, f, C) = \emptyset$

Sea el problema biobjetivo:

$$\begin{aligned} \max Z_1 &= 240X_1 + 130X_2 \\ \max Z_2 &= 2X_1 \\ \text{s. a } & 5X_1 + 2X_2 \geq 10 \\ & 4X_1 + 5X_2 \geq 5 \\ & X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Se tiene que $E(X, f, C) = \emptyset$.

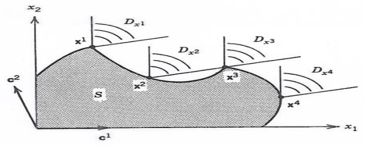
El conjunto factible X no es compacto.

Otras propiedades del conjunto eficiente

En un problema de optimización multicriterio lineal, se prueba que el conjunto eficiente es siempre conexo. Pero en problemas con ausencia de linealidad, ese conjunto puede no ser conexo, como muestra la siguiente figura. En Ehrgott and Wiecek (2005) se pueden ver resultados relativos a la propiedad de conexión de este conjunto.

Figura 4.

Conjunto eficiente no conexo



Otras nociones de eficiencia

DEFINICIÓN (Geoffrion, 1968) Un punto $\hat{x} \in X$ se denomina **solución propiamente eficiente** del MOP en el sentido de Geoffrion si $\hat{x}$ es eficiente y existe $M > 0$ tal que para cada $k = 1, \cdots, p$ y cada $x \in X$ que satisface $f_k(x) < f_k(\hat{x})$ existe un $l \neq k$ con $f_l(x) > f_l(\hat{x})$ y $(f_k(\hat{x}) - f_k(x))/(f_l(x) - f_l(\hat{x})) \leq M$.

Recoge la idea intuitiva de eliminar decisiones que permiten tasas de intercambio no acotadas.

Otras nociones de eficiencia

DEFINICIÓN (Geoffrion, 1968) Un punto $\hat{x} \in X$ se denomina **solución propiamente eficiente** del MOP en el sentido de Geoffrion si $\hat{x}$ es eficiente y existe $M > 0$ tal que para cada $k = 1, \cdots, p$ y cada $x \in X$ que satisface $f_k(x) < f_k(\hat{x})$ existe un $l \neq k$ con $f_l(x) > f_l(\hat{x})$ y $(f_k(\hat{x}) - f_k(x))/(f_l(x) - f_l(\hat{x})) \leq M$.

Recoge la idea intuitiva de eliminar decisiones que permiten tasas de intercambio no acotadas.

Ejemplo numérico 2. Sea $p = 2$, $X = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1\}$ y $f(x) = x$. Es fácil ver que los puntos (1,0) (siempre encuentro puntos que aunque empeore el segundo objetivo mejora el primero, relativamente, tanto como se quiera) y (0,1) son eficientes y sin embargo no son propiamente eficientes.

Otras nociones de eficiencia

DEFINICIÓN (Geoffrion, 1968) Un punto $\hat{x} \in X$ se denomina **solución propiamente eficiente** del MOP en el sentido de Geoffrion si $\hat{x}$ es eficiente y existe $M > 0$ tal que para cada $k = 1, \cdots, p$ y cada $x \in X$ que satisface $f_k(x) < f_k(\hat{x})$ existe un $l \neq k$ con $f_l(x) > f_l(\hat{x})$ y $(f_k(\hat{x}) - f_k(x))/(f_l(x) - f_l(\hat{x})) \leq M$.

Recoge la idea intuitiva de eliminar decisiones que permiten tasas de intercambio no acotadas.

Ejemplo numérico 2. Sea $p = 2$, $X = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1\}$ y $f(x) = x$. Es fácil ver que los puntos (1,0) (siempre encuentro puntos que aunque empeore el segundo objetivo mejora el primero, relativamente, tanto como se quiera) y (0,1) son eficientes y sin embargo no son propiamente eficientes.

Eficiencia propia $\Longrightarrow$ Eficiencia $\Longrightarrow$ Eficiencia débil

Otras nociones de eficiencia

DEFINICIÓN (Geoffrion, 1968) Un punto $\hat{x} \in X$ se denomina **solución propiamente eficiente** del MOP en el sentido de Geoffrion si $\hat{x}$ es eficiente y existe $M > 0$ tal que para cada $k = 1, \cdots, p$ y cada $x \in X$ que satisface $f_k(x) < f_k(\hat{x})$ existe un $l \neq k$ con $f_l(x) > f_l(\hat{x})$ y $(f_k(\hat{x}) - f_k(x))/(f_l(x) - f_l(\hat{x})) \leq M$.

Recoge la idea intuitiva de eliminar decisiones que permiten tasas de intercambio no acotadas.

Ejemplo numérico 2. Sea $p = 2$, $X = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1\}$ y $f(x) = x$. Es fácil ver que los puntos (1,0) (siempre encuentro puntos que aunque empeore el segundo objetivo mejora el primero, relativamente, tanto como se quiera) y (0,1) son eficientes y sin embargo no son propiamente eficientes.

Eficiencia propia $\Longrightarrow$ Eficiencia $\Longrightarrow$ Eficiencia débil

Otras definiciones de eficiencia propia: Borwein, Benson, Henig, Kuhn-Tucker (ver Sawaragi et al., 1985).

En el ejemplo anterior, veamos que (0,1), aunque es eficiente no es propiamente eficiente. Si hacemos $x_1 = 0'01$ (empeora un objetivo) entonces se puede tener $x_2 = 0'8590$ (mejora el otro) y $(1 - 0'8590)/(0'01 - 0) = 14'1$.

Si hacemos $x_1 = 0'0001$ entonces $x_2 = 0'98586$ y $(1 - 0'98586)/(0'0001 - 0) = 141'4$: puedo mejorar uno (relativamente) tanto como quiera, empeorando un poco el otro.

Un trabajo reciente en esta línea

Ruiz, F., Rey, L. and Muñoz, M. M. (2008)

A graphical characterization of the efficient set for convex multiobjective problems.

Annals of Operations Research.

DOI 10.1007/s10479-008-0346-x

Cualificación de restricción de Kuhn-Tucker

Una solución factible del MOP', x^*, donde las funciones f_i ($i = 1, \cdots, p$), g_j ($j = 1, \cdots, l$) son convexas y continuamente diferenciables, se dice que satisface la **cualificación de restricción de Kuhn-Tucker** si los vectores $\nabla g_j(x^*)$ ($j \in J$) son linealmente independientes, donde $J = \{j \in \{1, \cdots, l\} \; : \; g_j(x^*) = 0\}$.

Caracterización de la eficiencia: condiciones de primer orden

TEOREMA (Ver Sawaragi et al. 1985 para la demostración)
Sea un problema MOP' convexo
(con todas las funciones objetivo convexas
y el conjunto factible X convexo) donde las funciones
f_i $(i = 1, \cdots, p)$, g_j $(j = 1, \cdots, l)$ son convexas
y continuamente diferenciables y sea $\hat{x} \in X$
tal que la cualificación de restricción se satisface en $\hat{x}$.
El punto $\hat{x}$ es propiamente eficiente si y sólo si las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker se satisfacen en $\hat{x}$, es decir, si y sólo si existen vectores
$w \in \mathbb{R}^p$ $(w > 0)$ y $u \in \mathbb{R}^l$ $(u \geq 0)$ tales que

$$\sum_{k=1}^{p} w_k \nabla f_k(\hat{x}) + \sum_{j=1}^{l} u_j \nabla g_j(\hat{x}) = 0$$

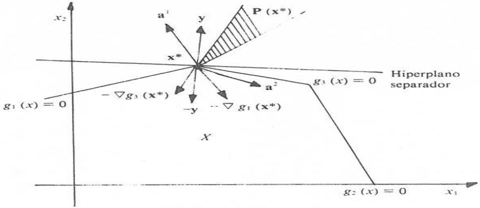
$u_j g_j(\hat{x}) = 0$ para todo $j = 1, \cdots, l$.

