

1. TEMA 7: OTROS GRÁFICOS DE CONTROL UNIVARIANTES.

Contenido del tema: Introducción. Gráficos de Medias individuales. Gráficos CUSUM. Gráficos de control de Medias ponderadas (EWMA).

1.1. Introducción

En este tema se analizarán otras alternativas a los clásicos gráficos de control de Shewhart. Aunque este tipo de gráficos son los más ampliamente utilizados, y siguen a ser de gran utilidad, en los últimos años, auspiciados en gran medida por el avanza en la informática, han aparecido otros gráficos que presentan alternativas de mejora.

Entre los inconvenientes de los gráficos propuestos por Walter Shewhart para el control de procesos está el que usan sólo la información contenida en la última muestra para la toma de decisiones e ignoran toda la información de los puntos anteriores. Esta información acumulada es de gran importancia en lo que podríamos denominar la segunda fase de un proceso de control: la monotorización. Así en este caso deben de utilizarse toda la información posible proporcionada por los datos o incluso otros criterios de alarma como considerar límites de aviso a distancias menores al 3σ clásico.

La idea de los gráficos de control que se presentan en este tema es que la representación gráfica no se basa en las observaciones individuales, o promedios de una muestra de ellas, sino en la acumulación de la información. Por esta razón se les denomina también gráficos con memoria.

Entre las alternativas a los gráficos de medias y atributos analizados en temas anteriores se presentará en este, los gráficos para medias individuales, los gráficos de sumas acumuladas o gráficos CUSUM y los gráficos con medias ponderadas exponencialmente o gráficos EWMA. Finalmente se abordará el problema de cómo monotorizar el proceso de control, para detectar señales de alarma cuando ya están construídos los límites correspondientes.

1.2. Gráficos de control para medias individuales

Cuando se tiene que el tamaño muestral es uno, no se puede calcular los gráficos de medias vistos anteriormente. Este tipo de situaciones suele darse en la industria química en la que no tiene sentido tomar muestras de una misma mezcla ya que la variabilidad encontrada será producto del mecanismo usado para la medida y no de la característica analizada. Por ejemplo, en el caso de analizar muestras de licores de un mismo tanque de producción no tiene sentido seleccionar más una muestra de cada recipiente. El problema en este tipo de estudio estriba en estimar la varianza, para ello pueden emplearse dos métodos: el de rangos móviles o la agrupación por bloques.

El método de rangos móviles consiste en agrupar n medias individuales consecutivas con intención de formar una submuestras que permita estimar los rangos. Una vez creado el primer grupo, se irán agrupando sucesivamente la muestras incorporando la nueva observación y eliminando la primera de cada muestra.

Por otra parte, cuando exista alguna razón que pueda justifiacar la agrupación de los datos en bloques puede recurrirse a formar los grupos con estos datos. Por ejemplo, en una fábrica de cerveza en la que se tienen dos tanques podría agruparse la producción diaria en 2 bloques formados por la producción diaria en cada tanque.

Para estimar los límites de control en este caso se procede como con el gráfico de la media pero tomando el tamaño de submuestras igual a 1. Sigue utilizándose la misma nomenclatura para el cálculo del estimador de la media, $\bar{\bar{x}}$, en el caso de utilizar gráficos probabilísticos quedarían los límites de control $\bar{\bar{x}} \pm Z_{\alpha/2}\sigma$

La estimación de σ puede hacerse utilizando la media de las desviaciones típicas \bar{s}_n , la media de los rangos \bar{R} , o la media de las cuasidesviaciones \bar{s}_{n-1} :

$$\begin{aligned}\bar{\bar{x}} \pm Z_{\alpha/2} \frac{\bar{s}_n}{c_{2,n}} \\ \bar{\bar{x}} \pm Z_{\alpha/2} \frac{\bar{R}}{d_{2,n}} \\ \bar{\bar{x}} \pm Z_{\alpha/2} \frac{\bar{s}_{n-1}}{c_{4,n}}\end{aligned}$$

En el supuesto más clásico de usar criterios 3σ suele utilizarse unas constantes (E_1 , E_2 y E_3), resultando las fórmulas para gráficos individuales:

$$\begin{aligned}\bar{\bar{x}} \pm E_1 \bar{s}_n \\ \bar{\bar{x}} \pm E_2 \bar{R} \\ \bar{\bar{x}} \pm E_3 \bar{s}_{n-1}\end{aligned}$$

Al igual que ocurría en los gráficos de variables también en el caso de medidas individuales debe hacerse el gráfico para las desviaciones o recorridos, con objeto de controlar la variabilidad de los datos y no sólo el valor nominal.

