Control Estadístico de la Calidad

Tema 3. Filosofía de los gráficos de control.

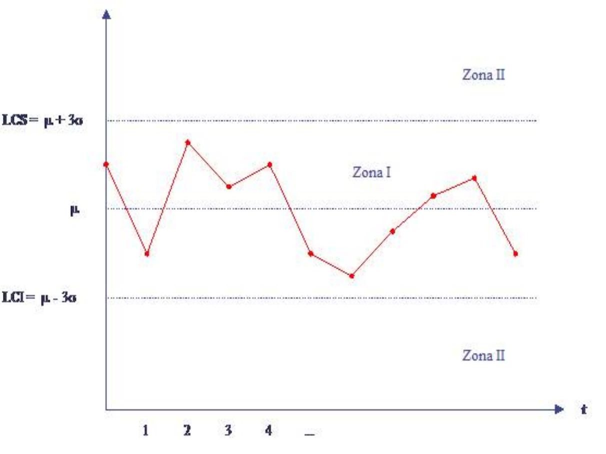
Salvador Naya
Departamento de Matemáticas
Universidad de A Coruña

Introducción

Contenido del tema

- Gráficos de control y contraste de hipótesis.
- Riesgos del vendedor y comprador.
- Subgrupos racionales.
- Análisis de patrones en un gráfico de control.

Grafico de Shewhart



Hipótesis estadística

Hipótesis estadística

Se denomina hipótesis estadística a cualquier conjetura sobre una o varias características de interés de un modelo de probabilidad.

- Concretar el valor o rango de valores de algún vector de parámetros (en los ejemplos 1, 2 y 4 las hipótesis son $\sigma = 150$, $\mu = 5$ y $p \geq 0'6$, respectivamente).
- Establecer comparaciones entre los valores de los parámetros de distintas poblaciones ($\sigma_A < \sigma_B$, $\mu_X > \mu_Y$ y $p_X > p_Y$ son las hipótesis de los ejemplos 3, 5 y 6, respectivamente).
- En control de calidad la hipótesis planteada sería que el proceso está bajo control ...

Planteamiento y método

Las hipótesis nula y alternativa

- Se denomina hipótesis nula, que habitualmente se denota por H_0, a la hipótesis que se contrasta.
- La hipótesis nula debe ser la hipótesis que el experimentador asume como correcta y que no necesita ser probada
- Si el experimentador quiere respaldar con contundencia un determinado argumento es debido a que éste no puede ser asumido gratuitamente y, por tanto, sólo podrá ser defendido a través del rechazo del argumento contrario (el establecido en H_0) En calidad la hipótesis nula sería que el proceso está bajo control.

Planteamiento y método

Las hipótesis nula y alternativa

- Rechazar la hipótesis nula implica asumir como correcta una conjetura o hipótesis complementaria. A esta hipótesis se la denomina hipótesis alternativa, suele denotarse por H_1.
- Se estudiarán sólo contrastes paramétricos con hipótesis nula simple, del tipo $H_0 : \theta = \theta_0$.
- En ocasiones, las propiedades analíticas del criterio probabilístico seleccionado para discernir entre H_0 y H_1 conducen a que la resolución de un contraste con hipótesis nula compuesta del tipo $H_0 : \theta \geq \theta_0$ o $H_0 : \theta \leq \theta_0$ sea equivalente a la resolución del contraste con hipótesis nula simple $H_0 : \theta = \theta_0$.

Riesgos del vendedor y comprador

- En un contraste de hipótesis, a la decisión de rechazar la hipótesis nula cuando ésta es cierta se la denomina error de tipo I o riesgo del vendedor.
- En un contraste de hipótesis, a la decisión de no rechazar la hipótesis nula cuando ésta es falsa se la denomina error de tipo II o riesgo del comprador.
- Las cuatro posibles situaciones son:

