



UNIVERSIDADE DA CORUÑA



UNIVERSIDADE
DE VIGO

Control Estadístico de la Calidad

Tema 4. El control de fabricación por variables

Salvador Naya
Departamento de Matemáticas
Universidad de A Coruña

Contenido del tema

- Límites de tolerancia y capacidad del proceso.
- Gráficos tipo Shewhart por variables.
- Curva característica de operación (OC) y longitud media de racha (ARL) en el control por variables.
- Optimización de gráficos de control.
- Ejercicios.

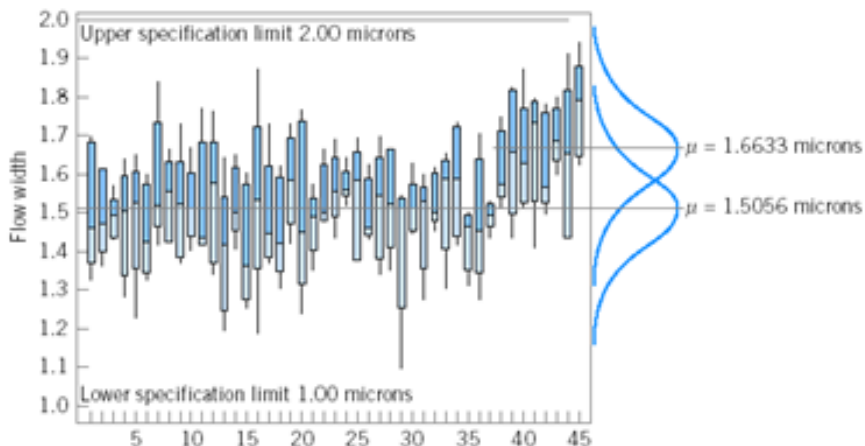
El control de fabricación por variables

Intervalos de tolerancia

Supondremos que se fabrican elementos con una calidad descrita por una característica medible, X , cuyo objetivo (o **valor nominal** o **Target T**) se representará por μ .

Así, si X es una longitud, μ será la medida especificada por el diseño de la pieza en cuestión. En este caso, supondremos que el proceso se ajusta de manera que la media de la variable aleatoria X es precisamente μ . El objetivo del control de fabricación será mantener el proceso en estado de control: comprobando que la media del proceso se mantiene en el valor nominal (μ) y que la dispersión es constante.

Especificaciones o tolerancias. Cambios en el proceso



Intervalos de tolerancia

El **intervalo de tolerancia** para X es el conjunto de valores que se consideran admisibles. Tradicionalmente, si una desviación mayor de L hace que el producto sea defectuoso, el intervalo de tolerancia se fijaba como $[\mu - L, \mu + L]$. Este enfoque tiene dos inconvenientes. Uno de ellos es que, si el objetivo final es fabricar componentes con característica nominal μ , no parece lógico considerar igualmente buenas cualesquiera unidades incluidas en el intervalo $[\mu - L, \mu + L]$, sin tener en cuenta su cercanía a μ . Otro problema consiste en que, de esa forma, no se está teniendo en cuenta el coste que tiene para el usuario la falta de calidad.

Función de Taguchi

Para resolver ambos problemas Taguchi propone una función de coste cuadrática. Esto garantiza que las desviaciones por exceso y por defecto del valor nominal presentan el mismo coste y que las desviaciones pequeñas tienen un coste reducido, aumentando luego el coste rápidamente.

$$C(x) = K \cdot (x - \mu)^2,$$

Función de Taguchi

La determinación del intervalo de tolerancia, por parte del fabricante, debe hacerse teniendo en cuenta el coste que para un usuario representa el que un producto sea defectuoso.

$$x = \mu \pm L\sqrt{\frac{C_f}{C_c}}.$$

En base a estos razonamientos, el intervalo de tolerancia del fabricante debe ser

$$\left[\mu - L\sqrt{\frac{C_f}{C_c}}, \mu + L\sqrt{\frac{C_f}{C_c}} \right],$$

Ejemplo Taguchi

Considérese la fabricación de una pieza, con longitud nominal de 625 mm y que es defectuosa si se desvía en más de 3 mm de este valor, siendo 300 euros el coste de reposición para el usuario de una pieza defectuosa.

$$C_c(x) = 300 \left(\frac{x - 625}{3} \right)^2.$$

Si el coste de reposición para el fabricante es de 50 euros, su tolerancia de fabricación debe ser

$$\left[625 - 3\sqrt{\frac{50}{300}}, 625 + 3\sqrt{\frac{50}{300}} \right] = [623.78, 626.22],$$

Gráfico de medias ($\bar{x}$, s)

Para construir el gráfico de medias supondremos que x_{ij} es el j -ésimo elemento de la i -ésima muestra.

Considérese k , el número de muestras y n el tamaño de las mismas.

Aunque la estimación de la media del proceso puede hacerse mediante la media de todos los datos.

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_i \bar{x}_i}{k} = \frac{\sum_i \sum_j x_{ij}}{N}, \text{ con } N = kn,$$

Pero la estimación de la variabilidad no es única, dando lugar a distintos gráficos de control: utilizando desviaciones típicas, cuasidesviaciones, varianzas o recorridos.

