MÁSTER EN TÉCNICAS ESTADÍSTICAS

Programación Matemática. Curso 2010-2011

Ejercicios Primera Parte, lista definitiva. 7 de diciembre de 2010.

1. Estudiar la convexidad, concavidad, convexidad o concavidad estricta de las siguientes funciones:

- $f(x_1, x_2) = ln(x_1 + x_2)$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{++}$.
- $f(x_1, x_2) = ln(x_1 x_2)$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{++}$.
- $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + e^{x_2} + 3x_3$, $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

2. Estudia la cuasiconvexidad y cuasiconcavidad de las funciones:

- $f(x_1) = ln(x_1)$, $x_1 \in \mathbb{R}_{++}$.
- $f(x_1) = \dfrac{1}{x_1}$, $x_1 \in \mathbb{R}_{++}$.
- $f(x_1, x_2) = e^{x_1 + x_2}$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

3. Aplicando las condiciones para funciones diferenciables, probar que la función $f(x) = e^x$ con $x \in \mathbb{R}$ es estrictamente cuasiconvexa.

4. Se desea minimizar la función $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + \alpha x_1 x_2 + x_1 + 2x_2$.

- Probar, resolviendo el sistema de ecuaciones $\nabla f = 0$ y estudiando la definición de la hessiana, que para $\alpha = 1$ existe mínimo y es único. Con wxMaxima, realiza el Gráfico 3D de la función (tomar x e y entre -5 y 5 y una cuadrícula de 10).
- Probar, análogamente, que para $\alpha = 2$ no existe mínimo. Con wxMaxima, realiza el Gráfico 3D de la función (tomar x e y entre -15 y 15 y una cuadrícula de 2).

5. Dada la función $f(x) = x_1 + 3x_2^2 - 4x_1 x_2 + 4x_1^2$, realícense tres iteraciones para minimizar la función usando el método del gradiente. Tómese como punto inicial $x_0 = (7, 9)$.

6. Considerar el siguiente problema:

- min $(x-1)^2 + (y-1)^2$

sujeto a:

- $-x + y = \dfrac{1}{2}$

- $x + y \leq 1$
- $x, y \geq 0$

1. Resolverlo gráficamente.
2. Comprobar la respuesta utilizando la teoría de Kuhn-Tucker.
3. Encontrar la función dual $\mathbf{l}(\lambda, \mu)$ y probar que es cóncava.

7. Haciendo uso del método símplex modificado para problemas de programación cuadrática, maximizar

$$f(x_1, x_2) = 15x_1 + 30x_2 + 4x_1x_2 - 2x_1^2 - 4x_2^2$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 \leq 30 \text{ y}$$

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0.$$

8. Utilizando, por ejemplo, el libro de Hillier y Lieberman (2006) (ver documento "SUMT"), estudia la técnica secuencial de minimización no restringida (SUMT) para problemas de optimización no lineal restringida y aplícala a un caso propuesto por ti.

9. Minimizar

$$J = \sum_{i=0}^{N} (qx_i^2 + ru_i^2) + qx_3^2$$

sujeto a la condición dinámica del estado

$$x_{i+1} = ax_i + bu_i, \ i = 0, \cdots, N-1$$

donde $N = 2, q = 2, r = 4, a = 1$ y $b = 0'5$.

10. Un fabricante desea minimizar el coste de los contenedores que produce así como el peso de los mismos. Se encuentra ante un problema de decisión motivado por la mayor carestía de los materiales más ligeros.

Los contenedores han de ser de base cuadrada, abiertos por la parte superior y tener una capacidad o volumen de 10 m^3. El material con el que se va a construir la parte inferior cuesta 6 euros/m^2 y pesa 4 Kg/m^2. El material con el que se van a construir las caras del contenedor cuesta 3 euros/m^2

y pesa 8 Kg/m^2.

Plantear el problema por medio de un modelo de programación biobjetivo no lineal y realizar un bosquejo del conjunto de resultados en el espacio de objetivos.

11. Sea el problema biobjetivo:

$$\max Z_1 = 5X_1 - 2X_2$$

$$\max Z_2 = -X_1 + 4X_2$$

$$\text{s. a } -X_1 + X_2 \leq 3$$

$$X_1 + X_2 \leq 8$$

$$X_1 \leq 6,\ x_2 \leq 4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Utilizando Maxima:

a) Representar gráficamente la región factible X.

b) Representar el espacio de objetivos $Z(X)$.

c) Determinar gráficamente los puntos eficientes por medio de los contornos de los objetivos.

d) Comprobar si se verifica el recíproco del segundo teorema de Yu and Zeleni.