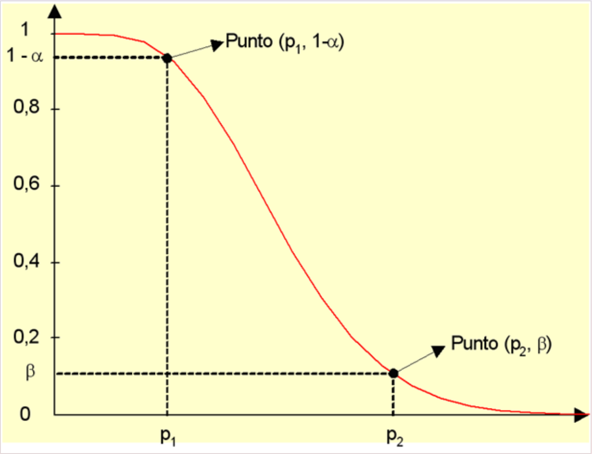
	Situación real: H_0 es cierta	**Situación real:** H_0 es falsa
No se rechaza H_0	DECISIÓN CORRECTA	ERROR DE TIPO II
Se rechaza H_0	ERROR DE TIPO I	DECISIÓN CORRECTA

Función característica de operación (Curva OC)

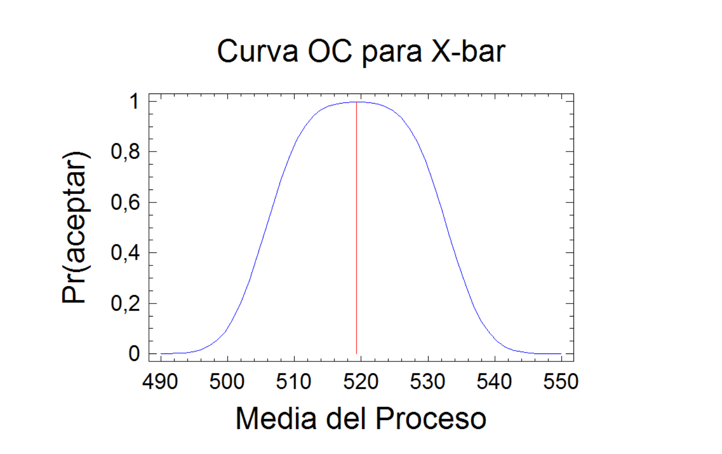
Curva OC para control por variables. Riesgo del comprador y del vendedor

Bajo la teoría de contraste de hipótesis, surge los conceptos de error de tipo I que sería el error que se comete al suponer el proceso fuera de control cuando realmente está bajo control, llamado riesgo del vendedor o proveedor o riesgo α (también se puede llamar probabilidad de falsa alarma) y el error de tipo II; que es el que se comete al considerar que el proceso si está bajo control no estándolo, llamado riesgo β o riesgo del comprador. Cuando se grafican el riesgo β en función de la magnitud del cambio que se pretende estudiar (normalmente expresado en unidades de desviación estandar) se obtiene una curva denominada Curva Característica de Operación o curva OC (Operating Characteristics).

Curva OC



Curva OC para recepción



Función característica de operación (Curva OC)

Curva OC para control por variables

En el caso de que estemos interesados en calcular el error de tipo II al pasar de un valor nominal μ a un valor $\mu_1 = \mu_0 + k\sigma$, supuesto que la característica de calidad medible se ajusta a una distribución $N(\mu, \sigma)$, con lo que la media muestral $\overline{x} \in N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, si suponemos que $UCL = \mu_0 + d\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y $LCL = \mu_0 - d\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$
\begin{aligned}
\beta &= P\left(LCL \leq \overline{x} \leq UCL / \mu = \mu_1 = \mu_0 + k\sigma\right) \\
\beta &= \Phi\left[\frac{UCL - (\mu_0 + k\sigma)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right] - \Phi\left[\frac{LCL - (\mu_0 + k\sigma)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right] \\
\beta &= \Phi\left[d - k\sqrt{n}\right] - \Phi\left[-d - k\sqrt{n}\right]
\end{aligned}
$$

En el supuesto más clásico en que se usen límites 3 sigma ($d = 3$), tomando por ejemplo $n = 5$ y $k = 1$, es decir $\mu_1 = \mu_0 + \sigma$, tendríamos:

Función característica de operación (Curva OC)

Curva OC para control por variables

Para la construcción de la curva *OC* se hace una gráfica en la que en el eje Y se ponga la probabibilidad del error de tipo II o riesgo β y en el eje de abscisas distintos valores de k, según la expresión: $\beta = \Phi\left[d - k\sqrt{n}\right] - \Phi\left[-d - k\sqrt{n}\right]$, de esta forma es posible obtener varias curvas OC para cada uno de los tamaños de las submuestras consideradas n.

