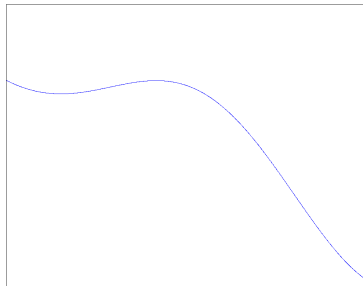
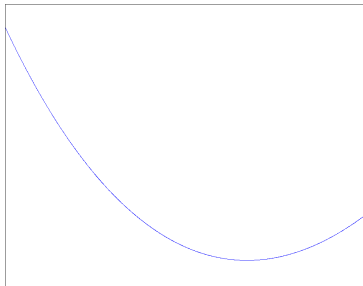


Optimización Global (III)

Emilio Carrizosa

Dpto. de Estadística e Investigación Operativa
Universidad de Sevilla

Diciembre de 2010



- Optimización global.
- Funciones dc: Propiedades básicas y su optimización.
-

Tuy, 1998

Actually most functions encountered in practice are dc

$f : S \rightarrow \mathbb{R}$: **dc** (diferencia de convexas) en el convexo S si $f + h$ es convexa en $S \subset \mathbb{R}^n$ para alguna $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ convexa en S .

$f : S \rightarrow \mathbb{R}$: **dc** (diferencia de convexas) en el convexo S si existen $g, h : S \rightarrow \mathbb{R}$, ambas convexas en S y $f = g - h$.

Tuy, 1998

Actually most functions encountered in practice are dc

$f : S \rightarrow \mathbb{R} : \text{dc}$ (diferencia de convexas) en el convexo S si $f + h$ es convexa en $S \subset \mathbb{R}^n$ para alguna $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ convexa en S .

$f : S \rightarrow \mathbb{R} : \text{dc}$ (diferencia de convexas) en el convexo S si existen $g, h : S \rightarrow \mathbb{R}$, ambas convexas en S y $f = g - h$.

Tuy, 1998

Actually most functions encountered in practice are dc

$f : S \rightarrow \mathbb{R} : \text{dc}$ (diferencia de convexas) en el convexo S si $f + h$ es convexa en $S \subset \mathbb{R}^n$ para alguna $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ convexa en S .

$f : S \rightarrow \mathbb{R} : \text{dc}$ (diferencia de convexas) en el convexo S si existen $g, h : S \rightarrow \mathbb{R}$, ambas convexas en S y $f = g - h$.

Descomposición dc

$$f = g - h$$

Si $f = (f + h) - h$ es una descomposición dc de la dc f , entonces cualquier convexa k da otra descomposición dc:

$$f = (f + h + k) - (h + k).$$

Descomposición dc

$$f = g - h$$

Si $f = (f + h) - h$ es una descomposición dc de la dc f , entonces cualquier convexa k da otra descomposición dc:

$$f = (f + h + k) - (h + k).$$



P. Hartman, *On functions representable as a difference of convex functions*, Pacific J. Math. **9** (1959), 707–713.



J. B. Hiriart-Urruty, *Generalized Differentiability, Duality, and Optimization for Problems Dealing with Differences of Convex Functions*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 256 (J. Ponstein, ed.), Springer Verlag, Berlin, 1986.



R. Horst y N. V. Thoai, *DC Programming: Overview*, J. Optim. Theory Appl. **103** (1999), 1–43.

Referencias (II)



R. Horst y H. Tuy, *Global Optimization. Deterministic Approaches*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.



H. Tuy, *D.C. Optimization: Theory, Methods and Algorithms*, Handbook of Global Optimization (R. Horst and P. M. Pardalos, eds.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.



H. Tuy, *Convex Analysis and Global Optimization*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.

Funciones dc. Propiedades

Si $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$, entonces f es dc en cualquier compacto convexo S .

Esquema de prueba

Escribe $f(x)$ como $(f(x) + \tau\|x\|^2) - \tau\|x\|^2$ para τ suficientemente grande.

Sea S : cerrado o abierto. Una función localmente dc en S es dc en S .