Observaciones a las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker

- Difieren de las del mismo nombre para el caso escalar en el primer término de la primera condición.
- La primera condición son combinaciones de gradientes de las funciones objetivo y de las restricciones evaluadas en el punto $\hat{x}$.
- La segunda condición se refiere al establecimiento de la holgura complementaria.

Condición de Karush-Kuhn-Tucker: interpretación geométrica

Figura 5.



Condición de Karush-Kuhn-Tucker

Vamos a interpretar la primera de las condiciones en un problema de maximizar. En la figura anterior hemos representado la región factible (X) correspondiente a tres restricciones lineales (g_1, g_2 y g_3) y el conjunto de puntos preferidos a un punto factible x^* de acuerdo con dos objetivos lineales ($P(x^*)$). Trazamos el hiperplano que separa X y $P(x^*)$ y el vector normal a este hiperplano ($\mathbf{y}$).

Si consideramos -$\mathbf{y}$, está en el cono generado por las restricciones que se cortan en x^*, es decir al cono generado por $-\nabla g_1(x^*)$ y $-\nabla g_3(x^*)$ dado que en otro caso el hiperplano no separaría la región factible de $P(x^*)$. Así

$$-\mathbf{y} = u_1(-\nabla g_1(x^*)) + u_2(-\nabla g_3(x^*)).$$

Análogamente, $\mathbf{y}$ está en el cono generado por los gradientes de las funciones objetivos y se tiene:

$$\mathbf{y} = w_1 a_1 + w_2 a_2 = w_1 \nabla f_1(x^*) + w_2 \nabla f_2(x^*).$$

Caso lineal: el modelo

En un **problema de programación lineal multiobjetivo (MOLP)** querremos maximizar las funciones objetivo

$$(c^i)^T X, \; i = 1, \cdots, p$$

sujeto a las restricciones

$$AX \leq b, \; X \geq 0,$$

donde los c^i son p vectores de constantes de dimensión n, X es un vector de variables n-dimensional, b es un vector de constantes m-dimensional y A es una matriz de constantes $m \times n$ (T se utiliza para denotar la traspuesta de una matriz). Podemos trasladar a este contexto, de forma natural, las nociones anteriores de factibilidad y eficiencia en sus diferentes versiones.

Caso lineal: propiedades del conjunto eficiente

TEOREMA (Geoffrion, 1968) Un vector $\hat{x}$ factible para un problema MOLP es eficiente si y sólo si existen coeficientes de ponderación no negativos $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ tales que $\hat{x}$ maximiza la función objetivo compuesta

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i (c^i)^T X.$$

TEOREMA (Yu and Zeleny, 1975) Sean x^1 y x^2 puntos factibles del MOLP. Si x^1 no es eficiente entonces cualquier punto

$$x = \lambda x^1 + (1 - \lambda) x^2, \; 0 < \lambda \leq 1,$$

es no eficiente.

Demostración. Hay un punto y que domina a x^1 por tanto si C es la matriz formada por todos los coeficientes de las variables en las funciones objetivo, se tiene

$$Cy \geq Cx^1, \; Cy \neq Cx^1.$$

De esta forma, el punto $\lambda y + (1-\lambda)x^2$ domina a $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$ para cualquier $0 < \lambda \leq 1$ puesto que

$$C(\lambda y + (1-\lambda)x^2) = \lambda Cy + (1-\lambda)Cx^2 \geq \lambda Cx^1 + (1-\lambda)Cx^2$$

$$= C(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \text{ y}$$

$$C(\lambda y + (1-\lambda)x^2) \neq C(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2). \; \square$$

COROLARIO El conjunto de soluciones no eficientes es convexo.

TEOREMA (Yu and Zeleny, 1975). Si el conjunto factible es acotado, por lo que es la envoltura convexa de un número finito de vértices $x^1, \cdots, x^r$, entonces cualquier solución eficiente $\hat{x}$ está en la envoltura convexa de los vértices eficientes.

La frontera eficiente

La **frontera eficiente** de un modelo de optimización multiobjetivo es la colección de puntos eficientes de dicho modelo.

La frontera eficiente

La **frontera eficiente** de un modelo de optimización multiobjetivo es la colección de puntos eficientes de dicho modelo.

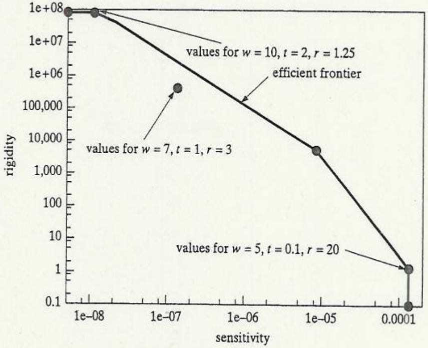
La frontera eficiente está en el límite de la región definida por los valores del objetivo en los puntos factibles. Cada punto eficiente está sobre este límite ya que no es posible mejorar en un objetivo sin empeorar en otro.
Los puntos dominados están en el interior.

La frontera eficiente

La **frontera eficiente** de un modelo de optimización multiobjetivo es la colección de puntos eficientes de dicho modelo.

La frontera eficiente está en el límite de la región definida por los valores del objetivo en los puntos factibles. Cada punto eficiente está sobre este límite ya que no es posible mejorar en un objetivo sin empeorar en otro.
Los puntos dominados están en el interior.

La frontera eficiente se puede construir por optimización repetida. Nuevas restricciones permiten alcanzar ciertos niveles para todos los objetivos menos uno. Éste se trata como un objetivo simple.



Efficient Frontier for Dynamometer Ring Example

Figura 6.

Tabla 3. Frontera eficiente en el ejemplo del dinamómetro

Objetivo Sensitividad	Objetivo Rigidez	Puntos eficientes		
		w	t	r
$1'333\times10^{-4}$	1'312	5'00	0'100	20'00
$6'776\times10^{-5}$	10^1	5'00	0'100	10'16
$3'145\times10^{-5}$	10^2	5'00	0'100	4'72
$1'460\times10^{-5}$	10^3	5'00	0'100	2'19
$5'510\times10^{-6}$	10^4	5'00	0'123	1'25
$1'187\times10^{-6}$	10^5	5'00	0'265	1'25
$2'557\times10^{-7}$	10^6	5'00	0'571	1'25
$5'510\times10^{-8}$	10^7	5'00	1'230	1'25
$1'042\times10^{-8}$	$8'6\times10^7$	10'00	2'000	1'25

- Maximizar sensitividad sin tener en cuenta rigidez produce el punto ($1'333 \times 10^{-4}$,$1'312$).
- Maximizar rigidez sin tener en cuenta sensitividad origina ($1'042 \times 10^{-8}$,$8'6 \times 10^{7}$).
- Conocido el rango relevante de rigidez, los restantes puntos se obtienen maximizando sensitividad sujeto a una restricción en rigidez.