12. El servicio de aguas Distrito 88, en el suroeste de Estados Unidos, recoge agua procedente de los ríos en un embalse $E1$ en la montaña. El caudal estimado es de 294 millones de pies de acre[1]. Al menos 24 millones de pies de acre de agua son contratados para ir directamente desde $E1$ hasta las poblaciones del entorno, aunque éstas aceptan tanta cantidad de agua como pueda ser suministrada. El caudal restante va a un segundo embalse $E2$ en el desierto perdiéndose un 20% por evaporación en el camino. Parte

[1] 1 pie de acre = 1233'48 m^3.

del agua en $E2$ puede ser dedicada al regadío de granjas en los alrededores. El resto del agua atraviesa una presa hidroeléctrica y corre río abajo. Para mantener los equipos, el agua sobre la presa debe ser al menos de 50 millones de pies de acre. Distrito 88 vende agua a las poblaciones por valor de 0'50 $ por pie de acre de agua y para el regadío de los granjeros a 0'20 $ por pie de acre de agua. El agua utilizada en la presa hidroeléctrica cuesta 0'80 $ por pie de acre de agua.

Distrito 88 quiere maximizar tanto el agua suministrada para el riego como el beneficio de sus ventas.

a) Tras modelar el problema por medio de un programa multiobjetivo lineal, establecer y resolver una sucesión de programas lineales para obtener una solución lexicográfica del problema priorizando los objetivos en el orden dado en el enunciado.

b) Establecer y resolver un objetivo lineal suma ponderada de objetivos iniciales que pondere el primero dos veces más que el segundo.

1. Estudiar la concavidad o convexidad de las siguientes funciones:

- $f(x, y) = (x - 2y)^4$.
- $y = f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 3x_2^2$ con $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

2. Estudia la cuasiconvexidad y cuasiconcavidad de las funciones:

- $f(x_1) = ln(x_1)$, $x_1 \in \mathbb{R}_{++}$.
- $f(x_1) = \dfrac{1}{x_1}$, $x_1 \in \mathbb{R}_{++}$.
- $f(x_1, x_2) = e^{x_1 + x_2}$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

3. Resolver gráficamente el siguiente problema de programación no lineal:

$$\text{Optimizar } f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2$$

$$\text{s. a } 2x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

4. Un monopolista vende dos productos 1 y 2 cuyas funciones de demanda vienen definidas por las ecuaciones:

$0'1p_1 - 1'2 + 0'2x_1 = 0$

$10p_2 - 320 + 40x_2 = 0$

en donde p_1, p_2 y x_1, x_2 son, respectivamente, los precios y cantidades de los productos 1 y 2. Su función de costes es:

$$C(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2.$$

Se pide encontrar el precio y el *output* de cada bien que maximiza el beneficio empleando la función Lagrangiana comprobando que se verifica la condición de cualificación de restricciones.

5. Considérese el siguiente problema de programación convexa linealmente restringida:

Maximizar

$$3x_1 + 4x_2 - x_1^3 - 2x_2^2$$

sujeto a la condición

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

donde $x_1, x_2 \geq 0$

- Comenzar con la solución inicial $(x_1, x_2) = (1/4, 1/4)$ para realizar tres iteraciones del algoritmo de Frank-Wolfe.
- Utilizar las condiciones de Kuhn-Tucker para verificar si la solución obtenida en el apartado anterior es óptima.

6. Considerar el siguiente problema:

- min $(x-1)^2 + (y-1)^2$

sujeto a:

- $-x + y = \frac{1}{2}$
- $x + y \leq 1$
- $x, y \geq 0$

1. Resolverlo gráficamente.
2. Comprobar la respuesta utilizando la teoría de Kuhn-Tucker.
3. Encontrar la función dual $\mathbf{l}(\lambda, \mu)$ y probar que es cóncava.

7. Minimizar

$$J = \sum_{i=0}^{N} (qx_i^2 + ru_i^2) + qx_3^2$$

sujeto a la condición dinámica del estado

$$x_{i+1} = ax_i + bu_i,\ i = 0, \cdots, N-1$$

donde $N = 2, q = 2, r = 4, a = 1$ y $b = 0'5$.

8. Utilizando, por ejemplo, el libro de Hillier y Lieberman (2006) (ver documento "SUMT"), estudia la técnica secuencial de minimización no restringida (SUMT) para problemas de optimización no lineal restringida y aplícala a un caso propuesto por ti.

9. Sea el problema biobjetivo:

$\max Z_1 = 3X_1 - 2X_2$

$\max Z_2 = -X_1 + 2X_2$

s. a $-2X_1 + 2X_2 \leq 4$

$4X_1 - 2X_2 \leq 20$

$\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2 \leq 4$

$X_1, X_2 \geq 0$

Utilizando Maxima:

a) Representar gráficamente la región factible X.

b) Representar el espacio de objetivos $Z(X)$.

c) Determinar gráficamente los puntos eficientes por medio de los contornos de los objetivos.

d) Determinar si los puntos eficientes satisfacen la condición de Karush-Kuhn-Tucker.

10. Sea el problema de maximizar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -x_1 \leq 0, -x_2 \leq 0, (x_1 - 1)^3 + x_2 \leq 0\}$, $f_1(x) = -3x_1 - 2x_2 + 3$, $f_2(x) = -x_1 - 3x_2 + 1$ y $\hat{x} = (1, 0)$.

a) Dibujar la región factible.

b) Decir si se satisface la cualificación de restricción de Kuhn-Tucker en $\hat{x}$.

c) Decir si $\hat{x}$ es un punto eficiente en el sentido de Geoffrion.