Ejemplo: Una destilería envasa diariamente el aguardiente producido en dos tanques. Se está interesado en controlar el grado de alcohol del aguardiente elaborado para lo que se recogen los resultados de los análisis durante 10 días consecutivos resultando los datos de la siguiente tabla:

día	tanque 1	tanque 2	Rango (orden 2)
1	44,497	43,982	0,515
2	44,354	44,032	0,322
3	44,523	44,127	0,396
4	44,12	44,089	0,031
5	43,576	43,767	0,191
6	44,546	43,451	1,095
7	43,221	44,448	1,227
8	44,549	43,546	1,003
9	43,337	43,539	0,202
10	43,486	43,9	0,414
\bar{x}_i	44,0209	43,8881	0,5396
$\bar{\bar{x}}$	43,9545		

En este caso la media de todos los datos resulta $\bar{\bar{x}} = 43,9545$, se ha utilizado la agrupación por bloques, producción de un mismo día, el estimador de la desviación típica utilizando el rango medio resulta:

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_{2,2}} = \frac{0,5396}{1,128} = 0,47837$$

Los límites de control para este gráfico quedan:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{x}} \pm E_{2,2}\bar{R} &= 43,9545 \pm 2,66 (0,5396) \\ LCI &= 43,9545 - 2,66 (0,5396) = 42.519 \\ LCS &= 43,9545 + 2,66 (0,5396) = 45.390 \end{aligned}$$

El correspondiente gráfico para los recorridos se calcularía:

$$\begin{aligned} \bar{R} &= 0,5396 \\ LCI &= D_{3,2}\bar{R} = 0 (0,5396) = 0 \\ LCS &= D_{4,2}\bar{R} = 3,267 (0,5396) = 1.7629 \end{aligned}$$

Si en vez de usar el método de agrupación por bloques utilizáramos medias móviles de orden 3, se agruparán los datos en grupos de forma que el primero esté constituido por las 3 primeras mediciones, el segundo se forma añadiendo la cuarta medición y eliminando la primera, procediendo de este modo hasta completar todas las posibilidades, como aparece en la siguiente tabla:

x1	x2	x3	Rango (orden 3)
44,497	43,982	44,354	0,515
43,982	44,354	44,032	0,372
44,354	44,032	44,523	0,491
44,032	44,523	44,127	0,491
44,523	44,127	44,12	0,403
44,127	44,12	44,089	0,038
44,12	44,089	43,576	0,544
44,089	43,576	43,767	0,513
43,576	43,767	44,546	0,97
43,767	44,546	43,451	1,095
44,546	43,451	43,221	1,325
43,451	43,221	44,448	1,227
43,221	44,448	44,549	1,328
44,448	44,549	43,546	1,003
44,549	43,546	43,337	1,212
43,546	43,337	43,539	0,209
43,337	43,539	43,486	0,202
43,539	43,486	43,9	0,414

El rango medio en este caso (media de los rangos de orden 3) resulta $\bar{R} = 0,6862$ el estimador de la desviación típica utilizando el rango medio resulta:

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_{2,3}} = \frac{0,6862}{1,693} = 0,40532$$

Los límites de control para este gráfico quedan:

$$\begin{aligned} \bar{x} \pm E_{2,3}\bar{R} &= 43,9545 \pm 1,772(0,6862) \\ LCI &= 43,9545 - 1,772(0,6862) = 42.739 \\ LCS &= 43,9545 + 1,772(0,6862) = 45.17 \end{aligned}$$

El correspondiente gráfico para los recorridos se calcularía:

$$\begin{aligned} \bar{R} &= 0,6862 \\ LCI &= D_{3,3}\bar{R} = 0(0,6862) = 0 \\ LCS &= D_{4,3}\bar{R} = 2,575(0,6862) = 1.7670 \end{aligned}$$

Si en lugar de usar medias móviles de orden 3 se utilizan medias de orden 2, para lo que se agruparían los datos en submuestras de tamaño 2, primera y segunda observación, segunda y tercera, y así sucesivamente, los nuevos gráficos resultarían las siguientes estimaciones:

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_{2,2}} = \frac{0,517211}{1,128} = 0,45852$$

