

Proyecto de Ingeniería Financiera.

Serie Temporal Financiera: Log>Returns de Gas Natural

García Veiga, Mariam. Leyenda Rodríguez, María

20 de enero de 2011

Introducción

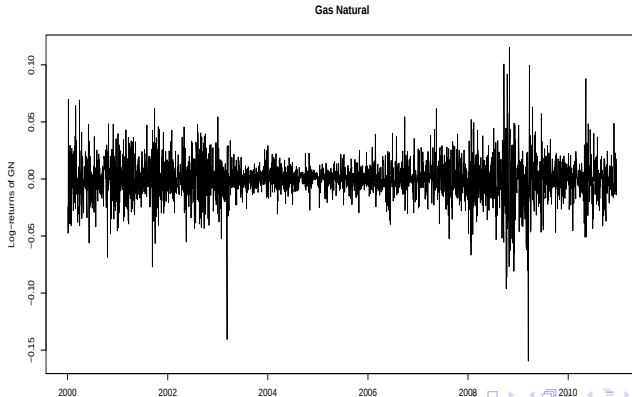
Análisis descriptivo

Estudio de la estructura principal de los modelos de volatilidad

Estimación de modelos condicionalmente heterocedásticos

Conclusiones

- En este documento, se analizará la serie temporal que contiene los log-returns correspondientes a los datos de cierre del precio de las acciones de Gas Natural desde el 3 de Enero de 2000 hasta el 20 de Diciembre de 2010.



- ▶ La serie es estacionaria en media y no tiene unidad de medida puesto que reflejan las tasas de cambio del precio en k-períodos.

- ▶ La serie es estacionaria en media y no tiene unidad de medida puesto que reflejan las tasas de cambio del precio en k-períodos.
- ▶ Un período de cierta estabilidad en las tasas de cambio de los precios comprendido entre el primer trimestre de 2003 hasta mediados-finales de 2007; período en el que la media es más cercana a cero.

- ▶ La serie es estacionaria en media y no tiene unidad de medida puesto que reflejan las tasas de cambio del precio en k-períodos.
- ▶ Un período de cierta estabilidad en las tasas de cambio de los precios comprendido entre el primer trimestre de 2003 hasta mediados-finales de 2007; período en el que la media es más cercana a cero.
- ▶ Cambios bruscos, registrados en el período 2000-02.

- ▶ La serie es estacionaria en media y no tiene unidad de medida puesto que reflejan las tasas de cambio del precio en k-períodos.
- ▶ Un período de cierta estabilidad en las tasas de cambio de los precios comprendido entre el primer trimestre de 2003 hasta mediados-finales de 2007; período en el que la media es más cercana a cero.
- ▶ Cambios bruscos, registrados en el período 2000-02.
- ▶ En el año 2008 coinciden con períodos de crisis económicas que han acarreado altas tasas de incertidumbre y volatilidad.

- ▶ La serie es estacionaria en media y no tiene unidad de medida puesto que reflejan las tasas de cambio del precio en k-períodos.
- ▶ Un período de cierta estabilidad en las tasas de cambio de los precios comprendido entre el primer trimestre de 2003 hasta mediados-finales de 2007; período en el que la media es más cercana a cero.
- ▶ Cambios bruscos, registrados en el período 2000-02.
- ▶ En el año 2008 coinciden con períodos de crisis económicas que han acarreado altas tasas de incertidumbre y volatilidad.

- ▶ La serie es estacionaria en media y no tiene unidad de medida puesto que reflejan las tasas de cambio del precio en k-períodos.
- ▶ Un período de cierta estabilidad en las tasas de cambio de los precios comprendido entre el primer trimestre de 2003 hasta mediados-finales de 2007; período en el que la media es más cercana a cero.
- ▶ Cambios bruscos, registrados en el período 2000-02.
- ▶ En el año 2008 coinciden con períodos de crisis económicas que han acarreado altas tasas de incertidumbre y volatilidad.

Por consiguiente, se observa que la volatilidad no es constante en el tiempo, pudiendo diferenciar claramente períodos con varianzas distintas ("volatility clustering").

- Valores extremos positivos y negativos (más frecuentes): en el primer trimestre de 2003 y en el primer trimestre de 2009

- ▶ Valores extremos positivos y negativos (más frecuentes): en el primer trimestre de 2003 y en el primer trimestre de 2009
- ▶ Por tanto, la distribución de los rendimientos presenta una asimetría negativa (hacia la izquierda) y con colas pesadas.

- ▶ Valores extremos positivos y negativos (más frecuentes): en el primer trimestre de 2003 y en el primer trimestre de 2009
- ▶ Por tanto, la distribución de los rendimientos presenta una asimetría negativa (hacia la izquierda) y con colas pesadas.

- ▶ Valores extremos positivos y negativos (más frecuentes): en el primer trimestre de 2003 y en el primer trimestre de 2009
- ▶ Por tanto, la distribución de los rendimientos presenta una asimetría negativa (hacia la izquierda) y con colas pesadas.

El objetivo final de este trabajo será testar diferentes modelos condicionalmente heterocedásticos para dicha volatilidad de dicha serie financiera.