11. Considerar el problema multiobjetivo siguiente:

max x_1

max $2x_1 + 2x_2$

s. a $\quad x_1 \leq 4$

$x_2 \leq 7$

$2x_1 + x_2 \leq 9$

$x_1, x_2 \geq 0$

a) Plantear y resolver el modelo de programación suponiendo una meta de 3 en el primer objetivo y otra de 14 en el segundo, introduciendo variables de deficiencia y asignando pesos iguales al no cumplimiento de cada una de las dos metas.

b) Plantear y resolver una sucesión de modelos lineales para calcular una solución de programación por metas lexicográfica, priorizando los objetivos en el orden dado.

12. El servicio de aguas Distrito 88, en el suroeste de Estados Unidos, recoge agua procedente de los ríos en un embalse $E1$ en la montaña. El caudal estimado es de 294 millones de pies de acre[2]. Al menos 24 millones de pies de acre de agua son contratados para ir directamente desde $E1$ hasta las poblaciones del entorno, aunque éstas aceptan tanta cantidad de agua como pueda ser suministrada. El caudal restante va a un segundo embalse $E2$ en el desierto perdiéndose un 20% por evaporación en el camino. Parte del agua en $E2$ puede ser dedicada al regadío de granjas en los alrededores. El resto del agua atraviesa una presa hidroeléctrica y corre río abajo. Para mantener los equipos, el agua sobre la presa debe ser al menos de 50 millones de pies de acre. Distrito 88 vende agua a las poblaciones por valor de 0'50

[2] 1 pie de acre = 1233'48 m^3.

$ por pie de acre de agua y para el regadío de los granjeros a 0'20 $ por pie de acre de agua. El agua utilizada en la presa hidroeléctrica cuesta 0'80 $ por pie de acre de agua.

Distrito 88 quiere maximizar tanto el agua suministrada para el riego como el beneficio de sus ventas.

a) Tras modelar el problema por medio de un programa multiobjetivo lineal, establecer y resolver una sucesión de programas lineales para obtener una solución lexicográfica del problema priorizando los objetivos en el orden dado en el enunciado.

b) Establecer y resolver un objetivo lineal suma ponderada de objetivos iniciales que pondere el primero dos veces más que el segundo.

1. Estudiar la concavidad o convexidad de las siguientes funciones:

- $f(x, y) = (x - 2y)^4$.
- $y = f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 3x_2^2$ con $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

2. Estudiar si las siguientes funciones son cuasiconvexas o cuasicóncavas:

- $y = f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 3x_2^2$ con $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
- $f(x_1, x_2) = ln(x_1 x_2)$ con $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{++}$.

3. Dado el problema de programación no lineal:

$$\text{Max } f(x) = x_1^2 + 20x_2$$

$$\text{s. a } x_1 + x_2 = 100.$$

- Resuélvalo usando la función Lagrangiana.
- Compruébese gráficamente la solución.

4. Utilizando, por ejemplo, el libro de Hillier y Lieberman (2006) (ver documento "SUMT"), estudia la técnica secuencial de minimización no restringida (SUMT) para problemas de optimización no lineal restringida y aplícala a un caso propuesto por ti.

5. Considérese el siguiente problema de programación convexa linealmente restringida:

Maximizar

$$3x_1 + 4x_2 - x_1^3 - 2x_2^2$$

sujeto a la condición

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

donde $x_1, x_2 \geq 0$

- Comenzar con la solución inicial $(x_1, x_2) = (1/4, 1/4)$ para realizar tres iteraciones del algoritmo de Frank-Wolfe.

- Utilizar las condiciones de Kuhn-Tucker para verificar si la solución obtenida en el apartado anterior es óptima.

6. Considerar el siguiente problema:

- min $(x-1)^2 + (y-1)^2$

sujeto a:

- $-x + y = \frac{1}{2}$
- $x + y \leq 1$
- $x, y \geq 0$

1. Resolverlo gráficamente.
2. Comprobar la respuesta utilizando la teoría de Kuhn-Tucker.
3. Encontrar la función dual $\mathbf{l}(\lambda, \mu)$ y probar que es cóncava.

7. Minimizar

$$J = \sum_{i=0}^{N} (qx_i^2 + ru_i^2) + qx_3^2$$

sujeto a la condición dinámica del estado

$$x_{i+1} = ax_i + bu_i, \ i = 0, \cdots, N-1$$

donde $N = 2, q = 2, r = 4, a = 1$ y $b = 0'5$.

