



UNIVERSIDADE DA CORUÑA



UNIVERSIDADE
DE VIGO

Control Estadístico de la Calidad
Tema 6. Análisis de la capacidad de un proceso

Salvador Naya
Departamento de Matemáticas
Universidad de A Coruña

Contenido del tema

- Concepto probabilístico de capacidad.

Contenido del tema

- Concepto probabilístico de capacidad.
- Índices de capacidad en control de procesos.

Contenido del tema

- Concepto probabilístico de capacidad.
- Índices de capacidad en control de procesos.
- Índices en metrología dimensional.

Contenido del tema

- Concepto probabilístico de capacidad.
- Índices de capacidad en control de procesos.
- Índices en metrología dimensional.
- Intervalos de confianza y contrastes para la estimación de los índices.

Contenido del tema

- Concepto probabilístico de capacidad.
- Índices de capacidad en control de procesos.
- Índices en metrología dimensional.
- Intervalos de confianza y contrastes para la estimación de los índices.
- Ejemplo

Concepto probabilístico de capacidad

En todo proceso productivo se puede definir una medida de la capacidad que el proceso tiene para cumplir con sus especificaciones de calidad. Es el llamado **índice de capacidad**. Si la característica de calidad es continua y con distribución $N(\mu, \sigma)$, cuando el proceso se encuentra bajo control se tiene:

$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = P(|X - \mu| \leq 3\sigma) = 0,9973$$

Por ello, el intervalo $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ se denomina de tolerancias naturales o intrínsecas del proceso. Teniendo esto en cuenta la **capacidad del proceso será 6σ** .

El concepto de capacidad

Para analizar la adecuación de un proceso a las especificaciones preestablecidas es necesario conocer su capacidad. Supóngase que el intervalo de tolerancias de fabricación de un proceso es (LIE, LSE) , centrado en μ . Entonces, se define el índice de capacidad del proceso como:

$$C_p = \frac{LSE - LIE}{6\sigma}$$

Atendiendo al valor del índice de capacidad se presentan tres casos diferenciados, hoy en día este valor suele ser 1.4 o 2: $C_p < 1$

$C_p = 1$ $C_p > 1$

Hoy en día en lugar de 1 suele utilizarse 1.4 o 2:

El concepto de capacidad

Relación con los DPM

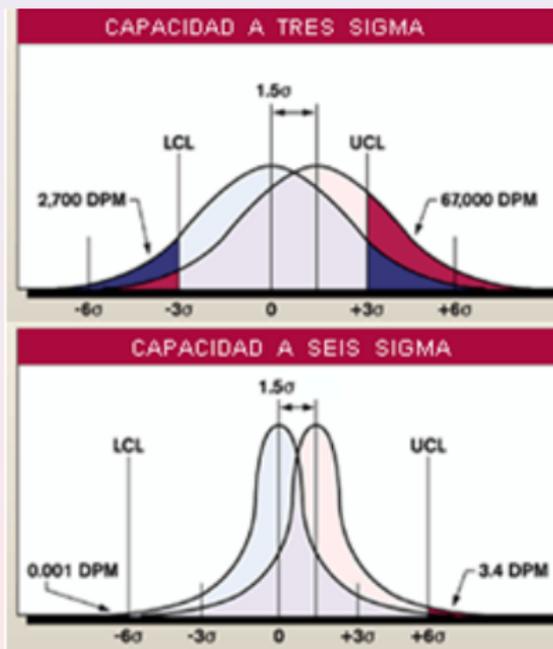
En la tabla siguiente puede verse como va cambiando la cantidad de defectos por millón (DPM) y la probabilidad en función de que se trate de un contexto de distribución normal centrada o se permita un desplazamiento de $1,5\sigma$ respecto al valor de la media, que es la capacidad con la que se trabaja en la metodología Seis Sigma. Analizando el valor de los DPM puede informarse al productor en que nivel se encuentra, si a un nivel de fabricación 3σ , 4σ , etc.