Por ejemplo, los valores para rigidez 10^3 resultan de resolver:

$$\max \frac{0'7r}{Ewt^2} \text{ (\underline{sensitividad})}$$

$$\text{s. a } \frac{Ewt^3}{r^3} \geq 10^3 \text{ (\underline{rigidez})}$$

$$5'0 \leq w \leq 10'0$$

$$0'1 \leq t \leq 2'0$$

$$1'25 \leq r \leq 20'0$$

Estos problemas se pueden resolver con el solver (para programación no lineal) de excel.

Los métodos de no escalarización

En contraste con las aproximaciones mediante escalarización, los métodos de no escalarización no utilizan explícitamente una función de escalarización. Más bien dependen de otros conceptos de optimalidad o conjuntos auxiliares.
Uno de estos métodos es la aproximación lexicográfica.

Optimización lexicográfica

La aproximación lexicográfica asume un ranking de las funciones objetivo según su importancia. Sea π una permutación de $\{1, \cdots, p\}$ y supongamos que $f_{\pi(k)}$[6] es más importante que $f_{\pi(k+1)}$, $k = 1, \cdots, p-1$. Sea $f^{\pi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ dada por$(f_{\pi(1)}, \cdots, f_{\pi(p)})$.

[6] $f_{\pi(k)}$ es el objetivo k-ésimo en el ranking.

Optimización lexicográfica

La aproximación lexicográfica asume un ranking de las funciones objetivo según su importancia. Sea π una permutación de $\{1, \cdots, p\}$ y supongamos que $f_{\pi(k)}$[6] es más importante que $f_{\pi(k+1)}$, $k = 1, \cdots, p-1$. Sea $f^\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ dada por$(f_{\pi(1)}, \cdots, f_{\pi(p)})$.

Se denota $y^1 \succ_{lex} y^2$ (preferencia lexicográfica) si $y^1 = y^2$ o existe k, $1 \leq k \leq p$, tal que $y_i^1 = y_i^2$, $i = 1, \cdots, k-1$ e $y_k^1 < y_k^2$. El **problema lexicográfico** se define como

$$\begin{array}{c} \text{min lex } f^\pi(x) \\ \text{s. a } x \in X. \end{array}$$

[6] $f_{\pi(k)}$ es el objetivo k-ésimo en el ranking.

Optimización lexicográfica

La aproximación lexicográfica asume un ranking de las funciones objetivo según su importancia. Sea π una permutación de $\{1, \cdots, p\}$ y supongamos que $f_{\pi(k)}$[6] es más importante que $f_{\pi(k+1)}$, $k = 1, \cdots, p-1$. Sea $f^{\pi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ dada por$(f_{\pi(1)}, \cdots, f_{\pi(p)})$.

Se denota $y^1 \succ_{lex} y^2$ (preferencia lexicográfica) si $y^1 = y^2$ o existe k, $1 \leq k \leq p$, tal que $y_i^1 = y_i^2$, $i = 1, \cdots, k-1$ e $y_k^1 < y_k^2$. El **problema lexicográfico** se define como

$$\begin{array}{c} \min \operatorname{lex} f^{\pi}(x) \\ \text{s. a } x \in X. \end{array}$$

Sea $X_0^{\pi} = X$ y se define recursivamente para $k = 1, \cdots, p$, $X_k^{\pi} := \{\hat{x} \in X_{k-1}^{\pi} \ : \ f_{\pi(k)}(\hat{x}) = \min f_{\pi(k)}(x),\ x \in X_{k-1}^{\pi}\}$.

[6] $f_{\pi(k)}$ es el objetivo k-ésimo en el ranking.

TEOREMA. Sea π una permutación de $\{1, \cdots, p\}$.

1. Si $X_k^\pi = \{\hat{x}\}$ (consta de un único punto) entonces $\hat{x}$ es una solución óptima del problema lexicográfico y $\hat{x} \in X_E$, donde X_E denota el conjunto de puntos eficientes del problema de optimización multiobjetivo.
2. Todos los elementos de X_p^π son soluciones óptimas del problema lexicográfico y $X_p^\pi \subset X_E$.

La inclusión $\cup_\pi X_p^\pi \subset X_E$ es usualmente estricta.

En resumen: la **optimización lexicográfica** realiza optimización multiobjetivo considerando objetivos de uno en uno. El más importante es optimizado; después el segundo más importante se optimiza sujeto al requerimiento de que el primero alcance su valor óptimo; y se continúa así.

En resumen: la **optimización lexicográfica** realiza optimización multiobjetivo considerando objetivos de uno en uno. El más importante es optimizado; después el segundo más importante se optimiza sujeto al requerimiento de que el primero alcance su valor óptimo; y se continúa así.

Si cada etapa de la optimización lexicográfica proporciona un óptimo para un objetivo simple, la solución final es un punto eficiente del modelo multiobjetivo completo.

En resumen: la **optimización lexicográfica** realiza optimización multiobjetivo considerando objetivos de uno en uno. El más importante es optimizado; después el segundo más importante se optimiza sujeto al requerimiento de que el primero alcance su valor óptimo; y se continúa así.

Si cada etapa de la optimización lexicográfica proporciona un óptimo para un objetivo simple, la solución final es un punto eficiente del modelo multiobjetivo completo.

Después de que una función objetivo ha sido optimizada en una etapa de procesado lexicógrafico en un modelo multiobjetivo, las soluciones obtenidas en posteriores etapas deben de ser todas óptimos alternativos en la primera.

Un ejemplo de optimización lexicográfica

Ilustramos el procedimiento por medio del ejemplo de las inversiones bancarias.

1) min $\dfrac{1}{20}\,(x_6+x_7+x_8)$ (<u>riesgo</u>)

s. a $\quad x_1 + \cdots + x_8 = (20 + 150 + 80)$ (<u>inversión total</u>)

$x_1 \geq 0'14(150) + 0'04(80)$ (<u>reserva para pagos</u>)

$1'00x_1 + 0'995x_2 + 0'960x_3 + 0'900x_4$

$+0'850x_5 \geq 0'47(150) + 0'36(80)$ (<u>liquidez</u>)

$x_j \geq 0'05(20 + 150 + 80)$ para todo $j = 1, \ldots, 8$

(<u>diversificación</u>)

$x_8 \geq 0'30(20 + 150 + 80)$ (<u>comercial</u>)

$x_1, \ldots, x_8 \geq 0$ (<u>no negatividad</u>)

Optimización lexicográfica para el problema de las inversiones bancarias. Paso 1 con Maxima

```
(%i1) load(simplex)$

(%i2) minimize_lp((1/20)*(f+g+h),
[a+b+c+d+e+f+g+h=250,a>=24.2,
a+0.995*b+0.96*c+0.9*d+0.85*e>=99.3,a>=12.5,
b>=12.5,c>=12.5,d>=12.5,e>=12.5,f>=12.5,
g>=12.5,h>=12.5,h>=75]), nonegative_lp=true;

(%o2) [5.0, [h = 75.0, g = 12.5, f = 12.5, e = 12.5, d = 12.5,
c = 12.5, b = 12.5, a = 100.0]]

(%i3) 0.040*12.5+0.045*12.5+0.055*12.5+0.070*12.5+
0.105*12.5+0.085*12.5+0.092*75;

(%o3) 11.9
```

Solución óptima:

$$x_1^* = 100'0,\ x_2^* = 12'5,\ x_3^* = 12'5,\ x_4^* = 12'5$$

$$x_5^* = 12'50,\ x_6^* = 12'5,\ x_7^* = 12'5,\ x_8^* = 75'0$$

con riesgo óptimo 5’0 y beneficio 11’9 millones de euros.

