

GRÁFICOS DE CONTROL

- ✓ Las características de calidad de un producto son *variables aleatorias* y el porcentaje de piezas defectuosas por no cumplir las especificaciones de calidad depende de la distribución de dichas variables aleatorias.

Controlar el proceso de fabricación consiste en conseguir que la media μ y desviación típica σ de cada una de esas variables aleatorias sean constantes en el tiempo. Los gráficos de control permiten detectar si se han producido modificaciones.

- ✓ **Causas comunes y causas asignables.**- La variabilidad que presenta una característica del producto puede deberse a causas comunes y de difícil eliminación, como pequeñas oscilaciones en la tensión eléctrica, heterogeneidad en la materia prima, desgaste de alguna máquina, etc. o bien a causas de tipo puntual o accidental como una partida de materia prima defectuosa, un desajuste de una máquina, etc.

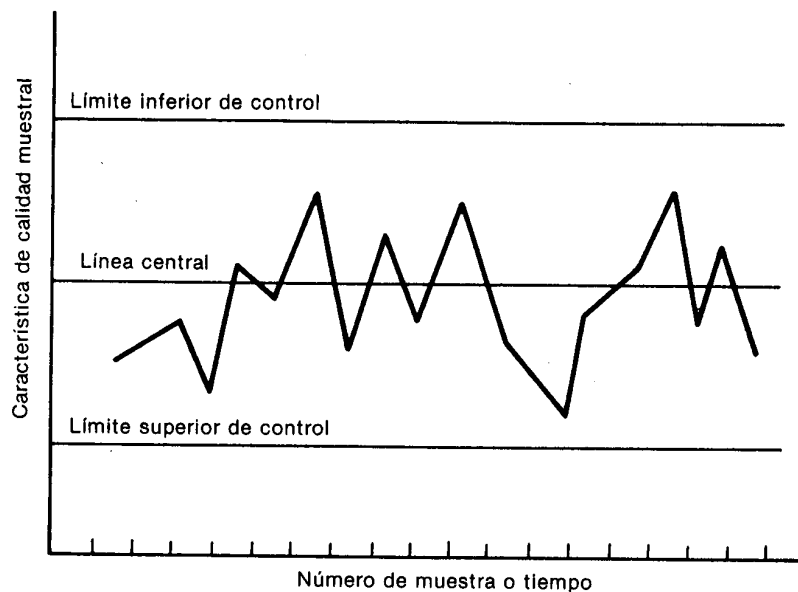
<i>Causas Comunes</i>	<i>Causas Especiales</i>
<i>Originadas por muchas fuentes de poca importancia</i>	<i>Originadas por pocas fuentes individualmente importantes</i>
<i>Tienen carácter permanente</i>	<i>Tienen carácter puntual e irregular</i>
<i>Dan lugar a una distribución estable, y por tanto, previsible</i>	<i>Modifican la distribución de la producción. Proceso imprevisible.</i>
<i>Son las únicas presentes cuando el proceso está bajo control.</i>	<i>Determinan que el proceso esté fuera de control.</i>
<i>Su corrección exige actuaciones a nivel de dirección</i>	<i>Se corrigen mediante actuaciones locales.</i>

- ✓ **Proceso bajo control.**- Un proceso está bajo control cuando no existen causas especiales y la única fuente de variabilidad la constituyen las causas comunes.

✓ Forma y uso de un Gráfico de Control.-

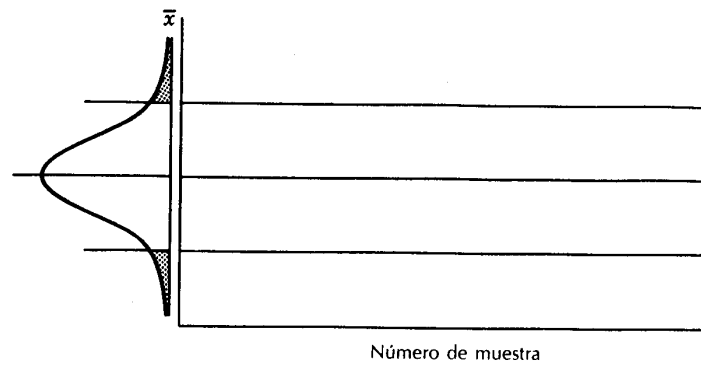
Un gráfico de control es un dibujo para determinar si el modelo de probabilidad (variabilidad) es estable o cambia a lo largo del tiempo.