Grafico de Control o graficos Shewhart

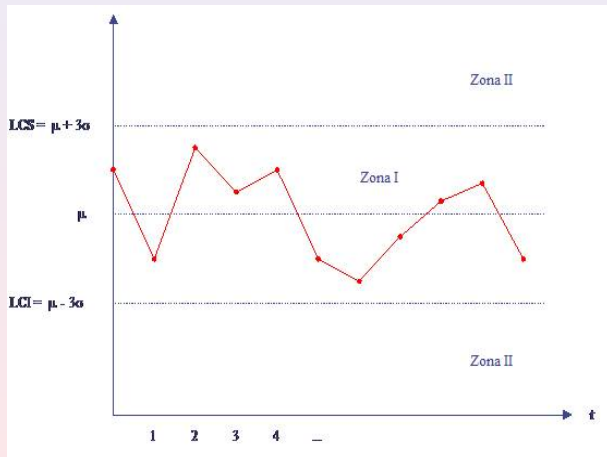


Gráfico de medias ($\bar{x}$, s)

En el caso en que se usen las desviaciones típicas muestrales s_i se procede como sigue:

- Calcular la media y la desviación típica de cada muestra, $\bar{x}_i$ y s_i , respectivamente ($i = 1, 2, \dots, k$).
- Calcular la media global y la cuasidesviación típica de cada muestra. La media global es un estimador insesgado de la media teórica, μ . La cuasidesviación típica muestral es un estimador sesgado de la desviación típica teórica.

De hecho se tiene $E[s_i] = c_4\sigma$, donde c_4 es una constante, dependiente de n .

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{s}}{c_4} = \frac{\sum_i s_i}{c_2 k}$$

como estimador (centrado) de la desviación típica teórica.

Gráfico de medias ($\bar{x}$, s)

- Se usa $\hat{\sigma} = \bar{s}/c_2$ como estimador de la desviación típica.
- Si todas las muestras provienen de la misma distribución entonces se tiene que

$$\frac{\sqrt{n}c_2(\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})}{\bar{s}}$$

tiene distribución aproximada $N(0, 1)$. Con lo cual cada valor $\bar{x}_i$ debe estar en el intervalo

$$\left[\bar{\bar{x}} - \frac{3\bar{s}}{\sqrt{n}c_2}, \bar{\bar{x}} + \frac{3\bar{s}}{\sqrt{n}c_2} \right]$$

con probabilidad aproximada del 99,74 .

Gráfico de desviaciones típicas s

Un intervalo que contiene a la desviación típica muestral s_i con probabilidad aproximada de 0,99 es el dado por $(B_3\bar{s}, B_4\bar{s})$ donde las constantes B_3 y B_4 (que dependen de n) están tabuladas. Para construir este gráfico de control se procede de la siguiente forma:

- Dado n , encontrar los valores B_3 y B_4 y calcular $\bar{s}$. Con todo ello obtener los límites inferior $B_3\bar{s}$ y superior $B_4\bar{s}$ de control.
- Construir un gráfico que presente en abscisas el tiempo y en ordenadas los valores s_i . Trazar también las líneas central ($\bar{s}$) y los límites de control ($B_3\bar{s}$ y $B_4\bar{s}$).
- Si alguna de las desviaciones típicas se sale de los límites de control, se admite que el proceso no está bajo control en ese instante.

Gráficos de control con recorridos

El rango de una muestra no es más que la diferencia entre la mayor y la menor de sus observaciones.

Bajo la hipótesis de que la distribución es normal, puede calcularse la distribución del rango muestral. En particular, su media es $d_2\sigma$, donde d_2 es una constante que depende del tamaño muestral, n , y que está tabulada. También están tabulados los coeficientes D_1 y D_2 que definen el intervalo en el que se debe encontrar el rango muestral con una probabilidad de 0.99 para una población normal de varianza 1.

Gráficos de control con recorridos

En procesos bajo control, en los que se supone σ conocida, puede construirse un gráfico de control para la dispersión, medida ésta mediante rangos.

Tomando como línea central el valor esperado del rango muestral ($d_2\sigma$) y como límites de control los dados por las constantes tabuladas ($D_1\sigma$ y $D_2\sigma$), se realiza un gráfico en el que se representan los rangos muestrales.

Cada vez que uno de ellos se salga de los límites de control diremos que el proceso no está bajo control.

Gráficos de control con recorridos o rangos

El rango puede sustituir a la desviación típica en los gráficos de control de la media, sirviendo entonces también para el cálculo de la capacidad. Para ello basta darse cuenta de que R_i/d_2 es un estimador insesgado de σ y, por tanto, su media (a lo largo de todas las muestras) también lo será. Definiendo

$$\bar{R} = \frac{\sum_i R_i}{k},$$

se tiene entonces que podemos estimar σ mediante $\bar{R}/d_2$ y construir los límites de control $(\bar{x}, R)$ mediante:

$$\bar{\bar{x}} \pm \frac{3\bar{R}}{\sqrt{nd_2}}.$$

Fórmulas para los gráficos de control

$$LCL = \bar{\bar{x}} - A_2 \bar{R}$$

$$CL = \bar{\bar{x}}$$

$$UCL = \bar{\bar{x}} + A_2 \bar{R}$$

Análogamente, el gráfico de variabilidad mediante rangos tiene una línea central con altura $\bar{R}$ y líneas de control $D_3 \bar{R}$ y $D_4 \bar{R}$,

$$\hat{\sigma}_R = d_3 \frac{\bar{R}}{d_2}$$

$$LCL = \bar{R} - 3\hat{\sigma}_R = \bar{R} - 3d_3 \frac{\bar{R}}{d_2} = D_3 \bar{R}$$

$$CL = \bar{R}$$

$$UCL = \bar{R} + 3\hat{\sigma}_R = \bar{R} + 3d_3 \frac{\bar{R}}{d_2} = D_4 \bar{R}$$

