



# Modelos Box-Jenkins

Series de  
Tiempo

Germán  
Aneiros Pérez

Introducción

Procesos  
ARMA:  
Construcción  
e  
identificación

Procesos  
ARIMA:  
Construcción  
e  
identificación

Procesos  
ARIMA  
estacionales:  
Construcción  
e  
identificación

Estimación

Diagnosís

## Procesos ARMA estacionales

Los procesos ARMA generales explican el presente a través de una función lineal de observaciones e/o innovaciones consecutivas ocurridas en el pasado inmediato (**dependencia regular**).

Particularizándolos al caso en que sean nulos los coeficientes  $\phi_j$  y  $\theta_j$  con subíndice no múltiplo de  $s$ , tendremos procesos que explican el presente a través de una función lineal de observaciones e/o innovaciones ocurridas en instantes pasados múltiplos del periodo estacional  $s$  (**dependencia estacional**).

Así, suponiendo que el proceso en cuestión es estacionario:

- **AR(1)<sub>12</sub>**:  $X_t = c + \Phi_1 X_{t-12} + a_t$ .
- **MA(2)<sub>4</sub>**:  $X_t = c + a_t + \Theta_1 a_{t-4} + \Theta_2 a_{t-8}$ .
- **ARMA(1,1)<sub>12</sub>**:  $X_t = c + \Phi_1 X_{t-12} + \Theta_1 a_{t-12} + a_t$ .



# Modelos Box-Jenkins

Series de  
Tiempo

Germán  
Aneiros Pérez

Introducción

Procesos  
ARMA:  
Construcción  
e  
identificación

Procesos  
ARIMA:  
Construcción  
e  
identificación

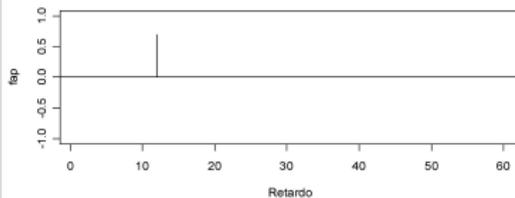
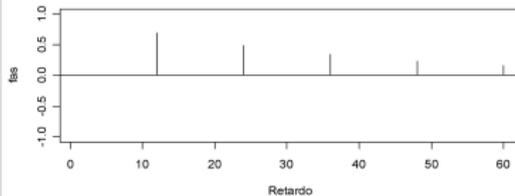
Procesos  
ARIMA  
estacionales:  
Construcción  
e  
identificación

Estimación

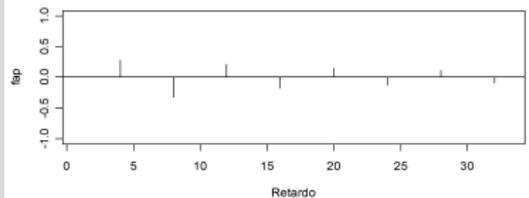
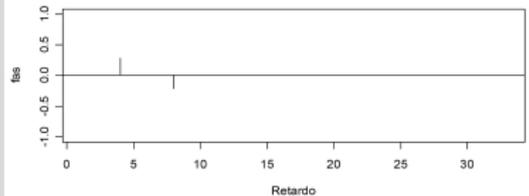
Diagnosís

## Ejemplo de la fas y la fap de procesos $AR(1)_{12}$ y $MA(2)_4$

### $AR(1)_{12}$



### $MA(2)_4$





# Modelos Box-Jenkins

Series de  
Tiempo

Germán  
Aneiros Pérez

Introducción

Procesos  
ARMA:  
Construcción  
e  
identificación

Procesos  
ARIMA:  
Construcción  
e  
identificación

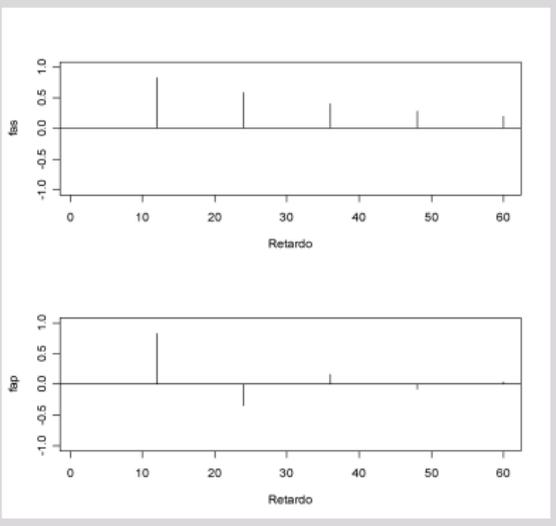
Procesos  
ARIMA  
estacionales:  
Construcción  
e  
identificación