QQ-plot

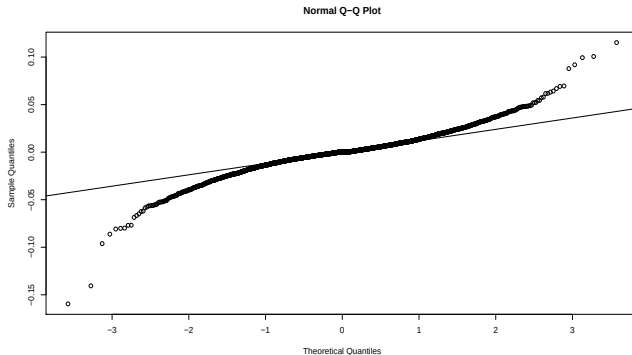


Figura: QQplot de los redimientos

	Gas Natural
nº observaciones	2854.000000
Mínimo	-0.159561
Mínimo	-0.159561
Máximo	0.115198
1º Quartile	-0.007985
3º Quartile	0.008138
Media	-0.000230
Mediana	0.000000
Suma	-0.656269
LCL Media	-0.000888
UCL Media	0.000428
Desviación típica	0.017922
Simetría	-0.376938
Curtosis	6.880669

Estimación kernel de la densidad

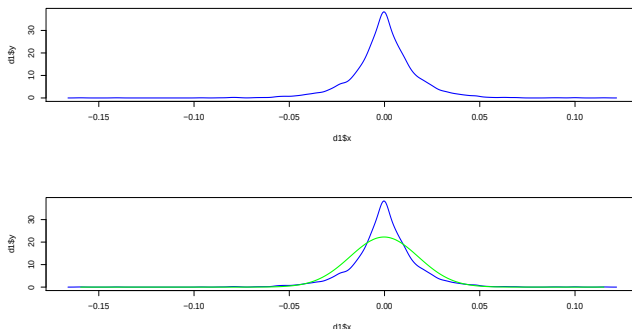


Figura: Estimación kernel de la densidad de los datos(azul). Densidad normal(verde)

Consideramos la media y varianza condicionada de r_t dada F_{t-1} , la información obtenida hasta el instante $t-1$.

- ▶ $\mu_t = E(r_t|F_{t-1})$
- ▶ $\sigma_t^2 = \text{Var}(r_t|F_{t-1}) = E((r_t - \mu_t)^2|F_{t-1})$
- ▶ Dónde el término σ_t^2 es la volatilidad del rendimiento en el instante t .

$$r_t = \mu_t + a_t$$

- ▶ a_t es usualmente denominado como shock o innovación de r_t
- ▶ μ_t es conocido como la ecuación de la media para r_t

Media condicional

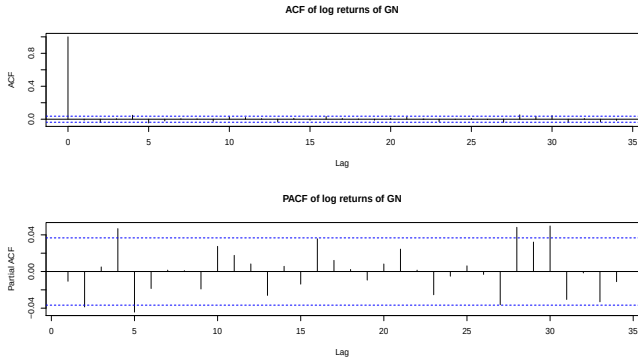


Figura: Función de autocorrelación y autocorrelación parcial de los rendimientos

Media condicional

- ▶ Las autocorrelaciones son muy pequeñas, prácticamente nulas, finitas y constantes.
- ▶ Estamos ante una serie de rendimientos incorrelados.

Dado que en toda la muestra los ACFs son prácticamente cero, podremos considerar que la serie es un proceso de ruido blanco. (Tsay,2010-36).

Media condicional

Contraste de Ljung-Box

- ▶ El estadístico de contraste toma un valor pequeño, $Q(3)=4.6588$, con un p-valor asociado de 0.1986.
- ▶ se confirma la hipótesis nula de que no hay correlación en los datos.

En consecuencia, los datos que estamos analizando no encierran una estructura ARMA para la media condicional de los log-returns.

Varianza condicional

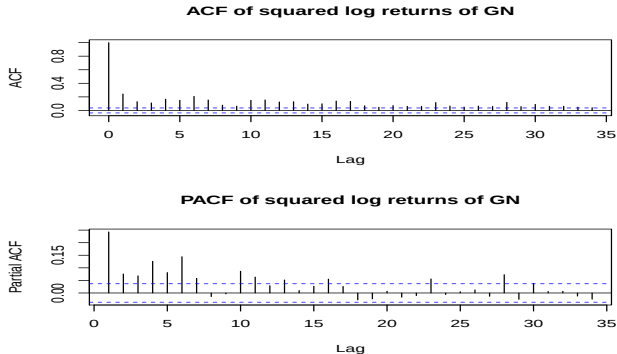


Figura: Función de autocorrelación y autocorrelación parcial de los rendimientos al cuadrado

Varianza condicional

- ▶ Como las correlaciones tardan mucho en desaparecer, concluimos la existencia de dependencia entre ellas, pero una dependencia no lineal.
- ▶ **¿Cómo determinar el orden un posible modelo ARCH?**

Varianza condicional

- ▶ Como las correlaciones tardan mucho en desaparecer, concluimos la existencia de dependencia entre ellas, pero una dependencia no lineal.
- ▶ **¿Cómo determinar el orden un posible modelo ARCH?**
 1. Nos centramos en el estudio del gráfico de las autocorrelaciones parciales.