2) max $0'040x_2+0'045x_3+0'055x_4+0'070x_5+0'105x_6+0'085x_7$

$+0'092x_8$ (beneficio)

s. a $\quad \dfrac{1}{20}(x_6+x_7+x_8) \leq 5'0$ (riesgo)

$x_1 + \cdots + x_8 = (20 + 150 + 80)$ (inversión total)

$x_1 \geq 0'14(150) + 0'04(80)$ (reserva para pagos)

$1'00x_1 + 0'995x_2 + 0'960x_3 + 0'900x_4$

$+0'850x_5 \geq 0'47(150) + 0'36(80)$ (liquidez)

$x_j \geq 0'05(20 + 150 + 80)$ para todo $j = 1, \ldots, 8$

(diversificación)

$x_8 \geq 0'30(20 + 150 + 80)$ (comercial)

$x_1, \ldots, x_8 \geq 0$ (no negatividad)

Optimización lexicográfica para el problema de las inversiones bancarias. Paso 2.

```
(%i4) maximize_lp(
0.040*b+0.045*c+0.055*d+0.070*e+0.105*f+0.085*g+0.092*h,
[(1/20)*(f+g+h)<=5,a+b+c+d+e+f+g+h=250,a>=24.2,
a+0.995*b+0.96*c+0.9*d+0.85*e>=99.3,a>=12.5,
b>=12.5,c>=12.5,d>=12.5,e>=12.5,f>=12.5,
g>=12.5,h>=12.5,h>=75]), nonegative_lp=true;
(%o4) [17.206, [e = 88.30000000000001,
d = 12.5, c = 12.5, b = 12.5, a = 24.2, h = 75.0, g = 12.5,
f = 12.5]]
```

Solución óptima:

$$x_1^* = 24'2,\ x_2^* = 12'5,\ x_3^* = 12'5,\ x_4^* = 12'5$$

$$x_5^* = 88'3,\ x_6^* = 12'5,\ x_7^* = 12'5,\ x_8^* = 75'0$$

con riesgo óptimo 5’0 y beneficio 17’2 millones de euros.

Los métodos de escalarización

La aproximación tradicional para generar soluciones de un MOP es la escalarización, que implica formular un programa con objetivo único a través de una función obtenida de los objetivos del MOP, variables auxiliares y parámetros auxiliares.

En ocasiones, la región factible del MOP es restringida adicionalmente por medio de funciones relacionadas con los objetivos del MOP y/o las nuevas variables introducidas.

Bajo ciertas hipótesis, los conjuntos de solución de estos nuevos programas proporcionan soluciones del problema original.

La aproximación mediante sumas ponderadas

En la aproximación mediante sumas ponderadas, se minimiza una suma ponderada de las funciones objetivo:

La aproximación mediante sumas ponderadas

En la aproximación mediante sumas ponderadas, se minimiza una suma ponderada de las funciones objetivo:

$$\begin{array}{c} \min \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k(x) \\ \text{s. a } x \in X \end{array}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}^p_+$.

TEOREMA (Geoffrion, 1968).

1. Sea $\lambda \in \mathbb{R}^p_+$. Si $\hat{x} \in X$ es una solución óptima del problema de minimización de la suma ponderada de funciones objetivo entonces $\hat{x}$ es una solución factible y débilmente eficiente en el problema original. Si $\hat{x} \in X$ es la única solución óptima del problema de minimización de la suma ponderada de funciones objetivo entonces $\hat{x}$ es una solución factible y eficiente en el problema original.
2. Sea $\lambda \in \mathbb{R}^p_{++}$. Si $\hat{x} \in X$ es una solución óptima del problema de minimización de la suma ponderada de funciones objetivo entonces $\hat{x}$ es una solución factible y propiamente eficiente en el sentido de Geoffrion del problema original.
3. Consideremos un MOP convexo. Un punto $\hat{x} \in X$ es una solución óptima del problema de minimización de la suma ponderada de funciones objetivo para algún $\lambda \in \mathbb{R}^p_{++}$ si y sólo si $\hat{x}$ es una solución factible y propiamente eficiente en el sentido de Geoffrion del problema original.

En resumen: funciones multiobjetivo pueden ser combinadas en una sencilla por medio de pesos.

En resumen: funciones multiobjetivo pueden ser combinadas en una sencilla por medio de pesos.

Si en un modelo con objetivo sencillo de sumas ponderadas derivado de uno de optimización multiobjetivo, se obtiene una solución óptima, la solución es un punto eficiente en el modelo multiobjetivo.

Demostración

Para ver que es cierto, sólo necesitamos considerar la naturaleza de una suma ponderada de objetivos:

$$\text{(peso 1)(valor objetivo 1)+(peso 2)(valor objetivo 2)+}\ldots\text{+(peso p)(valor objetivo p)}$$

Cualquier solución que pueda mejorar un objetivo sin empeorar los otros va también a mejorar el objetivo ponderado y en consecuencia sólo puntos eficientes del modelo multiobjetivo pueden ser soluciones óptimas para el modelo de función objetivo sencillo con suma ponderada. $\square$

Ilustramos el procedimiento con el ejemplo de destrucción de residuos. Introducimos una única función objetivo tomando pesos $\gamma_1, \gamma_2 > 0$:

$$\min \sum_{i=1}^{7} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{2} (\gamma_1 d_{i,j,k} + \gamma_2 p_{i,j,k}) x_{i,j,k}.$$

Se trata de un problema de programación entera mixta. Lo podemos resolver con el complemento Solver de Excel.

Tabla 4. Distintas ponderaciones en la función objetivo

Pesos		Distancias		Distancia Total	Población Total	Sitios Óptimos
γ_1	γ_2	$k=1$	$k=2$			
10	1	1155	0	1155	1334’5	1,3
10	5	754	591	1345	782’5	1,3
10	10	1046	404	1450	607’5	1,2
5	10	440	1114	1554	533’0	1,3
1	10	0	1715	1715	468’5	1,3

Programación por metas ("*goal programming*", Charnes, Cooper and Ferguson, 1955)

Las metas especifican los valores de las funciones criterio en un modelo de optimización que los decisores consideran suficiente o satisfactorio.

Programación por metas ("*goal programming*", Charnes, Cooper and Ferguson, 1955)

Las metas especifican los valores de las funciones criterio en un modelo de optimización que los decisores consideran suficiente o satisfactorio.

Restricciones suaves tales como las metas en programación especifican requerimientos que son deseables pero que podrían ser incumplidos por soluciones factibles.

Programación por metas (“*goal programming*", Charnes, Cooper and Ferguson, 1955)

Las metas especifican los valores de las funciones criterio en un modelo de optimización que los decisores consideran suficiente o satisfactorio.

Restricciones suaves tales como las metas en programación especifican requerimientos que son deseables pero que podrían ser incumplidos por soluciones factibles.

El objetivo en un modelo de programación por metas recoge la idea de satisfacer todas las metas tanto como sea posible, mediante la minimización de una suma ponderada de las denominadas **variables de deficiencia**.