Si $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$, entonces f es dc en cualquier compacto convexo S .

Esquema de prueba

Escribe $f(x)$ como $(f(x) + \tau\|x\|^2) - \tau\|x\|^2$ para τ suficientemente grande.

Sea S : cerrado o abierto. Una función localmente dc en S es dc en S .

Pero esto no nos dice cómo obtener una descomposición dc!!!

Si $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$, entonces f es dc en cualquier compacto convexo S .

Esquema de prueba

Escribe $f(x)$ como $(f(x) + \tau\|x\|^2) - \tau\|x\|^2$ para τ suficientemente grande.

Sea S : cerrado o abierto. Una función localmente dc en S es dc en S .

Pero esto no nos dice cómo obtener una descomposición dc!!!

Si $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$, entonces f es dc en cualquier compacto convexo S .

Esquema de prueba

Escribe $f(x)$ como $(f(x) + \tau\|x\|^2) - \tau\|x\|^2$ para τ suficientemente grande.

Sea S : cerrado o abierto. Una función localmente dc en S es dc en S .

Pero esto no nos dice cómo obtener una descomposición dc!!!

Sean $S_1 \subset \mathbb{R}^n$, $S_2 \subset \mathbb{R}^m$ convexos, con S_1 : abierto o cerrado y S_2 : abierto. Si $F_1 : S_1 \longrightarrow S_2$ y $F_2 : S_2 \longrightarrow \mathbb{R}^k$ son dc componente a componente, entonces $F_2 \circ F_1 : S_1 \longrightarrow \mathbb{R}^k$ también es dc componente a componente.

Para S_1, S_2 como antes, si F_1 es dc y F_2 es $\mathcal{C}^2$, entonces $F_2 \circ F_1$ es dc. En particular,

- el producto de funciones dc en un convexo (abierto o cerrado) es dc
- si f es positiva y dc en un convexo abierto o cerrado, entonces $1/f$ es dc.

Sean $S_1 \subset \mathbb{R}^n$, $S_2 \subset \mathbb{R}^m$ convexos, con S_1 : abierto o cerrado y S_2 : abierto. Si $F_1 : S_1 \longrightarrow S_2$ y $F_2 : S_2 \longrightarrow \mathbb{R}^k$ son dc componente a componente, entonces $F_2 \circ F_1 : S_1 \longrightarrow \mathbb{R}^k$ también es dc componente a componente.

Para S_1, S_2 como antes, si F_1 es dc y F_2 es $\mathcal{C}^2$, entonces $F_2 \circ F_1$ es dc. En particular,

- el producto de funciones dc en un convexo (abierto o cerrado) es dc
- si f es positiva y dc en un convexo abierto o cerrado, entonces $1/f$ es dc.

Obtención de descomposiciones dc

Tuy, 1998

The problem of effective dc representation is far from trivial

Horst-Tuy, 1990

... however, in many special cases of interest, the exact dc decomposition is already given or easily found

Tuy, 1998

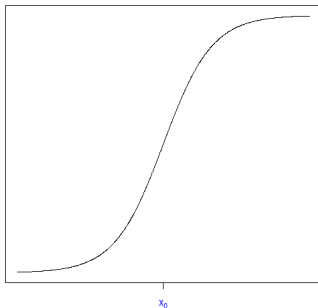
The problem of effective dc representation is far from trivial

Horst-Tuy, 1990

... however, in many special cases of interest, the exact dc decomposition is already given or easily found

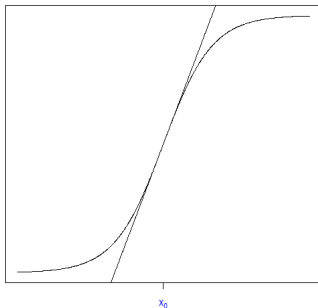
Obtención de descomposiciones dc

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, suave, convexa en $(-\infty, x_0)$, cóncava en $(x_0, +\infty)$