Fórmulas para los distintos gráficos de control

$$LCL = \bar{\bar{X}} - A_1 \bar{s}$$

$$CL = \bar{\bar{X}}$$

$$UCL = \bar{\bar{X}} + A_1 \bar{s}$$

en donde $A_1 = \frac{3}{\sqrt{nc_2}}$.

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{\hat{s}}}{c_4} = \frac{\sum_i \hat{s}_i}{c_4 k}$$

como estimador (centrado) de la desviación típica teórica.
El valor c_4 viene dado por la expresión:

$$c_4 = \sqrt{\frac{2}{n-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

Fórmulas para los distintos gráficos de control

Usando causas desviaciones típicas los límites de control 3σ :

$$LCL = \bar{\bar{X}} - A_3 \bar{\hat{S}}$$

$$CL = \bar{\bar{X}}$$

$$UCL = \bar{\bar{X}} + A_3 \bar{\hat{S}}$$

en donde $A_3 = \frac{3}{\sqrt{nc_4}}$.

$$LCL = B_3 \bar{\hat{S}}$$

$$CL = \bar{\hat{S}}$$

$$UCL = B_4 \bar{\hat{S}}$$

en donde $B_3 = 1 - \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2}$ y $B_4 = 1 + \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2}$.

$$LCL = \mu - A\sigma$$

$$CL = \mu$$

$$UCL = \mu + A\sigma$$

en donde $A = \frac{3}{\sqrt{n}}$.

Del mismo modo para la construcción de un gráfico tipo R :

$$LCL = d_2\sigma - 3d_3\sigma = D_1\sigma$$

$$CL = d_2\sigma$$

$$UCL = d_2\sigma + 3d_3\sigma = D_2\sigma$$

en donde $D_1 = d_2 - 3d_3$ y $D_2 = d_2 + 3d_3$.

También existe la opción de utilizar gráficos basados directamente en la varianza muestral del proceso (o en la cuasivarianza) $\overline{S^2}$:

$$\begin{aligned}LCL &= \frac{\overline{S^2}}{n-1} \chi_{\alpha/2, n-1}^2 \\CL &= \overline{S^2} \\UCL &= \frac{\overline{S^2}}{n-1} \chi_{1-\alpha/2, n-1}^2\end{aligned}$$

en donde $\chi_{\alpha/2, n-1}^2$ y $\chi_{1-\alpha/2, n-1}^2$ denotan los cuantiles correspondientes de la distribución Chi-cuadrado de Pearson con $n-1$ grados de libertad. En el caso que se tuviese un valor conocido de σ también podría utilizarse en la expresión anterior.

En el supuesto que las submuestras utilizadas sean de un solo valor, es decir el tamaño muestral n es 1, este es un caso frecuente en control de calidad de industrias químicas, en las que no tiene mucho sentido tomar muestras de varias unidades de la misma mezcla (piénsese en una cervecera). En este suelen usarse medias móviles de distinto orden o la amplitud móvil entre dos observaciones sucesivas para estimar la variabilidad del proceso, a partir de estas amplitudes se estimaría la media de esos rangos. Así si se utilizasen sólo dos valores las constantes utilizadas para el gráfico serían las equivalentes a las usadas de una muestra de tamaño $n = 2$ que resulta un valor de $d_2 = 1,128$.