Programación por metas (“*goal programming*", Charnes, Cooper and Ferguson, 1955)

Las metas especifican los valores de las funciones criterio en un modelo de optimización que los decisores consideran suficiente o satisfactorio.

Restricciones suaves tales como las metas en programación especifican requerimientos que son deseables pero que podrían ser incumplidos por soluciones factibles.

El objetivo en un modelo de programación por metas recoge la idea de satisfacer todas las metas tanto como sea posible, mediante la minimización de una suma ponderada de las denominadas **variables de deficiencia**.

No es necesario que los pesos de las variables de deficiencia sean desiguales.

Modelo de programación por metas para el ejemplo de inversiones bancarias

$$
\begin{aligned}
&\min\ d_1 + d_2 \ (\underline{\text{deficiencia total}}) \\
&\text{s. a} \quad 0'040x_2{+}0'045x_3{+}0'055x_4{+}0'070x_5{+}0'105x_6{+}0'085x_7 \\
&\qquad +0'092x_8 + d_1 \geq 18'5 \ (\underline{\text{beneficio}}) \\
&\qquad \frac{1}{20}\,(x_6{+}x_7{+}x_8) - d_2 \leq 7'0 \ (\underline{\text{riesgo}}) \\
&\qquad x_1 + \cdots + x_8 = (20 + 150 + 80) \ (\underline{\text{inversión total}}) \\
&\qquad x_1 \geq 0'14(150) + 0'04(80) \ (\underline{\text{reserva para pagos}}) \\
&\qquad 1'00x_1 + 0'995x_2 + 0'960x_3 + 0'900x_4 \\
&\qquad +0'850x_5 \geq 0'47(150) + 0'36(80) \ (\underline{\text{liquidez}})
\end{aligned}
$$

$x_j \geq 0'05(20 + 150 + 80)$ para todo $j = 1, \ldots, 8$

(diversificación)

$x_8 \geq 0'30(20 + 150 + 80)$ (comercial)

$x_1, \ldots, x_8 \geq 0$ (no negatividad)

$d_1, d_2 \geq 0$ (no negatividad)

Programación por metas lexicográfica

La programación por metas lexicográfica considera las metas de una en una. Se minimiza la deficiencia para la meta más importante. A continuación, se minimiza la deficiencia de la segunda más importante sujeto al requerimiento de que la primera alcanza su mínimo, y se continúa así.

Programación por metas lexicográfica

La programación por metas lexicográfica considera las metas de una en una. Se minimiza la deficiencia para la meta más importante. A continuación, se minimiza la deficiencia de la segunda más importante sujeto al requerimiento de que la primera alcanza su mínimo, y se continúa así.

La programación por metas lexicográfica se puede realizar en un único paso resolviendo con una función objetivo que asigna un peso muy grande a la deficiencia más importante, un peso menor a la deficiencia de la segunda meta en el “ranking" y así sucesivamente.

Ejemplo numérico 3. Para ilustrar el procedimiento consideremos el modelo de programación lineal multiobjetivo:

$\max x_1$

$\max 2x_1 + 3x_2$

s. a $x_1 \leq 3;\ x_1 + x_2 \leq 5;\ x_1, x_2 \geq 0$

- Si asumimos una meta de 2 en el primer objetivo y otra de 14 en el segundo, introduciendo las correspondientes variables de deficiencia, resulta el siguiente *modelo de programación por metas*:

  $\min d_1 + d_2$

  s. a $x_1 + d_1 \geq 2; 2x_1 + 3x_2 + d_2 \geq 14;$
  $x_1 \leq 3;\ x_1 + x_2 \leq 5;\ x_1, x_2, d_1, d_2 \geq 0$

- Si realizamos *programación por metas lexicográfica* vamos a considerar dos modelos:

a) min d_1

s. a $x_1 + d_1 \geq 2; 2x_1 + 3x_2 + d_2 \geq 14;$
$x_1 \leq 3;\ x_1 + x_2 \leq 5;\ x_1, x_2, d_1, d_2 \geq 0$

b) min d_2

s. a $x_1 + d_1 \geq 2; 2x_1 + 3x_2 + d_2 \geq 14;$
$x_1 \leq 3;\ x_1 + x_2 \leq 5;\ x_1, x_2, d_2 \geq 0; d_1 = 0$

- El siguiente sería un modelo de *programación por metas lexicográfica con pesos*:

  min $100d_1 + d_2$

  s. a $x_1 + d_1 \geq 2; 2x_1 + 3x_2 + d_2 \geq 14;$
  $x_1 \leq 3;\ x_1 + x_2 \leq 5;\ x_1, x_2, d_1, d_2 \geq 0$

Comentarios a la programación por metas

La programación por metas es una de las aproximaciones más populares para resolver problemas de optimización multiobjetivo puesto que reduce la complejidad multiobjetivo a un modelo estándar de programación con objetivo único de una forma que los decisores encuentran intuitivo la mayoría de las veces.

Comentarios a la programación por metas

La programación por metas es una de las aproximaciones más populares para resolver problemas de optimización multiobjetivo puesto que reduce la complejidad multiobjetivo a un modelo estándar de programación con objetivo único de una forma que los decisores encuentran intuitivo la mayoría de las veces.

Si un programa por metas tiene soluciones óptimas alternativas, algunas de ellas pueden no ser puntos eficientes del correspondiente modelo de optimización multiobjetivo.

Ejemplo numérico 4. Ilustramos ahora la no eficiencia de algunas soluciones en programación por metas por medio del siguiente problema multiobjetivo:

min x_1

max x_2

s. a $0 \leq x_1 \leq 2$; $0 \leq x_2 \leq 1$

Asumimos metas de 1 y 2, respectivamente, para los objetivos y planteamos el modelo de programación por metas:

min $d_1 + d_2$

s. a $x_1 - d_1 \leq 1$; $x_2 + d_2 \geq 2$; $0 \leq x_1 \leq 2$; $0 \leq x_2 \leq 1$; $d_1, d_2 \geq 0$

$(x_1, x_2) = (1, 1)$ es óptima en el problema con metas con $d_1 = 0$ y $d_2 = 1$, sin embargo no es eficiente en el problema multicriterio inicial. $(x_1, x_2) = (0, 1)$ es óptima en el problema con metas y con la misma deficiencia total mínima, y además es eficiente en el problema multicriterio inicial.

Para asegurar que los óptimos de una programación por metas den lugar a una solución eficiente del correspondiente problema de optimización multiobjetivo, hay que sumar un pequeño múltiplo positivo de cada función objetivo original de minimizar al objetivo de la programación por metas y restar el mismo múltiplo de cada original de maximizar.

Para asegurar que los óptimos de una programación por metas den lugar a una solución eficiente del correspondiente problema de optimización multiobjetivo, hay que sumar un pequeño múltiplo positivo de cada función objetivo original de minimizar al objetivo de la programación por metas y restar el mismo múltiplo de cada original de maximizar.