8. Haciendo uso del método símplex modificado para problemas de programación cuadrática, maximizar

$$f(x_1, x_2) = 15x_1 + 30x_2 + 4x_1x_2 - 2x_1^2 - 4x_2^2$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 \leq 30 \text{ y}$$

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0.$$

9. Un fabricante tiene 3 tipos de semiconductores de silicio ("wafers") en existencias para fabricar 3 variedades de circuitos integrados ("chips") de ordenador. Algún semiconductor no se puede usar para algún circuito, pero

Wafer	P-C			C	S
	1	2	3		
1	7	8	-	15	500
2	10	-	6	25	630
3	-	10	10	30	710
N	440	520	380		

hay dos alternativas para cada uno de ellos. La tabla siguiente muestra: costes unitarios (C), cantidad disponible de cada tipo de semiconductor (S), necesidades de cada circuito (N) y una puntuación entre 0 y 10 para la adecuación de cada tipo de semiconductor a cada circuito (P-C).

Modelar el problema por medio de un programa lineal multiobjetivo.

10. Sea el problema de maximizar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -x_1 \leq 0, -x_2 \leq 0, (x_1 - 1)^3 + x_2 \leq 0\}$, $f_1(x) = -3x_1 - 2x_2 + 3$, $f_2(x) = -x_1 - 3x_2 + 1$ y $\hat{x} = (1, 0)$.

a) Dibujar la región factible.

b) Decir si se satisface la cualificación de restricción de Kuhn-Tucker en $\hat{x}$.

c) Decir si $\hat{x}$ es un punto eficiente en el sentido de Geoffrion.

11. Considerar el problema multiobjetivo siguiente:

max x_1

max $2x_1 + 2x_2$

s. a $\quad x_1 \leq 4$

$x_2 \leq 7$

$2x_1 + x_2 \leq 9$

$x_1, x_2 \geq 0$

a) Plantear y resolver el modelo de programación suponiendo una meta de 3 en el primer objetivo y otra de 14 en el segundo, introduciendo variables de deficiencia y asignando pesos iguales al no cumplimiento de cada una de las dos metas.

b) Plantear y resolver una sucesión de modelos lineales para calcular una solución de programación por metas lexicográfica, priorizando los objetivos en el orden dado.

12. Considerar el problema multiobjetivo del Ejercicio 9 y el complemento Solver de Excel :

a) Establecer y resolver una sucesión de programas lineales para calcular una solución lexicográfica del modelo considerando los objetivos en el orden dado.

b) Establecer y resolver un programa lineal con suma ponderada de objetivos que pondere al primero el doble que al segundo.

c) Supóngase que se establece en el coste una meta de 30.000 y en la puntuación de 13.000. Plantear un problema de programación por metas que minimice la suma no ponderada de no cumplimiento de las metas.

d) Establecer y resolver una sucesión de programas lineales para calcular una solución de programación por metas lexicográfica tomando los objetivos en el orden dado.

e) Formular una función objetivo alternativa del programa por metas de la parte c) que efectúe la optimización por metas lexicográfica de la parte d) en un único paso.

1. Estudiar la concavidad o convexidad de las siguientes funciones:

- $f(x,y) = -x^2 - y^2 + 2x + 2xy - y$.
- $f(x,y) = x^4 - y^2$.
- $f(x,y) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 10x_1 - 10x_2$.

2. Estudiar si las siguientes funciones son cuasiconvexas o cuasicóncavas:

- $f(x_1,x_2) = ln(x_1 + x_2)$ con $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2_{++}$.
- $f(x_1,x_2) = ax_1 + bx_2 + c$ con $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad a,b,c \in \mathbb{R}$.

3. Resolver gráficamente el siguiente problema de programación no lineal:

$$\text{Optimizar } f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2$$

$$\text{s. a } 2x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

4. Un monopolista vende dos productos 1 y 2 cuyas funciones de demanda vienen definidas por las ecuaciones:

$0'1p_1 - 1'2 + 0'2x_1 = 0$

$10p_2 - 320 + 40x_2 = 0$

en donde p_1, p_2 y x_1, x_2 son, respectivamente, los precios y cantidades de los productos 1 y 2. Su función de costes es:

$$C(x_1,x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2.$$

Se pide encontrar el precio y el *output* de cada bien que maximiza el beneficio empleando la función Lagrangiana comprobando que se verifica la condición de cualificación de restricciones.

5. Considérese el siguiente problema de programación convexa linealmente restringida:

Maximizar

$$3x_1 + 4x_2 - x_1^3 - 2x_2^2$$

sujeto a la condición

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

donde $x_1, x_2 \geq 0$

- Comenzar con la solución inicial $(x_1, x_2) = (1/4, 1/4)$ para realizar tres iteraciones del algoritmo de Frank-Wolfe.
- Utilizar las condiciones de Kuhn-Tucker para verificar si la solución obtenida en el apartado anterior es óptima.

6. Utilizando, por ejemplo, el libro de Hillier y Lieberman (2006) (ver documento "SUMT"), estudia la técnica secuencial de minimización no restringida (SUMT) para problemas de optimización no lineal restringida y aplícala a un caso propuesto por ti.

7. Considerar el siguiente problema:

- min $(x-1)^2 + (y-1)^2$

sujeto a:

- $-x + y = \dfrac{1}{2}$
- $x + y \leq 1$
- $x, y \geq 0$

1. Resolverlo gráficamente.
2. Comprobar la respuesta utilizando la teoría de Kuhn-Tucker.
3. Encontrar la función dual $\mathbf{l}(\lambda, \mu)$ y probar que es cóncava.

