# 6. Kriging con media conocida. Kriging simple

## 6.1. Hipótesis iniciales

Recordamos que la variable de interés estaba formada por $Z(x) = m(x) + Y(x)$. Sobre ellas se asumen las siguientes hipótesis

- $E[Z(x)] = m(x)$ es función conocida.
- $Y(x)$ es estacionaria de segundo orden.

La segunda condición supone que existe la función covariograma:

$$\begin{aligned} C(h) &= Cov[Z(x), Z(x+h)] \\ &= E\{[Z(x) - m(x)][Z(x+h) - m(x+h)]\} \\ &= E[Y(x)Y(x+h)] \\ &= Cov[Y(x), Y(x+h)], \end{aligned}$$

que se supone conocida o al menos estimada.
Se desea predecir $Z(x_0)$ a partir de una muestra de tamaño $n$ de la misma variable pero medida en localizaciones distintas $\{Z(x_1), Z(x_2), \ldots, Z(x_n)\}$ utilizando un predictor lineal puntual:

$$Z^*(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z(x_i) + \lambda_0.$$

Las condiciones que debe verificar este predictor son dos:

1. Condición de insesgadez:

$$E[Z^*(x_0)] = m(x_0) \Longleftrightarrow \lambda_0 = m(x_0) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i m(x_i).$$

2. Condición de varianza mínima:

   Debemos encontrar un vector de pesos $\lambda' = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ que minimice la varianza de la predicción

$$
\begin{aligned}
Var\left(Z^*\left(x_0\right)-Z\left(x_0\right)\right) &= E\left[\left(Z^*\left(x_0\right)-Z\left(x_0\right)\right)^2\right]= \\
E\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i Y\left(x_i\right)-Y\left(x_0\right)\right)^2\right] &= E\left[\left(Y^*\left(x_0\right)-Y\left(x_0\right)\right)^2\right]= \\
Var\left(Y^*\left(x_0\right)-Y\left(x_0\right)\right).
\end{aligned}
$$

Es importante señalar que:

1. Por la primera condición podemos reescribir el predictor como:

$$
Y^*\left(x_0\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i Y\left(x_i\right).
$$

2. La segunda condición coincide con minimizar el error cuadrático medio, medida de error habitual en Estadística.

## 6.2. Solución

Para calcular el vector de pesos $\lambda$ se calculan las derivadas parciales de la varianza de predicción dando lugar a un sistema matricial:

$$
\begin{pmatrix}
C(0) & C(x_1-x_2) & \cdots & C(x_1-x_n) \\
C(x_2-x_1) & C(0) & \cdots & C(x_2-x_n) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
C(x_n-x_1) & C(x_n-x_2) & \cdots & C(0)
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n
\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}
C(x_1-x_0) \\ C(x_2-x_0) \\ \vdots \\ C(x_n-x_0)
\end{pmatrix}
$$

$$
\Longleftrightarrow \Sigma\lambda=\sigma_0.
$$

Siempre que $\Sigma$ sea estrictamente definida positiva, exite una única solución dada por

$$\lambda = \Sigma^{-1}\sigma_0.$$

Además de obtener la predicción en la localización $x_0$, podemos calcular la varianza de la predicción.

$$\begin{aligned}
\sigma_{KS}^2 &= Var\left(Z^*\left(x_0\right) - Z\left(x_0\right)\right) = E\left[\left(Y^*\left(x_0\right) - Y\left(x_0\right)\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Y\left(x_i\right) - Y\left(x_0\right)\right)^2\right] \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j C\left(x_i - x_j\right) - 2\sum_{i=1}^{n} \lambda_i C\left(x_i - x_0\right) + C\left(0\right)
\end{aligned}$$

Puesto que $C\left(0\right) = \sigma_Z^2$ y que, tal como puede comprobarse en el sistema matricial,

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j C\left(x_i - x_j\right) = C\left(x_i - x_0\right)$$

se obtiene que

$$\begin{aligned}
\sigma_{KS}^2 &= \sigma_Z^2 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i C\left(x_i - x_0\right) \\
&= \sigma_Z^2 - \lambda^{'} \sigma_0.
\end{aligned}$$

Bajo normalidad, podremos entonces obtener intervalos de predicción:

$$\left(Z^*\left(x_0\right) - z_{\alpha/2} \times \sigma_{KS}, Z^*\left(x_0\right) + z_{\alpha/2} \times \sigma_{KS}\right)$$

## 6.3. Propiedades

Las siguientes propiedades son aplicables a todos los sistemas de kriging lineal:

1. Los predictores kriging se calculan de forma que son los mejores predictores lineales insesgados (BLUE, en inglés).

2. La condición de que $\Sigma$ sea estrictamente definida positiva está asegurada si se utilizan las familias de semivariogramas teóricos válidos introduccidas en la sección 4.2.