Tablas para los distintos gráficos de control

n	A	A2	A3	c4	B3	B4	B5	B6	d2	d3	D1	D2	D3	D4
2	2.121	1.880	2.659	0.7979	0	3.267	0	2.606	1.128	0.853	0	3.686	0	3.267
3	1.732	1.023	1.954	0.8862	0	2.568	0	2.276	1.693	0.888	0	4.358	0	2.575
4	1.500	0.729	1.628	0.9213	0	2.266	0	2.088	2.059	0.880	0	4.698	0	2.282
5	1.342	0.577	1.427	0.9400	0	2.089	0	1.964	2.326	0.864	0	4.918	0	2.114
6	1.225	0.483	1.287	0.9515	0.030	1.970	0.029	1.874	2.534	0.848	0	5.079	0	2.004
7	1.134	0.419	1.182	0.9594	0.118	1.882	0.113	1.806	2.704	0.833	0.205	5.204	0.076	1.924
8	1.061	0.373	1.099	0.9650	0.185	1.815	0.179	1.751	2.847	0.820	0.388	5.307	0.136	1.864
9	1.000	0.337	1.032	0.9693	0.239	1.761	0.232	1.707	2.970	0.808	0.547	5.394	0.184	1.816
10	0.949	0.308	0.975	0.9727	0.284	1.716	0.276	1.669	3.078	0.797	0.686	5.469	0.223	1.777
11	0.905	0.285	0.927	0.9754	0.321	1.679	0.313	1.637	3.173	0.787	0.811	5.535	0.256	1.744
12	0.866	0.266	0.886	0.9776	0.354	1.646	0.346	1.610	3.258	0.778	0.923	5.594	0.283	1.717
13	0.832	0.249	0.850	0.9794	0.382	1.618	0.374	1.585	3.336	0.770	1.025	5.647	0.307	1.693
14	0.802	0.235	0.817	0.9810	0.406	1.594	0.398	1.563	3.407	0.763	1.118	5.696	0.328	1.672
15	0.775	0.223	0.789	0.9823	0.428	1.572	0.421	1.544	3.472	0.756	1.203	5.740	0.347	1.653
16	0.750	0.212	0.763	0.9835	0.448	1.552	0.440	1.527	3.532	0.750	1.282	5.782	0.363	1.637
17	0.728	0.203	0.739	0.9845	0.466	1.534	0.459	1.510	3.588	0.744	1.356	5.820	0.378	1.622
18	0.707	0.194	0.718	0.9854	0.482	1.518	0.475	1.496	3.640	0.739	1.424	5.856	0.391	1.609
19	0.688	0.187	0.698	0.9862	0.497	1.503	0.490	1.483	3.689	0.733	1.489	5.889	0.404	1.596
20	0.671	0.180	0.680	0.9869	0.510	1.490	0.503	1.470	3.735	0.729	1.549	5.921	0.415	1.585
21	0.655	0.173	0.663	0.9876	0.523	1.477	0.516	1.459	3.778	0.724	1.606	5.951	0.425	1.575
22	0.640	0.167	0.647	0.9882	0.534	1.466	0.528	1.448	3.819	0.720	1.660	5.979	0.435	1.565
23	0.626	0.162	0.633	0.9887	0.545	1.455	0.539	1.438	3.858	0.716	1.711	6.006	0.443	1.557
24	0.612	0.157	0.619	0.9892	0.555	1.445	0.549	1.429	3.895	0.712	1.759	6.032	0.452	1.548
25	0.600	0.153	0.606	0.9896	0.565	1.435	0.559	1.420	3.931	0.708	1.805	6.056	0.459	1.541

Estimación de la capacidad

Si en alguno de los dos gráficos hay alguna muestra que se sale de los límites de control, la eliminaremos, pasando a representar nuevamente los gráficos excluyendo los valores fuera de control. Si en ese momento todas las muestras se hallan bajo control, las consideraremos un grupo homogéneo y en caso contrario procederemos como se acaba de indicar, eliminando las muestras fuera de control y repitiendo el proceso hasta obtener un grupo homogéneo.

Seguidamente se contrasta la normalidad de la distribución de fabricación con los datos de los casos que han quedado bajo control. Para ello pueden utilizarse contrastes como el chi-cuadrado, Kolmogorov-Smirnov-Lilliefors, o el de Shapiro-Wilk (entre otros).

Control por variables. El concepto de capacidad

El concepto de capacidad

En todo proceso productivo se puede definir una medida de la capacidad que el proceso tiene para cumplir con sus especificaciones de calidad. Es el llamado **índice de capacidad**. Si la característica de calidad es continua y con distribución $N(\mu, \sigma)$, cuando el proceso se encuentra bajo control se tiene:

$$\begin{aligned} P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) &= P(|X - \mu| \leq 3\sigma) = \Phi(3) - \Phi(-3) = \\ &= 2\Phi(3) - 1 = 2 \cdot 0,998650 - 1 = 0,997 \end{aligned}$$

Por ello, el intervalo $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ se denomina de tolerancias naturales o intrínsecas del proceso. Teniendo esto en cuenta se define la **capacidad del proceso a 6σ** .

El concepto de capacidad

Para analizar la adecuación de un proceso a las especificaciones preestablecidas es absolutamente necesario conocer su capacidad. Supóngase que el intervalo de tolerancias de fabricación de un proceso es (LT_1, LT_2) , centrado en μ . Entonces, se define el índice de capacidad del proceso como

$$IC = \frac{LT_2 - LT_1}{6\sigma}.$$

Atendiendo al valor del índice de capacidad se presentan tres casos diferenciados: $IC < 1$ $IC = 1$ $IC > 1$

Control por variables. El concepto de capacidad

El concepto de capacidad

- $IC < 1$. El proceso no puede cumplir las especificaciones requeridas. Además, cuanto más pequeño sea el índice de capacidad mayor será la proporción de piezas defectuosas. La recomendación práctica será tratar de reducir la variabilidad no asignable, lo cual requiere cambios en el proceso o en el producto. Si esto no es posible, el proceso ha de someterse a una inspección muy frecuente para prevenir cualquier pequeño desajuste que aumente, aún más, el número de defectuosos.
- $IC = 1$. Según lo apuntado anteriormente, el proceso fabricará aproximadamente un 0,3 % de defectuosos. Tradicionalmente un tipo de proceso que cumpliera esta característica se consideraba justamente apto para la fabricación. No obstante, en la actualidad este porcentaje de defectuosos puede ser inaceptable en muchos productos (cuyas proporciones de defectuosos se cuentan en uno o dos por millón).