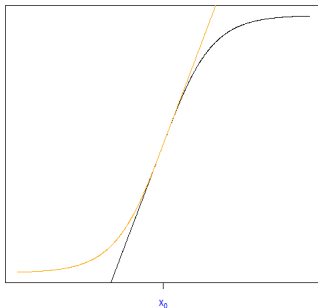
Obtención de descomposiciones dc

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, suave, convexa en $(-\infty, x_0)$, cóncava en $(x_0, +\infty)$



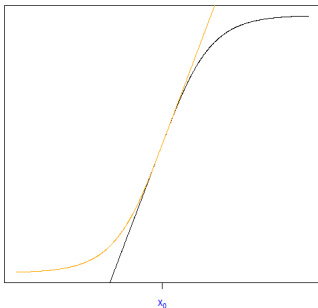
Obtención de descomposiciones dc

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, suave, convexa en $(-\infty, x_0)$, cóncava en $(x_0, +\infty)$



Obtención de descomposiciones dc

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, suave, convexa en $(-\infty, x_0)$, cóncava en $(x_0, +\infty)$



$$f = g - h$$

$$g(x) = \dots$$

$$\begin{cases} f(x), & \text{si } x \leq x_0 \\ f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), & \text{si } x > x_0 \end{cases}$$

$$h(x) = g(x) - f(x) = \dots$$

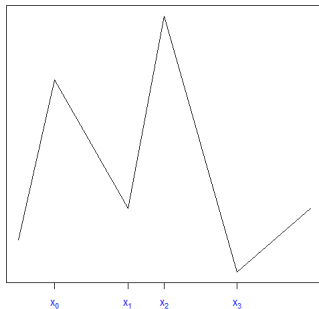
$$\begin{cases} 0, & \text{si } x \leq x_0 \\ f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) - f(x), & \text{si } x > x_0 \end{cases}$$

Obtención de descomposiciones dc

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, lineal a trozos y continua

$f(x) = \dots$

$$\begin{cases} m_0x + n_0, & \text{si } x \leq x_0 \\ m_1x + n_1, & \text{si } x_0 \leq x \leq x_1 \\ \vdots & \vdots \\ m_rx + n_r, & \text{si } x_{r-1} \leq x_r \\ m_{r+1}x + n_{r+1}, & \text{si } x_r \leq x \end{cases}$$



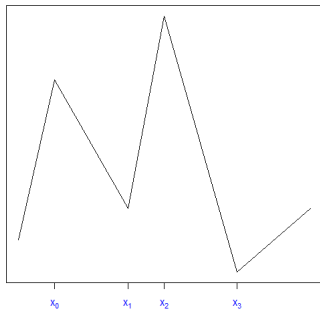
Obtención de descomposiciones dc

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$g(x) = \dots$$

$$\begin{cases} a_0x + b_0, & \text{si } x \leq x_0 \\ a_1x + b_1, & \text{si } x_0 \leq x \leq x_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_rx + b_r, & \text{si } x_{r-1} \leq x \\ a_{r+1}x + b_{r+1}, & \text{si } x_r \leq x \end{cases}$$

$$h(x) = g(x) - f(x)$$



Obtención de descomposiciones dc

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, lineal a trozos y continua

$g(x) = \dots$

$$\begin{cases} a_0x + b_0, & \text{si } x \leq x_0 \\ a_1x + b_1, & \text{si } x_0 \leq x \leq x_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_rx + b_r, & \text{si } x_{r-1} \leq x_r \\ a_{r+1}x + b_{r+1}, & \text{si } x_r \leq x \end{cases}$$

$h(x) = g(x) - f(x)$

Convexidad de g, h

$$\begin{aligned} a_i &\leq a_{i+1} \\ a_i - m_i &\leq a_{i+1} - m_{i+1} \\ a_ix_i + b_i &= a_{i+1}x_i + b_{i+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_i &= a_{i-1} + \max\{0, m_i - m_{i-1}\} \\ b_0 &= 0 \\ b_i &= b_{i-1} + (a_{i-1} - a_i)x_{i-1} \end{aligned}$$

Obtención de descomposiciones dc

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, lineal a trozos y continua