Nivel	Centrada DPM	$1,5\sigma$ DPM	Centrada Probab.	$1,5\sigma$ Probab.
3σ	2693,93	66810,63	0,99730007	0,93318937
4σ	63,37	6209,7	0,99993663	0,99379030
5σ	0,574	232,67	0,99999943	0,99976733
6σ	0,002	3,4	1	0,99999660

Proceso capaz o no capaz

- 1 $C_p < c_0$. El proceso no es capaz, es decir, no puede cumplir las especificaciones requeridas. Además, cuanto más pequeño sea el índice de capacidad mayor será la proporción de piezas defectuosas.
- 2 $C_p = c_0$. El proceso es potencialmente capaz.
- 3 $C_p > c_0$. El proceso es muy capaz. En este caso el porcentaje de defectuosos es realmente muy pequeño (aunque la palabra “pequeño” siempre es relativa ya que depende del sector industrial concreto).

Capacidad según Six Sigma



Ejemplo

La desviación típica de un proceso de fabricación de componentes electrónicos es 0,05 V. Se trata de fabricar dos componentes A y B que se consideran defectuosos si su tensión varía más de 0,5 V. Calcular el índice de capacidad del proceso si el coste de fabricación de ambos es el mismo, 50 euros. pero el coste de fallo para el usuario es de 80 euros para A y 250 para B .

$$C_A(x) = \frac{80}{0,25}(x - \mu)^2, \quad C_B(x) = \frac{250}{0,25}(x - \mu)^2,$$

luego, los intervalos de tolerancias son $[\mu - 0,395, \mu + 0,395]$, para el A , y $[\mu - 0,224, \mu + 0,224]$, para el B . Como consecuencia, sus índices de capacidad son $IC_A = \frac{0,79}{0,30} = 2.63$ y $IC_B = \frac{0,448}{0,30} = 1.49$. Así pues el proceso A es muy capaz y la inspección es poco frecuente, mientras que en el B , la capacidad es adecuada.

Otros índices de capacidad

Además del índice C_p se suele usar el

$$P = \left(\frac{1}{C_p} \right) 100$$

Índices de capacidad inferior y superior

$$C_{pu} = \frac{LSE - \mu}{3\sigma}$$
$$C_{pl} = \frac{\mu - LIE}{3\sigma}$$
$$C_{pk} = \min \{ C_{pl}, C_{pu} \}$$

Generalmente, si $C_{pk} = C_p$ estaría centrado con respecto a la media.

índice de capacidad de Luceño

Luceño en 1996 plantea un índice para distribuciones no normales:

$$C_{pc} = \frac{LSE - LIE}{6\sqrt{\frac{\pi}{2}}E[X - T]}$$

donde $T = \frac{1}{2}(LSE - LIE)$,

Índice C_{pm}

estudiado por Chan et al. (1988) y Boyles (1991)

$$C_{pm} = \frac{LSE - LIE}{6\tau}$$
$$\tau = E[(X - T)^2] = \sigma^2 + (\mu - T)^2$$

Este índice puede expresarse como:

$$C_{pm} = \frac{LSE - LIE}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} = \frac{C_p}{\sqrt{1 + \xi^2}}$$
$$\xi = \frac{\mu - T}{\sigma}$$

índices de tercera generación

Pearn et al. proponen los denominados índices de tercera generación:

$$C_{pkm} = \frac{C_{pk}}{\sqrt{1 + \xi^2}}$$

índices de cuarta generación

En 1995 Kerstin Vannman propone una reformulación de los índices anteriores mediante una expresión que permite obtenerlos para distintos valores de dos nuevo parámetros no negativos u y v :

$$C_p(u, v) = \frac{d - u |\mu - M|}{3\sqrt{\sigma^2 + v(\mu - T)^2}}$$

Obsérvese que en esta nueva expresión generaliza algunos de los índices anteriores, sin más que considerar valores de 0 y 1 para u y v : $C_p(0, 0) = C_p$; $C_p(1; 0) = C_{pk}$; $C_p(0, 1) = C_{pm}$;
 $C_p(1, 1) = C_{pmk}$.