Hay distintos tipos de gráficos de control referidos a distintas pautas de variabilidad. Pero todos tienen unas características comunes y se interpretan de la misma manera. En todos los casos es una **prueba de hipótesis estadística**.



El gráfico tiene una **línea central** que representa el valor medio de la característica de calidad, correspondiente al estado bajo control. Hay también otras dos líneas horizontales, llamadas **Límite Superior de Control** (LSC) y **Límite Inferior de Control** (LIC).

Un valor que se ubique entre los límites de control es equivalente a no poder rechazar la hipótesis estadística. Otro que se encuentre fuera de los límites equivale al rechazo de la hipótesis. En uno y otro caso cabe la posibilidad de error. **Error de tipo I**, rechazar cuando es cierta la hipótesis (probabilidad α) y el de **tipo II** no rechazar cuando es falsa (probabilidad β).



Un modelo general para el diagrama de control. Sea W una estadística muestral que mide alguna característica de calidad de interés. Sea μ_W la media de W , y su desviación típica σ_W . Las líneas del diagrama de control serán:

$$LSC = \mu_W + k \sigma_W$$

$$\text{Línea central} = \mu_W$$

$$LIC = \mu_W - k \sigma_W$$

donde k es la distancia entre los límites de control y la línea central, expresada en desviaciones típicas. Esta teoría fue propuesta por primera vez por el Dr. Walter A. Shewhart. Las gráficas, desarrolladas según estos principios son denominadas **diagramas de Shewhart**.

GRÁFICOS DE CONTROL PARA LA MEDIA

- ✓ El diagrama de control que nos da la tendencia de la media es:

$$LSC = m_{\bar{x}} + ks_{\bar{x}}$$

$$\text{Línea central} = m_{\bar{x}}$$

$$LIC = m_{\bar{x}} - ks_{\bar{x}}$$

- ✓ **Determinación de la media de la población**

Para la formación de los gráficos de control necesitamos conocer las medias y varianzas de sus distribuciones respectivas, lo que es imposible. Por tanto tenemos que basarnos en estimadores, que obtenemos a partir de un **período base**:

Se toman m (25 ó 30) muestras (de un tamaño determinado n) y en cada una

de ellas se mide la media $\bar{x} \left(\sum_{i=1}^n x_i / n \right)$ y el recorrido R. ($R = x_{max} - x_{min}$)

Ejemplo

Número de muestra	Observaciones					$\bar{x}_i$	R_i
1	74.030	74.002	74.019	73.992	74.008	74.010	0.038
2	73.995	73.992	74.001	74.011	74.004	74.001	0.019
3	73.988	74.024	74.021	74.005	74.002	74.008	0.036
4	74.002	73.996	73.993	74.015	74.009	74.003	0.022
5	73.992	74.007	74.015	73.989	74.014	74.003	0.026
6	74.009	73.994	73.997	73.985	73.993	73.996	0.024
7	73.995	74.006	73.994	74.000	74.005	74.000	0.012
8	73.985	74.003	73.993	74.015	73.988	73.997	0.030
9	74.008	73.995	74.009	74.005	74.004	74.004	0.014
10	73.998	74.000	73.990	74.007	73.995	73.998	0.017
11	73.994	73.998	73.994	73.995	73.990	73.994	0.008
12	74.004	74.000	74.007	74.000	73.996	74.001	0.011
13	73.983	74.002	73.998	73.997	74.012	73.998	0.029
14	74.006	73.967	73.994	74.000	73.984	73.990	0.039
15	74.012	74.014	73.998	73.999	74.007	74.006	0.016
16	74.000	73.984	74.005	73.998	73.996	73.997	0.021
17	73.994	74.012	73.986	74.005	74.007	74.001	0.026
18	74.006	74.010	74.018	74.003	74.000	74.007	0.018
19	73.984	74.002	74.003	74.005	73.997	73.998	0.021
20	74.000	74.010	74.013	74.020	74.003	74.009	0.020
21	73.988	74.001	74.009	74.005	73.996	74.000	0.033
22	74.004	73.999	73.990	74.006	74.009	74.002	0.019
23	74.010	73.989	73.990	74.009	74.014	74.002	0.025
24	74.015	74.008	73.993	74.000	74.010	74.005	0.022
25	73.982	73.984	73.995	74.017	74.013	73.998	0.035

