Programación Multicriterio

Balbina Virginia Casas Méndez

Curso de Programación Matemática: bloque II

Máster en Técnicas Estadísticas

Curso 2010/11

Introducción

Ejemplos

Introducción
Ejemplos

Programación multicriterio (fundamentos teóricos)
Formulación del problema y conceptos de solución
Ejercicios

Introducción
Ejemplos

Programación multicriterio (fundamentos teóricos)
Formulación del problema y conceptos de solución
Ejercicios

Bibliografía

Introducción
Ejemplos

Programación multicriterio (fundamentos teóricos)

Bibliografía

Ejemplo de inversiones bancarias (Eatman and Sealey, 1979)

Un banco tiene 20 millones de euros de capital, 150 millones en cuentas corrientes y 80 millones en cuentas de ahorro y certificados de depósito.

Tabla 1. Oportunidades de inversión

Categoría	**Ganancia (%)**	**Parte líquida (%)**	**Existencia de riesgo (%)**
1: Pagos	0'0	100'0	No
2: Corto plazo	4'0	99'5	No
3: Gobierno 1-5 años	4'5	96'0	No
4: Gobierno 5-10 años	5'5	90'0	No
5: Gobierno 10- años	7'0	85'0	No
6: Préstamos a plazo	10'5	0'0	Sí
7: Préstamos hipotecarios	8'5	0'0	Sí
8: Préstamos comerciales	9'2	0'0	Sí

Variables:

X_j =cantidad invertida en la categoría j (millones de euros)
$j = 1, \ldots, 8$

Objetivos:

- max $0'040X_2 + 0'045X_3 + 0'055X_4 + 0'070X_5 + 0'105X_6 + 0'085X_7 + 0'092X_8$ (beneficio)
- min $\frac{1}{20}(X_6 + X_7 + X_8)$ (riesgo)

Restricciones:

- $X_1 + \cdots + X_8 = (20 + 150 + 80)$ (inversión total)
- $X_1 \geq 0'14(150) + 0'04(80)$ (reserva para pagos)
- $1'00X_1 + 0'995X_2 + 0'960X_3 + 0'900X_4 + 0'850X_5 \geq 0'47(150) + 0'36(80)$ (liquidez)

- $X_j \geq 0'05(20 + 150 + 80)$ para todo $j = 1, \ldots, 8$ (diversificación)
- $X_8 \geq 0'30(20 + 150 + 80)$ (comercial)
- $X_1, \ldots, X_8 \geq 0$ (no negatividad)

En el trabajo se incluye otra función a minimizar usando como medida del riesgo la denominada “ratio de adecuación del capital” relacionada con el capital requerido para garantizar la solvencia.

El diseño de un dinamómetro (Singh and Agarwal, 1983)

Variables:

$W =$ anchura del anillo (en centímetros).

$T =$ espesor de la superficie exterior (en centímetros).

$R =$ radio de las dos aberturas (en centímetros).