índices de cuarta generación

Este tipo de índices siguen siendo sólo válidos para el caso de distribución de los datos normal, por lo que Pearn y Chen (1997) consideraron su generalización para el caso de distribuciones arbitrarias de los datos, lo que llamaron como índice $CN_p(u, v)$, definido del modo siguiente:

$$CN_p(u, v) = \frac{d - u |m - M|}{3 \sqrt{\left(\frac{P_{99,865} - P_{0,135}}{6}\right)^2 + v(M - T)^2}}$$

Siendo m la mediana del proceso, y siendo P_α el correspondiente percentil $(100\alpha)\%$ de la distribución. En el caso en que el proceso siga una distribución Normal los índices $CN_p(u, v)$ y $C_p(u, v)$ proporcionan el mismo resultado.

Variabilidad RyR

La repetibilidad se estima mediante la varianza del instrumento de medición ($\hat{\sigma}_{repet}^2$), mientras que la reproducibilidad será la variabilidad producida por el operador ($\hat{\sigma}_{reprod}^2$). La suma de estas dos variabilidades nos dará una estimación del sistema de medición, es la denominada **variabilidad RyR** ($\hat{\sigma}_{RyR}^2$).

$$\hat{\sigma}_{RyR}^2 = \hat{\sigma}_{repet}^2 + \hat{\sigma}_{reprod}^2$$

Una vez se tiene unas determinadas tolerancias o especificaciones de las mediciones, para verificar la calidad del instrumento de medición se utilizan índices como el cociente entre la variabilidad RyR y los límites de tolerancia, llamado **índice Precisión-Tolerancia (P/T)**:

$$P/T = \frac{k\hat{\sigma}_{RyR}}{LSE - LIE}$$

Intervalos de confianza para índices de capacidad (PCR: Process Capability Ratios)

El intervalo al $100(1 - \alpha)\%$ es:

$$\frac{LSE - LIE}{6s} \sqrt{\frac{\chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2}{n-1}} \leq C_p \leq \frac{LSE - LIE}{6s} \sqrt{\frac{\chi_{n-1, \alpha/2}^2}{n-1}}$$
$$\hat{C}_p \sqrt{\frac{\chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2}{n-1}} \leq C_p \leq \hat{C}_p \sqrt{\frac{\chi_{n-1, \alpha/2}^2}{n-1}}$$

En Kotz and Lovelaca (1998) se presentan diferentes intervalos para cada tipo de índice:

$$\hat{C}_{pk} \left[1 - (+)Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{9n\hat{C}_{pk}^2} + \frac{1}{2(n-1)}} \right]$$

Intervalos de confianza para índices de capacidad (PCR: Process Capability Ratios)

El interval al $100(1 - \alpha) \%$ es:

el intervalo para el índice de Luceño:

$$\bar{c} - t_{n-1, \alpha/2} \frac{s_c}{\sqrt{n}} \leq E[X - T] \leq \bar{c} + t_{n-1, \alpha/2} \frac{s_c}{\sqrt{n}}$$
$$s_c^2 = \frac{1}{n-1} \sum (|x_i - T|^2 - n\bar{c}^2)$$

por tanto:

$$\frac{\hat{C}_{pc}}{1 + t_{n-1, \alpha/2} \frac{s_c}{\bar{c}\sqrt{n}}} \leq C_{pc} \leq \frac{\hat{C}_{pc}}{1 - t_{n-1, \alpha/2} \frac{s_c}{\bar{c}\sqrt{n}}}$$

El contraste es:

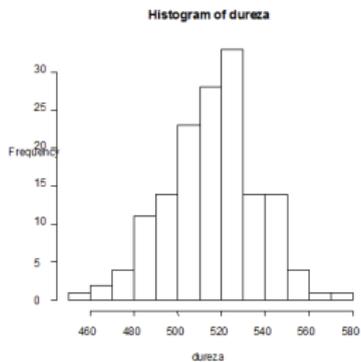
$$H_0 : C_p = C_{p0}$$

$$H_1 : C_p \geq C_{p0}$$

Kane (1996) investiga este tipo de contraste y propone una tabla de p-valores para distintos valores de n.