El concepto de capacidad

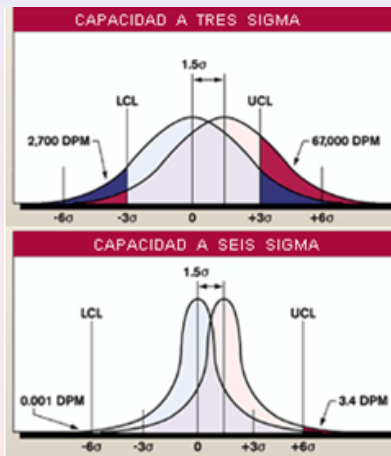
- $IC > 1$. En este caso el porcentaje de defectuosos es realmente muy pequeño (aunque la palabra “pequeño” siempre es relativa ya que depende del sector industrial concreto). Por este motivo tan sólo es necesario supervisar el proceso por si se producen desviaciones acusadas del estado de control.
- El índice de capacidad nos permite calcular el porcentaje de defectuosos, pero además también ayuda a elegir entre procesos alternativos, a establecer un sistema de control durante la fabricación mediante la toma de muestras cada cierto tiempo e indica un punto de partida para la mejora del proceso.

Control por variables. El concepto de capacidad

El concepto de capacidad

Índice de capacidad	Frecuencia de inspección
$IC \leq 1$	Todas las unidades
$1 < IC \leq 1,4$	Intensiva (cada 15 ó 30 minutos)
$1,4 < IC \leq 1,7$	Moderada (cada hora)
$1,7 < IC \leq 2$	Espaciada (cada 2 horas)
$2 < IC$	Depende de la frecuencia de anomalías

Capacidad según Six Sigma



Ejemplo

La desviación típica de un proceso de fabricación de componentes electrónicos es 0,05 V. Se trata de fabricar dos componentes A y B que se consideran defectuosos si su tensión varía más de 0,5 V. Calcular el índice de capacidad del proceso si el coste de fabricación de ambos es el mismo, 50 euros. pero el coste de fallo para el usuario es de 80 euros para A y 250 para B .

$$C_A(x) = \frac{80}{0,25}(x - \mu)^2, \quad C_B(x) = \frac{250}{0,25}(x - \mu)^2,$$

luego, los intervalos de tolerancias son $[\mu - 0,395, \mu + 0,395]$, para el A , y $[\mu - 0,224, \mu + 0,224]$, para el B . Como consecuencia, sus índices de capacidad son $IC_A = \frac{0,79}{0,30} = 2.63$ y $IC_B = \frac{0,448}{0,30} = 1.49$. Así pues el proceso A es muy capaz y la inspección es poco frecuente, mientras que en el B , la capacidad es adecuada.

Función característica de operación (Curva OC)

Curva OC para control por variables

Si la hipótesis nula es que el proceso está bajo control frente a la alternativa que sería que el proceso no está bajo control, bajo estas premisas surge los conceptos de error de tipo I que sería el error que se comete al suponer el proceso fuera de control cuando realmente está bajo control, también llamado en este contexto **riesgo del vendedor o proveedor o riesgo α** (también se puede llamar probabilidad de falsa alarma) y el error de tipo II; que es el que se comete al considerar que el proceso si está bajo control no estándolo, llamado riesgo β o riesgo del comprador. Estos riesgos dependen del tamaño de la muestra y de los intervalos de aceptación y rechazo de la hipótesis nula. Cuando se grafican el riesgo β en función de la magnitud del cambio que se pretende estudiar (normalmente expresado en unidades de desviación estandar) se obtiene una curva denominada **Curva Característica de Operación o curva OC** (Operating Characteristics).

Función característica de operación (Curva OC)

Curva OC para control por variables

En el caso de que estemos interesados en calcular el error de tipo II al pasar de un valor nominal μ a un valor $\mu_1 = \mu_0 + k\sigma$, supuesto que la característica de calidad medible se ajusta a una distribución $N(\mu, \sigma)$, con lo que la media muestral $\bar{x} \in N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, si suponemos que $UCL = \mu_0 + d\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y $LCL = \mu_0 - d\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$\beta = P(LCL \leq \bar{x} \leq UCL / \mu = \mu_1 = \mu_0 + k\sigma)$$

$$\beta = \Phi \left[\frac{UCL - (\mu_0 + k\sigma)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right] - \Phi \left[\frac{LCL - (\mu_0 + k\sigma)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right]$$

$$\beta = \Phi [d - k\sqrt{n}] - \Phi [-d - k\sqrt{n}]$$

En el supuesto más clásico en que se usen límites 3 sigma ($d = 3$), tomando por ejemplo $n = 5$ y $k = 1$, es decir $\mu_1 = \mu_0 + \sigma$, tendríamos:

Función característica de operación (Curva OC)

Curva OC para control por variables

Para la construcción de la curva OC para un gráfico de variables se puede hacer una gráfica en la que en el eje Y se ponga la probabilidad del error de tipo II o riesgo β y en el eje de abscisas distintos valores para k , según la expresión

$\beta = \Phi [d - k\sqrt{n}] - \Phi [-d - k\sqrt{n}]$, de esta forma es posible obtener varias curvas OC para cada uno de los tamaños de las submuestras consideradas n .