Varianza condicional

- ▶ Como las correlaciones tardan mucho en desaparecer, concluimos la existencia de dependencia entre ellas, pero una dependencia no lineal.
- ▶ **¿Cómo determinar el orden un posible modelo ARCH?**
 1. Nos centramos en el estudio del gráfico de las autocorrelaciones parciales.
 2. Algunos retardos resultan significativos, hasta el parámetro 28

Varianza condicional

- ▶ Como las correlaciones tardan mucho en desaparecer, concluimos la existencia de dependencia entre ellas, pero una dependencia no lineal.
- ▶ **¿Cómo determinar el orden un posible modelo ARCH?**
 1. Nos centramos en el estudio del gráfico de las autocorrelaciones parciales.
 2. Algunos retardos resultan significativos, hasta el parámetro 28
 3. **Un ARCH(13) será suficiente.** Pues a partir de este retardo la estructura es menor, es decir, se salen pocos retardos de las bandas de confianza.

Varianza condicional

$$\sigma_t^2 = \text{Var}(r_t|F_{t-1}) = \text{Var}(a_t|F_{t-1})$$

Para ello comenzaremos contrastando la presencia de heterocedasticidad condicional a través del test de Ljung-Box sobre los residuos al cuadrado con el fin de testar su presencia. En primer lugar, enunciamos el procedimiento que vamos a utilizar

Varianza condicional

McLeod y Li (1983)

La hipótesis nula es que los m primeros 'lags' de ACF de a_t^2 son cero. Concretamente $H_0 : \rho_1(a_t^2) = \dots = \rho_m(a_t^2) = 0$, donde $\rho_l(a_t^2)$ es el 'lag' de ACF de a_t^2 . El test de Ljung-Box sobre a_t^2 viene dado por:

$$Q(m) = T(T+2) \sum_{l=1}^m \frac{\rho_l(a_t^2)}{T-l}$$

Bajo H_0 , $Q(m)$ es asintóticamente una variable aleatoria chi-cuadrado con m grados de libertad. La regla decisión de rechazar H_0 es $Q(m) > \chi_{\alpha}^2$, donde χ_{α}^2 denota el percentil $(1 - \alpha)$ de una distribución chi-cuadrado con m grados de libertad.

Varianza condicional

Contraste de Ljung-Box

- El valor del estadístico de contraste de la serie a_t^2 muestra un fuerte efecto ARCH con $Q(13)=846.6681$ y p-valor asociado es de 2.2×10^{-16}

Varianza condicional

Contraste de Ljung-Box

- El valor del estadístico de contraste de la serie a_t^2 muestra un fuerte efecto ARCH con $Q(13)=846.6681$ y p-valor asociado es de 2.2×10^{-16}

Los residuos al cuadrado a_t^2 presentan heterocedasticidad condicional

Recordemos que estos modelos se pueden clasificar en dos grandes categorías:

Recordemos que estos modelos se pueden clasificar en dos grandes categorías:

- ▶ aquéllos que utilizan una **función exacta** para determinar la evolución de la volatilidad

Recordemos que estos modelos se pueden clasificar en dos grandes categorías:

- ▶ aquéllos que utilizan una **función exacta** para determinar la evolución de la volatilidad
- ▶ aquéllos que utilizan una **función estocástica** para describir la volatilidad.

La característica más importante de la volatilidad es que ésta **no es directamente observable** a través de los rendimientos, puesto que sólo hay una observación para cada instante t . Sin embargo, podemos observar las siguientes características relativas a la volatilidad:

La característica más importante de la volatilidad es que ésta **no es directamente observable** a través de los rendimientos, puesto que sólo hay una observación para cada instante t .

Sin embargo, podemos observar las siguientes características relativas a la volatilidad:

1. **Volatilidad clúster**, es decir, los rendimientos presentan períodos donde la volatilidad es muy pequeña y otros donde ésta es muy grande.

La característica más importante de la volatilidad es que ésta **no es directamente observable** a través de los rendimientos, puesto que sólo hay una observación para cada instante t .

Sin embargo, podemos observar las siguientes características relativas a la volatilidad:

1. **Volatilidad clúster**, es decir, los rendimientos presentan períodos donde la volatilidad es muy pequeña y otros donde ésta es muy grande.
2. Se considera que **la volatilidad se desarrolla en el tiempo de manera continua**, es decir, no suele variar en grandes saltos.

La característica más importante de la volatilidad es que ésta **no es directamente observable** a través de los rendimientos, puesto que sólo hay una observación para cada instante t .

Sin embargo, podemos observar las siguientes características relativas a la volatilidad:

1. **Volatilidad clúster**, es decir, los rendimientos presentan períodos donde la volatilidad es muy pequeña y otros donde ésta es muy grande.
2. Se considera que **la volatilidad se desarrolla en el tiempo de manera continua**, es decir, no suele variar en grandes saltos.
3. **Volatilidad no diverge hasta el infinito**, es decir, es finita.