$g(x) = \dots$

$$\begin{cases} a_0x + b_0, & \text{si } x \leq x_0 \\ a_1x + b_1, & \text{si } x_0 \leq x \leq x_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_rx + b_r, & \text{si } x_{r-1} \leq x_r \\ a_{r+1}x + b_{r+1}, & \text{si } x_r \leq x \end{cases}$$

$h(x) = g(x) - f(x)$

Convexidad de g, h

$$\begin{aligned} a_i &\leq a_{i+1} \\ a_i - m_i &\leq a_{i+1} - m_{i+1} \\ a_ix_i + b_i &= a_{i+1}x_i + b_{i+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_i &= a_{i-1} + \max\{0, m_i - m_{i-1}\} \\ b_0 &= 0 \\ b_i &= b_{i-1} + (a_{i-1} - a_i)x_{i-1} \end{aligned}$$

Obtención de descomposiciones dc

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, lineal a trozos y continua

$g(x) = \dots$

$$\begin{cases} a_0x + b_0, & \text{si } x \leq x_0 \\ a_1x + b_1, & \text{si } x_0 \leq x \leq x_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_rx + b_r, & \text{si } x_{r-1} \leq x_r \\ a_{r+1}x + b_{r+1}, & \text{si } x_r \leq x \end{cases}$$

$h(x) = g(x) - f(x)$

Convexidad de g, h

$$\begin{aligned} a_i &\leq a_{i+1} \\ a_i - m_i &\leq a_{i+1} - m_{i+1} \\ a_ix_i + b_i &= a_{i+1}x_i + b_{i+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_i &= a_{i-1} + \max\{0, m_i - m_{i-1}\} \\ b_0 &= 0 \\ b_i &= b_{i-1} + (a_{i-1} - a_i)x_{i-1} \end{aligned}$$

Obtención de descomposiciones dc

Para $f \in \mathcal{C}^2(S)$ y S : compacto,

Fácil!!!

Tomar:

$\lambda^*(x)$: menor autovalor de $H_f(x)$, el hessiano de f en x

$$\tau \geq \max\{0, -\frac{1}{2} \min_{x \in S} \lambda^*(x)\}$$

$$f(x) = (f(x) + \tau \|x\|^2) - \tau \|x\|^2$$

Obtención de descomposiciones dc

Para $f \in \mathcal{C}^2(S)$ y S : compacto,

Fácil!!!

Tomar:

$\lambda^*(x)$: menor autovalor de $H_f(x)$, el hessiano de f en x

$$\tau \geq \max\left\{0, -\frac{1}{2} \min_{x \in S} \lambda^*(x)\right\}$$

$$f(x) = (f(x) + \tau \|x\|^2) - \tau \|x\|^2$$

Para $f \in \mathcal{C}^2(S)$ y S : compacto,

es así de fácil??

- $\min_{x \in S} \lambda^*(x)$: hay que calcularlo (o acotarlo)
- α -BB: I.P. Androulakis, C.D. Maranas, y C.A. Floudas. "A Global Optimization Method for Generalized Constrained Nonconvex Problems". Journal of Global Optimization 7 (1995) 337–363.

Para $f \in \mathcal{C}^2(S)$ y S : compacto,

es así de fácil??

- $\min_{x \in S} \lambda^*(x)$: hay que calcularlo (o acotarlo)
- α -BB: I.P. Androulakis, C.D. Maranas, y C.A. Floudas. "A Global Optimization Method for Generalized Constrained Nonconvex Problems". Journal of Global Optimization 7 (1995) 337–363.