$$\Sigma = 1850.024 \quad 0.581$$

$$\bar{\bar{x}} = 74.001 \quad \bar{R} = 0.023$$

La estimación de la media de la población es:

$$\hat{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_m}{m}$$

La estimación de la desviación típica es:

$$\hat{s} = \frac{\bar{R}}{d_2} \quad \text{ya que} \quad s = \frac{E(R)}{d_2}$$

La amplitud media del recorrido $\bar{R}$ es:

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_m}{m}$$

Este estimador es tanto más eficiente cuanto menor es el tamaño de la muestra.

✓ **Gráfico $\bar{X}$:**

Teniendo en cuenta que $\hat{s}_{\bar{x}} = \hat{s} / \sqrt{n}$, entonces

$$\text{LSC} = \bar{\bar{x}} + \frac{k}{d_2 \sqrt{n}} \bar{R}$$

$$\text{Línea central} = \bar{\bar{x}}$$

$$\text{LIC} = \bar{\bar{x}} - \frac{k}{d_2 \sqrt{n}} \bar{R}$$

La constante k puede tomar cualquier valor positivo; el valor más usual es 3.

Llamamos A_2 a

$$A_2 = \frac{3}{d_2 \sqrt{n}}$$

es una cantidad constante que depende solamente del tamaño de la muestra. Es posible poner los límites de esta forma

$$\text{LSC} = \bar{\bar{x}} + A_2 \bar{R}$$

$$\text{Línea Central} = \bar{\bar{x}}$$

$$\text{LIC} = \bar{\bar{x}} - A_2 \bar{R}$$

Los valores de d_2 y A_2 están tabulados,

Tabla para calcular los parámetros de los diagramas de control de características variables de calidad

Nº observac. En la muestra n	Gráfico $\bar{X}$ Límites de control	
	d_2	A_2
2	1,128	1,880
3	1,693	1,023
4	2,059	0,729
5	2,326	0,577
6	2,534	0,483
7	2,704	0,419
8	2,847	0,373
9	2,970	0,337
10	3,078	0,308

En el ejemplo de período base tenemos los siguientes diagramas:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{25} \bar{x}_i}{25} = \frac{1850,024}{25} = 74,001$$

$$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^{25} R_i}{25} = \frac{0,581}{25} = 0,023$$

Diagrama de $\bar{x}$

$$\text{LSC} = 74,001 + (0,577)(0,023) = 74,014$$

$$\text{Línea Central} = 74,001$$

$$\text{LIC} = 74,001 - (0,577)(0,023) = 73,988$$

GRÁFICOS DE CONTROL PARA EL RECORRIDO. Diagrama de R

- ✓ El diagrama que nos permite controlar la variabilidad del proceso viene definido por los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} \text{LSC} &= m_R + ks_R \\ \text{Línea central} &= m_R \\ \text{LIC} &= m_R - ks_R \end{aligned}$$

- ✓ **Determinación de la media de R, m_R**

Un estimador de la media del recorrido es:

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_m}{m}$$

- ✓ **Determinación de la desviación típica de R, s_R**

Llamamos amplitud relativa a la variable aleatoria $W = \frac{R}{s}$, cuyos parámetros sólo dependen del tamaño de la muestra, n .

$$m_W = d_2 \quad s_W = d_3.$$

Entonces, $s_W = d_3 = \frac{s_R}{s}$. Así, un estimador para s_R es

$$\hat{s}_R = d_3 \hat{s} = d_3 \frac{\bar{R}}{d_2}.$$

Por lo tanto, los parámetros del diagrama de R son

$$\begin{aligned} \text{LSC} &= \bar{R} + k\hat{s}_R = \bar{R} + kd_3 \frac{\bar{R}}{d_2} \\ \text{Línea central} &= \bar{R} \\ \text{LIC} &= \bar{R} - k\hat{s}_R = \bar{R} - kd_3 \frac{\bar{R}}{d_2} \end{aligned}$$

La constante k puede tomar cualquier valor positivo; el valor más usual es 3.