Ejemplo de Control de calidad de un acero

Histograma acero



Ejemplo de Control de calidad de un acero

Histograma acero

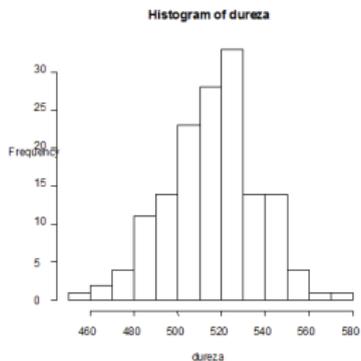
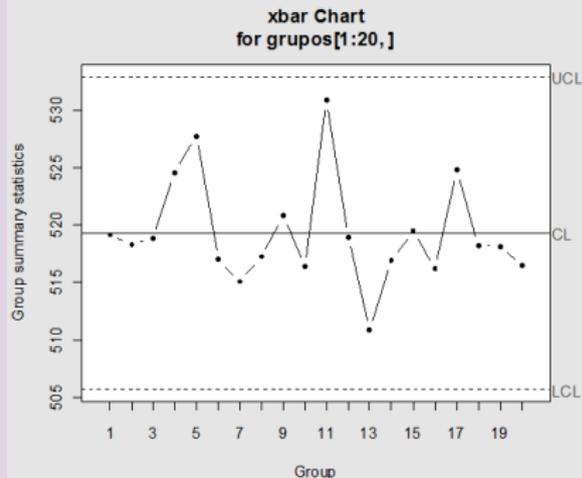


Gráfico de control para las medias



Number of groups = 20

Center = 519.2948

StdDev = 10.10011

LCL = 505.7441

UCL = 532.8455

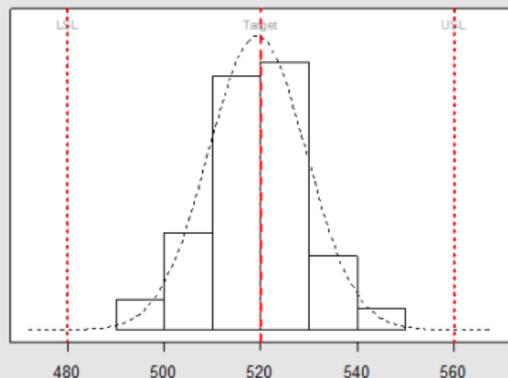
Number beyond limits = 0

Number violating runs = 0

Ejemplo de Control de calidad de un acero

Estudio de la capacidad

Process Capability Analysis
for grupos[1: 20,]

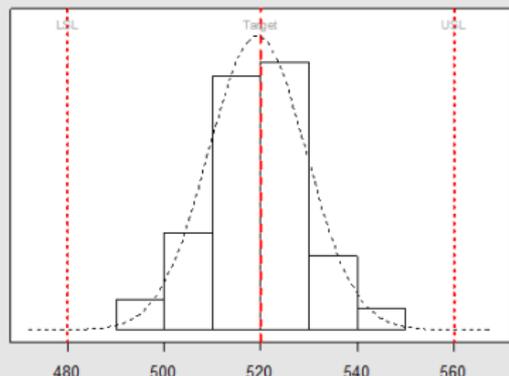


Number of obs = 100	Target = 520	C _p = 1.32	Exp<LSL 0%
Center = 519.2948	LSL = 480	C _p = 1.3	Exp>USL 0%
StdDev = 10.10011	USL = 560	C _{p_u} = 1.34	Obs<LSL 0%
		C _{p_k} = 1.3	Obs>USL 0%
		C _{pm} = 1.32	

Ejemplo de Control de calidad de un acero

Estudio de la capacidad

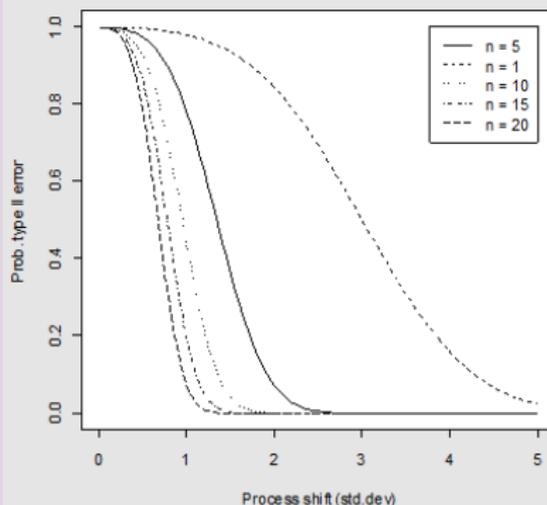
Process Capability Analysis
for grupos[1:20,]