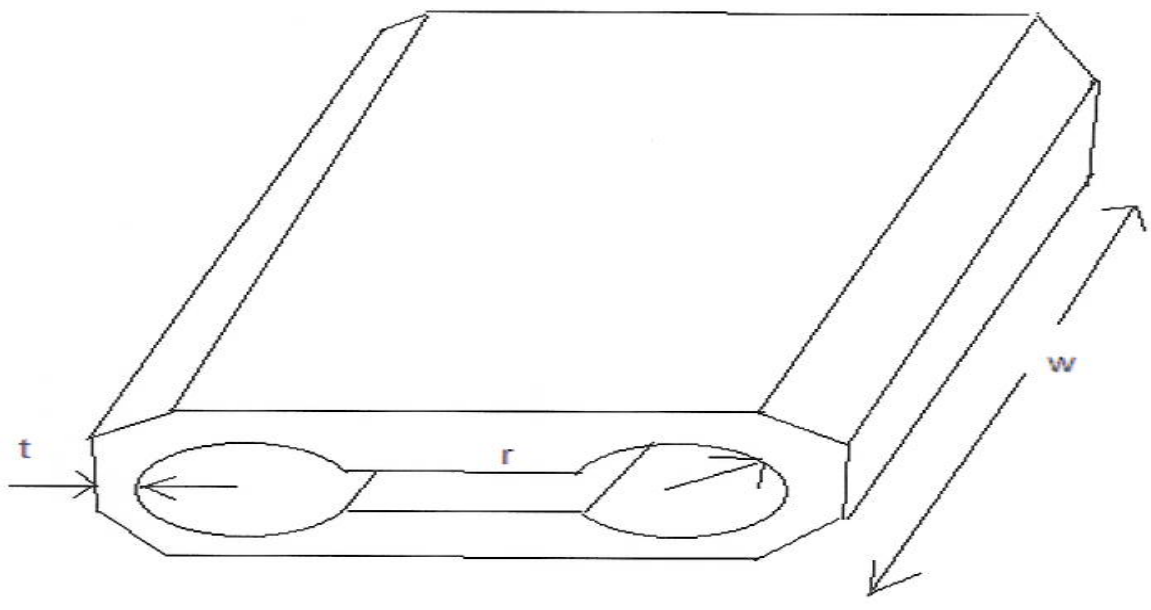
Objetivos:

- $\max \dfrac{0'7R}{EWT^2}$ (sensitividad)

  donde $E = 2'1 \times 10^6$ es el módulo de elasticidad de Young.

- $\max \dfrac{EWT^3}{R^3}$ (rigidez)

Figura 1.



Ejemplo de diseño de un dinamómetro

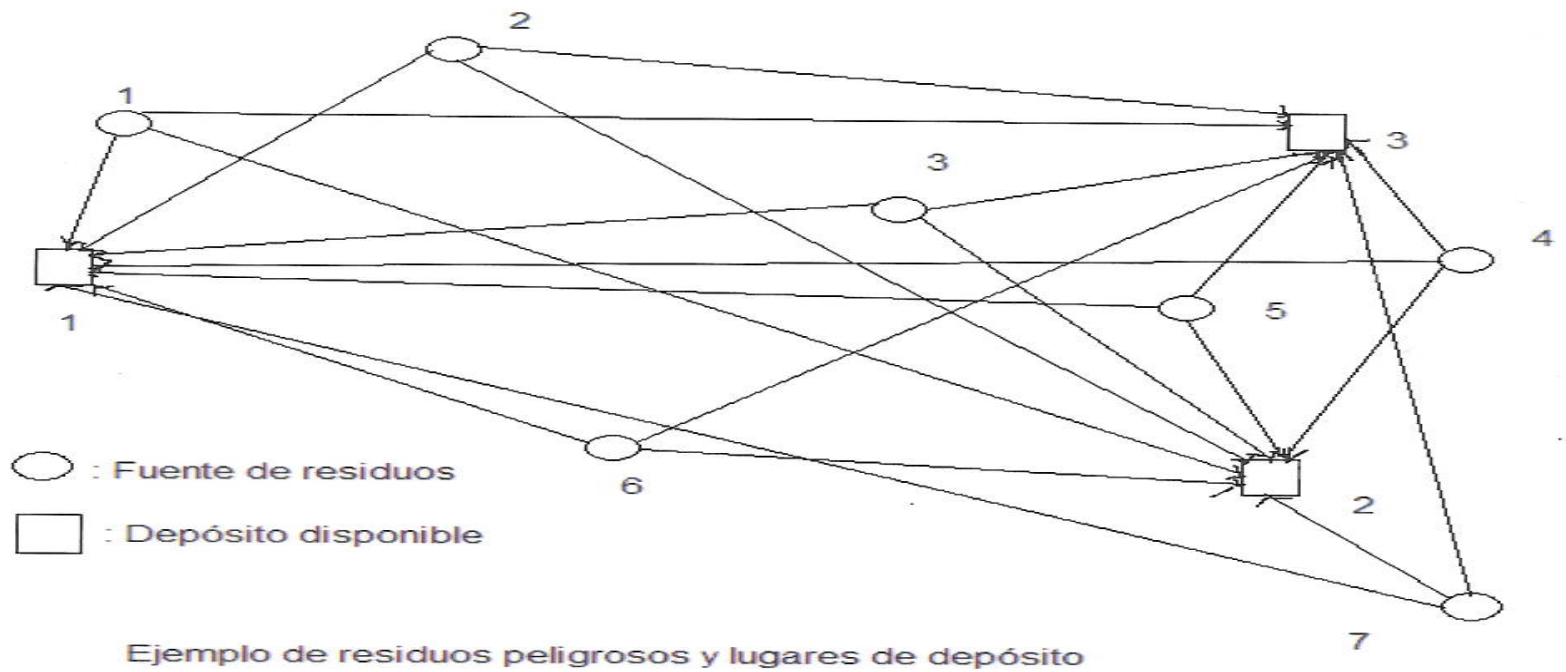
Restricciones:

- $5'0 \leq W \leq 10'0$
- $0'1 \leq T \leq 2'0$
- $1'25 \leq R \leq 20'0$

El problema se puede linealizar tomando logaritmos en las variables y en las funciones objetivo.

Destrucción de residuos peligrosos (ReVelle, Cohon and Shobrys, 1991)

Figura 2.



Ejemplo de residuos peligrosos y lugares de depósito

Tabla 2. Residuos peligrosos

		j=1		j=2		j=3		s_i
i		**k=1**	**k=2**	**k=1**	**k=2**	**k=1**	**k=2**	
1	Distancia	200	280	850	1090	900	1100	1'2
	Población	50	15	300	80	400	190	
2	Distancia	400	530	730	860	450	600	0'5
	Población	105	60	380	210	350	160	
3	Distancia	600	735	550	600	210	240	0'3
	Población	300	130	520	220	270	140	
4	Distancia	900	1060	450	570	180	360	0'7
	Población	620	410	700	430	800	280	
5	Distancia	600	640	390	440	360	510	0'6
	Población	205	180	440	370	680	330	
6	Distancia	900	1240	100	120	640	800	0'1
	Población	390	125	80	30	800	410	
7	Distancia	1230	1410	400	460	1305	1500	0'2
	Población	465	310	180	105	1245	790	

Parámetros:

$s_i =$ cantidad de residuo que se espera produzca la fuente i

$d_{i,j,k} =$ distancia de la fuente i al depósito j por el camino k

$p_{i,j,k} =$ población de la fuente i al depósito j por el camino k

Variables:

$$Y_j = \begin{cases} 1 & \text{si se abre el sitio } j \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$X_{i,j,k} =$ cantidad transportada de la fuente i al sitio j por la ruta k

Objetivo:

- $\min \sum_{i=1}^{7} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{2} d_{i,j,k} X_{i,j,k}$ (distancia)
- $\min \sum_{i=1}^{7} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{2} p_{i,j,k} X_{i,j,k}$ (población)

Restricciones:

- $\sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{2} X_{i,j,k} = s_i \; i = 1, \cdots, 7$ (fuentes)
- $\sum_{j=1}^{3} Y_j = 2$ (depósitos)
- $X_{i,j,k} \leq s_i Y_j \; i = 1, \cdots, 7; \; j = 1, 2, 3; \; k = 1, 2$
- $X_{i,j,k} \geq 0 \; i = 1, \cdots, 7; \; j = 1, 2, 3; \; k = 1, 2$
- $Y_j = 0$ o $1 \; j = 1, 2, 3$

Algunas aplicaciones recientes

Ehrgott, M. and Ryan, D. M. (2002)
Constructing robust crew schedules with bicriteria optimization.
Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, 11 (3): 139-150.

Algunas aplicaciones recientes

Ehrgott, M. and Ryan, D. M. (2002)
Constructing robust crew schedules with bicriteria optimization.
Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, 11 (3): 139-150.

Küfer, K. H., Scherrer, A., Monz, M., Alonso, F., Trinkaus, H., Bortfeld, T. and Thieke, C. (2003)
Intensity-modulated radiotherapy. A large scale multi-criteria programming problem.
OR Spectrum, 25 (2): 223-249.