Demostración: por la misma razón que la suma ponderada de objetivos produce soluciones eficientes. □

Planteamos una versión revisada del modelo de programación por metas del Ejemplo numérico 4 que origina soluciones eficientes en el problema de optimización multiobjetivo original, de acuerdo con el resultado anterior:

min $d_1 + d_2 + 0'001x_1 - 0'001x_2$

s. a $x_1 - d_1 \leq 1$

$x_2 + d_2 \geq 2$

$0 \leq x_1 \leq 2$

$0 \leq x_2 \leq 1$

$d_1, d_2 \geq 0$

Otros métodos de obtención de soluciones y trabajos recientes

Ehrgott, M. and Ruzika, S. (2006)
An Improved ϵ-Constraint Method for Multiobjective Programming.
Technical Report, University of Kaiserslautern, Department of Mathematics. Report in Wirtschaftsmathematik Nr. 96/2006.
Aceptado en Journal of Optimization Theory and Applications 138, No. 1.

En este trabajo se considera el método de escalarización de las ϵ-restricciones (Chankong and Haimes, 1983) y se modifica con el objetivo de resolver dificultades de cálculo y para obtener resultados relativos a eficiencia propia.

En Ehrgott and Wiecek (2005) se encuentra una revisión de otros métodos de escalarización y no escalarización.

Notación básica del símplex multicriterio

Vamos a considerar un problema de optimización multicriterio lineal (MOLP) de minimización.

- Un punto extremo de X que es eficiente se denomina **punto extremo eficiente.**
- Una base B del MOLP (*i. e.* un conjunto de l columnas linealmente independientes de A) se llama **base eficiente** si existe $\lambda \in \mathbb{R}^p_{++}$ tal que B es una base óptima del programa lineal escalar

$$\min\{\lambda^T CX \,:\, AX = b,\, X \geq 0\}.$$

- Sea B una base y $N := \{1, \cdots, n\} \backslash B$. Sean C_B y C_N las columnas de C con índices correspondientes a B y N, respectivamente. A_B, A_N, x_B y x_N se definen de modo análogo. Entonces $\overline{C} = C - C_B A_B^{-1} A$ se denomina **matriz de costes reducidos** con respecto a B. $\overline{C}_B$ y $\overline{C}_N$ se definen análogamente a C_B y C_N.

- Sea B una base eficiente. Una variable X_j se llama **variable eficiente no básica** si existe $\lambda \in \mathbb{R}^p_{++}$ tal que $\lambda^T \overline{C}_N \geq 0$ y $\lambda^T \overline{c}^j = 0$, donde $\overline{c}^j$ es la columna j-ésima de $\overline{C}$, $j \in N$.
- Sea B una base eficiente y X_j una variable eficiente no básica. Un pívot factible de B con X_j como variable entrante se llama **pívot eficiente**.

Si B es una base entonces (x_B, x_N) con $x_N = 0$ y $x_B = A_B^{-1} b$ es una **solución básica**, y es una **solución básica factible** si adicionalmente $x_B \geq 0$. Una solución básica factible es un punto extremo de X.

Resultado fundamental del símplex multicriterio

TEOREMA

1. Si $X_E \neq \emptyset$ entonces existe un punto extremo eficiente.
2. Sea B una base eficiente. Entonces $(x_B, 0) \in X_E$.
3. Sea $x \in X$ un punto extremo eficiente. Entonces existe una base eficiente B tal que x es una solución básica factible para B.
4. Sea B una base eficiente y X_j una variable no básica eficiente. Entonces un pívot eficiente conduce a una base eficiente.

Las tres fases del símplex multicriterio

1. Suponiendo, sin pérdida de generalidad, que $b \geq 0$, se resuelve un programa lineal escalar para comprobar la factibilidad: $\min\{e^T Z : AX + Z = b;\ X, Z \geq 0\}$. $X \neq \emptyset$ si y sólo si el óptimo de este problema escalar es 0.
2. Si $X \neq \emptyset$ se encuentra un punto extremo eficiente inicial o el algoritmo termina con la conclusión de que $X_E = \emptyset$.
3. Se utilizan pivots eficientes para explorar todos los puntos extremos eficientes o bases eficientes.

[7] e es un vector de unos e I la matriz identidad de dimensión adecuada.

Las tres fases del símplex multicriterio

1. Suponiendo, sin pérdida de generalidad, que $b \geq 0$, se resuelve un programa lineal escalar para comprobar la factibilidad: $\min\{e^T Z \,:\, AX + Z = b;\ X, Z \geq 0\}$. $X \neq \emptyset$ si y sólo si el óptimo de este problema escalar es 0.
2. Si $X \neq \emptyset$ se encuentra un punto extremo eficiente inicial o el algoritmo termina con la conclusión de que $X_E = \emptyset$.
3. Se utilizan pivots eficientes para explorar todos los puntos extremos eficientes o bases eficientes.

   TEOREMA (Ecker and Kouada, 1975) Determinación de puntos extremos eficientes. Sea $x^0 \in X$ y considerar el programa lineal
   $\max\{e^T Z \,:\, CX - IZ = Cx^0;\ AX = b;\ X, Z \geq 0\}$[7]. Si $(\hat{x}, \hat{z})$ es una solución óptima de este programa lineal entonces $\hat{x} \in X_E$. Si el programa lineal no está acotado $X_E = \emptyset$.

[7] e es un vector de unos e I la matriz identidad de dimensión adecuada.

Un trabajo reciente:

Ehrgott, M., Puerto, J. and Rodríguez-Chía (2007)
Primal-Dual Simplex Method for Multiobjective Linear Programming.
Journal of Optimization Theory and Applications 134: 483-497.

Ilustración con Maxima del símplex multicriterio

Comprobación de la factibilidad en el Ejemplo Numérico 1:

```
(%i1) load(simplex)$

(%i2) minimize_lp(a+b+c,[x+2*y+h+a=11,

-x+3*y+i+b=9,x+j+c=5]),nonegative_lp=true;

(%o2) [0, [j = 2, c = 0, i = 0, b = 0, y = 4, x = 3, h = 0, a = 0]]
```

Encontrar un punto extremo eficiente por el teorema de Ecker and Kouada:

```
(%i3) maximize_lp(a+b,[x+2*y+h=11,-x+3*y+i=9,x+j=5,

2*x-y-a=0,-x+3*y-b=0]),nonegative_lp=true;

(%o3) [11, [b = 9, a = 2, j = 2, i = 0, y = 4, x = 3, h = 0]]
```

Obtención de la matriz de costes reducidos

```
(%i4) A:matrix([1,2,1,0,0],[-1,3,0,1,0],[1,0,0,0,1])$
(%i5) B:matrix([1,2,0],[-1,3,0],[1,0,1])$
(%i6) IB:invert(B)$
(%i7) C1B:matrix([2,-1,0]);
(%o7) [ 2 - 1 0 ]
(%i8) C2B:matrix([-1,3,0]);
(%o8) [ - 1 3 0 ]
(%i9) ZJ1:C1B.IB.A;
(%o9) [ 2 - 1 1 - 1 0 ]
(%i10) ZJ2:C2B.IB.A;
(%o10) [ - 1 3 0 1 0 ]
```

Determinación de variables eficientes no básicas

```
(%i11) C1:matrix([2,-1,0,0,0]);
(%o11) [ 2 - 1 0 0 0 ]
(%i12) C2:matrix([-1,3,0,0,0]);
(%o12) [ - 1 3 0 0 0 ]
(%i13) ZJ1-C1;
(%o13) [ 0 0 1 - 1 0 ]
(%i14) ZJ2-C2;
(%o14) [ 0 0 0 1 0 ]
```

Aplicando la definición, es inmediato ver que la segunda es una variable eficiente no básica.