Estimación

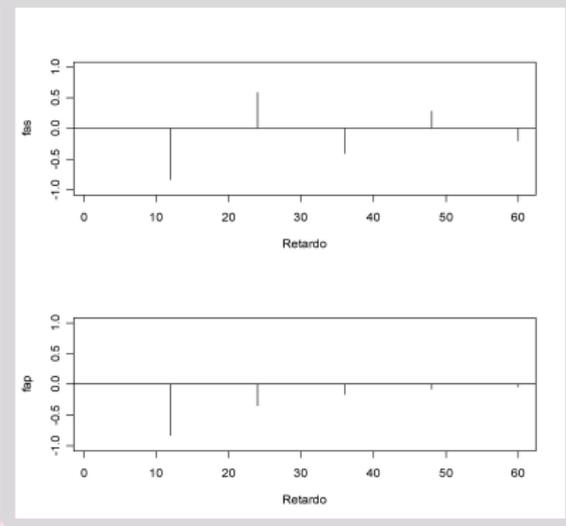
Diagnosís

## Ejemplo de la fas y la fap de procesos $ARMA(1,1)_{12}$

$ARMA(1,1)_{12}: \Phi_1 > 0, \Theta_1 > 0$



$ARMA(1,1)_{12}: \Phi_1 < 0, \Theta_1 < 0$





# Modelos Box-Jenkins

Series de  
Tiempo

Germán  
Aneiros Pérez

Introducción

Procesos  
ARMA:  
Construcción  
e  
identificación

Procesos  
ARIMA:  
Construcción  
e  
identificación

Procesos  
ARIMA  
estacionales:  
Construcción  
e  
identificación

Estimación

Diagnosís

## Procesos ARMA estacionales

Un proceso estacionario  $\{X_t\}_t$  que admite la representación

$$X_t = c + \Phi_1 X_{t-s} + \Phi_2 X_{t-2s} + \cdots + \Phi_P X_{t-Ps} \\ + a_t + \Theta_1 a_{t-s} + \Theta_2 a_{t-2s} + \cdots + \Theta_Q a_{t-Qs},$$

donde  $c, \Phi_1, \dots, \Phi_P, \Theta_1, \dots, \Theta_Q$  son constantes, se conoce como un proceso **ARMA(P,Q)<sub>s</sub>** (proceso ARMA estacional).

- Es un ARMA(sP,sQ) con muchos coeficientes nulos. Por tanto, las condiciones de estacionariedad, causalidad e invertibilidad se deducen de las de los ARMA.
- $\text{ARMA}(P,0)_s \Leftrightarrow \text{AR}(P)_s$ .
- $\text{ARMA}(0,Q)_s \Leftrightarrow \text{MA}(Q)_s$ .



# Modelos Box-Jenkins

Series de  
Tiempo

Germán  
Aneiros Pérez

Introducción

Procesos  
ARMA:  
Construcción  
e  
identificación

Procesos  
ARIMA:  
Construcción  
e  
identificación

Procesos  
ARIMA  
estacionales:  
Construcción  
e  
identificación

Estimación

Diagnosís

## Procesos ARMA estacionales

La ecuación que define al proceso ARMA(P,Q)<sub>s</sub>

$$X_t = c + \Phi_1 X_{t-s} + \Phi_2 X_{t-2s} + \dots + \Phi_P X_{t-Ps} \\ + a_t + \Theta_1 a_{t-s} + \Theta_2 a_{t-2s} + \dots + \Theta_Q a_{t-Qs},$$

se puede escribir en la forma compacta

$$\Phi(B^s) X_t = c + \Theta(B^s) a_t,$$

donde

$$\Phi(B^s) = (1 - \Phi_1 B^s - \Phi_2 B^{2s} - \dots - \Phi_P B^{Ps}), \\ \Theta(B^s) = (1 + \Theta_1 B^s + \Theta_2 B^{2s} + \dots + \Theta_Q B^{Qs})$$

y  $B^s$  denota al **operador retardo estacional**, definido por  $B^s X_t = X_{t-s}$ .