Álgebra

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= g_1 - h_1 \\ f_2 &= g_2 - h_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

- $-f_1 = h_1 - g_1$
- $(f_1 + f_2) = (g_1 + g_2) - (h_1 + h_2)$
- $\max\{f_1, f_2\} = \max\{g_1 - h_1, g_2 - h_2\} = \max\{g_1 + h_2, g_2 + h_1\} - (h_1 + h_2)$
- $\min\{f_1, f_2\} = \min\{g_1 - h_1, g_2 - h_2\} = g_1 + g_2 - \max\{g_2 + h_1, g_1 + h_2\}$
- $|f_1| = \max\{f_1, -f_1\} = 2 \max\{g_1, h_1\} - (g_1 + h_1)$

Álgebra

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= g_1 - h_1 \\ f_2 &= g_2 - h_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

- $-f_1 = h_1 - g_1$
- $(f_1 + f_2) = (g_1 + g_2) - (h_1 + h_2)$
- $\max\{f_1, f_2\} = \max\{g_1 - h_1, g_2 - h_2\} = \max\{g_1 + h_2, g_2 + h_1\} - (h_1 + h_2)$
- $\min\{f_1, f_2\} = \min\{g_1 - h_1, g_2 - h_2\} = g_1 + g_2 - \max\{g_2 + h_1, g_1 + h_2\}$
- $|f_1| = \max\{f_1, -f_1\} = 2 \max\{g_1, h_1\} - (g_1 + h_1)$

Álgebra

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= g_1 - h_1 \\ f_2 &= g_2 - h_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

- $-f_1 = h_1 - g_1$
- $(f_1 + f_2) = (g_1 + g_2) - (h_1 + h_2)$
- $\max\{f_1, f_2\} = \max\{g_1 - h_1, g_2 - h_2\} = \max\{g_1 + h_2, g_2 + h_1\} - (h_1 + h_2)$
- $\min\{f_1, f_2\} = \min\{g_1 - h_1, g_2 - h_2\} = g_1 + g_2 - \max\{g_2 + h_1, g_1 + h_2\}$
- $|f_1| = \max\{f_1, -f_1\} = 2 \max\{g_1, h_1\} - (g_1 + h_1)$

Álgebra

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= g_1 - h_1 \\ f_2 &= g_2 - h_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

- $-f_1 = h_1 - g_1$
- $(f_1 + f_2) = (g_1 + g_2) - (h_1 + h_2)$
- $\max\{f_1, f_2\} = \max\{g_1 - h_1, g_2 - h_2\} = \max\{g_1 + h_2, g_2 + h_1\} - (h_1 + h_2)$
- $\min\{f_1, f_2\} = \min\{g_1 - h_1, g_2 - h_2\} = g_1 + g_2 - \max\{g_2 + h_1, g_1 + h_2\}$
- $|f_1| = \max\{f_1, -f_1\} = 2 \max\{g_1, h_1\} - (g_1 + h_1)$

Álgebra

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= g_1 - h_1 \\ f_2 &= g_2 - h_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

- $-f_1 = h_1 - g_1$
- $(f_1 + f_2) = (g_1 + g_2) - (h_1 + h_2)$
- $\max\{f_1, f_2\} = \max\{g_1 - h_1, g_2 - h_2\} = \max\{g_1 + h_2, g_2 + h_1\} - (h_1 + h_2)$
- $\min\{f_1, f_2\} = \min\{g_1 - h_1, g_2 - h_2\} = g_1 + g_2 - \max\{g_2 + h_1, g_1 + h_2\}$
- $|f_1| = \max\{f_1, -f_1\} = 2 \max\{g_1, h_1\} - (g_1 + h_1)$

Álgebra

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= g_1 - h_1 \\ f_2 &= g_2 - h_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

- $-f_1 = h_1 - g_1$
- $(f_1 + f_2) = (g_1 + g_2) - (h_1 + h_2)$
- $\max\{f_1, f_2\} = \max\{g_1 - h_1, g_2 - h_2\} = \max\{g_1 + h_2, g_2 + h_1\} - (h_1 + h_2)$
- $\min\{f_1, f_2\} = \min\{g_1 - h_1, g_2 - h_2\} = g_1 + g_2 - \max\{g_2 + h_1, g_1 + h_2\}$
- $|f_1| = \max\{f_1, -f_1\} = 2 \max\{g_1, h_1\} - (g_1 + h_1)$

Composición

Sea S : compacto, sea $f : S \rightarrow [0, a]$ dc en S , con descomposición $f = g - h$. Si $q : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa no decreciente con $q'_-(a) < \infty$, entonces $q \circ f$ es dc con descomposición dc

$$q(f(x)) = (q(f(x)) + Kh(x)) - Kh(x)$$

para cualquier $K \geq q'_-(a)$.