3. La suposición de que el covariograma (o el semivariograma) sólo depende del salto es necesario para facilitar el análisis estructural, pero para la predicción espacial no es necesaria

4. Los predictores kriging son predictores puntuales. Esto quiere decir que el vector de pesos $\lambda$ debe ser calculado para cada nuevo $x_0$.

5. Los pesos de los sitemas kriging, $\lambda$ en este caso, no dependen de las observaciones muestrales $Z(x_i)$ sino del covariograma. Como consecuencia los predictores, $Z^*(x_0)$, y las varianzas de predicción, $\sigma^2_{KS}$ en este caso, sólo dependen de la "distancia estadística" entre localizaciones. La configuración espacial de los datos se tiene en cuenta a través de las matrices de covariograma (o semivariograma) donde esta función actúa como una medida de "distancia estadística" entre observaciones. De esta forma se detecta la posible información redundante presente en los datos.

6. Propiedad de exactitud

   Si $x_0 = x_i$ para algún $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces $Z^*(x_0) = Z(x_0)$ y $\sigma^2_{KS} = 0$. Es decir, el sistema de kriging es un interpolador.

7. Como consecuencia de la propia definición de la función $C(h)$, el comportamiento en el origen del covariograma determina las propiedades de continuidad y regularidad del predictor kriging. Para entender esto hay que darse cuenta de que el resultado de $\lim_{x \to x_i} Z^*(x), i = 1, 2, \ldots, n$ viene determinado por $\lim_{|h| \to 0} C(h)$ Así:

   - Si $C(h)$ tiene comportamiento parabólico en el origen, $\alpha > 1$, entonces $Z^*(x)$ es diferenciable en los puntos $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de la muestra.
   - Si $C(h)$ tiene comportamiento lineal en el origen, $\alpha = 1$,entonces $Z^*(x)$ es continuo en los puntos de la muestra.
   - Si $C(h)$ tiene pepita entonces $Z^*(x)$ presenta discontinuidades de salto en los puntos de la muestra.

   En la figura 11 puede verse una explicación gráfica de esta propiedad. Para este ejemplo se ha supuesto dimensión $d = 1$ y tamaño muestral $n = 8$

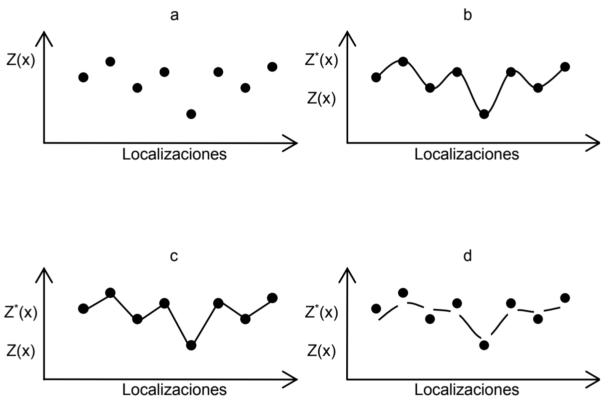


Figura 11: a: Representación de los 8 valores muestrales. b: Predicciones de $Z^*$ utilizando un semivariograma con $\alpha > 1$. c: Predicciones de $Z^*$ utilizando un semivariograma con $\alpha = 1$. d: Predicciones de $Z^*$ utilizando un semivariograma con $\alpha > 1$ anidado a un semivariograma efecto pepita.

8. Si $Z(x) \sim N(m(x), \sigma_Z)$ entonces el predictor lineal coincide con la esperanza condicionada, que es el mejor predictor posible ya que minimiza el error cuadrático medio.

$$Z^*(x_0) = E\left[Z(x_0)\,|_{Z(x_1),\ldots,Z(x_n)}\right]$$

Las siguientes propiedades son específicas del kriging simple:

1. Si $\{Z(x_1), Z(x_2), \ldots, Z(x_n)\}$ son variables incorreladas dos a dos, entonces:

$$\lambda_i = \rho_{i0};\ i = 1, 2, \ldots, n \text{ y } \sigma_{KS}^2 = \sigma_Z^2 - \sum_{i=1}^{n} C_{i0}\rho_{i0}.$$

2. Si $\{Z(x_1), Z(x_2), \ldots, Z(x_n), Z(x_0)\}$ son variables incorreladas dos a dos, entonces:

$$\lambda_i = 0;\ i = 1, 2, \ldots, n \text{ y } \sigma_{KS}^2 = \sigma_Z^2.$$

3. Como consecuencia de las propiedades anteriores, puede deducirse que

$$0 \leq \sigma_{KS}^2 \leq \sigma_Z^2.$$