Dados los puntos en la curva característica $(0, \alpha)$ y (μ_1, β) teniendo en cuenta la teoría de contraste de hipótesis, suponiendo una que los datos siguen una distribución normal, el tamaño muestral vendría determinado por:

$$n = \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}} + Z_{\beta}}{d} \right)^2$$

siendo d el descentrado relativo, es decir,

Función característica de operación (Curva OC)

Curva OC para control por variables

La probabilidad de rechazar $H_0(\mu = \mu_0)$ vs $H_1(\mu \neq \mu_0)$:

$$2 - \left[\Phi \left(Z_{\frac{\alpha}{2}} - d\sqrt{n} \right) + \Phi \left(Z_{\frac{\alpha}{2}} + d\sqrt{n} \right) \right]$$

La curva característica o probabilidad de aceptar H_0 en función del descentrado d , sería:

$$OC(d) = \Phi \left(Z_{\frac{\alpha}{2}} - d\sqrt{n} \right) + \Phi \left(Z_{\frac{\alpha}{2}} + d\sqrt{n} \right) - 1$$

En el supuesto de que estemos interesados en contrastar hipótesis unilateral del tipo $H_0(\mu = \mu_0)$ vs $H_1(\mu > \mu_0)$,

$$OC(d) = \Phi \left(Z_{\frac{\alpha}{2}} - d\sqrt{n} \right), \quad d \geq 0$$

y el tamaño de la muestra en este supuesto unilateral de la hipótesis alternativa se podría calcular fijando los puntos de la curva característica $(0, \alpha)$ y (d, β) mediante:

Curva OC para control por variables

Ejemplo

En la fabricación de botes de refrescos se quiere verificar que su valor nominal está entorno a los 33 cl que marca el envase, para determinar el valor de la curva característica para un valor del tamaño muestral de 5 se queremos detectar un cambio cuando el contenido medio sea inferior a 32 cl, suponiendo una desviación típica poblacional de $\sigma_0 = 1,23$ obtendríamos:

$$d = \frac{|\mu - \mu_0|}{\sigma_0} = \frac{|33 - 32|}{1,23} = 0,813\,01$$

Por tanto $OC(d) = \Phi(1,645 - 0,813\,01\sqrt{5}) = \Phi(-0,17) = 0,4325$:

Esto quiere decir que si la media del proceso fuese realmente 32 cl en el 43.25 % de las muestras de tamaño 5 se llegaría a aceptar que la media real es de 33 cl (Hipótesis nula), es decir cometeríamos un error de tipo II con probabilidad 0.4325, lo que llevaría a buscar otro test distinto o bien a aumentar el tamaño

Concepto de ARL

La probabilidad de detectar un cambio en la primera muestra es $1 - \beta$,

en la segunda muestra será $\beta(1 - \beta)$, en general la probabilidad de conseguir detectar el cambio en la k -ésima muestra será: $\beta^{k-1}(1 - \beta)$. Teniendo esto en cuenta podemos estimar el número de submuestras que habría que analizar antes de detectar el cambio (se trataría de una distribución geométrica):

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \beta^{k-1} (1 - \beta) = \frac{1}{1 - \beta}$$

Concepto de ARL

A este valor del número de muestras necesarias para detectar la primera muestra defectuosa o fuera de control se denomina *ARL* (Average Run Length).

$$ARL = \frac{1}{1 - \beta}$$

El ARL o longitud media de racha es el promedio de puntos que hacen falta representar en el gráfico (muestras a tomar) hasta que el primer punto muestre señal de fuera de control. El valor del ARL puede calcularse analíticamente o por medio de simulación.

El ARL para gráficos de variables)

Concepto de ARL

$$ARL_{d=0} = \frac{1}{\alpha}$$

donde α es la probabilidad del error de primera especie. Si por ejemplo estamos utilizando gráficos de control 3 sigma, saldría un ARL de $1/0,0027 = 370,37$,

Para los gráfico de Shehart se pueden graficar distintos valores para el ARL en función de k y n .

El conocimiento de los valores de ARL para proceso bajo control y fuera de control es fundamental en el diseño de los gráficos de control de calidad. Pues debemos asegurarnos de tener una baja tasa de falsas alarmas (ARL bajo control alto) y, al mismo tiempo, rapidez suficiente para detectar los cambio (ARL fuera de control bajo).