Algunas aplicaciones recientes

Ehrgott, M. and Ryan, D. M. (2002)
Constructing robust crew schedules with bicriteria optimization.
Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, 11 (3): 139-150.

Küfer, K. H., Scherrer, A., Monz, M., Alonso, F., Trinkaus, H., Bortfeld, T. and Thieke, C. (2003)
Intensity-modulated radiotherapy. A large scale multi-criteria programming problem.
OR Spectrum, 25 (2): 223-249.

Romeijn, H. E. and Dempsey, J. F. (2008)
Intensity modulated radiation therapy treatment plan optimization.
TOP, 16 (2): 215-243.

Introducción

Programación multicriterio (fundamentos teóricos)
Formulación del problema y conceptos de solución
Ejercicios

Bibliografía

Programación multicriterio (Ehrgott and Wiecek, 2005)

Un **programa multiobjetivo (multicriterio) (MOP)** (Gale, Kuhn and Tucker, 1951) se plantea como

$$\min(f_1(x), \cdots, f_p(x))$$
$$\text{sujeto a } x \in X$$

donde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ es una **función objetivo vectorial** y $X \subset \mathbb{R}^n$ es un **conjunto factible** a menudo dado ímplicitamente en forma de restricciones, es decir,

$$X := \{x \in S \subseteq \mathbb{R}^n : g_j(x) \leq 0, j = 1, \cdots, l; \\ h_j(x) = 0, j = 1, \cdots, m\}.$$

[1] Todo problema multiobjetivo se puede plantear así.

Programación multicriterio (Ehrgott and Wiecek, 2005)

Un **programa multiobjetivo (multicriterio) (MOP)** (Gale, Kuhn and Tucker, 1951) se plantea como

$$\min(f_1(x), \cdots, f_p(x))$$
$$\text{sujeto a } x \in X$$

donde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ es una **función objetivo vectorial** y $X \subset \mathbb{R}^n$ es un **conjunto factible** a menudo dado implícitamente en forma de restricciones, es decir,

$$X := \{x \in S \subseteq \mathbb{R}^n : g_j(x) \leq 0,\ j = 1, \cdots, l;\ h_j(x) = 0,\ j = 1, \cdots, m\}.$$

A veces se trata con una clase de MOP (MOP')[1] con conjunto factible definido por

$$X' := \{x \in S' \subseteq \mathbb{R}^n : g_j(x) \leq 0,\ j = 1, \cdots, l\}.$$

[1] Todo problema multiobjetivo se puede plantear así.

Conjunto de soluciones o resultados alcanzables en el espacio objetivo: $Y := f(X) \subset \mathbb{R}^p$.

En este contexto, “min” se entiende como encontrar soluciones preferidas en Y y su imagen inversa X.

Se dice que **una solución** y^1 **domina** (“es preferida a”) una solución y^2 con respecto a la **relación de Pareto**, $y^1 \succ_{Pareto} y^2$, si y sólo si $y^1_k \leq y^2_k$ para $k = 1, \cdots, p$ con una desigualdad estricta para al menos un k[2].

Denotaremos por $N(Y)$ el conjunto de resultados no dominados del MOP.

La imagen inversa de las soluciones no dominadas se llaman **soluciones eficientes** y el conjunto de todas ellas se denota por $E(X, f)$.

---

[2]Se puede dar una definición más general que involucre *otras nociones de preferencia* y la consideración de los subconjuntos de $\mathbb{R}^p$ denominados *conos*.

DEFINICIÓN (soluciones en el espacio de decisión)
Un punto $x \in X$ se llama:
Solución débilmente eficiente si no existe $x' \in X$ tal que $f(x') < f(x)$;
Solución eficiente si no existe $x' \in X$ tal que $f(x') \leq f(x)$ con $f(x') \neq f(x)$.

[3] Es cerrado el conjunto de los puntos factibles que en el espacio de objetivos "mejoran" a a, $\forall a \in \mathbb{R}$.