# Modelos Box-Jenkins

Series de  
Tiempo

Germán  
Aneiros Pérez

Introducción

Procesos  
ARMA:  
Construcción  
e  
identificación

Procesos  
ARIMA:  
Construcción  
e  
identificación

Procesos  
ARIMA  
estacionales:  
Construcción  
e  
identificación

Estimación

Diagnosís

## Procesos ARMA estacionales

	$fas^*$	$fap^*$
$AR(P)_s$	Retardos $s, 2s, \dots$ : Muchos coeficientes no nulos	Se anula para todo retardo mayor que $P_s$
$MA(Q)_s$	Se anula para todo retardo mayor que $Q_s$	Retardos $s, 2s, \dots$ : Muchos coeficientes no nulos
$ARMA(P,Q)_s$	Retardos $s, 2s, \dots$ : Muchos coeficientes no nulos	Retardos $s, 2s, \dots$ : Muchos coeficientes no nulos

\* Los valores en los retardos no estacionales (distintos de  $ks$ ) son nulos.



# Modelos Box-Jenkins

Series de  
Tiempo

Germán  
Aneiros Pérez

Introducción

Procesos  
ARMA:  
Construcción  
e  
identificación

Procesos  
ARIMA:  
Construcción  
e  
identificación

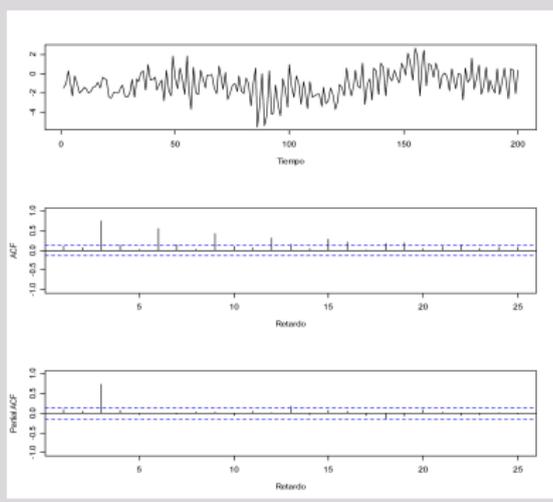
Procesos  
ARIMA  
estacionales:  
Construcción  
e  
identificación

Estimación

Diagnosís

Utilizando la información contenida en la tabla anterior, y la distribución muestral de  $\hat{\rho}_k$  ó  $\hat{\alpha}_k$  bajo procesos MA ó AR, respect., identificamos algunos procesos ARMA estacionales.

## Serie, fas y fap



## Conclusión

Los gráficos de la izquierda **sugieren** que la serie:

- 1 Es **estacionaria**.
- 2 Ha sido generada por un proceso **AR(1)<sub>3</sub>**.



# Modelos Box-Jenkins

Series de  
Tiempo

Germán  
Aneiros Pérez

Introducción

Procesos  
ARMA:  
Construcción  
e  
identificación

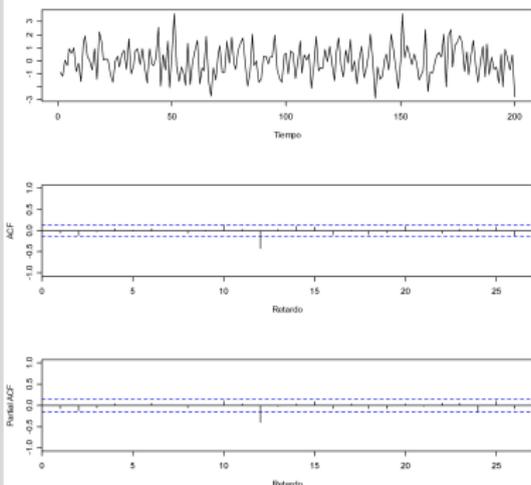
Procesos  
ARIMA:  
Construcción  
e  
identificación

Procesos  
ARIMA  
estacionales:  
Construcción  
e  
identificación

Estimación

Diagnosís

## Serie, fas y fap



## Conclusión

Los gráficos de la izquierda **sugieren** que la serie:

- 1 Es **estacionaria**.
- 2 Ha sido generada por un proceso **AR(1)<sub>12</sub>** o por un **MA(1)<sub>12</sub>**.