8. Haciendo uso del método símplex modificado para problemas de programación cuadrática, maximizar

$$f(x_1, x_2) = 15x_1 + 30x_2 + 4x_1x_2 - 2x_1^2 - 4x_2^2$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 \leq 30 \text{ y}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

9. Un fabricante desea minimizar el coste de los contenedores que produce así como el peso de los mismos. Se encuentra ante un problema de decisión motivado por la mayor carestía de los materiales más ligeros.

Los contenedores han de ser de base cuadrada, abiertos por la parte superior y tener una capacidad o volumen de 10 m^3. El material con el que se va a construir la parte inferior cuesta 6 euros/m^2 y pesa 4 Kg/m^2. El material con el que se van a construir las caras del contenedor cuesta 3 euros/m^2 y pesa 8 Kg/m^2.

Plantear el problema por medio de un modelo de programación biobjetivo no lineal y realizar un bosquejo del conjunto de resultados en el espacio de objetivos.

10. Sea el problema biobjetivo:

$\max Z_1 = 5X_1 - 2X_2$

$\max Z_2 = -X_1 + 4X_2$

s. a $-X_1 + X_2 \leq 3$

$X_1 + X_2 \leq 8$

$X_1 \leq 6$, $x_2 \leq 4$

$X_1, X_2 \geq 0$

Utilizando Maxima:

a) Representar gráficamente la región factible X.

b) Representar el espacio de objetivos $Z(X)$.

c) Determinar gráficamente los puntos eficientes por medio de los contornos de los objetivos.

d) Comprobar si se verifica el recíproco del segundo teorema de Yu and Zeleni.

11. Minimizar

$$J = \sum_{i=0}^{N}(qx_i^2 + ru_i^2) + qx_3^2$$

sujeto a la condición dinámica del estado

$$x_{i+1} = ax_i + bu_i, \;\; i = 0, \cdots, N-1$$

donde $N = 2, q = 2, r = 4, a = 1$ y $b = 0'5$.

12. Considerar el problema multiobjetivo del Ejercicio 9 de Ignacio Lado y el complemento Solver de Excel :

a) Establecer y resolver una sucesión de programas lineales para calcular una solución lexicográfica del modelo considerando los objetivos en el orden dado.

b) Establecer y resolver un programa lineal con suma ponderada de objetivos que pondere al primero el doble que al segundo.

c) Supóngase que se establece en el coste una meta de 30.000 y en la puntuación de 13.000. Plantear un problema de programación por metas que minimice la suma no ponderada de no cumplimiento de las metas.

d) Establecer y resolver una sucesión de programas lineales para calcular una solución de programación por metas lexicográfica tomando los objetivos en el orden dado.

e) Formular una función objetivo alternativa del programa por metas de la parte c) que efectúe la optimización por metas lexicográfica de la parte d) en un único paso.

1. Estudiar la concavidad o convexidad de la siguiente función:

- $f(x,y) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 10x_1 - 10x_2$.

2. Probar que si $g(x)$ y $h(y)$ son funciones convexas, entonces $f(x,y) = g(x) + h(y)$ es convexa.

3. Estudiar si la siguiente función es cuasiconvexa o cuasicóncava: $f(x_1,x_2) = 2x_1^2 + 3x_2^2$ con $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$.

4. Dado el problema de programación no lineal:

$$\text{Min } f(x) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\text{s. a } (x_1 - 1)^3 - x_2^2 = 0.$$

- Compruébese gráficamente que la solución es $x = (1,0)$.
- Resuélvalo usando la función Lagrangiana.

5. Utilizando, por ejemplo, el libro de Hillier y Lieberman (2006) (ver documento "SUMT"), estudia la técnica secuencial de minimización no restringida (SUMT) para problemas de optimización no lineal restringida y aplícala a un caso propuesto por ti.

6. Minimizar

$$J = \sum_{i=0}^{N}(qx_i^2 + ru_i^2) + qx_3^2$$

sujeto a la condición dinámica del estado

$$x_{i+1} = ax_i + bu_i, \ i = 0, \cdots, N-1$$

donde $N = 2, q = 2, r = 4, a = 1$ y $b = 0'5$.

7. Haciendo uso del método símplex modificado para problemas de programación cuadrática, maximizar

$$f(x_1,x_2) = 15x_1 + 30x_2 + 4x_1x_2 - 2x_1^2 - 4x_2^2$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 \leq 30 \text{ y}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

8. Considerar el siguiente problema:

- min $(x-1)^2 + (y-1)^2$

sujeto a:

- $-x + y = \dfrac{1}{2}$
- $x + y \leq 1$
- $x, y \geq 0$

1. Resolverlo gráficamente.
2. Comprobar la respuesta utilizando la teoría de Kuhn-Tucker.
3. Encontrar la función dual $\mathbf{l}(\lambda, \mu)$ y probar que es cóncava.