Tablas del Símplex para el Ejemplo numérico 2

Tabla 5. Tabla 1 del Símplex

			c^1	2	-1	0	0	0		
			c^2	-1	3	0	0	0		
Base	x	c_B^1	c_B^2	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	θ_5	θ_3
A_1	5	2	-1	1	0	0	0	1	5	-
A_2	3	-1	3	0	1	**1/2**	0	-1/2	-	6
A_4	5	0	0	0	0	-3/2	1	**5/2**	2	-
$z^1,\ z_j^1$		7		2	-1	-1/2	0	5/2		
$z^2,\ z_j^2$			4	-1	3	3/2	0	-5/2		
$c_j^1 - z_j^1$				0	0	1/2	0	-5/2		
$c_j^2 - z_j^2$				0	0	-3/2	0	5/2		

Tabla 6. Tabla 2 del Símplex

			c^1	2	-1	0	0	0		
			c^2	-1	3	0	0	0		
Base	x	c_B^1	c_B^2	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	θ_3	θ_4
A_1	3	2	-1	1	0	3/5	-2/5	0	5	-
A_2	4	-1	3	0	1	1/5	1/5	0	20	20
A_5	2	0	0	0	0	-3/5	2/5	1	-	5
$z^1,\ z_j^1$	-	2	-	2	-1	1	-1	0	-	-
$z^2,\ z_j^2$	-	-	9	-1	3	0	1	0	-	-
$c_j^1 - z_j^1$	-	-	-	0	0	-1	1	0	-	-
$c_j^2 - z_j^2$	-	-	-	0	0	0	-1	0	-	-

Tabla 7. Tabla 3 del Símplex

			c^1	2	-1	0	0	0		
			c^2	-1	3	0	0	0		
Base	x	c_B^1	c_B^2	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	θ_2	θ_5
A_1	5	2	-1	1	0	0	0	1	-	5
A_3	6	0	0	0	2	1	0	-1	3	-
A_4	14	0	0	0	3	0	1	1	14/3	14
$z^1,\ z_j^1$	-	10	-	2	0	0	0	2	-	-
$z^2,\ z_j^2$	-	-	-5	-1	0	0	0	-1	-	-
$c_j^1 - z_j^1$	-	-	-	0	-1	0	0	-2	-	-
$c_j^2 - z_j^2$	-	-	-	0	3	0	0	1	-	-

Aplicando el algoritmo hemos obtenido los tres vértices eficientes del problema y no hay que realizar más iteraciones. Es imposible encontrar otro pívot eficiente.
Consideremos por ejemplo la Tabla 2. Teniendo en cuenta que maximizar los dos objetivos equivale a minimizar los opuestos vamos a aplicar la definición de variable eficiente no básica y supongamos que X_3 lo es. Entonces se puede encontrar $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_{++}$ tal que $-\lambda_1 + \lambda_2 \geq 0$ y $\lambda_1 = 0$, lo cual es una contradicción.
Notemos que si la tercera columna entra en la base, sale la primera y esto conduce al vértice (0,3) (con holguras 5, 0 y 5, respectivamente). Como sabemos este vértice no es eficiente con lo que, efectivamente, la variable X_3 no es eficiente no básica en esa iteración pues el correspondiente pívot no conduce a una base eficiente.

Caso lineal. Aplicación del teorema de Geoffrion

Consideramos un MOLP:

$$\max((c^1)^T X, \cdots, (c^p)^T X),$$
$$\text{s. a } AX \leq b,$$
$$X \geq 0.$$

Sea $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^p \,:\, \lambda \geq 0, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1\}$ y $\lambda \in \Lambda$.

$P(\lambda)$ es el problema escalar:

$$\max c(\lambda)^T X := \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (c^i)^T X,$$
$$\text{s. a } AX \leq b,$$
$$X \geq 0.$$

El dual $D(\lambda)$ de $P(\lambda)$ está dado por:

$$\min u^T b,$$
$$\text{s. a } u^T A \geq c(\lambda)^T, \text{ con } u \geq 0.$$

donde $c_j(\lambda) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i c_j^i$ para $j = 1, \cdots, n$.

Aplicando la condición de holgura complementaria conocida para problemas escalares a los problemas $P(\lambda)$ y $D(\lambda)$ se tiene que para x factible del primal y u factible del dual complementaria, x y u óptimas, $(u^T A - c(\lambda)^T)x = 0$.

Teniendo ahora en cuenta el Teorema de Geoffrion obtenemos un nuevo resultado.

TEOREMA. Una solución factible básica $x \in X$ es débilmente Pareto eficiente para el MOLP si y sólo si existe $\lambda \in \Lambda$ y u una solución básica complementaria óptima de $D(\lambda)$ tal que $(u^T A - c(\lambda)^T)x = 0$.

Entre las aplicaciones de esta teoría se encuentra la determinación de asignaciones en el core de juegos obtenidos a partir de problemas de multicriterio (ver Fernández García y Puerto Albandoz, 2006).

Consideramos de nuevo el Ejemplo Numérico 1:

$$\begin{aligned} &\max Z_1 = 2X_1 - X_2 \\ &\max Z_2 = -X_1 + 3X_2 \\ &\quad \text{s. a } X_1 + 2X_2 \leq 11 \\ &\qquad -X_1 + 3X_2 \leq 9 \\ &\qquad X_1 \leq 5 \\ &\qquad X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$P(\lambda)$:

$$\begin{aligned} &\max \lambda_1(2X_1 - X_2) + \lambda_2(-X_1 + 3X_2) = \\ &(2\lambda_1 - \lambda_2)X_1 + (-\lambda_1 + 3\lambda_2)X_2 \\ &\quad \text{s. a } X_1 + 2X_2 \leq 11 \\ &\qquad -X_1 + 3X_2 \leq 9 \\ &\qquad X_1 \leq 5 \\ &\qquad X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$D(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \min\, & 11u_1 + 9u_2 + 5u_3 \\ \text{s. a}\ & u_1 - u_2 + u_3 \geq 2\lambda_1 - \lambda_2 \\ & 2u_1 + 3u_2 \geq -\lambda_1 + 3\lambda_2 \\ & u_1, u_2, u_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Tomando $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$ y utilizando Maxima se obtiene para $D(\lambda)$ una solución óptima de $(u_1, u_2, u_3) = (1/2, 0, 0)$ que origina dos holguras de cero.

La solución complementaria óptima de $P(\lambda)$ es $(X_1, X_2) = (5, 3)$ que origina una holgura distinta de cero y dos de cero. El óptimo de ambos problemas es 5'5.

Como sabemos (5,3) es un punto eficiente del MOLP.

Análisis de sensibilidad

Después de resolver un problema de programación matemática, puede ser interesante investigar si el cambio de algunos parámetros afecta a las soluciones óptimas.

Esto está justificado ya que los valores de parámetros tales como demandas, ingresos, o costes usados como entradas en la formulación del problema son normalmente estimaciones que posiblemente se desvíen de su valor cuando la solución realmente se implemente.

Tales análisis de sensibilidad (post-optimalidad) son parte importante de cualquier aplicación de la programación matemática. Por tanto, pasamos a comentar varios asuntos relativos a dicho análisis.

Cambios en los coeficientes de la función objetivo

Uno de los problemas de interés en análisis de sensibilidad está relacionado con el efecto de los cambios en las soluciones que resultan de cambios en los coeficientes en las funciones objetivo de las variables de decisión. De forma más general, la pregunta sería, para qué rango de valores de c_i, uno de los coeficientes en una de las funciones objetivo, (rango de optimalidad) una solución óptima no deja de serlo.