# Modelos Box-Jenkins

Series de  
Tiempo

Germán  
Aneiros Pérez

Introducción

Procesos  
ARMA:  
Construcción  
e  
identificación

Procesos  
ARIMA:  
Construcción  
e  
identificación

Procesos  
ARIMA  
estacionales:  
Construcción  
e  
identificación

Estimación

Diagnosís

## Procesos ARMA estacionales multiplicativos

- ARMA:  $\phi(B) X_t = c + \theta(B) a_t$ . Modeliza la dependencia regular (dependencia con observaciones e/o innovaciones consecutivas).
- ARMA estacional:  $\Phi(B^s) X_t = c + \Theta(B^s) a_t$ . Modeliza la dependencia estacional (dependencia con observaciones e/o innovaciones separadas  $s, 2s, \dots$  instantes de tiempo).
- **ARMA estacional multiplicativo**: Combinando ambos modelos, podemos modelizar conjuntamente la dependencia regular y la estacional a través del modelo

$$\phi(B) \Phi(B^s) X_t = c + \theta(B) \Theta(B^s) a_t.$$

Este modelo se denota por  $\text{ARMA}(p,q) \times (P,Q)_s$  y es, en particular, un  $\text{ARMA}(p+sP, q+sQ)$  con muchos coeficientes nulos.



## Procesos ARMA estacionales multiplicativos

- El proceso  $AR(1) \times MA(1)_{12}$ .
  - 1  $(1 - \phi_1 B) X_t = c + (1 + \Theta_1 B^{12}) a_t.$
  - 2  $X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + a_t + \Theta_1 a_{t-12}.$
- El proceso  $MA(1) \times AR(1)_{12}$ .
  - 1  $(1 - \Phi_1 B^{12}) X_t = c + (1 + \theta_1 B) a_t.$
  - 2  $X_t = c + \Phi_1 X_{t-12} + a_t + \theta_1 a_{t-1}.$
- El proceso  $AR(1) \times AR(1)_{12}$ .
  - 1  $(1 - \phi_1 B) (1 - \Phi_1 B^{12}) X_t = c + a_t.$
  - 2  $X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \Phi_1 X_{t-12} - \phi_1 \Phi_1 X_{t-13} + a_t.$
- El proceso  $MA(1) \times MA(1)_{12}$ .
  - 1  $X_t = c + (1 + \theta_1 B) (1 + \Theta_1 B^{12}) a_t.$
  - 2  $X_t = c + a_t + \theta_1 a_{t-1} + \Theta_1 a_{t-12} + \theta_1 \Theta_1 a_{t-13}.$



# Modelos Box-Jenkins

Series de  
Tiempo

Germán  
Aneiros Pérez

Introducción

Procesos  
ARMA:  
Construcción  
e  
identificación

Procesos  
ARIMA:  
Construcción  
e  
identificación

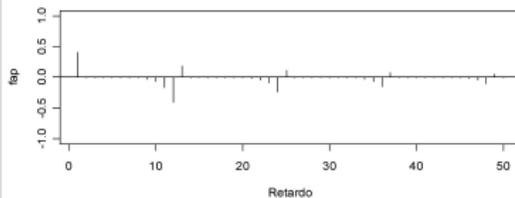
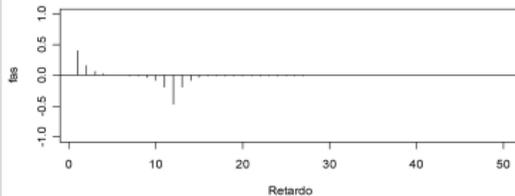
Procesos  
ARIMA  
estacionales:  
Construcción  
e  
identificación