Por qué?

- Define $\bar{q}(s, t) := q(s - t) + Kt$. $\bar{q}$: convexa y no decreciente componente a componente.
- $g \circ f = \bar{q}(g, h) + Kh - Kh$

Sea S : compacto, sea $f : S \longrightarrow [0, a]$ dc en S , con descomposición $f = g - h$. Si $q : [0, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ es convexa no decreciente con $q'_-(a) < \infty$, entonces $q \circ f$ es dc con descomposición dc

$$q(f(x)) = (q(f(x)) + Kh(x)) - Kh(x)$$

para cualquier $K \geq q'_-(a)$.

Por qué?

- Define $\bar{q}(s, t) := q(s - t) + Kt$. $\bar{q}$: convexa y no decreciente componente a componente.
- $g \circ f = \bar{q}(g, h) + Kh - Kh$

Sea $S : \text{compacto}$, sea $f : S \longrightarrow [0, a]$ dc en S , con descomposición $f = g - h$. Si $q : [0, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ es convexa no decreciente con $q'_-(a) < \infty$, entonces $q \circ f$ es dc con descomposición dc

$$q(f(x)) = (q(f(x)) + Kh(x)) - Kh(x)$$

para cualquier $K \geq q'_-(a)$.

Por qué?

- Define $\bar{q}(s, t) := q(s - t) + Kt$. $\bar{q}$: convexa y no decreciente componente a componente.
- $g \circ f = \bar{q}(g, h) + Kh - Kh$

Sean S : compacto convexo, $f : S \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dc en S , con descomposición dc $f = g - h$. Si $q : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ es convexa no creciente con $q'_+(0) > -\infty$, entonces $q \circ f$ es dc con descomposición dc

$$q(f(x)) = (q(f(x)) + K(g(x) + h(x))) - K(g(x) + h(x))$$

para cualquier $K \geq q'_+(0)$.

Sean S : compacto convexo, $f : S \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dc en S , con descomposición dc $f = g - h$. Si $q : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ es **cónica no decreciente** con $q'_+(0) < \infty$, entonces $q \circ f$ es dc con descomposición dc

$$q(f(x)) = K(g(x) + h(x)) - (K(g(x) + h(x)) - q(f(x)))$$

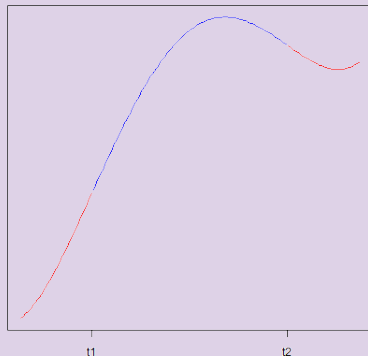
para cualquier $K \geq q'_+(0)$.

$$\min_{x \in S} f(x)$$

- f : dc, con descomposición $f = g - h$ conocida
- S : politopo en $\mathbb{R}^n$

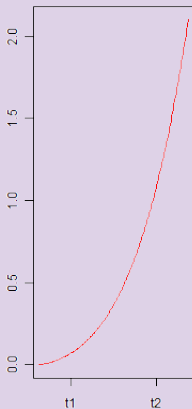
Qué hacemos con una descomposición dc?

$$h(t) = t^4 - 2t^3 + t^2 + 0.1t, \quad t \in [0, 1]$$



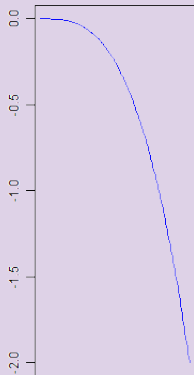
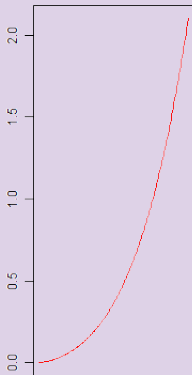
Qué hacemos con una descomposición dc?