Gráfico X para alcohol

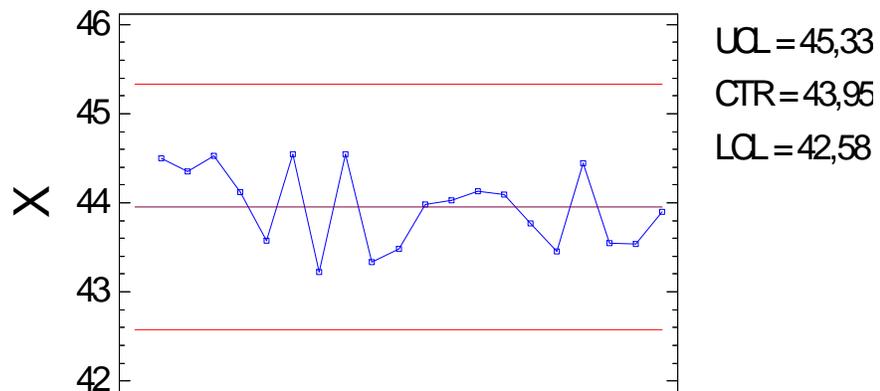


Figura 1-1 Gráfico de medias individuales de orden 2 para el contenido medio de alcohol.

Los límites de control para este gráfico quedan:

$$\begin{aligned}\bar{\bar{x}} \pm E_{2,2}\bar{R} &= 43,9545 \pm 2,66 (0,51721) \\ LCI &= 43,9545 - 2,66 (0,51721) = 42. 579 \\ LCS &= 43,9545 + 2,66 (0,51721) = 45. 33\end{aligned}$$

El correspondiente gráfico para los recorridos se calcularía:

$$\begin{aligned}\bar{R} &= 0,51721 \\ LCI &= D_{3,2}\bar{R} = 0 (0,51721) = 0 \\ LCS &= D_{4,2}\bar{R} = 3,267 (0,51721) = 1. 689 7\end{aligned}$$

En este caso los gráficos, utilizando el programa Statgraphics, resultan valores similares que pueden verse en las figuras siguientes:

1.3. Gráficos CUSUM

Los gráficos para la media de Shewhart permiten tomar decisiones sobre si el proceso se encuentra en control o no basándose en los datos de cada

Gráfico MR(2) para alcohol

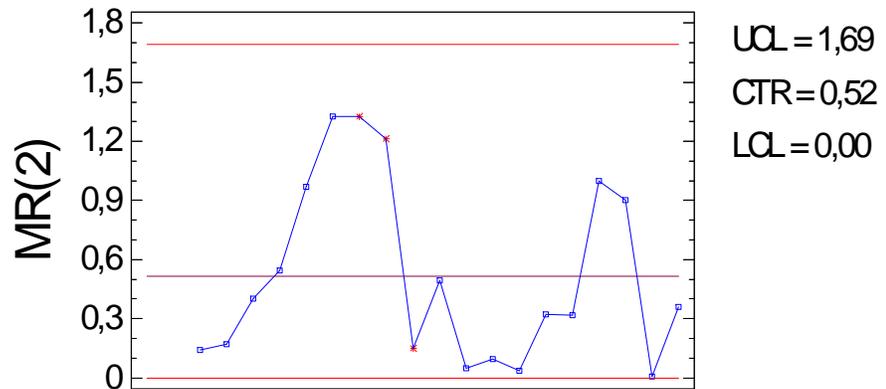


Figura 1-2 Grafico para los rangos de orden 2.

Curva OC para X

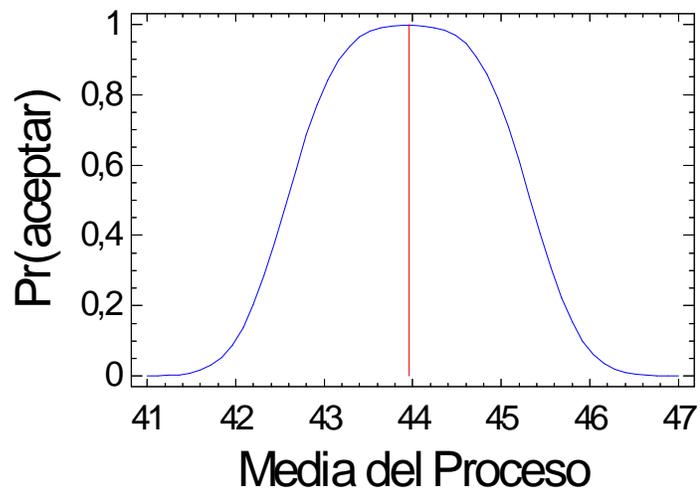


Figura 1-3 Curva característica de operación (OC).