9. Sea el problema biobjetivo:

$\max Z_1 = 3X_1 - 2X_2$

$\max Z_2 = -X_1 + 2X_2$

s. a $-2X_1 + 2X_2 \leq 4$

$4X_1 - 2X_2 \leq 20$

$\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2 \leq 4$

$X_1, X_2 \geq 0$

Utilizando Maxima:

a) Representar gráficamente la región factible X.

b) Representar el espacio de objetivos $Z(X)$.

c) Determinar gráficamente los puntos eficientes por medio de los contornos de los objetivos.

d) Determinar si los puntos eficientes satisfacen la condición de Karush-Kuhn-Tucker.

10. Consideremos un problema de programación relativo a la maximización de dos objetivos donde el conjunto de resultados alcanzables en el espacio de objetivos viene dado por:

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^2 \ : \ y_i \in [0,1], \ i = 1, 2\}$$
$$\cup \{y \in \mathbb{R}^2 \ : \ y_1 \in [1,2], \ 0 \leq y_2 \leq 1 - \sqrt{1-(y_1-2)^2}\}.$$

a) Representar gráficamente el conjunto Y.

b) Decir qué puntos eficientes son solución de $P(\lambda)$ para algún $\lambda \in \Delta$ y cuáles no, donde

$$\Delta = \{\lambda \in \mathbb{R}^2 \ : \ \lambda_j \geq 0 \ \forall j = 1, 2, \ \sum_{j=1}^{2} \lambda_j = 1\}$$

y $P(\lambda)$ es el problema consistente en encontrar para un $\lambda \in \Delta$ el $\max_{x \in X} \sum_{j=1}^{2} \lambda_j f_j(x)$.

c) Responder a las mismas cuestiones que en b) considerando $Y' = Y \cup \{(2,1)\}$.

11. Considerar el problema multiobjetivo del Ejercicio 11 de Ignacio Lado.

a) Comprobar la factibilidad del problema al modo de la fase 1 del simplex multicriterio.

b) Determinar un punto extremo eficiente utilizando el Teorema de Ecker and Kouada.

c) Determinar una variable eficiente no básica haciendo uso de la definición.

12. El servicio de aguas Distrito 88, en el suroeste de Estados Unidos, recoge agua procedente de los ríos en un embalse $E1$ en la montaña. El caudal estimado es de 294 millones de pies de acre[3]. Al menos 24 millones

[3] 1 pie de acre = 1233'48 m^3.

de pies de acre de agua son contratados para ir directamente desde $E1$ hasta las poblaciones del entorno, aunque éstas aceptan tanta cantidad de agua como pueda ser suministrada. El caudal restante va a un segundo embalse $E2$ en el desierto perdiéndose un 20% por evaporación en el camino. Parte del agua en $E2$ puede ser dedicada al regadío de granjas en los alrededores. El resto del agua atraviesa una presa hidroeléctrica y corre río abajo. Para mantener los equipos, el agua sobre la presa debe ser al menos de 50 millones de pies de acre. Distrito 88 vende agua a las poblaciones por valor de 0'50 $ por pie de acre de agua y para el regadío de los granjeros a 0'20 $ por pie de acre de agua. El agua utilizada en la presa hidroeléctrica cuesta 0'80 $ por pie de acre de agua.

Distrito 88 quiere maximizar tanto el agua suministrada para el riego como el beneficio de sus ventas.

a) Tras modelar el problema por medio de un programa multiobjetivo lineal, establecer y resolver una sucesión de programas lineales para obtener una solución lexicográfica del problema priorizando los objetivos en el orden dado en el enunciado.

b) Establecer y resolver un objetivo lineal suma ponderada de objetivos iniciales que pondere el primero dos veces más que el segundo.

1. Estudiar la concavidad o convexidad de las siguientes funciones:

- $f(x, y, z) = x^3 + 2y^2 + 4z^4$.
- $f(x) = x_1 e^{-(x_1+x_2)}$.
- $f(x) = +(x_1 + 2x_2)^{1/2} \quad x_1, x_2 > 0$.

2. Estudiar si la siguiente función es cuasiconvexa o cuasicóncava: $f(x_1, x_2) = e^{ax_1+bx_2}$ con $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad a, b \in \mathbb{R}$.

3. Resolver gráficamente el siguiente problema de programación no lineal:

$$\text{Optimizar } f(x) = x_1 + x_2$$

$$\text{s. a } x_1^2 - x_2 \leq 0$$

$$2x_1 + x_2 \leq 3$$

$$2x_1 - 3x_2 + 5 \geq 0.$$

4. Una empresa desea minimizar sus costes totales, con la condición de que los ingresos obtenidos por la venta de las cantidades x_1, x_2 de los dos productos que fabrica superen un cierto umbral mínimo. Sabiendo que los costes unitarios de fabricación de cada bien son funciones lineales de los *outputs* producidos de la forma $C_1 = x_1$, $C_2 = 2x_2$, que se vende todo lo que se produce y que los precios de venta de los productos son, $p_1 = 1$, $p_2 = 3$, respectivamente, se pide:

- Formular el programa matemático correspondiente, suponiendo que se deben ingresar, como mínimo, 3 unidades monetarias.
- Resolver el programa utilizando las condiciones de Kuhn-Tucker y decir si son condiciones necesarias y suficientes.
- Estudiar cuánto variará el coste óptimo con respecto a la situación anterior si como mínimo deben ingresarse 2'8 unidades monetarias y si como mínimo deben ingresarse 3'1 unidades monetarias.