$$h(t) = (t^4 - t^2 + 0.1t) + (-2t^3), t \in [0, 1]$$



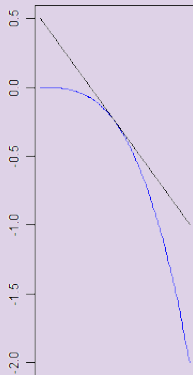
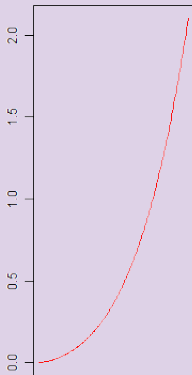
Qué hacemos con una descomposición dc?

$$\min_{\mathbf{y} \in \mathbf{R}} h(\mathbf{y})$$



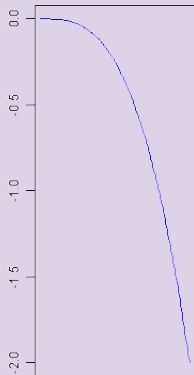
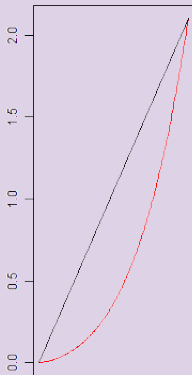
Qué hacemos con una descomposición dc?

$\min_{\mathbf{y} \in \mathbf{R}} h(\mathbf{y})$. Métodos DCA, CCCP, MM



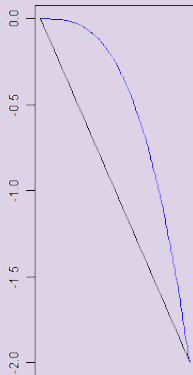
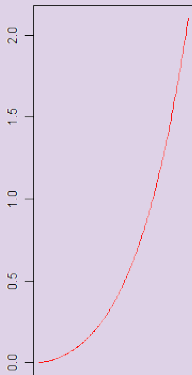
Qué hacemos con una descomposición dc?

$$\min_{\mathbf{y} \in \mathbf{R}} h(\mathbf{y}). \quad ???$$



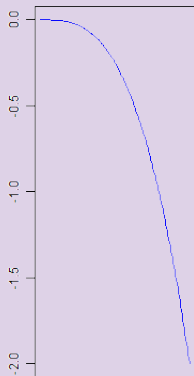
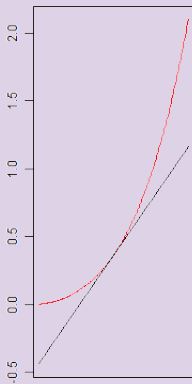
Qué hacemos con una descomposición dc?

$$\min_{\mathbf{y} \in \mathbf{R}} h(\mathbf{y}). \quad \alpha\text{BB}$$

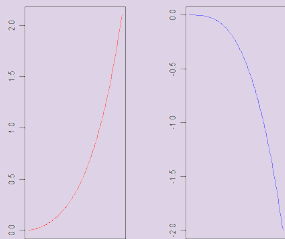


Qué hacemos con una descomposición dc?

$$\min_{\mathbf{y} \in \mathbf{R}} h(\mathbf{y})$$



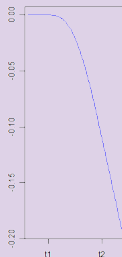
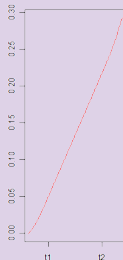
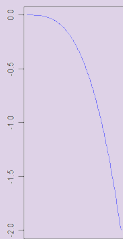
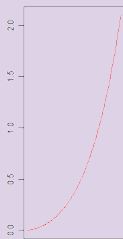
No unicidad de la descomposición dc



Descomposiciones "óptimas"

Ferrer, Martínez-Legaz (2009); Bomze, Locatelli (2004); Blanquero, Carrizosa, Conde (2001), ...