La característica más importante de la volatilidad es que ésta **no es directamente observable** a través de los rendimientos, puesto que sólo hay una observación para cada instante t .

Sin embargo, podemos observar las siguientes características relativas a la volatilidad:

1. **Volatilidad clúster**, es decir, los rendimientos presentan períodos donde la volatilidad es muy pequeña y otros donde ésta es muy grande.
2. Se considera que **la volatilidad se desarrolla en el tiempo de manera continua**, es decir, no suele variar en grandes saltos.
3. **Volatilidad no diverge hasta el infinito**, es decir, es finita.
4. **Volatilidad parece reflejar diferencias cuando un precio se incrementa o cae** (efecto leverage). El mercado reacciona de forma diferente si obtengo grandes pérdidas que si obtengo grandes ganancias.

Modelo ARCH

El **modelo ARCH** de Engle (1982) fue el primer modelo propuesto para modelizar la volatilidad. El modelo **ARCH(m)** supone que:

$$\begin{aligned} a_t &= \sigma_t \epsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_m a_{t-m}^2 \end{aligned}$$

Modelo ARCH

El **modelo ARCH** de Engle (1982) fue el primer modelo propuesto para modelizar la volatilidad. El modelo **ARCH(m)** supone que:

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_m a_{t-m}^2$$

- ϵ_t es una secuencia de variables aleatorias independiente e idénticamente distribuidas con media cero y varianza uno.

Modelo ARCH

El **modelo ARCH** de Engle (1982) fue el primer modelo propuesto para modelizar la volatilidad. El modelo **ARCH(m)** supone que:

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_m a_{t-m}^2$$

- ▶ ϵ_t es una secuencia de variables aleatorias independiente e idénticamente distribuidas con media cero y varianza uno.
- ▶ $\alpha_0 > 0$ y $\alpha_i \geq 0$ para $i > 0$. Los coeficientes α_i deben verificar alguna condición de regularidad para garantizar que $\text{Var}(a_t)$ sea finita.

Modelo ARCH

Para comprender mejor este modelo, veamos algunas propiedades del modelo **ARCH(1)** dónde $\alpha_0 > 0$ y $\alpha_1 \geq 0$:

Modelo ARCH

Para comprender mejor este modelo, veamos algunas propiedades del modelo **ARCH(1)** dónde $\alpha_0 > 0$ y $\alpha_1 \geq 0$:

- La **media no condicionada** de a_t es cero.

Modelo ARCH

Para comprender mejor este modelo, veamos algunas propiedades del modelo **ARCH(1)** dónde $\alpha_0 > 0$ y $\alpha_1 \geq 0$:

- ▶ La **media no condicionada** de a_t es cero.
- ▶ La **varianza no concionada** de a_t viene dada por

$$Var(a_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}$$

siempre que $0 \leq \alpha_1 < 1$.

Modelo ARCH

Para comprender mejor este modelo, veamos algunas propiedades del modelo **ARCH(1)** dónde $\alpha_0 > 0$ y $\alpha_1 \geq 0$:

- ▶ La **media no condicionada** de a_t es cero.
- ▶ La **varianza no concionada** de a_t viene dada por

$$Var(a_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}$$

siempre que $0 \leq \alpha_1 < 1$.

- ▶ El exceso de curtosis de a_t es positivo y la cola de la distribución de a_t es más pesada que la de una distribución normal. Esto está de acuerdo con la presencia de extremos en la serie de tiempo de rendimientos.

Modelo ARCH

El modelo **ARCH** presenta alguna debilidad, (Tsay,2010-119):

- El modelo asume que positivos y negativos shocks tienen el mismo efecto en la volatilidad, porque depende de los shocks al cuadrado anteriores. En la práctica se sabe que el precio de un activo financiero responde de forma diferente a shocks positivos y negativos.

Modelo ARCH

El modelo **ARCH** presenta alguna debilidad, (Tsay,2010-119):

- ▶ El modelo asume que positivos y negativos shocks tienen el mismo efecto en la volatilidad, porque depende de los shocks al cuadrado anteriores. En la práctica se sabe que el precio de un activo financiero responde de forma diferente a shocks positivos y negativos.
- ▶ El modelo aplica importantes restricciones en sus parámetros, como por ejemplo tener momentos finitos.

Modelo ARCH

El modelo **ARCH** presenta alguna debilidad, (Tsay,2010-119):

- ▶ El modelo asume que positivos y negativos shocks tienen el mismo efecto en la volatilidad, porque depende de los shocks al cuadrado anteriores. En la práctica se sabe que el precio de un activo financiero responde de forma diferente a shocks positivos y negativos.
- ▶ El modelo aplica importantes restricciones en sus parámetros, como por ejemplo tener momentos finitos.
- ▶ El modelo no proporciona ninguna idea para comprender el origen de las variaciones de la serie de tiempo financiera.

