Programación Matemática

Ejercicios
Actualizado el 15.12.10

Problema 1

Prueba que cono $K \subset \mathbb{R}^n$ es convexo sii $K + K = K$.

Problema 2

Calcula el cono normal en un punto $x \in X$ de los siguientes conjuntos X:

1. $X = \{x \in \mathbb{R}^n : c^\top x = c_0\}$
2. $X = \{x : x^\top x \leq 1\}$

Problema 3

Calcula el polar de los siguientes conjuntos:

1. $X = \{x \in \mathbb{R}^n : \, x_i \geq 0 \, \forall i\}$.
2. $X = \{x \in \mathbb{R}^n : \, x_i \geq 1 \, \forall i\}$.

Problema 4

Demuestra con ejemplos que es necesario que X sea convexo, cerrado y que $0 \in X$ para que $(X^\circ)^\circ = X$.

Problema 5

Sea $f : S \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, convexa en el convexo S, y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$: cóncava. Estudia la convexidad en S de la función $g \circ f$ suponiendo que g es

1. no creciente
2. no decreciente

Problema 6

Prueba que si γ es un calibrador en $\mathbb{R}^n$, entonces su epigrafo es un cono convexo. ¿Es cierto el recíproco?

Problema 7

Escribe en la forma $\max_{e \in E} x^\top e$ las normas ℓ_1 y ℓ_∞

Problema 8

Sea A una matriz $\mathbb{R}^{n \times n}$ invertible. Halla la norma dual de $\gamma(x) = \sqrt{x^\top A x}$.

Problema 9

Construye un convexo $S \subset \mathbb{R}^n$ y una función S, convexa sobre f pero no continua en todos los puntos de S.

Problema 10

Calcula el subdiferencial $\partial \|x\|$ de la norma en $\mathbb{R}^n$ $\| \cdot \|$ en x para

1. $\| \cdot \| : \ell_\infty$
2. $\| \cdot \| : \ell_1$

Problema 11

Construye una norma que no sea monótona en $\mathbb{R}^n_+$.

Problema 12

Encuentra un ejemplo (o demuestra que no existe) de problema de minimización con función objetivo convexa y región factible convexa cerrada

1. sin solución óptima
2. con infinitas soluciones óptimas
3. con exactamente dos soluciones óptimas

Problema 13

Sea f : convexa. Prueba que x^* : es solución óptima del problema $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ sii $0 \in \partial f(x^*)$

Problema 14

Resuelve analíticamente el problema de Fermat (minimizar la suma de distancias ℓ_2 a 3 puntos fijos del plano con la norma ℓ_2).

Problema 15

Sea $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ el conjunto de vértices de un cuadrado, y sean $\omega_1, \dots, \omega_4 \geq 0$. Describe la relación que deben satisfacer los coeficientes $\omega_1, \dots, \omega_4$ para que a_1 sea solución óptima del problema de Fermat-Weber.

Problema 16

Sea $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ el conjunto de vértices de un cuadrado. Demuestra analíticamente que el centro del cuadrado es solución del problema del centro.

Problema 17

Para la base de datos `cigarrillos.xls`, considerando las variables `alquitran`, `nicotina` y `peso` como explicativas y `CO` como variable respuesta,

1. resuelve con `ampl` el modelo lineal de regresión
   (a) de minimización de la suma de los valores absolutos de los residuos
   (b) de minimización de la suma de los cuadrados de los residuos
   (c) lasso, con parámetro $k = 0.5$
2. compara los resultados obtenidos con los que proporciona `solver` si ignoramos la eventual no diferenciabilidad de las funciones implicadas.

Problema 18

En la base de datos `MUNICIPIOS ANDALUCES.xls`, dan de cada municipio sus coordenadas (longitud,latitud) en minutos, y su población. Usando `ampl`,

1. resuelve los problemas
   (a) del 1-centro
   (b) de Fermat-Weber con la norma euclídea
   (c) de Fermat-Weber con un calibrador sesgado ($p = (-0.3, 0)$)
2. compara las soluciones obtenidas con el centro de gravedad

Problema 19

Implementa con un script en `R` el algoritmo de Weiszfeld para el problema de Fermat-Weber en $\mathbb{R}^n$ y la norma euclídea.

Problema 20

Implementa con un script en `R` el algoritmo de Elzinga-Hearn para el problema del centro en el plano y la norma euclídea.

Problema 21

Formula como un problema de programación no diferenciable el problema de encontrar el punto x en el cierre convexo de un subconjunto finito A de $\mathbb{R}^n$ minimizando el rango (i.e. la diferencia entre el mayor y menor valor) de las distancias de x a los puntos de A.

Indica si se puede garantizar que cualquier óptimo local del problema sea óptimo global.

Problema 22

Se desea ubicar un centro de residuos tóxicos en la zona delimitada por los paralelos 35° y 37°, y los meridianos 2° y 5°. Con los datos del fichero `MUNICIPIOS ANDALUCES.xls`, encuentra (heurísticamente) la ubicación que

1. maximiza la distancia media a los municipios
2. maximiza la mínima distancia a los municipios.

Problema 23

Determina (heurísticamente) el máximo radio que pueden tener $p = 10$ discos, contenidos en el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$, de modo que sus interiores no se solapen.

Problema 24

Para la base de datos `cigarrillos.xls`, considerando las 4 variables, encuentra (heurísticamente) el hiperplano de $\mathbb{R}^4$ que minimiza la suma de las distancias de los datos a dicho hiperplano.

Problema 25

Escribe un script en `R` que, dada una matriz D de distancias, resuelva el problema de la p-mediana con un heurístico de tipo Variable Neighborhood Search.

Problema 26

Escribe un script en `R` que, dado un conjunto A de p puntos, encuentre (heurísticamente) el punto que minimiza la suma de los cuadrados de las $k \leq p$ menores distancias a los puntos de A.

Problema 27

Obtén una descomposición dc para cada una de las funciones dc siguientes:

1. $f(x, y) = xy - x$
2. $f(x, y) = x^2 - y^2 + \min\{x, 0\}$

ENVIAR AL MENOS 5 EJERCICIOS RESUELTOS, CON FECHA LÍMITE LAS 00:00 DEL 17/01/11, A `emilio.carrizosa@gmail.com` **Y A** `ecarrizosa@us.es`