El ATS para gráficos de variables)

Concepto de ATS

También se puede utilizar el ATS (Average Time to Signal) o tiempo promedio hasta la señal, como el tiempo promedio que tardará el gráfico hasta que éste indique una señal de falta de control. Resulta sencillo obtener una fórmula aproximada para el valor de ATS si conocemos el tiempo entre muestras, h :

$$ATS = ARL.h$$

Ejemplo de Control de calidad de un acero

Proceso de producción de acero laminado

Control de resistencia de acero corrugado



Datos de 100 probetas de acero

	X1j	X2j	X3j	X4j	X5j	Medias	Recorridos	Desviaciones	Cuasi desvia
Muestra1	519,24	498,62	526,17	526,47	525,33	519,16	27,85	10,61	11,86
Muestra2	530,14	517,44	514,64	506,81	522,57	518,32	23,33	7,80	8,72
Muestra3	521,86	531,00	513,25	515,79	512,25	518,83	18,75	6,94	7,76
Muestra4	521,78	532,85	526,17	524,76	517,34	524,56	15,61	5,15	5,76
Muestra5	542,29	548,13	517,81	509,58	520,89	527,74	38,55	14,85	16,61
Muestra6	518,91	518,73	518,23	505,80	523,54	517,00	17,55	6,02	6,73
Muestra7	501,40	521,72	509,03	529,00	514,17	515,06	27,61	9,62	10,75
Muestra8	521,05	525,50	505,80	510,39	521,42	517,23	19,70	7,73	8,64
Muestra9	501,91	531,01	520,16	523,22	527,62	520,78	29,10	10,14	11,33
Muestra10	525,02	519,14	512,88	511,42	513,47	516,39	13,60	5,05	5,65
Muestra11	531,30	526,11	543,37	532,28	521,07	530,83	22,30	7,45	8,32
Muestra12	502,92	522,86	522,76	519,35	526,74	518,93	23,81	8,34	9,32
Muestra13	509,91	525,34	496,17	499,69	523,11	510,84	29,16	11,84	13,24
Muestra14	508,69	520,48	522,30	510,32	522,79	516,91	14,10	6,12	6,84
Muestra15	513,84	513,06	538,91	518,19	513,58	519,52	25,85	9,87	11,03
Muestra16	534,62	515,56	497,40	517,61	515,90	516,22	37,22	11,79	13,18
Muestra17	510,06	518,66	532,54	524,01	538,54	524,76	28,48	10,04	11,23
Muestra18	529,83	518,28	522,53	507,14	513,33	518,22	22,68	7,74	8,66
Muestra19	522,28	515,08	520,39	523,06	509,84	518,13	13,22	4,99	5,58
Muestra20	528,55	507,56	516,88	516,43	512,87	516,46	20,99	6,90	7,72
					Promedios	519,29	23,49	8,45	9,45

Ejemplo de Control de calidad de un acero

Histograma acero

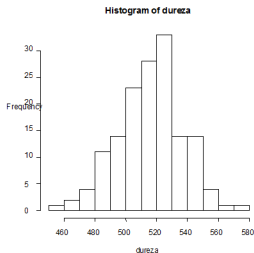
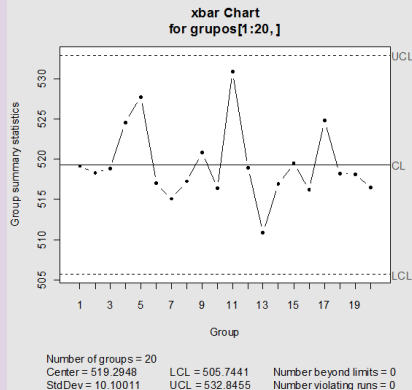


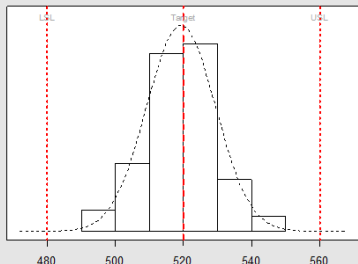
Gráfico de control para las medias



Ejemplo de Control de calidad de un acero

Estudio de la capacidad

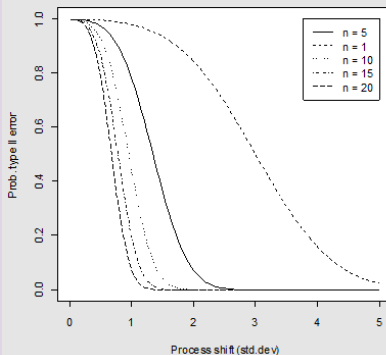
Process Capability Analysis
for grupos[1:20,]



Number of obs = 100	Target = 520	$C_p = 1.32$	Exp<LSL 0%
Center = 519.2948	LSL = 480	$C_{p_j} = 1.3$	Exp>USL 0%
StdDev = 10.10011	USL = 560	$C_{p_u} = 1.34$	Obs<LSL 0%
		$C_{p_k} = 1.3$	Obs>USL 0%
		$C_{pm} = 1.32$	

Curvas OC para acero

OC curves for xbar chart



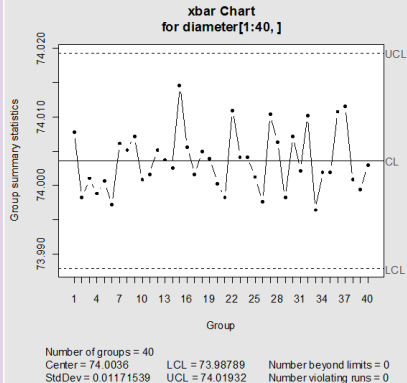
Ejemplo de Control de calidad (Montgomery)