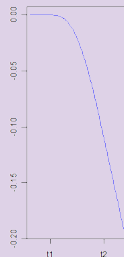
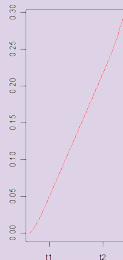
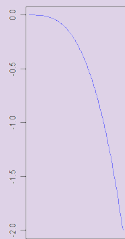
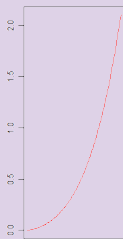
No unicidad de la descomposición dc



Descomposiciones "óptimas"

Ferrer, Martínez-Legaz (2009); Bomze, Locatelli (2004); Blanquero, Carrizosa, Conde (2001), ...

No unicidad de la descomposición dc



Descomposiciones "óptimas"

Ferrer, Martínez-Legaz (2009); Bomze, Locatelli (2004); Blanquero, Carrizosa, Conde (2001), ...

$$\min_{x \in S} f(x)$$

- Supongamos f : cóncava.
- Una solución de f : en algún elemento de $\text{ext}(S)$.
- Problema duro en general. Fácil por ejemplo, si S : simplex o de dimensión baja.

$$\min_{x \in S} f(x)$$

- Supongamos f : cóncava.
- Una solución de f : en algún elemento de $\text{ext}(S)$.
- Problema duro en general. Fácil por ejemplo, si S : simplex o de dimensión baja.

$$\min_{x \in S} f(x)$$

- Supongamos f : cóncava.
- Una solución de f : en algún elemento de $\text{ext}(S)$.
- Problema duro en general. Fácil por ejemplo, si S : simplex o de dimensión baja.

Construcción de cotas inferiores cóncavas

- $f = g - h$
- Toma $x^* \in S$, and toma $p \in \partial g(x^*)$
- Por definición de subgradiente, $g(x) \geq g(x^*) + p^\top(x - x^*) \forall x$
- $f(x) \geq g(x^*) + p^\top(x - x^*) - h(x)$, cóncava

Construcción de cotas inferiores cóncavas

- $f = g - h$
- Toma $x^* \in S$, and toma $p \in \partial g(x^*)$
- Por definición de subgradiente, $g(x) \geq g(x^*) + p^\top (x - x^*) \forall x$
- $f(x) \geq g(x^*) + p^\top (x - x^*) - h(x)$, cóncava

Construcción de cotas inferiores cóncavas

- $f = g - h$
- Toma $x^* \in S$, and toma $p \in \partial g(x^*)$
- Por definición de subgradiente, $g(x) \geq g(x^*) + p^\top(x - x^*) \forall x$
- $f(x) \geq g(x^*) + p^\top(x - x^*) - h(x)$, cóncava

Construcción de cotas inferiores cóncavas

- $f = g - h$
- Toma $x^* \in S$, and toma $p \in \partial g(x^*)$
- Por definición de subgradiente, $g(x) \geq g(x^*) + p^\top (x - x^*) \forall x$
- $f(x) \geq g(x^*) + p^\top (x - x^*) - h(x)$, cóncava

Branch and bound en un simplex S

Inicio

Tomar $x_1 \in S$, hacer $\bar{f} = f(x_1)$, $x_* = x_1$

Construir la lista $\mathcal{L}$ de símplexes por analizar, con $\mathcal{L} = \{S\}$

Calcular $\underline{f}(S)$, cota inferior de f en S .

Iteración $k = 1, 2, \dots$

Eliminar de $\mathcal{L}$ todo símplex S^* con $\underline{f}(S^*) \geq \bar{f} - \varepsilon$.

Extraer de $\mathcal{L}$ el símplex S^* con menor valor $\underline{f}(S^*)$.

Evaluar f en algún $x \in S^*$ y actualizar, si procede, $\bar{f}$.

Ramificar S^* , y añadir a $\mathcal{L}$ todos los símplexes y la cota inferior de los mismos.

Si $\bar{f} - \underline{f} \leq \varepsilon$ entonces PARAR.

Ir a la iteración $k + 1$.