Part II

Series de tiempo y procesos estocásticos

Bibliografía

Bibliografía

- BROCKWELL, P.J. Y DAVIS, R.A. (2002). *Introduction to Time Series and Forecasting.* 2ª edición. Springer.
- GONZÁLEZ, M. Y DEL PUERTO, I.M. (2009). *Series Temporales.* Colección manuales uex-60.
- PEÑA, D. (2005). *Análisis de Series Temporales.* Alianza Editorial.
- SHUMWAY, R.H. Y STOFFER, D.S. (2006). *Time Series Analysis and Its Applications. With R Examples.* 2ª edición. Springer.

Introducción

El objetivo principal de este curso es la inferencia estadística en el contexto de las series de tiempo.

En concreto, dada una serie de tiempo se pretenden predecir:

- Sus observaciones futuras (Temas 3 y 4).
- Sus variabilidades futuras (Tema 5).

Existe un gran salto cualitativo entre la exploración (Tema 1) y la inferencia asociadas a una serie de tiempo.

- Exploración: Se describe la serie de tiempo, pero no se formulan conclusiones para instantes no observados.
- Inferencia: Se realizan predicciones de futuros valores de la serie de tiempo (valores en instantes no observados).

Introducción

Para poder hacer inferencia estadística, supondremos que la serie de tiempo, $x_1, \ldots, x_T$ (las observaciones fijas de que disponemos), ha sido generada por un modelo estocástico.

La conjunción de las propiedades del modelo estocástico y de la información dada por la serie de tiempo nos permitirá cumplir nuestro objetivo (predicción).

Las etapas a seguir serán:

1. Identificar el modelo estocástico.
2. Estimar el modelo estocástico.
3. Chequear el modelo estimado.
4. Predecir el comportamiento del modelo estocástico.

El concepto de proceso estocástico: Ejemplos

Un proceso estocástico es un conjunto de variables aleatorias $\{X_t\}_{t \in C}$ definidas sobre el mismo espacio de probabilidad.

Nos centraremos en el proceso estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, siendo $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros; esto es, nuestro proceso estocástico será

$$\ldots, X_{-2}, X_{-1}, X_0, X_1, X_2, \ldots$$

El subíndice t de cada variable aleatoria representa el instante de tiempo en que es observada.

Los procesos estocásticos forman el marco teórico en el que nos situaremos en lo que resta de curso.

El concepto de proceso estocástico: Ejemplos

Una observación del proceso estocástico será denotada por

$$\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots$$

y se conoce como una realización o trayectoria del mismo.

La serie de tiempo

$$x_1, x_2, \ldots, x_T$$

es por tanto una realización o trayectoria parcial de un proceso estocástico.

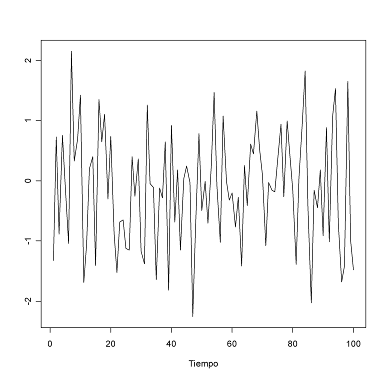
Ejemplo: Ruido blanco

Es una colección de v.a. incorreladas, con media 0 y varianza finita σ_a^2.

Se denotará por $\{a_t\}_t$.

Nota: Si el ruido blanco es gaussiano, entonces las v.a. que lo conforman son i.i.d.

Serie de tiempo generada por un proceso de ruido blanco gaussiano con $\sigma_a^2 = 1$



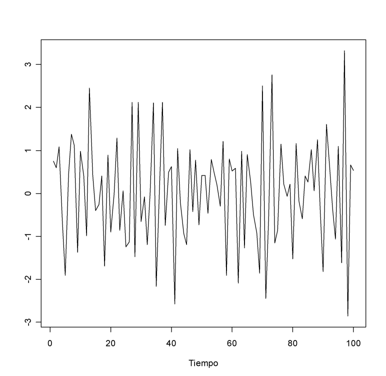
Ejemplo: MA(1)

$$X_t = c + a_t + \theta_1 a_{t-1},$$

donde $\{a_t\}_t$ es ruido blanco.