Anillos de pistón forjado

Table 5-3 Inside Diameter Measurements (mm) for Automobile Engine Piston Rings

Sample Number	Observations					$\bar{x}_i$	S_i
1	74.030	74.002	74.019	73.992	74.008	74.010	0.0148
2	73.995	73.992	74.001	74.011	74.004	74.001	0.0075
3	73.988	74.024	74.021	74.005	74.002	74.008	0.0147
4	74.002	73.996	73.993	74.015	74.009	74.003	0.0091
5	73.992	74.007	74.015	73.989	74.014	74.003	0.0122
6	74.009	73.994	73.997	73.985	73.993	73.996	0.0087
7	73.995	74.006	73.994	74.000	74.005	74.000	0.0055
8	73.985	74.003	73.993	74.015	73.988	73.997	0.0123
9	74.008	73.995	74.009	74.005	74.004	74.004	0.0055
10	73.998	74.000	73.990	74.007	73.995	73.998	0.0063
11	73.994	73.998	73.994	73.995	73.990	73.994	0.0029
12	74.004	74.000	74.007	74.000	73.996	74.001	0.0042
13	73.983	74.002	73.998	73.997	74.012	73.998	0.0105
14	74.006	73.967	73.994	74.000	73.984	73.990	0.0153
15	74.012	74.014	73.998	73.999	74.007	74.006	0.0073
16	74.000	73.984	74.005	73.998	73.996	73.997	0.0078
17	73.994	74.012	73.986	74.005	74.007	74.001	0.0106
18	74.006	74.010	74.018	74.003	74.000	74.007	0.0070
19	73.984	74.002	74.003	74.005	73.997	73.998	0.0085
20	74.000	74.010	74.013	74.020	74.003	74.009	0.0080
21	73.982	74.001	74.015	74.005	73.996	74.000	0.0122
22	74.004	73.999	73.990	74.006	74.009	74.002	0.0074
23	74.010	73.989	73.990	74.009	74.014	74.002	0.0119
24	74.015	74.008	73.993	74.000	74.010	74.005	0.0087
25	73.982	73.984	73.995	74.017	74.013	73.998	0.0162
	$\Sigma = 1850.028$					0.2351	
	$\bar{x} = 74.001$					$\bar{s} = 0.0094$	

Gráfico de control



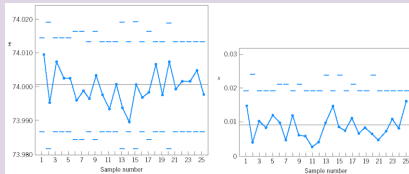
Ejemplo de Control de calidad (Montgomery)

Anillos de pistón forjado (se eliminan datos)

Table 5-4 Inside Diameter Measurements (mm) on Automobile Engine Piston Rings

Sample Number	Observations				$\bar{\bar{x}}_i$	s_i
1	74.030	74.002	74.019	73.992	74.008	0.0148
2	73.995	73.992	74.001		73.996	0.0046
3	73.988	74.024	74.021	74.005	74.002	0.0147
4	74.002	73.996	73.993	74.015	74.009	0.0091
5	73.992	74.007	74.015	73.989	74.014	0.0122
6	74.009	73.994	73.997	73.985	73.996	0.0099
7	73.995	74.006	73.994	74.000	73.999	0.0055
8	73.985	74.003	73.993	74.015	73.988	0.0123
9	74.008	73.995	74.009	74.005	74.004	0.0064
10	73.998	74.000	73.990	74.007	73.995	0.0063
11	73.994	73.998	73.994	73.995	73.990	0.0029
12	74.004	74.000	74.007	74.000	73.996	0.0042
13	73.983	74.002	73.998		73.994	0.0100
14	74.006	73.967	73.994	74.000	73.984	0.0153
15	74.012	74.014	73.998		74.008	0.0087
16	74.000	73.984	74.005	73.998	73.996	0.0078
17	73.994	74.012	73.986	74.005	73.999	0.0115
18	74.006	74.010	74.018	74.003	74.000	0.0070
19	73.984	74.002	74.003	74.005	73.997	0.0085
20	74.000	74.010	74.013		74.008	0.0068
21	73.982	74.001	74.015	74.005	73.996	0.0122
22	74.004	73.999	73.990	74.006	74.009	0.0074
23	74.010	73.989	73.990	74.009	74.014	0.0119
24	74.015	74.008	73.993	74.000	74.010	0.0087
25	73.982	73.984	73.995	74.017	74.013	0.0162

Gráfico de control



Referencias

-  BOX G. E. P. Y LUCEÑO A. (1997). *Statistical Control by Monitoring and Feedback Adjustment*. Wiley.
-  BOX, G.E.P., HUNTER, W. Y HUNTER, J.S. (2008). *Estadística para Investigadores*. Reverté.
-  JURAN J. Y GODFREY B. (2005). *de Calidad (tomos I y II)*. McGrawHill.
-  MONTGOMERY D. C. (2005/09). *Introduction to Statistical Quality Control*. Wiley.
-  PRAT, X. TORT-MARTORELL, P. GRIMA Y L. POZUETA (1997 ó 2005). *Métodos Estadísticos: Control y Mejora de la Calidad*. ed. UPC.