5. Minimizar

$$J = \sum_{i=0}^{N} (qx_i^2 + ru_i^2) + qx_3^2$$

sujeto a la condición dinámica del estado

$$x_{i+1} = ax_i + bu_i, \;\; i = 0, \cdots, N-1$$

donde $N = 2, q = 2, r = 4, a = 1$ y $b = 0'5$.

6. Haciendo uso del método símplex modificado para problemas de programación cuadrática, maximizar

$$f(x_1, x_2) = 15x_1 + 30x_2 + 4x_1x_2 - 2x_1^2 - 4x_2^2$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 \leq 30 \text{ y}$$

$$x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0.$$

7. Considerar el siguiente problema:

- min $(x-1)^2 + (y-1)^2$

sujeto a:

- $-x + y = \dfrac{1}{2}$
- $x + y \leq 1$
- $x, y \geq 0$

1. Resolverlo gráficamente.
2. Comprobar la respuesta utilizando la teoría de Kuhn-Tucker.
3. Encontrar la función dual $\mathbf{l}(\lambda, \mu)$ y probar que es cóncava.

8. Considérese el siguiente problema de programación convexa linealmente restringida:

Maximizar

$$3x_1 + 4x_2 - x_1^3 - 2x_2^2$$

sujeto a la condición

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

donde $x_1, x_2 \geq 0$

- Comenzar con la solución inicial $(x_1, x_2) = (1/4, 1/4)$ para realizar tres iteraciones del algoritmo de Frank-Wolfe.
- Utilizar las condiciones de Kuhn-Tucker para verificar si la solución obtenida en el apartado anterior es óptima.

9. Utilizando, por ejemplo, el libro de Hillier y Lieberman (2006) (ver documento "SUMT"), estudia la técnica secuencial de minimización no restringida (SUMT) para problemas de optimización no lineal restringida y aplícala a un caso propuesto por ti.

10. Sea el problema de maximizar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $f(x) = x$ sujeto a $x \in X = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x_i \leq 4 \ \forall i = 1, 2$ y $x_2 \leq 2 + \sqrt{4 - (x_1 - 2)^2}$ con $x_1 \in [2, 4]\}$.

a) Dibujar la región factible.

b) Identificar gráficamente los conjuntos de soluciones débilmente eficientes, eficientes y propiamente eficientes en el sentido de Geoffrion.

11. El servicio de aguas Distrito 88, en el suroeste de Estados Unidos, recoge agua procedente de los ríos en un embalse $E1$ en la montaña. El caudal estimado es de 294 millones de pies de acre[4]. Al menos 24 millones de pies de acre de agua son contratados para ir directamente desde $E1$ hasta las poblaciones del entorno, aunque éstas aceptan tanta cantidad de agua como pueda ser suministrada. El caudal restante va a un segundo embalse $E2$ en el desierto perdiéndose un 20% por evaporación en el camino. Parte del agua en $E2$ puede ser dedicada al regadío de granjas en los alrededores. El resto del agua atraviesa una presa hidroeléctrica y corre río abajo. Para mantener los equipos, el agua sobre la presa debe ser al menos de 50 millones de pies de acre. Distrito 88 vende agua a las poblaciones por valor de 0'50 $ por pie de acre de agua y para el regadío de los granjeros a 0'20 $ por pie de acre de agua. El agua utilizada en la presa hidroeléctrica cuesta 0'80 $ por pie de acre de agua.

[4] 1 pie de acre = 1233'48 m^3.

Distrito 88 quiere maximizar tanto el agua suministrada para el riego como el beneficio de sus ventas.

a) Tras modelar el problema por medio de un programa multiobjetivo lineal, establecer y resolver una sucesión de programas lineales para obtener una solución lexicográfica del problema priorizando los objetivos en el orden dado en el enunciado.

b) Establecer y resolver un objetivo lineal suma ponderada de objetivos iniciales que pondere el primero dos veces más que el segundo.

12. Considerar el problema multiobjetivo del Ejercicio 11 de Ignacio Lado.

a) Plantear el problema multiobjetivo dual.

b) Encontrar una solución eficiente del problema multiobjetivo dual.

1. Estudiar la convexidad, concavidad, convexidad o concavidad estricta de las siguientes funciones:

- $f(x_1, x_2) = ln(x_1 + x_2)$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{++}$.
- $f(x_1, x_2) = ln(x_1 x_2)$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{++}$.
- $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + e^{x_2} + 3x_3$, $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

2. Estudiar si las siguientes funciones son cuasiconvexas o cuasicóncavas:

- $y = f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 3x_2^2$ con $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
- $f(x_1, x_2) = ln(x_1 x_2)$ con $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{++}$.