DEFINICIÓN (soluciones en el espacio de decisión)
Un punto $x \in X$ se llama:
Solución débilmente eficiente si no existe $x' \in X$ tal que $f(x') < f(x)$;
Solución eficiente si no existe $x' \in X$ tal que $f(x') \leq f(x)$ con $f(x') \neq f(x)$.

Es conocido que en los problemas de minimización (o maximización) de una función objetivo (escalar) $f(x)$ con $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ existe una solución óptima x^* si el conjunto X es compacto y la función f es **semicontinua inferior**[3] (respectivamente, superior), esto es,
$\{x \ : \ f(x) \leq a\} = f^{-1}(-\infty, a]$ es cerrado $\forall a \in \mathbb{R}$
(respectivamente, $-f$ semicontinua inferior).

[3] Es cerrado el conjunto de los puntos factibles que en el espacio de objetivos "mejoran" a a, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Por ejemplo, la siguiente función es semicontinua superior pero no es semicontinua inferior:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

La propiedad de semicontinuidad superior o inferior es más débil que la de continuidad.

La siguiente función es semicontinua superior en $x = 1$ y no es continua por la derecha ni continua por la izquierda:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ \\ \frac{1}{2} + (1 - x) & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Soluciones eficientes y la frontera eficiente

Soluciones eficientes

Así pues, un punto factible de un modelo de optimización multiobjetivo es una **solución eficiente** (también llamada Pareto optimal o no dominada) si ninguna otra solución factible proporciona valores al menos tan buenos en todas las funciones objetivos y estrictamente mejor en una.

Soluciones eficientes y la frontera eficiente

Soluciones eficientes

Así pues, un punto factible de un modelo de optimización multiobjetivo es una **solución eficiente** (también llamada Pareto optimal o no dominada) si ninguna otra solución factible proporciona valores al menos tan buenos en todas las funciones objetivos y estrictamente mejor en una.

En el ejemplo del diseño del dinamómetro, la solución (5,0'1,20) es un punto eficiente **(f(5,0'1,20)=(1333'33.10^{-7}, 1'31))**. Sin embargo, la solución (7,1,3) **(f(7,1,3)=(1'43.10^{-7}, 544444'44))** no es un punto eficiente, ya que es dominado por (7,0'9,2'7) **(f(7,0'9,2'7)=(1'59.10^{-7}, 544444'44))**.

Identificando puntos eficientes gráficamente

Los puntos eficientes se manifiestan gráficamente como aquéllos para los cuales ningún punto factible distinto pertenece a la región acotada por los contornos de las funciones objetivo que pasan por el punto y que contienen las soluciones con igual o mejor valor de todos los objetivos.

Un ejemplo

Ejemplo numérico 1. Sea el problema biobjetivo:

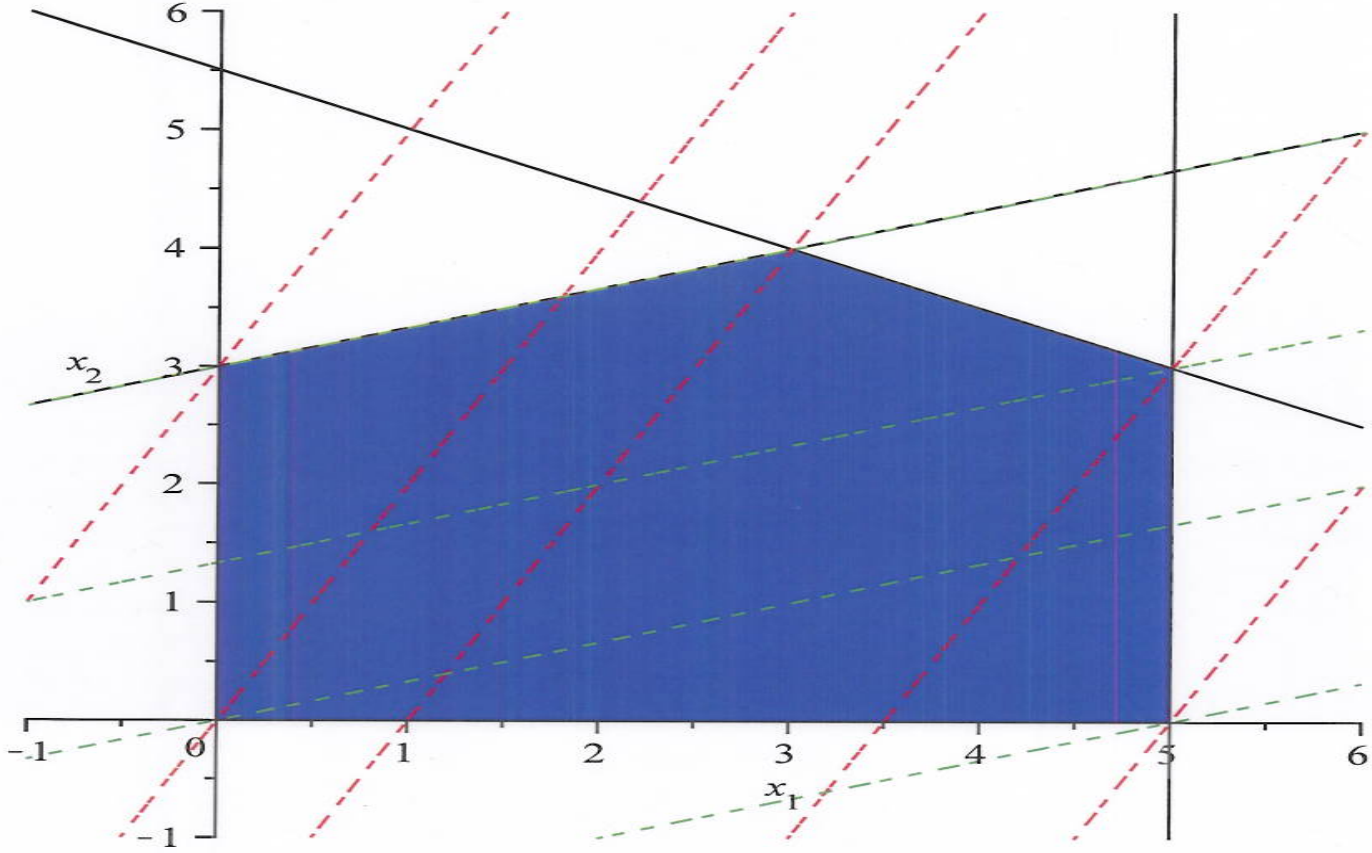
$$\max Z_1 = 2X_1 - X_2$$
$$\max Z_2 = -X_1 + 3X_2$$
$$\text{s. a } X_1 + 2X_2 \leq 11$$
$$-X_1 + 3X_2 \leq 9$$
$$X_1 \leq 5$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

a) Se representó gráficamente la región factible X.

b) Se estudian los puntos eficientes considerando los contornos de los objetivos.

Se verá en los resultados que la frontera eficiente en el espacio de decisión (región factible X) la forman el segmento que une los puntos (3,4) y (5,3) y el segmento que une los puntos (5,3) y (5,0).

```
> restart: with(plots):
> RES:=[x[1]+2*x[2]<=11,-x[1]+3*x[2]<=9,x[1]<=5,x[1]>=0,x[2]>=0]:
> RegionFactible:=inequal(RES, x[1]=-1..6,x[2]=-1..6,
  optionsfeasible=(color=blue),optionsexcluded=(color=white))
  :Contornosf1:=contourplot(2*x[1]-x[2],x[1]=-1..6,x[2]=-1..6,
  contours=[0,-3,2,7,10],linestyle=2,numpoints=2000,color=red):
> Contornosf2:=contourplot(-x[1]+3*x[2],x[1]=-1..6,x[2]=-1..6,
  contours=[0,9,9,4,-5],linestyle=2,numpoints=2000,color=green)
  :display([RegionFactible,Contornosf1,Contornosf2]);
```




```
>
```