Dados los puntos en la curva característica $(0, \alpha)$ y (μ_1, β), el tamaño muestral vendría determinado por:

$$n = \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}} + Z_{\beta}}{d}\right)^2$$

siendo d el descentrado relativo:

$$d = \frac{|\mu - \mu_0|}{\sigma_0}$$

Función característica de operación (Curva OC)

Curva OC para control por variables

La probabilidad de rechazar $H_0(\mu = \mu_0)$ vs $H_1(\mu \neq \mu_0)$:

$$2 - \left[\Phi\left(Z_{\frac{\alpha}{2}} - d\sqrt{n}\right) + \Phi\left(Z_{\frac{\alpha}{2}} + d\sqrt{n}\right)\right]$$

La curva característica o probabilidad de aceptar H_0 en función del descentrado d, sería:

$$OC(d) = \Phi\left(Z_{\frac{\alpha}{2}} - d\sqrt{n}\right) + \Phi\left(Z_{\frac{\alpha}{2}} + d\sqrt{n}\right) - 1$$

En el supuesto de un contrastar unilateral del tipo $H_0(\mu = \mu_0)$ vs $H_1(\mu > \mu_0)$,

$$OC(d) = \Phi\left(Z_{\frac{\alpha}{2}} - d\sqrt{n}\right), \ d \geq 0$$

y el tamaño de la muestra, fijados los puntos de la curva OC $(0, \alpha)$ y (d, β) es:

Curva OC para control por variables

Ejemplo

En la fabricación de botes de refrescos se quiere verificar que su valor nominal está entorno a los 33 cl que marca el envase, para determinar el valor de la curva característica para un valor del tamaño muestral de 5 se queremos detectar un cambio cuando el contenio medio sea inferior a 32 cl, suponiendo una desviación tipica poblacional de $\sigma_0 = 1{,}23$ obtendríamos:

$$d = \frac{|\mu - \mu_0|}{\sigma_0} = \frac{|33 - 32|}{1{,}23} = 0{,}813\,01$$

Por tanto $OC(d) = \Phi\left(1{,}645 - 0{,}813\,01\sqrt{5}\right) = 0{,}4325$:
Esto quiere decir que si la media del proceso fuese realmente 32 cl en el 43.25 % de las muestras de tamaño 5 se llegaría a aceptar que la media real es de 33 cl (Hipótesis nula), es decir cometeríamos un error de tipo II con probabilidad 0.4325.

Como tomar las muestras para el control

Tamaño muestral y frecuencia de muestreo

En el diseño de gráficos de control es necesario especificar el tamaño muestral y la frecuencia de muestreo. Muestras grandes facilitan detectar cambios pequeños, esto puede verse en la curva OC. La frecuencia de muestreo debe distribuir la frecuencia de muestreo, aunque muestras de gran tamaño serían mejor, lo que se emplea son muestras pequeñas de tamaño de 4 o 5 a intervalos cortos. Para calcular la frecuencia de muestreo deben tomarse en cuenta cuestiones económicas y del propio proceso.

Subgrupos racionales

Un concepto muy importante en el control de calidad es el de subgrupo racional, este concepto definido por Shewhart. La idea es que deben seleccionarse subgrupos o muestras de manera que si hay causas atribuibles, la posibilidad de detectar deferencias entre subgrupos sea máxima, mientras que la misma posibilidad dentro de un subgrupo sea mínima.

Interpretación de los gráficos de control

Los cambios en el funcionamiento del proceso pueden identificarse por determinadas pautas que pasamos a analizar.

Cambios bruscos en la media y/o en la variabilidad

Si existe un cambio brusco en la media, este se identificará por valores extremos fuera de los límites de control en el gráfico de medias, pudiendo no verse afectado el de variabilidad. Si el cambio es la variabilidad del proceso esto se verá reflejado en puntos extremos fuera de los límites de control tanto en el gráfico de variabilidad como, posiblemente, en el de medias. Mientras que en el de variabilidad los puntos extremos fuera de control serán de la misma naturaleza, en el de medias podría salirse de control por extremos opuestos o incluso algunos permanecer bajo control.