Nota: Existe correlación entre X_t y X_{t-1}, pues a ambas les afecta (linealmente) a_{t-1}. Sin embargo, no existe correlación entre X_t y X_{t-i}, siendo $|i| > 1$.

Serie de tiempo generada por un MA(1) ($c = 0, \theta_1 = -0.6$ y $\{a_t\}_t$ gaussiano con $\sigma_a^2 = 1$)



Series de tiempo y procesos estocásticos

Ejemplo: Paseo aleatorio

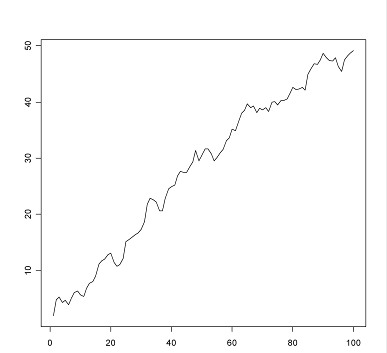
$$X_t = c + X_{t-1} + a_t,$$

donde $\{a_t\}_t$ es ruido blanco.

Nota 1: Existe correlación entre X_t y X_{t-i} para cualquier valor de i.

Nota 2: Si el paseo aleatorio comienza en $t = 0$ y se establece la condición inicial $x_0 = 0$, entonces la anterior expresión puede escribirse como $X_t = ct + \sum_{j=1}^{t} a_j$.

Serie de tiempo generada por un paseo aleatorio ($x_0 = 0$, $c = 0.5$ y $\{a_t\}_t$ gaussiano con $\sigma_a^2 = 1$)



El concepto de proceso estocástico: Ejemplos

En los ejemplos anteriores partimos del conocimiento de un proceso estocástico:

- Ruido blanco con $\sigma_a^2 = 1$,
- MA(1) con $c = 0$, $\theta_1 = -0.6$ y $\sigma_a^2 = 1$,
- Paseo aleatorio con $c = 0.5$ y $\sigma_a^2 = 1$,

y generamos una serie temporal a partir de él.

En la práctica, la situación es inversa. Partimos del conocimiento de una serie temporal y tratamos de "descubrir" el proceso estocástico que la ha generado. Entonces, basándonos en él, realizaremos predicciones.

El concepto de proceso estocástico: Ejemplos

"Descubrir" el proceso estocástico que ha generado a una serie de tiempo supone:

1. Identificarlo. Por ejemplo, indicar que estamos ante una serie generada por un MA(1): $X_t = c + a_t + \theta_1 a_{t-1}$.
2. Estimar sus parámetros (en el caso del MA(1), estimar los valores de c, θ_1 y σ_a^2).
3. Chequear el modelo estimado.

El concepto de proceso estocástico: Ejemplos

Matizaciones:

- La pretensión de "descubrir el proceso estocástico que ha generado a una serie de tiempo" debe ser considerada en su justa medida.
- Una serie de tiempo de datos reales habrá sido generada por la Naturaleza, por distintos factores económicos,... y por tanto no existe un proceso estocástico que la haya generado (la Naturaleza no se rige por una ecuación...).
- Lo que se pretende es construir un proceso estocástico sencillo que de manera razonable haya podido generar a la serie de tiempo en estudio.
- En general, hay más de un proceso estocástico susceptible de haber generado a la serie temporal.

El concepto de proceso estocástico: Ejemplos

Observaciones:

- La tarea de construir un proceso estocástico que razonablemente haya podido generar a la serie de tiempo en estudio es, en principio, una tarea ardua.
- Basta pensar que para ello únicamente disponemos de la información suministrada por la serie: $x_1, \ldots, x_T$; esto es, únicamente disponemos de un valor de cada variable aleatoria $X_1, \ldots, X_T$ del proceso.

A continuación, definiremos varias medidas características y propiedades de interés de un proceso estocástico. La posesión de algunas de dichas propiedades facilitará/posibilitará nuestra tarea.

Definiciones asociadas al proceso estocástico $\{X_t\}_t$

- Función de medias: $\mu_t = E(X_t)$
  Es una medida de posición de carácter central de X_t.
- Función de varianzas: $\sigma_t^2 = Var(X_t) = E\left((X_t - \mu_t)^2\right)$
  Es una medida del grado de variabilidad de X_t.
- Función de autocovarianzas:

$$\gamma(s,t) = Cov(X_s, X_t) = E\left((X_s - \mu_s)(X_t - \mu_t)\right)$$

Es una medida del grado de dependencia lineal existente entre X_s y X_t.