En el Ejemplo numérico 1 se obtuvo una solución eficiente aplicando el Teorema de Ecker and Kouada. Para ello se resolvió un problema escalar del que la solución eficiente era parte de la solución.

Queremos ver, por ejemplo, lo que puede variar el primer coeficiente de la segunda función objetivo de manera que esa solución siga siendo eficiente.

Suponemos que el valor del coeficiente es -1+θ_1 (θ_1 es el incremento) en lugar de -1 y replanteamos el problema escalar teniendo en cuenta esta modificación e investigamos las condiciones bajo las cuales la solución no se modifica.

Para ello calculamos los elementos de la Tabla del Símplex tomando como base la asociada al óptimo obtenido con anterioridad e imponemos que las diferencias $c_j - z_j$ (los costes reducidos) sean todas menores o iguales que cero.

Los valores θ_1 que resuelvan el sistema de inecuaciones indican un incremento permitido para el coeficiente de la función objetivo tal que la solución del problema obtenida con anterioridad sigue siendo óptima y por tanto la solución asociada para el MOP sigue siendo eficiente.

(%i1) A:matrix([1,2,1,0,0,0,0],[-1,3,0,1,0,0,0],[1,0,0,0,1,0,0],[2,-1,0,0,0,-1,0],[-1+a,3,0,0,0,0,-1]);

(%i2) B:matrix([1,2,0,0,0],[-1,3,0,0,0],[1,0,1,0,0],[2,-1,0,-1,0],[-1+a,3,0,0,-1]);

(%i3) C:matrix([0,0,0,0,0,1,1]);

(%i4) CB:matrix([0,0,0,1,1]);

(%i5)IB:invert(B);

(%i6) C-CB.IB.A;

La solución a la que se llega es $-\frac{5}{3} \leq a \leq 0$.

Adición de una nueva variable

Vamos a examinar ahora un segundo asunto importante en análisis de sensibilidad. Reconsideremos el ejemplo numérico 1 y lo interpretamos como un problema de producción biobjetivo. Supongamos que la empresa está considerando la producción de un tercer tipo de producto que supone un incremento de 3 en el primer objetivo y una disminución de 4 en el segundo por cada unidad producida. Cada unidad producida supone un gasto de una unidad tanto del primer tipo de recurso como del segundo y no afecta al consumo del tercer recurso. De esta forma, el vector columna que correspondería a la nueva variable es $a_p = (1, 1, 0)^T$.

Dada toda esta información, la pregunta que surge es si a la empresa le interesaría producir el nuevo producto. Aunque el problema puede ser formulado y resuelto mediante la adición de la nueva variable, a menudo es más fácil considerar el efecto de la nueva variable en las soluciones óptimas.

Para hacer esto, en primer lugar actualizamos el vector y_p correspondiente a la variable x_p por medio de la transformación $y_p = B^{-1}a_p$, que nos proporciona el vector $y_p = (0, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2})^T$. Éste es el vector columna que aparecería en la tabla del símplex en la columna correspondiente a la variable x_p si ésta hubiera sido introducida en la solución. Por otro lado, se obtienen las cantidades $z_p = c_B y_p = -1/2$ que da lugar a la diferencia $c_p - z_p = 7/2$ y $t_p = d_B y_p = 3/2$ que da lugar a la diferencia $d_p - t_p = -11/2$.
Por otro lado, por lo que se razonaba al estudiar el método del simplex, si nos planteamos introducir en la base una variable X_p sacando una variable básica X_k, sabemos que la función objetivo experimenta una modificación que viene dada por:

$$z' = z - x_p(z_p - c_p)$$

de forma que $c_p - z_p$ se puede interpretar como la variación de la función objetivo por cada unidad de la variable X_p introducida en la base. Además, si es negativa, la función objetivo disminuye.

En definitiva, en nuestro problema, no es beneficioso introducir el nuevo producto en la solución respecto de la segunda función objetivo. Ahora bien, si por alguna razón hubiese que producir una unidad, el beneficio óptimo se reduciría en cinco y medio unidades. Nótese que t_p no depende de d_p, así que si incrementamos el beneficio d_p para el nuevo producto en una cantidad estrictamente mayor que 11/2, se consigue que la función objetivo aumente al introducir la correspondiente variable en la base, o dicho en otras palabras, sería provechoso producir el nuevo producto.

```
(%i7) A:matrix([1,2,1,0,0],[-1,3,0,1,0],[1,0,0,0,1]);
(%i8) B:matrix([1,2,0],[-1,3,1],[1,0,0]);
(%i9) IB:invert(B);
(%i10) CB1:matrix([2,-1,0]);
(%i11) CB2:matrix([-1,3,0]);
(%i12) A3:matrix([1],[1],[0]);
(%i13) 3-CB1.IB.A3;
(%o13) 7/2
(%i14) -4-CB2.IB.A3;
(%o14) -11/2
```

Referencias básicas

- Eatman, J. L. and Sealey, C. W. (1979). A multiobjective linear programming model for commercial bank balance sheet management. Journal of Bank Research 9, 227-236.
- Ehrgott, M. and Wiecek, M. M. (2005). Multiobjective programming. In: Multiple Criteria Decision Analysis. State of the Art. Surveys. J. Figueira, S. Greco and M. Ehrgott (eds.) Páginas 667-722. Springer.
- Rardin, R. L. (1998). Optimization in Operations Research. Páginas 373-408. Prentice-Hall.
- ReVelle, C., Cohon, J. and Shobrys, D. (1991). Simultaneous siting and routing in the disposal of hazardous wastes. Transportation Science 25, 138-145.
- Ríos, S., Ríos-Insua, M. J. and Ríos-Insua, S. (1989). Procesos de Decisión Multicriterio. Eudema Universidad.

- Romero, C. (1996). Análisis de las Decisiones Multicriterio. Isdefe. Publicaciones de Ingeniería de Sistemas.
- Singh, N. and Agarwal, S. K. (1983). Optimum design of an extended octagonal ring by goal programming. International Journal of Production Research 21, 891-898.

Referencias complementarias

- Aarts, E. and Lenstra, J. K. (2003). Local search in combinatorial optimization. Princeton University Press.
- Diwekar, U. (2008). Introduction to Applied Optimization. Páginas 179-214. Springer.
- Fernández García, F. R. and Puerto Albandoz, J. (2006). Teoría de Juegos Multiobjetivo. Edición Universidad de Sevilla.
- Haimes, Y. Y. and Chankong, V. (Eds.) (1985). Decision Making with Multiple Objectives. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Springer-Verlag.
- Hillier, F.S. and Lieberman, G.J. (2002). Investigación de Operaciones. Páginas 332-341. McGraw-Hill.

- Ignizio, J. P. (1982). Linear Programming in Single- & Multiple- Objective Systems. Prentice-Hall.
- Sawaragi, Y., Nakayama, H. and Tanino, T. (1985). Theory of Multiobjective Optimization. Series in Mathematics in Science and Engineering. Volume 176. Academic Press.
- Steuer, R. E. (1986). Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation, and Application. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics-Applied. John Wiley & Sons.
- Winston, W.L. (1994). Investigación de Operaciones. Aplicaciones y Algoritmos. Páginas 763-807. Grupo Editorial Iberoamericana.