Interpretación de los gráficos de control

Tendencias o rachas

Si el desplazamiento de la media o de la variabilidad es paulatino a lo largo del tiempo, esto se manifiesta en lo que habitualmente se denota por racha, un alineamiento de valores consecutivos de un mismo lado respecto a la línea central (bien todos por encima o por debajo de la misma). Una racha se considera indicativa de anormalidad cuando está constituida por 7 u 8 valores. Así, que aparezca una racha de 8 valores por encima de la media, por azar, tiene una probabilidad aproximada de 0,004.

Periodicidades

Son repeticiones cíclicas de alguna de las gráficas de control. Habitualmente denotan diferencias entre turnos o estacionalidad en la calidad de la materia prima, por ejemplo. También pueden ser indicativas de que alguna variable ambiental (que fluctua con el día, o con la estación del año) tenga alguna influencia en el proceso.

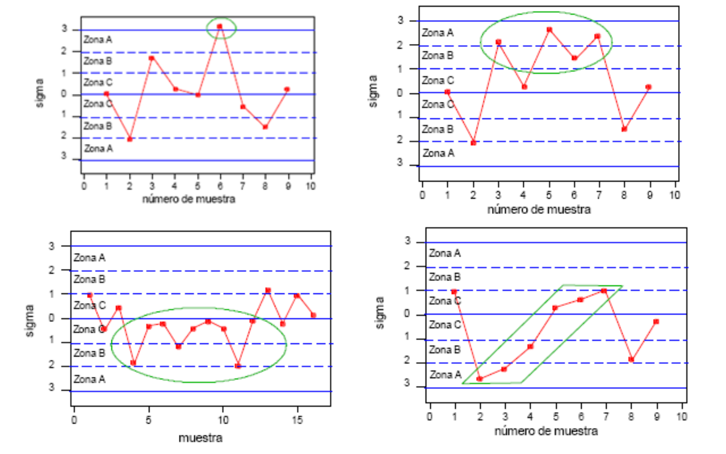
Inestabilidad

Consiste en la presencia de grandes fluctuaciones que, en ocasiones, pueden provocar que algún valor caiga fuera de los límites de control. Suelen deberse a un sobreajuste de la máquina, a la presencia de heterogeneidad en la materia prima (mezclada a lo largo del tiempo, en almacen, por ejemplo) o a falta de entrenamiento de un operario.

Sobreestabilidad

Es el fenómeno contrario y se da cuando la variabilidad es menor de la esperada. Resulta muy importante identificar esta situación y analizar las causas que la producen, ya que así podrá reducirse la variabilidad del proceso y aumentar, por tanto, su capacidad.
Una forma práctica de identificar esta situación consiste en dibujar una serie de líneas auxiliares en el gráfico de control, a una y dos desviaciones típicas, tanto por encima como por debajo, de la l ínea central. Si el proceso se encuentra bajo control, alrededor del 68 de los puntos se encuentran en la franja comprendida entre las más cercanas de estas líneas ($\mu \pm \sigma$). Una presencia sustancialmente mayor de valores en esta zona, indica sobreestabilidad.

Distintos tipos de fuera de control



Reglas de la Western Electric Handbook

Proceso bajo control si:

- Un punto cae fuera de los límites 3 sigma.
- Dos de tres puntos caen fuera de los límites dos sigma.
- Cuatro de cinco puntos consecutivos se encuentran a una distancia de un sigma o más de la línea central.
- Ocho puntos consecutivos se encuentran al mismo lado de la línea central.

Bibliografía

Referencias

- Cao, R., Francisco, M., Naya, S., Presedo, M.A., Vázquez, M., Vilar, J.A. y Vilar, J.M. (2005). *Introducción a la Estadística y sus Aplicaciones.* Pirámide.
- Montgomery D. C. (2005/09). *Introduction to Statistical Quality Control.* Wiley.
- Prat, X. Tort-Martorell, P. Grima y L. Pozueta (1997 ó 2005). *Métodos Estadísticos: Control y Mejora de la Calidad.* ed. UPC.