Estimación

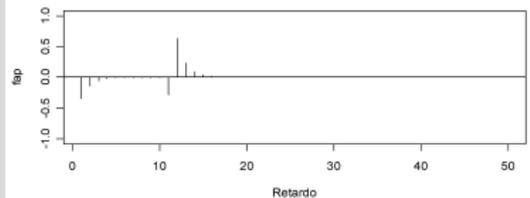
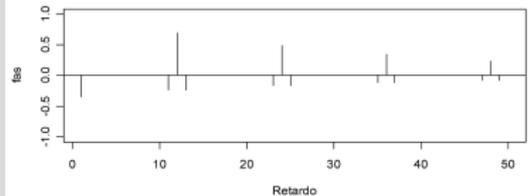
Diagnosís

## Ejemplos de la fas y la fap de ARMA estacionales multiplicativos

$AR(1) \times MA(1)_{12}$



$MA(1) \times AR(1)_{12}$





# Modelos Box-Jenkins

Series de  
Tiempo

Germán  
Aneiros Pérez

Introducción

Procesos  
ARMA:  
Construcción  
e  
identificación

Procesos  
ARIMA:  
Construcción  
e  
identificación

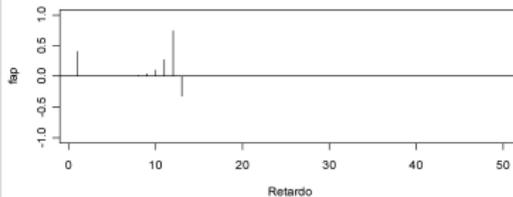
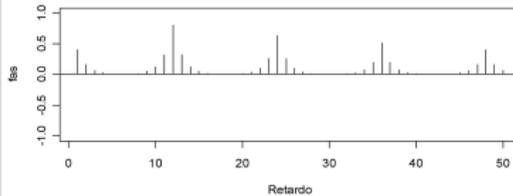
Procesos  
ARIMA  
estacionales:  
Construcción  
e  
identificación

Estimación

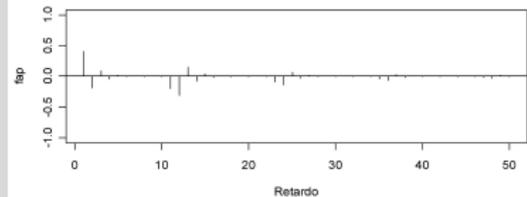
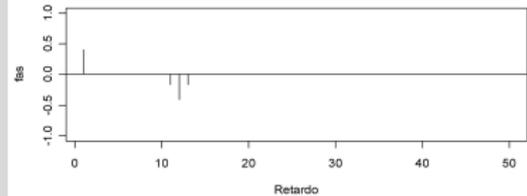
Diagnosís

## Ejemplos de la fas y la fap de ARMA estacionales multiplicativos

### AR(1) × AR(1)<sub>12</sub>



### MA(1) × MA(1)<sub>12</sub>





## Procesos ARMA estacionales multiplicativos

### Fas de un proceso ARMA estacional multiplicativo:

- En los retardos bajos ( $1, 2, \dots, [s/2]$ ) se observará la fas de la parte regular.
- En los retardos estacionales ( $s, 2s, 3s \dots$ ) se observará la fas de la parte estacional.
- A ambos lados de los retardos estacionales se repetirá la fas de la parte regular (invertida, si la fas en el retardo estacional es negativa).



# Modelos Box-Jenkins

Series de  
Tiempo

Germán  
Aneiros Pérez

Introducción

Procesos  
ARMA:  
Construcción  
e  
identificación

Procesos  
ARIMA:  
Construcción  
e  
identificación

Procesos  
ARIMA  
estacionales:  
Construcción  
e  
identificación

Estimación

Diagnosís

## Procesos ARMA estacionales multiplicativos

### Fap de un proceso ARMA estacional multiplicativo:

- En los retardos bajos ( $1, 2, \dots, [s/2]$ ) se observará la fap de la parte regular.
- En los retardos estacionales ( $s, 2s, 3s \dots$ ) se observará la fap de la parte estacional.
- A la derecha de cada retardo estacional aparecerá la fap de la parte regular (invertida, si la fap en el retardo estacional es positiva).
- A la izquierda de cada retardo estacional aparecerá la fas de la parte regular (invertida, si la fap en el retardo estacional es negativa).