Modelo ARCH

El modelo **ARCH** presenta alguna debilidad, (Tsay,2010-119):

- ▶ El modelo asume que positivos y negativos shocks tienen el mismo efecto en la volatilidad, porque depende de los shocks al cuadrado anteriores. En la práctica se sabe que el precio de un activo financiero responde de forma diferente a shocks positivos y negativos.
- ▶ El modelo aplica importantes restricciones en sus parámetros, como por ejemplo tener momentos finitos.
- ▶ El modelo no proporciona ninguna idea para comprender el origen de las variaciones de la serie de tiempo financiera.
- ▶ El modelo puede que proporcione demasiada frecuencia a la volatilidad, porque responde lentamente a los grandes shocks aislados.

Estimación de un modelo ARCH

Estimaremos un modelo **ARCH(13)**, ya que observando el gráfico PACF de los rendimientos al cuadrado tenemos que hasta el retardo 13 es donde esta recogida la mayor estructura del modelo; momento a partir del cual, la mayoría de los retardos son nulos.

$$r_t = \mu + a_t$$

$$a_t = \sigma_t + \epsilon_t$$

Estimación de un modelo ARCH

Con la implementación del modelo **ARCH(13)**, se ha visto que el parámetro α_8 es no significativo, por lo que se ha eliminado del modelo. Como resultado, suponiendo una distribución Gaussiana para las innovaciones estandarizadas, se obtiene que

$$\begin{aligned}
 r_t &= 0.000528 + a_t \\
 \sigma_t &= 0.000049 + 0.270402a_{t-1}^2 + 0.103599a_{t-2}^2 + \\
 &+ 0.103800a_{t-3}^2 + 0.055983a_{t-4}^2 + 0.036068a_{t-5}^2 + \\
 &+ 0.050781a_{t-6}^2 + 0.046787a_{t-7}^2 + 0.042011a_{t-9}^2 + \\
 &+ 0.066185a_{t-10}^2 + 0.047949a_{t-11}^2 + 0.026539a_{t-12}^2 + 0.074122a_{t-13}^2
 \end{aligned}$$

Estimación de un modelo ARCH

- ▶ Los **errores standard de los parámetros** son 0.000239, 0.000006, 0.030161, 0.023927, 0.024220, 0.021577, 0.017648, 0.018280, 0.020485, 0.019719, 0.019310, 0.017062, 0.014342 y 0.022223, respectivamente. Todos los parámetros son significativos con un nivel de significación del 5 %.
- ▶ El **estadístico de Ljung-Box de los residuos estandarizados** proporciona $Q(13)=26.2413$ con un p-valor de 0.01578 y el **estadístico de los residuos al cuadrado estandarizados** es $Q(13)=854.6708$ con un p-valor de 2.2×10^{-16} .

Estimación de un modelo ARCH

- ▶ Los **errores standard de los parámetros** son 0.000239, 0.000006, 0.030161, 0.023927, 0.024220, 0.021577, 0.017648, 0.018280, 0.020485, 0.019719, 0.019310, 0.017062, 0.014342 y 0.022223, respectivamente. Todos los parámetros son significativos con un nivel de significación del 5 %.
- ▶ El **estadístico de Ljung-Box de los residuos estandarizados** proporciona $Q(13)=26.2413$ con un p-valor de 0.01578 y el **estadístico de los residuos al cuadrado estandarizados** es $Q(13)=854.6708$ con un p-valor de 2.2×10^{-16} .

El modelo ARCH(13) sin el parámetro α_8 no es adecuado para describir la heterocedasticidad de los datos con un nivel de significación del 5 %.

Modelo GARCH

El **modelo GARCH** de Bollerslev (1986) es una extensión útil de el modelo ARCH que intenta resolver el problema de requerir muchos parámetros para describir adecuadamente la volatilidad. El modelo **GARCH(m,s)** supone que:

$$\begin{aligned} a_t &= \sigma_t \epsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2 \end{aligned}$$

Modelo GARCH

El **modelo GARCH** de Bollerslev (1986) es una extensión útil de el modelo ARCH que intenta resolver el problema de requerir muchos parámetros para describir adecuadamente la volatilidad. El modelo **GARCH(m,s)** supone que:

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

- ϵ_t es una secuencia de variables aleatorias independiente e idénticamente distribuidas con media cero y varianza uno.

Modelo GARCH

El **modelo GARCH** de Bollerslev (1986) es una extensión útil de el modelo ARCH que intenta resolver el problema de requerir muchos parámetros para describir adecuadamente la volatilidad. El modelo **GARCH(m,s)** supone que:

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

- ▶ ϵ_t es una secuencia de variables aleatorias independiente e idénticamente distribuidas con media cero y varianza uno.
- ▶ $\alpha_0 > 0$ y $\alpha_i \geq 0$ para $i > 0$ y $\sum_{i=1}^{\max(m,s)} (\alpha_i + \beta_i) < 1$. Esta última restricción implica que $Var(a_t)$ es finita.

Modelo GARCH

Para comprender mejor este modelo notemos que,

Modelo GARCH

Para comprender mejor este modelo notemos que,

- ▶ La **media no condicionada** de a_t es cero.