3. Resolver gráficamente el siguiente problema de programación no lineal:

$$\text{Optimizar } f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2$$

$$\text{s. a } 2x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

4. Una empresa desea minimizar sus costes totales, con la condición de que los ingresos obtenidos por la venta de las cantidades x_1, x_2 de los dos productos que fabrica superen un cierto umbral mínimo. Sabiendo que los costes unitarios de fabricación de cada bien son funciones lineales de los *outputs* producidos de la forma $C_1 = x_1$, $C_2 = 2x_2$, que se vende todo lo que se produce y que los precios de venta de los productos son, $p_1 = 1$, $p_2 = 3$, respectivamente, se pide:

- Formular el programa matemático correspondiente, suponiendo que se deben ingresar, como mínimo, 3 unidades monetarias.
- Resolver el programa utilizando las condiciones de Kuhn-Tucker y decir si son condiciones necesarias y suficientes.

- Estudiar cuánto variará el coste óptimo con respecto a la situación anterior si como mínimo deben ingresarse 2'8 unidades monetarias y si como mínimo deben ingresarse 3'1 unidades monetarias.

5. Minimizar

$$J = \sum_{i=0}^{N} (qx_i^2 + ru_i^2) + qx_3^2$$

sujeto a la condición dinámica del estado

$$x_{i+1} = ax_i + bu_i, \;\; i = 0, \cdots, N-1$$

donde $N = 2, q = 2, r = 4, a = 1$ y $b = 0'5$.

6. Considerar el siguiente problema:

- min $\;(x-1)^2 + (y-1)^2$

sujeto a:

- $-x + y = \dfrac{1}{2}$
- $x + y \leq 1$
- $x, y \geq 0$

1. Resolverlo gráficamente.
2. Comprobar la respuesta utilizando la teoría de Kuhn-Tucker.
3. Encontrar la función dual $\mathbf{l}(\lambda, \mu)$ y probar que es cóncava.

7. Utilizando, por ejemplo, el libro de Hillier y Lieberman (2006) (ver documento "SUMT"), estudia la técnica secuencial de minimización no restringida (SUMT) para problemas de optimización no lineal restringida y aplícala a un caso propuesto por ti.

8. Haciendo uso del método símplex modificado para problemas de programación cuadrática, maximizar

$$f(x_1, x_2) = 15x_1 + 30x_2 + 4x_1x_2 - 2x_1^2 - 4x_2^2$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 \leq 30 \text{ y}$$

Wafer	P-C			C	S
	1	2	3		
1	7	8	-	15	500
2	10	-	6	25	630
3	-	10	10	30	710
N	440	520	380		

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0.$$

9. Considérese el siguiente problema de programación convexa linealmente restringida:

Maximizar

$$3x_1 + 4x_2 - x_1^3 - 2x_2^2$$

sujeto a la condición

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

donde $x_1, x_2 \geq 0$

- Comenzar con la solución inicial $(x_1, x_2) = (1/4, 1/4)$ para realizar tres iteraciones del algoritmo de Frank-Wolfe.
- Utilizar las condiciones de Kuhn-Tucker para verificar si la solución obtenida en el apartado anterior es óptima.

10. Un fabricante tiene 3 tipos de semiconductores de silicio ("wafers") en existencias para fabricar 3 variedades de circuitos integrados ("chips") de ordenador. Algún semiconductor no se puede usar para algún circuito, pero hay dos alternativas para cada uno de ellos. La tabla siguiente muestra: costes unitarios (C), cantidad disponible de cada tipo de semiconductor (S), necesidades de cada circuito (N) y una puntuación entre 0 y 10 para la adecuación de cada tipo de semiconductor a cada circuito (P-C).

Modelar el problema por medio de un programa lineal multiobjetivo.

11. Sea el problema de maximizar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -x_1 \leq 0, -x_2 \leq 0, (x_1 - 1)^3 + x_2 \leq 0\}$, $f_1(x) = -3x_1 - 2x_2 + 3$, $f_2(x) = -x_1 - 3x_2 + 1$ y $\hat{x} = (1, 0)$.

a) Dibujar la región factible.

b) Decir si se satisface la cualificación de restricción de Kuhn-Tucker en $\hat{x}$.

c) Decir si $\hat{x}$ es un punto eficiente en el sentido de Geoffrion.

12. Considerar el problema multiobjetivo siguiente:

max x_1

max $2x_1 + 2x_2$

s. a $\quad x_1 \leq 4$

$x_2 \leq 7$

$2x_1 + x_2 \leq 9$

$x_1, x_2 \geq 0$

a) Plantear y resolver el modelo de programación suponiendo una meta de 3 en el primer objetivo y otra de 14 en el segundo, introduciendo variables de deficiencia y asignando pesos iguales al no cumplimiento de cada una de las dos metas.

b) Plantear y resolver una sucesión de modelos lineales para calcular una solución de programación por metas lexicográfica, priorizando los objetivos en el orden dado.

Fecha límite de entrega: 17 de enero de 2011.