Llamando D_3 y D_4 a

$$D_3 = 1 - 3 \frac{d_3}{d_2}$$

$$D_4 = 1 + 3 \frac{d_3}{d_2}$$

obtenemos las siguientes expresiones para los parámetros del gráfico de R

$$\begin{aligned} \text{LSC} &= \bar{R}D_4 \\ \text{Línea central} &= \bar{R} \\ \text{LIC} &= \bar{R}D_3 \end{aligned}$$

Los valores de d_3 , D_3 y D_4 son funciones del tamaño de la muestra y están tabulados,

Tabla para calcular los parámetros de los diagramas de control de características variables de calidad

Tamaño de la muestra	Gráfico de R		
N	d_3	D_3	D_4
2	0.853	0	3.267
3	0.888	0	2.574
4	0.880	0	2.282
5	0.864	0	2.114
6	0.848	0	2.004
7	0.833	0.076	1.924
8	0.820	0.136	1.864
9	0.808	0.184	1.816
10	0.797	0.223	1.777

En el ejemplo de período base, tenemos el siguiente diagramas de R

$$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^{25} R_i}{25} = \frac{0,581}{25} = 0,023$$

$$\text{LIC} = \bar{R}D_3 = 0,023 (0) = 0$$

$$\text{LSC} = \bar{R}D_4 = 0,023 (2,115) = 0.049.$$

DIAGRAMAS BASADOS EN VALORES ESTÁNDARES

Cuando es posible especificar valores estándares para la media y la desviación estándar del proceso, m y s , pueden utilizarse tales valores con el fin de establecer los diagramas de control de $\bar{x}$ y R , sin el análisis de datos pasados. En este caso, los parámetros del gráfico de $\bar{x}$ son

$$\begin{aligned} \text{LSC} &= m + 3\frac{s}{\sqrt{n}} \\ \text{Línea central} &= m \\ \text{LIC} &= m - 3\frac{s}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Definiendo $A=3/\sqrt{n}$, estos parámetros se pueden escribir

$$\begin{aligned} \text{LSC} &= m + As \\ \text{Línea central} &= m \\ \text{LIC} &= m - As \end{aligned}$$

Para el gráfico de R , teniendo en cuenta que

$$d_2 s = m_R \qquad d_3 s = s_R$$

se tienen los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} \text{LSC} &= d_2 s + 3d_3 s \\ \text{Línea central} &= d_2 s \\ \text{LIC} &= d_2 s - 3d_3 s \end{aligned}$$

Definiendo las constantes

$$D_1 = d_2 - 3d_3, \qquad D_2 = d_2 + 3d_3,$$

los parámetros para el gráfico de R pueden escribirse

$$\begin{aligned} \text{LSC} &= D_2 s \\ \text{Línea central} &= d_2 s \\ \text{LIC} &= D_1 s \end{aligned}$$

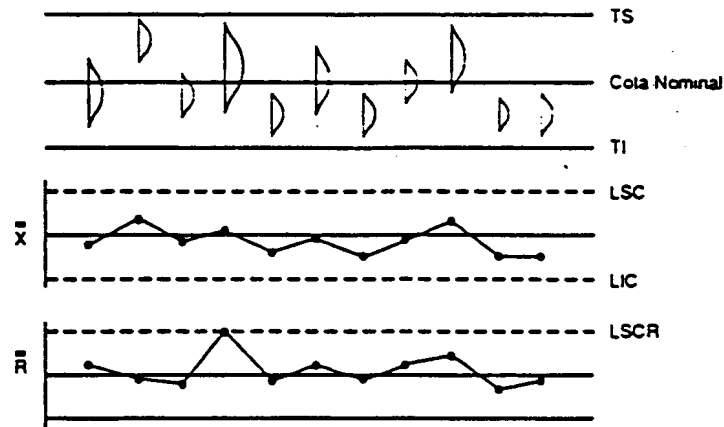
✓ Caso de que el proceso no sea estable:

- 1 - Iniciar un período base de al menos 25 muestras.
- 2 – Calcular $\bar{\bar{X}}$ y $\bar{R}$. Calcular los límites de control.
- 3 – Revisar el gráfico R. Si todas las observaciones caen dentro de los límites de control ir al paso 4. Si hay observaciones que están fuera del límite superior de control eliminar las muestras correspondientes del período base e ir al paso 2.
- 4 – Revisar el gráfico $\bar{X}$. Si todas las observaciones caen dentro de los límites de control ir al paso 5. Si hay observaciones fuera de los límites de control, eliminar la muestra correspondiente del período base. Si quedan 15 muestras o menos, prescindir del período base. En caso contrario ir al paso 2.
- 5 – Extender los límites de control al período de vigilancia.

Anomalías: Causas y efectos

1 – Fluctuaciones numerosas en recorridos y promedios.

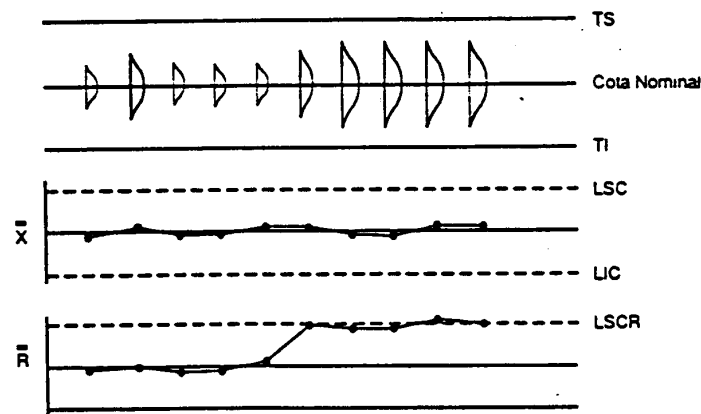
Son debidas a que no se ha podido centrar bien la máquina.



Hay que investigar las causas y proponer los remedios oportunos.

2.- Tendencia central constante y fluctuaciones en el recorrido.

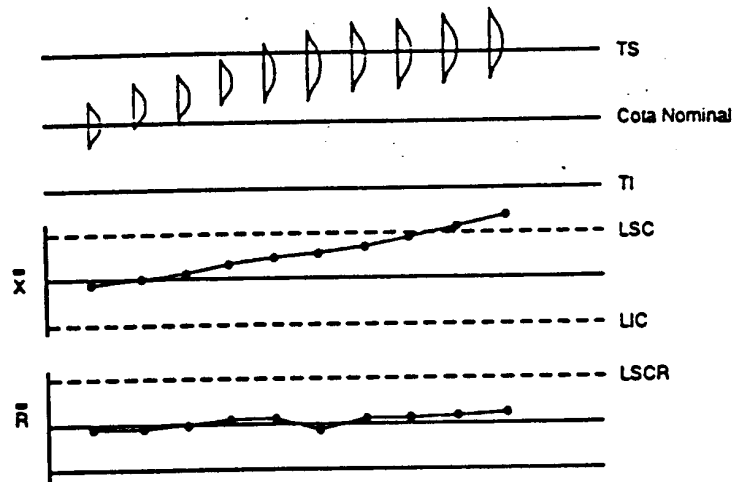
El sistema fue centrado por un operario hábil y lo han cambiado.



Se remedia entrenando al nuevo operario o cambiándolo

3 – Variación en el mismo sentido de la tendencia central

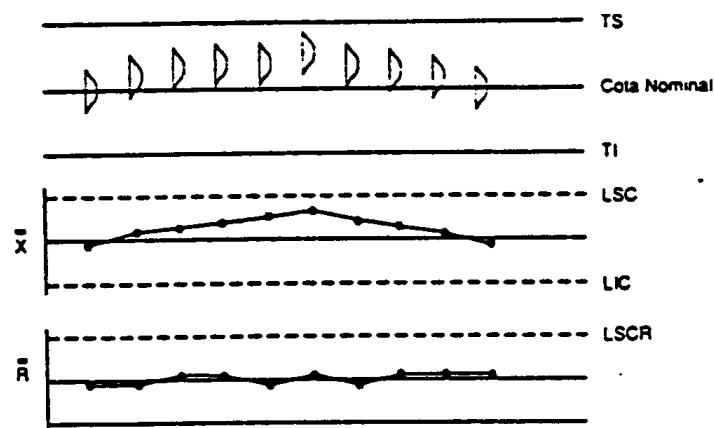
Se debe a un desgaste uniforme y continuado de la herramienta que realiza el proceso.