Definiciones asociadas al proceso estocástico $\{X_t\}_t$

- Función de autocorrelaciones simples (fas):

$$\rho(s,t) = \frac{\gamma(s,t)}{\sigma_s \sigma_t}$$

Es una medida del grado de dependencia lineal existente entre X_s y X_t. Toma valores en $[-1,1]$.

- Función de autocorrelaciones parciales (fap):

$$\alpha(s,t) = \frac{Cov\left(X_s - \widehat{X}_s^{(s,t)}, X_t - \widehat{X}_t^{(s,t)}\right)}{\sqrt{Var\left(X_s - \widehat{X}_s^{(s,t)}\right) Var\left(X_t - \widehat{X}_t^{(s,t)}\right)}},$$

donde $\widehat{X}_s^{(s,t)}$ denota al mejor predictor lineal de X_s construido a partir de las variables medidas en los instantes comprendidos entre s y t.

$\alpha(s,t)$ es una medida del grado de dependencia lineal existente entre X_s y X_t, una vez que se les ha sustraído el efecto lineal que sobre cada una de ellas ejercen las variables medidas en los instantes comprendidos entre s y t. Toma valores en $[-1,1]$.

Ejemplo: Autocorrelación simple y parcial

Supongamos que X_1, X_2 y X_3 miden la temperatura de ayer, hoy y mañana, respectivamente.

- $\rho(1,3)$ nos orienta acerca de la relación lineal existente entre la temperatura de ayer y la de mañana.
- Es posible que la temperatura de hoy ejerza influencia (lineal) sobre ambas temperaturas. $\alpha(1,3)$ nos orienta acerca de la relación lineal existente entre las temperaturas de ayer y mañana, una vez que se ha extraído de ambas la influencia de la temperatura de hoy.

Definiciones asociadas al proceso estocástico $\{X_t\}_t$

Las funciones que acabamos de definir son de interés porque sus valores nos informan sobre distintas características del proceso estocástico que estamos tratando de construir (aquél susceptible de haber generado a la serie de tiempo).

Sin embargo, nos enfrentamos a varias limitaciones:

- Dichas funciones dependen del proceso estocástico, que desconocemos. Por tanto, debemos estimarlas.
- Únicamente disponemos de una observación x_t de cada v.a. X_t $(t = 1, \ldots, T)$, lo que dificulta dicha estimación.

Por tanto, debemos imponer condiciones que nos permitan estimar dichas características a partir de la serie de tiempo.

Definiciones asociadas al proceso estocástico $\{X_t\}_t$

Proceso estacionario. Aquél para el que se verifican:

1. $\mu_t = \mu$, $\forall t$.
2. $\sigma_t^2 = \sigma^2$, $\forall t$.
3. $\gamma(t, t+k) = \gamma_k$, $\forall t, k$.

La estacionariedad dota al proceso estocástico de propiedades de estabilidad en la media, en la varianza y en las autocovarianzas. Estas propiedades nos permitirán estimar distintas características del proceso a partir de la serie de tiempo $x_1, \ldots, x_T$.

A partir de ahora, ρ_k y α_k denotarán a las autocorrelaciones simple y parcial, respectivamente, existentes entre dos variables de un proceso estacionario separadas k instantes de tiempo.

Estimaciones asociadas a la serie $x_1, \ldots, x_T$

- Media muestral: $\overline{x} = \dfrac{\sum_{t=1}^{T} x_t}{T}$
- Función de autocovarianzas muestrales:
$$\widehat{\gamma}_k = \frac{\sum_{t=1}^{T-k} (x_t - \overline{x})(x_{t+k} - \overline{x})}{T}$$
con $\widehat{\gamma}_{-k} = \widehat{\gamma}_k$ para $k = 0, 1, \ldots, T-1$.
- Función de autocorrelaciones simples muestrales:
$$\widehat{\rho}_k = \frac{\widehat{\gamma}_k}{\widehat{\gamma}_0}$$
- Función de autocorrelaciones parciales muestrales: $\widehat{\alpha}_k = \widehat{\alpha}_{kk}$, donde $\widehat{\alpha}_{kk}$ es el estimador mínimo cuadrático de α_{kk} en la regresión
$$x_t = \alpha_{k0} + \alpha_{k1} x_{t-1} + \cdots + \alpha_{kk} x_{t-k} + error.$$

Ejemplo: Ruido blanco

$\{a_t\}_t$ v.a. incorreladas, con media 0 y varianza finita σ_a^2.