Modelo GARCH

Para comprender mejor este modelo notemos que,

- ▶ La **media no condicionada** de a_t es cero.
- ▶ La **varianza no condicionada** de a_t viene dada por

$$\text{Var}(a_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{\max(m,s)} (\alpha_i + \beta_i)}$$

siempre que $0 \leq \sum_{i=1}^{\max(m,s)} (\alpha_i + \beta_i) < 1$.

Modelo GARCH

Para comprender mejor este modelo notemos que,

- ▶ La **media no condicionada** de a_t es cero.
- ▶ La **varianza no condicionada** de a_t viene dada por

$$\text{Var}(a_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{\max(m,s)} (\alpha_i + \beta_i)}$$

siempre que $0 \leq \sum_{i=1}^{\max(m,s)} (\alpha_i + \beta_i) < 1$.

- ▶ Notemos que no es sencillo determinar el orden de los modelos GARCH(Tsay,2010-134); no obstante, los modelos más comunes son el GARCH(1,1), GARCH(2,1) y GARCH(1,2).

Estimación de un modelo GARCH

A continuación se presenta el modelo GARCH impletado; en este caso un modelo **GARCH(1,2)**. Teniendo en cuenta que

$$r_t = \mu + a_t$$

$$a_t = \sigma_t e_t$$

Estimación de un modelo GARCH

A continuación se presenta el modelo GARCH impletado; en este caso un modelo **GARCH(1,2)**. Teniendo en cuenta que

$$r_t = \mu + a_t$$

$$a_t = \sigma_t e_t$$

El modelo obtenido, asumiendo que ϵ_t son independientes e idénticamente distribuidos siguiendo la distribución normal standard.

$$r_t = 5.474 \times 10^{-4} + a_t$$

$$\sigma_t^2 = 0.000005346 + 0.1744a_{t-1}^2 + 0.4189\sigma_{t-1}^2 + 0.4023\sigma_{t-2}^2$$

Estimación de un modelo GARCH

- ▶ Los **errores standard de los parámetros** son 0.0002357, 0.000001386, 0.02287, 0.09271 y 0.08806, respectivamente. Todos los parámetros son significativos con un nivel de significación del 5 %.

Estimación de un modelo GARCH

- ▶ Los **errores standard de los parámetros** son 0.0002357, 0.000001386, 0.02287, 0.09271 y 0.08806, respectivamente. Todos los parámetros son significativos con un nivel de significación del 5 %.
- ▶ El **estadístico de Ljung-Box de los residuos estandarizados** proporciona $Q(13)=26.2413$ con un p-valor de 0.01578, mientras que en el caso de los **residuos al cuadrado estandarizados el estadístico** es $Q(13)=854.8379$ con un p-valor de 2.2×10^{-16} .

Estimación de un modelo GARCH

- ▶ Los **errores standard de los parámetros** son 0.0002357, 0.000001386, 0.02287, 0.09271 y 0.08806, respectivamente. Todos los parámetros son significativos con un nivel de significación del 5 %.
- ▶ El **estadístico de Ljung-Box de los residuos estandarizados** proporciona $Q(13)=26.2413$ con un p-valor de 0.01578, mientras que en el caso de los **residuos al cuadrado estandarizados el estadístico** es $Q(13)=854.8379$ con un p-valor de 2.2×10^{-16} .

Estimación de un modelo GARCH

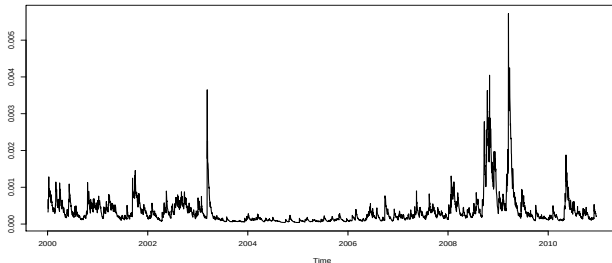
- ▶ Los **errores standard de los parámetros** son 0.0002357, 0.000001386, 0.02287, 0.09271 y 0.08806, respectivamente. Todos los parámetros son significativos con un nivel de significación del 5 %.
- ▶ El **estadístico de Ljung-Box de los residuos estandarizados** proporciona $Q(13)=26.2413$ con un p-valor de 0.01578, mientras que en el caso de los **residuos al cuadrado estandarizados el estadístico** es $Q(13)=854.8379$ con un p-valor de 2.2×10^{-16} .
El modelo GARCH(1,2) no es adecuado con un nivel de significación del 5 %.

Estimación de un modelo GARCH

Notemos además que

$\hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 = 0.1744 + 0.4189 + 0.4023 = 0.9956$, muy próximo a uno.

El hecho de que esta suma sea muy próxima a uno se denomina **persistencia en volatilidad**.



Modelo IGARCH

El **modelo IGARCH** propuesto por Engle y Bollerslev (1986) es un modelo Garch en el cual $\sum_{i=1}^{\max(m,s)} (\alpha_i + \beta_i) = 1$.

Modelo IGARCH

El **modelo IGARCH** propuesto por Engle y Bollerslev (1986) es un modelo Garch en el cual $\sum_{i=1}^{max(m,s)} (\alpha_i + \beta_i) = 1$.

- el impacto de un shock en volatilidad será persistente, mientras $Var(a_t)$ no exista. Esto parece difícil de justificar para una serie de rendimientos.