Number of obs = 100	Target = 520	C _p = 1.32	Exp<LSL 0%
Center = 519.2948	LSL = 480	C _p = 1.3	Exp>USL 0%
StdDev = 10.10011	USL = 560	C _{p,u} = 1.34	Obs<LSL 0%
		C _{p,k} = 1.3	Obs>USL 0%
		C _{pm} = 1.32	

Curvas OC para acero

OC curves for xbar chart



Ejemplo de Control de calidad (Acero)

Valor del estadístico chi-cuadrado es 2,39993, con un p-valor de 0.791484. Podemos dar por válida la distribución normal, por lo que se utilizarán los índices C_p y el C_{pk} :

Como $c_4 = 0,9400 \Rightarrow \hat{\sigma} = \frac{\bar{s}}{c_4} = \frac{9,494}{0,94} = 10,1$

$$C_p = \frac{LSE - LIE}{6\sigma} = \frac{560 - 480}{6(10,1)} = 1,32$$

Índices de capacidad inferior y superior

$$C_{pu} = \frac{LSE - \mu}{3\sigma} = \frac{560 - 519,29}{3(10,1)} = 1,34$$

$$C_{pl} = \frac{\mu - LIE}{3\sigma} = \frac{519,29 - 480}{3(10,1)} = 1,3$$

$$C_{pk} = \min \{C_{pl}, C_{pu}\} = 1,3$$

Como el valor $C_p = 1,3$, quiere decir que tenemos 96 piezas defectuosas por millón.

Referencias

-  Abu-Shawiesh MO, Abdullah MB. New robust statistical process control chart for location. *Quality Engineering* 2000; 12: 149-159.
-  Albing M. Process capability indices for Weibull distributions and upper specification limits. *Quality and Reliability Engineering International* 2009; 25: 317-334.
-  Chen KS, Pearn WL. An application of non normal capability indices. *Quality and Reliability Engineering International* 1997; 13: 355-360.
-  Borges W, Ho LL. A fraction defective based capability index. *Quality and Reliability Engineering International* 2001; 17: 447-458.
-  Chou YM, Owen DB. On the distribution of the estimated process capability indices. *Communications in Statistics –*

Referencias

-  Kotz S, Johnson NL. Process Capability Indices. Chapman & Hall: London, 1993.
-  Kotz S, Johnson NL. Process capability indices-A review, 1992 – 2000 with discussion. Journal of Quality Technology 2002; 34: 2 - 53.
-  Kotz S, Lovelace CR. Introduction to Process Capability Indices: Theory and Practice. Arnold: London, 1998.
-  Montgomery, D. C. (2009). Introduction to Statistical Quality Control. Sixth edition. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ.
-  Palmer K, Tsui K-L. A review and interpretations of process capability indices. Annals of Operations Research 1999; 87: 31-47.
-  Pearn WL, Chen KS. One-sided capability indices Cpu and Cpk. Decision making with multiple information. International

Referencias

-  Somerville SE, Montgomery DC. Process capability indices and non-normal distributions. Quality Engineering 1996; 9: 305-316.
-  Lin PC, Pearn WL. Testing process capability for one-sided specification limit with application to the voltage level translator. Microelectronics Reliability 2002; 42: 1975-1983.
-  Somerville, S. E. & Montgomery, D. C. (1996). Process Capability Indices and Nonnormal Distributions. Quality Engineering, 9, 305-316.
-  Shore H. A new approach to analysing non-normal quality data with applications to process capability analysis. International Journal of Production Research 1998; 36: 1917-1933.
-  Huber P. Robust Statistics. John Wiley & Sons: New York, 1981