# Modelos Box-Jenkins

Series de  
Tiempo

Germán  
Aneiros Pérez

Introducción

Procesos  
ARMA:  
Construcción  
e  
identificación

Procesos  
ARIMA:  
Construcción  
e  
identificación

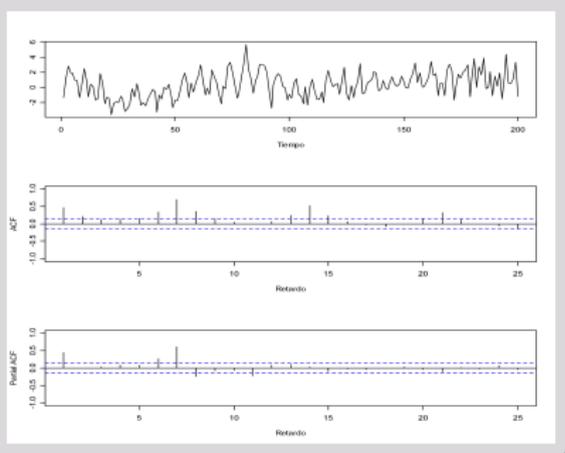
Procesos  
ARIMA  
estacionales:  
Construcción  
e  
identificación

Estimación

Diagnosís

Utilizando la información contenida en las 2 transparencias anteriores, y la distribución muestral de  $\hat{\rho}_k$  ó  $\hat{\alpha}_k$  bajo procesos MA ó AR, respectivamente, identificamos algunos procesos ARMA estacionales multiplicativos.

## Serie, fas y fap



## Conclusión

Los gráficos de la izquierda **sugieren** que la serie:

- 1 Es **estacionaria**.
- 2 Ha sido generada por un proceso **AR(1) × AR(1)<sub>7</sub>**.



# Modelos Box-Jenkins

Series de  
Tiempo

Germán  
Aneiros Pérez

Introducción

Procesos  
ARMA:  
Construcción  
e  
identificación

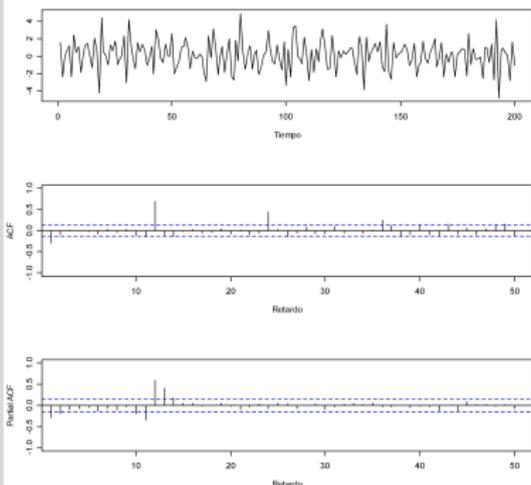
Procesos  
ARIMA:  
Construcción  
e  
identificación

Procesos  
ARIMA  
estacionales:  
Construcción  
e  
identificación

Estimación

Diagnosís

## Serie, fas y fap



## Conclusión

Los gráficos de la izquierda **sugieren** que la serie:

- 1 Es **estacionaria**.
- 2 Ha sido generada por un proceso  **$MA(1) \times AR(1)_{12}$** .



# Modelos Box-Jenkins

Series de  
Tiempo

Germán  
Aneiros Pérez

Introducción

Procesos  
ARMA:  
Construcción  
e  
identificación

Procesos  
ARIMA:  
Construcción  
e  
identificación

Procesos  
ARIMA  
estacionales:  
Construcción  
e  
identificación

Estimación

Diagnosís

## Procesos ARMA

La clase de procesos ARMA (que incluye a los estacionales y a los estacionales multiplicativos) que acabamos de estudiar es una familia muy flexible de procesos estacionarios.

Sin embargo:

- **No abundan** series reales generadas por procesos estacionarios.
- El nivel medio de las series reales suele variar con el tiempo (existencia de **tendencia** y/o **componente estacional**).

Por tanto:

- Necesitamos ampliar la clase de procesos ARMA, de modo que la nueva clase permita incorporar estas variaciones.