Se debe sustituir a tiempo la herramienta y recuperar la situación.

4 – Variación periódica de la tendencia central.

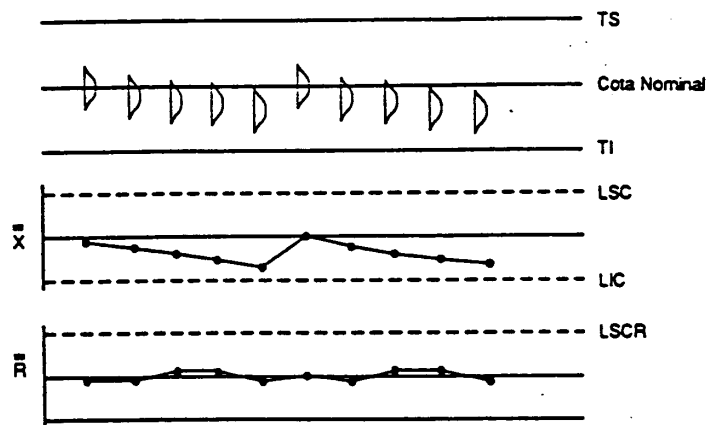
Situación típica en los procesos que predomina la labor manual.



Cuando el operario observa las desviaciones debe recuperarlas.

5 – Cambios irregulares en el gráfico de promedios.

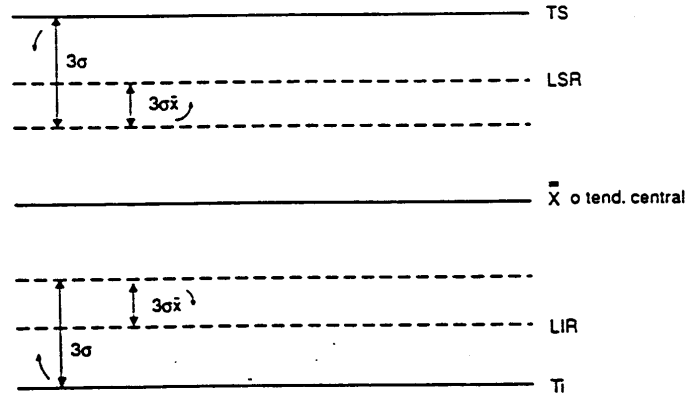
El proceso se desplaza en un sentido y el recorrido permanece constante.



Se le llama diente de sierra y es típico de desajustes de la máquina debido a dejadez del operario.

Límites naturales modificados (límites de rechazo)

Cuando los límites de control están muy cerca de la línea central respecto de los límites de especificación.



Según el esquema de la figura, los nuevos límites serán:

$$LSR = T_s - 3s + 3s_{\bar{x}} = T_s - 3 \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}}{d_2} \bar{R}$$

De la misma forma para el límite inferior

$$LIR = T_i + 3s - 3s_{\bar{x}} = T_i + 3 \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}}{d_2} \bar{R}$$

Caso de que $n = 5$

$$LSR = T_s - 0,072 \bar{R} \quad LIR = T_i + 0,072 \bar{R}$$

Límites Modificados

Es una variante de la anterior. Teniendo en cuenta que:

$$T = T_s - T_i = 6s \quad s = \frac{\bar{R}}{d_2} \quad \bar{R} = \frac{Td_2}{6}$$

Quedando los límites:

$$LSC_{Mo} = \bar{\bar{x}} + A_2 \bar{R} = \bar{\bar{x}} + A_2 \frac{Td_2}{6}$$

$$LSC_{Mo} = \bar{\bar{x}} - A_2 \bar{R} = \bar{\bar{x}} - A_2 \frac{Td_2}{6}$$