Modelo IGARCH

El **modelo IGARCH** propuesto por Engle y Bollerslev (1986) es un modelo Garch en el cual $\sum_{i=1}^{max(m,s)} (\alpha_i + \beta_i) = 1$.

- ▶ el impacto de un shock en volatilidad será persistente, mientras $Var(a_t)$ no exista. Esto parece difícil de justificar para una serie de rendimientos.
- ▶ El caso real de persistencia en volatilidad está bajo investigación. Sin embargo, desde un punto de vista teórico, la persistencia puede ser causada por cambios ocasionales en el nivel de volatilidad y varios documentos han propuesto considerar modelos GARCH para diferentes conjuntos de datos (Andreou y Ghysels (2002,2004), Galeano y Tsay (2010)).

Estimación de un modelo IGARCH

Estimaremos un **modelo IGARCH(1,2)**. El modelo obtenido, asumiendo que e_t son independientes e idénticamente distribuidos siguiendo la distribución normal standard.

$$r_t = 0.000566 + a_t$$

$$\sigma_t^2 = 0.000005 + 0.178656a_{t-1}^2 + 0.422769\sigma_{t-1}^2 + 0.398574\sigma_{t-2}^2$$

Los **errores standard de los parámetros** μ , α_0 , α_1 , β_1 son 0.000237, 0.000002, 0.020101 y 0.093141, respectivamente. El parámetro β_2 es no significativo, pero es necesario para poder obtener $\alpha_1 + \beta_1 + \beta_2 = 1$. El resto de los parámetros son significativos con un nivel de significación del 5%.

Estimación de un modelo IGARCH

El estadístico de **Ljung-Box** de los residuos estandarizados proporciona $Q(13)=26.2413$ con un p-valor de 0.01578 y el estadístico de los residuos al cuadrado estandarizados es $Q(13)=854.9967$ con un p-valor de 2.2×10^{-16} .

Estimación de un modelo IGARCH

El estadístico de **Ljung-Box** de los residuos estandarizados proporciona $Q(13)=26.2413$ con un p-valor de 0.01578 y el estadístico de los residuos al cuadrado estandarizados es $Q(13)=854.9967$ con un p-valor de 2.2×10^{-16} .

El modelo IGARCH(1,2) no es adecuado con un nivel de significación del 5 %.

Modelo EGARCH

El **modelo GARCH exponencial** (EGARCH) propuesto por Nelson (1991) intenta superar algunas de las debilidades del modelo GARCH, de modo que permita **capturar la asimetría debida a la existencia de grandes rendimientos positivos y negativos**. (Tsay,2010-111).

Modelo EGARCH

El **modelo GARCH exponencial** (EGARCH) propuesto por Nelson (1991) intenta superar algunas de las debilidades del modelo GARCH, de modo que permita **capturar la asimetría debida a la existencia de grandes rendimientos positivos y negativos**. (Tsay,2010-111).

El modelo EGARCH asume que:

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t$$
$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \frac{1 + \beta_1 B + \dots + \beta_{s-1} B^{s-1}}{1 - \alpha_1 B - \dots - \alpha_m B^m} g(\epsilon_t)$$

Modelo EGARCH

- ▶ ϵ_t es una secuencia de variables aleatorias independiente e idénticamente distribuidas con media cero y varianza uno.
- ▶ La función $g(\epsilon_t)$ viene definida por

$$g(\epsilon_t) = \theta\epsilon_t + \gamma[\epsilon_t - E(|\epsilon_t|)]$$

- ▶ θ y γ son constantes reales.
- ▶ B es el operador de los retardos que satisface que $Bg(\epsilon_t) = g(\epsilon_{t-1})$, $1 + \beta_1 B + \dots + \beta_{s-1} B^{s-1}$ y $1 - \alpha_1 B - \dots - \alpha_m B^m$ son polinomios con ceros fuera del círculo unidad y no tienen factores comunes.

Modelo EGARCH

Para comprender mejor este modelo notemos que:

- ▶ La **media no condicionada** de a_t es cero.
- ▶ La **media no condicionada** de $\ln(\sigma_t^2)$ es α_0 .
- ▶ El modelo EGARCH utiliza la varianza condicional registrada para relajar la restricción de positividad de los coeficientes del modelo.
- ▶ El uso de $g(\epsilon_t)$ permite al modelo responder asimétricamente a los retardos positivos y negativos de los valores de a_t .

Modelo EGARCH

Una forma alternativa para el modelo **EGARCH(m,s)** es:

$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^s \alpha_i \frac{|a_{t-i}| + \gamma_i a_{t-i}}{\sigma_{t-i}} + \sum_{j=1}^s \beta_j \ln(\sigma_{t-j}^2)$$

- Un a_{t-i} positivo contribuye $\alpha_i(1 + \gamma_i)|\epsilon_{t-i}|$ a la log-volatilidad, mientras que un a_{t-i} negativo contribuye $\alpha_i(1 - \gamma_i)|\epsilon_{t-i}|$, donde $\epsilon_{t-i} = a_{t-i}/\sigma_{t-i}$.