Se tiene que:

1. $\mu_t = 0, \ \forall t$.
2. $\sigma_t^2 = \sigma_a^2, \ \forall t$.
3. $\gamma(s,t) = E(a_s a_t) = \begin{cases} \sigma_a^2, & \text{si } s = t \\ 0, & \text{si } s \neq t \end{cases}$

Conclusión: El ruido blanco es un proceso estacionario en el que

- $\mu = 0$.
- $\sigma^2 = \sigma_a^2$.
- $\gamma_k = \begin{cases} \sigma_a^2, & \text{si } k = 0 \\ 0, & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$

Series de tiempo y procesos estocásticos

Ejemplo: Paseo aleatorio con $x_0 = 0$ y comienzo en $t = 0$

$X_t = ct + \sum_{j=1}^{t} a_j$, donde $\{a_t\}_t$ es ruido blanco.

Se tiene que:

1. $\mu_t = ct, \ t = 1, 2, \ldots$
2. $\sigma_t^2 = \sigma_a^2 t, \ t = 1, 2, \ldots$
3. $\gamma(s,t) = E\left(\sum_{i=1}^{s} a_i \sum_{j=1}^{t} a_j\right) = \min\{s,t\}\sigma_a^2$, $s, t = 1, 2, \ldots$

Conclusión: El paseo aleatorio no es un proceso estacionario. Aunque para el caso particular $c = 0$ es estable en la media, nunca lo es en la varianza (su varianza es explosiva, esto es, tiende al infinito con t) y tampoco en las autocovarianzas.

Definiciones asociadas al proceso estocástico $\{X_t\}_t$

Sea $\{a_t\}_t$ un proceso de ruido blanco.

Proceso lineal: Aquél que admite una representación del tipo

$$X_t = \cdots + \psi_{-1} a_{t+1} + c + \psi_0 a_t + \psi_1 a_{t-1} + \cdots$$

$$\text{con } \sum_{i=-\infty}^{\infty} |\psi_i| < \infty.$$

Nota: Los procesos lineales son estacionarios, siendo su función de autocovarianzas:

$$\gamma_k = \sigma_a^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i \psi_{i+k}.$$

Definiciones asociadas al proceso estocástico $\{X_t\}_t$

Proceso causal (o MA(∞)): Aquél que admite una representación del tipo

$$X_t = c + \psi_0 a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \cdots$$

$$\text{con } \sum_{i=0}^{\infty} |\psi_i| < \infty.$$

Proceso invertible (o AR(∞)): Aquél que admite una representación del tipo

$$X_t = c + a_t + \pi_1 X_{t-1} + \pi_2 X_{t-2} + \cdots$$

$$\text{con } \sum_{i=1}^{\infty} |\pi_i| < \infty.$$

La descomposición de Wold

Descomposición de Wold: Si el proceso estocástico $\{X_t\}_t$ es estacionario y no contiene componentes deterministas, entonces admite una representación del tipo

$$X_t = c + \psi_0 a_t + \psi_1 a_{t-1} + \cdots$$

$$\text{con } \psi_0 = 1 \text{ y } \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 < \infty.$$

Nota: El resultado anterior garantiza que cualquier proceso estacionario o bien es lineal o bien puede ser transformado para que lo sea (sin más que sustraerle la componente determinista). Tenemos por tanto que la clase de los procesos lineales forma un marco general para el estudio de los procesos estacionarios.

Recapitulación

A lo largo de este tema:

- Se ha establecido el marco teórico en el que nos situaremos a lo largo del presente curso: los procesos estocásticos.
- Se ha definido un proceso estocástico que será fundamental en nuestros estudios: el ruido blanco.
- Se han definido e interpretado distintas funciones asociadas a un proceso estocástico: fas, fap,...
- Se ha definido el concepto de proceso estacionario.
- Se han propuesto estimadores de distintas funciones asociadas a un proceso estocástico: fas y fap muestrales,...
- Se han definido propiedades de interés de un proceso estocástico: linealidad, causalidad e invertibilidad.
- Se ha enunciado e interpretado la descomposición de Wold