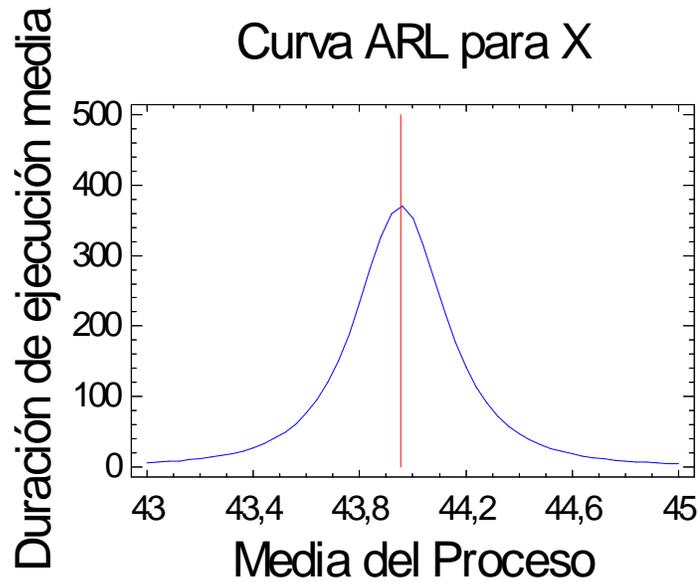


Figura 1-4 Curva ARL para el ejemplo del alcohol del aguardiente.

submuestra, no aprovechando toda la información anterior a una determinada muestra para la decisión. Como alternativa Page (1954) propuso el denominado gráfico de sumas acumulativas o gráficos CUSUM (Cumulative Sum) que basan la decisión de comprobar si el proceso está bajo control o no analizando toda o la mayor parte de la muestra. Para este fin se usará el estadístico s_r :

$$s_r = \sum_{i=1}^r (\bar{x}_i - \mu_0)$$

Este estadístico tiene en cuenta las r primeras submuestras para tomar la decisión sobre la muestra r -ésima. Considerando todas las diferencias de cada media muestral (\bar{x}_i) con la media del proceso (μ_0). Si se llama a estas diferencias $d_i = \bar{x}_i - \mu_0$, Los gráficos tipo Shewart podrían verse como gráficos basados en la evolución de estas diferencias d_i . Si ocurriese un desajuste muy pequeño, la evolución de estas diferencias sería poco eficaz para detectarla.

La idea del gráfico CUSUM es representar las sumas acumuladas de estas diferencias, es decir los valores: $s_1 = d_1$, $s_2 = d_1 + d_2$, $s_3 = d_1 + d_2 + d_3$, ...

De esta forma en cada instante r se considera también la información histórica de los valores anteriores. Un desajuste pequeño se irá así acumulando haciendo más fácil su detección.

El gráfico CUSUM es la representación de las sumas acumuladas de las desviaciones entre cada dato, en este caso la media muestral (\bar{x}_i), y un valor de referencia (μ_0). Bajo supuestos de normalidad es evidente deducir la distribución del estadístico s_r :

$$s_r \in N \left(r(\mu - \mu_0), \frac{r\sigma_0^2}{n} \right)$$

Cuando sea cierta la hipótesis nula $\mu = \mu_0$, las sumas acumuladas s_r tendrán media 0, con lo que es de esperar que oscilen alrededor de la recta $y = 0$. En el caso en que la hipótesis no sea cierta los valores graficados de las sumas s_r serán crecientes o decrecientes dependiendo del signo de $\mu - \mu_0$, lo que permitirá detectar salidas de control eligiendo convenientemente los límites.

Suelen ser efectivos cuando en un proceso se produce un desajuste muy pequeño (entre $0,5\sigma$ y $2,5\sigma$). Son pues gráficos que se proponen para la detección de desajustes pequeños y que se basan en la acumulación de la información, por lo que también se los conoce como gráficos de control con memoria.

Es resaltable que después de la primera propuesta de Page (1954) habría muchas otras mejoras como las de utilizar una máscara en forma de V para la toma de decisiones propuesta por Barnhard (1959), o las mejoras propuestas por Evan (1963), Jhonson y Leone (1962) o Goel y Wu (1971).

1.3.1. Construcción del gráfico CUSUM tabular

Los gráficos CUSUM pueden construirse tanto para medidas como para otros estadísticos, como la proporción de una binomial, la media de una Poisson, para las varianzas. En este tema supongamos que se desea controlar la evolución de una variable $X \sim N(\mu, \sigma)$, donde σ es conocida o se posee una estimación.

El CUSUM algorítmico (o tabular) calcula las desviaciones de cada valor respecto del valor objetivo o nominal μ . Se distinguirá entre desviaciones positivas y negativas, puesto que en muchas situaciones ambas desviaciones no tienen la misma repercusión.