Dibujo con Maxima de la región factible y de las curvas de nivel de los objetivos

```
(%i1) load(draw)$
(%i2) draw2d(
line_width=7,
color=orange,
implicit(2*x-y=-3,x,-1,6,y,-1,6),
color=red,
implicit(2*x-y=0,x,-1,6,y,-1,6),
implicit(2*x-y=2,x,-1,6,y,-1,6),
implicit(2*x-y=7,x,-1,6,y,-1,6),
implicit(2*x-y=10,x,-1,6,y,-1,6),
color=green,
implicit(-x+3*y=0,x,-1,6,y,-1,6),
implicit(-x+3*y=9,x,-1,6,y,-1,6),
implicit(-x+3*y=4,x,-1,6,y,-1,6),
color=yellow,
```

```
implicit(-x+3*y=-5,x,-1,6,y,-1,6),
color=black,
implicit(x+2*y=11,x,-1,6,y,-1,6),
implicit(-x+3*y=9,x,-1,6,y,-1,6),
implicit(x=5,x,-0.5,5.5,y,-1,6),
implicit(x=0,x,-1,6,y,-1,6),
implicit(y=0,x,-1,6,y,-1,6));
```

Análogamente, la frontera eficiente en el espacio de resultados de las funciones objetivo (Y) la forman el segmento que une los puntos (2,9) y (7,4) y el segmento que une los puntos (7,4) y (10,-5).

Representación del espacio de objetivos $Y = Z(X)$ con Maxima

```
(%i1) e1:-x+3*y=9$
(%i2) e2:x+2*y=11$
(%i3) algsys([e1,e2],[x,y]);
(%o3) [[x = 3, y = 4]]
(%i4) f1:2*x-y$
(%i5) z1:2*x-y$
(%i6) z2:-x+3*y$
(%i7) p1a:z1,x=0,y=3;
(%o7) - 3
(%i8) p1b:z2,x=0,y=3;
(%o8) 9
(%i9) p2a:z1,x=3,y=4;
(%o9) 2
(%i10) p2b:z2,x=3,y=4;
(%o10) 9
```

```
(%i11) p3a:z1,x=5,y=3;
(%o11) 7
(%i12) p3b:z2,x=5,y=3;
(%o12) 4
(%i13) p4a:z1,x=5,y=0;
(%o13) 10
(%i14) p4b:z2,x=5,y=0;
(%o14) - 5
(%i15) draw2d(xrange = [-5,15],
yrange = [-5,15],
point_size = 3,
point_type = circle,
color = blue,
points_joined = true,
line_type = dots,
point_type = circle,
color = red,
line_width = 7,
points([[0,0],[-3,9],[2,9],[7,4],[10,-5],[0,0]]) );
```

TEOREMA Supongamos el MOP planteado para max f.
Si $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto compacto
y se tiene que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p_+$ es tal que f_j $(j = 1, \cdots, p)$
es semicontinua superior[4],
entonces $E(X, f) \neq \emptyset$.
Demostración: ver Sawaragi et al., 1985[5].

[4] Como en el caso escalar, significa que es cerrado el conjunto de puntos factibles que en el espacio de resultados mejoran a y, $\forall y \in \mathbb{R}^p_+$.

[5] La demostración se hace para un caso general de preferencias, considerando conos y para funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.

Un ejemplo con $E(X, f, C) = \emptyset$

Sea el problema biobjetivo:

$$\max Z_1 = 240X_1 + 130X_2$$

$$\max Z_2 = 2X_1$$

$$\text{s. a } 5X_1 + 2X_2 \geq 10$$

$$4X_1 + 5X_2 \geq 5$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Se tiene que $E(X, f, C) = \emptyset$.

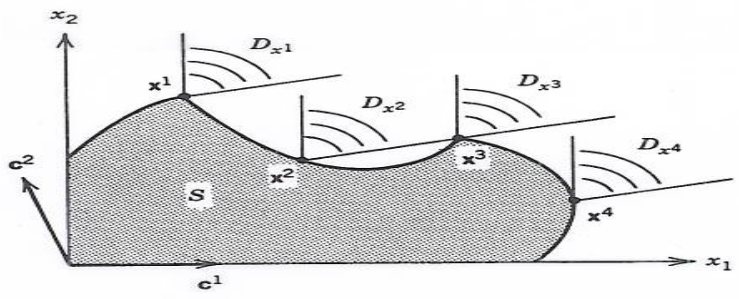
El conjunto factible X no es compacto.