Estimación de un modelo EGARCH

El siguiente modelo implementado será **EGARCH(1,2)**.

$$r_t = a_t$$

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t$$

El modelo obtenido, asumiendo que ϵ_t son independientes e idénticamente distribuidos siguiendo la distribución normal standard:

$$\ln(\sigma_t^2) = -0.259363 - 0.077293 \frac{|a_{t-1}| + 0.295980 a_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + 0.497836 \ln(\sigma_{t-1}^2)$$

Estimación de un modelo EGARCH

Los **errores standard de los parámetros** son 0.056406, 0.015639, 0.031885, 0.077323 y 0.077212, respectivamente. Todos los parámetros son significativos con un nivel de significación del 5 %. El **estadístico de Ljung-Box de los residuos estandarizados** proporciona $Q(13)=26.2413$ con un p-valor de 0.01578 y el **estadístico de los residuos al cuadrado estandarizados** es $Q(13)=849.3888$ con un p-valor de 2.2×10^{-16} .

Estimación de un modelo EGARCH

Los **errores standard de los parámetros** son 0.056406, 0.015639, 0.031885, 0.077323 y 0.077212, respectivamente. Todos los parámetros son significativos con un nivel de significación del 5 %.

El **estadístico de Ljung-Box de los residuos estandarizados** proporciona $Q(13)=26.2413$ con un p-valor de 0.01578 y el **estadístico de los residuos al cuadrado estandarizados** es $Q(13)=849.3888$ con un p-valor de 2.2×10^{-16} .

El modelo EGARCH(1,2) no es adecuado con un nivel de significación del 5 %.

Modelo TGARCH

El **modelo TGARCH** propuesto por Glosten, Jagannathan y Runkle (1993) y Zakoian (1994) es una alternativa al modelo EGARCH para manejar el efecto leverage. El modelo **TGARCH(p,q)** considera que;

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_i^m (\alpha_i + \gamma_i N_{t-i}) a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

es un indicador para la negatividad de a_{t-i} dado por:

$$N_{t-i} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{t-i} < 0, \\ 0 & \text{si } a_{t-i} \geq 0 \end{cases}$$

- α_i, γ_i y β_j son parámetros no negativos. Además, un a_{t-i} positivo contribuye $\alpha_i a_{t-i}^2$ a σ_t^2 , mientras que un a_{t-i} negativo tiene un gran impacto $(\alpha_i + \gamma_i) a_{t-i}^2$; con $\gamma_i > 0$.

Estimación de un modelo TGARCH

Para ilustrar este tipo de modelos, vamos a estimar un modelo **TGARCH(1,2)**;

$$\begin{aligned} r_t &= \mu + a_t = a_t \\ \sigma_t^2 &= 0.000007 + (0.115505 + 0.129181N_{t-i})a_{t-1}^2 + \\ &\quad + 0.410941\sigma_{t-1}^2 + 0.399310\sigma_{t-2}^2 \end{aligned}$$

Los **errores standard de los parámetros** son 0.000002, 0.020126, 0.028206, 0.089137 y 0.084771, respectivamente. Todos los parámetros son significativos con un nivel de significación del 5 %.

Estimación de un modelo TGARCH

El estadístico de **Ljung-Box** de los residuos estandarizados proporciona $Q(13)=26.2413$ con un p-valor de 0.01578 y el estadístico de los residuos al cuadrado estandarizados es $Q(13)=849.3888$ con un p-valor de 2.2×10^{-16} .

Estimación de un modelo TGARCH

El estadístico de **Ljung-Box** de los residuos estandarizados proporciona $Q(13)=26.2413$ con un p-valor de 0.01578 y el **estadístico de los residuos al cuadrado estandarizados** es $Q(13)=849.3888$ con un p-valor de 2.2×10^{-16} .

El modelo TGARCH(1,2) no es adecuado con un nivel de significación del 5 %.

De los modelos construidos deducimos que ninguno de los modelos condicionalmente heterocedásticos estimados en los apartados anteriores **no son adecuados con un nivel de significación de 5 %** para modelizar la volatilidad. Por ello propondríamos la estimación de un modelo que utilice una **función estocástica** para describir la volatilidad. Como por ejemplo;

- ▶ **Modelo bilinear** de Granger y Andersen (1978).
- ▶ **"Threshold autorregresive model"** (TAR) de Tong y Lin (1980).
- ▶ **Modelo de transición suave AR (STAR)** de Chan y Tong.
- ▶ **Modelo de Markov "switching"** de Tong (1983).

Conclusiones

- ▶ Otra posibilidad sería probar con una distribución t-student en lugar de la normal para resolver el problema de las colas pesadas. También sería útil probar con una mixtura de dos distribuciones normales (Bai, Russell y Tiao, 2003) o con una mixtura infinita de distribuciones gaussianas para solucionar el problema de la asimetría (Ausín, Galeano y Ghosh, 2010).
- ▶ A pesar de que se han implementado varios modelos y que ninguno de ellos ha resultado apropiado por el efecto de "jumps", se considera oportuno estimar un modelo que tenga en cuenta estos efectos.

Proyecto de Ingeniería Financiera.

Serie Temporal Financiera: Log-Returns de Gas Natural

García Veiga, Mariam. Leyenda Rodríguez, María

20 de enero de 2011