Otras propiedades del conjunto eficiente

En un problema de optimización multicriterio lineal, se prueba que el conjunto eficiente es siempre conexo. Pero en problemas con ausencia de linealidad, ese conjunto puede no ser conexo, como muestra la siguiente figura. En Ehrgott and Wiecek (2005) se pueden ver resultados relativos a la propiedad de conexión de este conjunto.

Figura 4.

Conjunto eficiente no conexo



Introducción

Programación multicriterio (fundamentos teóricos)
- Formulación del problema y conceptos de solución
- Ejercicios

Bibliografía

Ejercicios

1. Un fabricante tiene 3 tipos de semiconductores de silicio (“wafers") en existencias para fabricar 3 variedades de circuitos integrados (“chips") de ordenador. Algún semiconductor no se puede usar para algún circuito, pero hay dos alternativas para cada uno de ellos. La tabla siguiente muestra: costes unitarios (C), cantidad disponible de cada tipo de semiconductor (S), necesidades de cada circuito (N) y una puntuación entre 0 y 10 para la adecuación de cada tipo de semiconductor a cada circuito (P-C).

Wafer	P-C			C	S
	1	2	3		
1	7	8	-	15	500
2	10	-	6	25	630
3	-	10	10	30	710
N	440	520	380		

Modelar el problema por medio de un programa lineal multiobjetivo.

Referencias básicas

- Eatman, J. L. and Sealey, C. W. (1979). A multiobjective linear programming model for commercial bank balance sheet management. Journal of Bank Research 9, 227-236.
- Ehrgott, M. and Wiecek, M. M. (2005). Multiobjective programming. In: Multiple Criteria Decision Analysis. State of the Art. Surveys. J. Figueira, S. Greco and M. Ehrgott (eds.) Páginas 667-722. Springer.
- Rardin, R. L. (1998). Optimization in Operations Research. Páginas 373-408. Prentice-Hall.
- ReVelle, C., Cohon, J. and Shobrys, D. (1991). Simultaneous siting and routing in the disposal of hazardous wastes. Transportation Science 25, 138-145.
- Ríos, S., Ríos-Insua, M. J. and Ríos-Insua, S. (1989). Procesos de Decisión Multicriterio. Eudema Universidad.

- Romero, C. (1996). Análisis de las Decisiones Multicriterio. Isdefe. Publicaciones de Ingeniería de Sistemas.
- Singh, N. and Agarwal, S. K. (1983). Optimum design of an extended octagonal ring by goal programming. International Journal of Production Research 21, 891-898.

Referencias complementarias

- Aarts, E. and Lenstra, J. K. (2003). Local search in combinatorial optimization. Princeton University Press.
- Diwekar, U. (2008). Introduction to Applied Optimization. Páginas 179-214. Springer.
- Fernández García, F. R. and Puerto Albandoz, J. (2006). Teoría de Juegos Multiobjetivo. Edición Universidad de Sevilla.
- Haimes, Y. Y. and Chankong, V. (Eds.) (1985). Decision Making with Multiple Objectives. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Springer-Verlag.
- Hillier, F.S. and Lieberman, G.J. (2002). Investigación de Operaciones. Páginas 332-341. McGraw-Hill.

- Ignizio, J. P. (1982). Linear Programming in Single- & Multiple- Objective Systems. Prentice-Hall.
- Sawaragi, Y., Nakayama, H. and Tanino, T. (1985). Theory of Multiobjective Optimization. Series in Mathematics in Science and Engineering. Volume 176. Academic Press.
- Steuer, R. E. (1986). Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation, and Application. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics-Applied. John Wiley & Sons.
- Winston, W.L. (1994). Investigación de Operaciones. Aplicaciones y Algoritmos. Páginas 763-807. Grupo Editorial Iberoamericana.