Es necesario definir un valor K a partir del cual se condera que la desviación acumulada es significativa. Este valor determinara la sensisibilidad del gráfico de control. Si la suma acumulada hasta la observación i -ésima es menor que cierto umbral K , se considera que la desviación acumulada es cero. Si el gráfico es insensible a desviaciones no significativas, será más fácil visualizar las desviaciones que sean significativas. La representación grafica será más limpia. Uniendo esta idea de desviación significativa con las de separación de desviaciones positivas y negativas se tendrán dos tipos de sumas significativas acumuladas: C_i^+ para las desviaciones positivas y C_i^- para las negativas. Estas sumas acumuladas se definen de la siguiente forma:

- C_i^+ =acumulación de desviaciones positivas significativas:

$$C_i^+ = \text{máx}\{0, C_{i-1}^+ + (X_i - \mu) - K\}$$

De esta forma, si el proceso está bajo control, la variable X tomara valores cercanos al nominal y el termino C_i^+ tendera a tomar valores nulos.

- C_i^- = acumulación de desviaciones negativas significativas:

$$C_i^- = \min\{0, C_{i-1}^+ - (X_i - \mu) - K\}$$

El valor de K se suele elegir en función de la desviación que se quiera detectar. Supongamos que el valor nominal de la variable de interés es μ .

Los valores de las sumas acumuladas se han de comparar con el valor máximo admisible. Este valor, denominado valor de decisión H suele ser $H = h\sigma$, donde se recomienda que $h = 5$ y por tanto $H = 5\sigma$ (algunos autores también recomiendan valores de $h = 4$). Los valores $\pm H$ son los límites de control de este gráfico.

Tras una señal de alarma en el gráfico CUSUM se debe buscar la causa asignable que la originó. Puede suceder que dicha causa exista pero no se encuentre o que existan varias causas concurrentes y sólo parte de ellas sean corregidas.

Ejemplo: Con los datos de la resistencia del acero calcular el correspondiente gráfico cusum tabular.

Mediante el paquete Statgraphics resultará la siguiente construcción para este gráfico.

Gráfico CuSum para la media

UCL: +22,5845

Línea central: 0,0

LCL: -22,5845

0 fuera de límites

Gráfico cusum para los Rangos

UCL: +49,6723

Línea central: 23,4929

LCL: 0,0

0 fuera de límites

Estimaciones

Media del Proceso = 519,295

Sigma del Proceso = 10,1001

Rango Medio = 23,4929

1.3.2. Construcción del gráfico CUSUM con máscara V

Otra alternativa es la de utilizar una mascarilla en forma de V para la toma de decisiones (véase Barnhard (1959)). El procedimiento de la máscara V es el procedimiento más popular de gráfico CUSUM, estando implementado

Gráfico de Estado CuSum para Resistencia_MPa

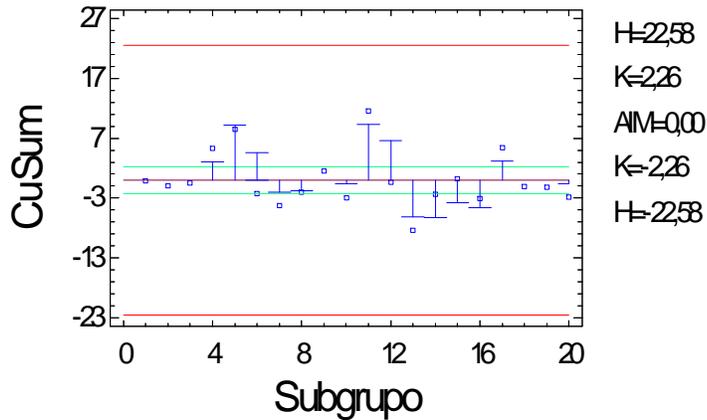


Figura 1-5 Cusum tabular para la muestra del acero.

en muchos paquetes estadísticos. La máscara V se basa en la representación grafica del estadístico CUSUM:

$$C_i = \sum_{j=1}^i (\bar{x}_j - \mu_0)$$

Aunque algunos programas informáticos utilizan la estandarización de la variable de interés:

$$C_i = \sum_{j=1}^i \left(\frac{\bar{x}_j - \mu_0}{\sigma} \right)$$

donde μ_0 es el valor nominal de referencia y σ la desviación típica (conocida o estimada) de la variable de interés.

Esta máscara V, se construye mediante el cálculo de un ángulo de amplitud θ junto con una línea horizontal. El extremo izquierdo de la línea horizontal (punto 0) se coloca en una de las observaciones (la que se quiere contrastar), y en el extremo derecho de dicho segmento horizontal (punto V) se coloca el vértice del ángulo. En estas plantillas, la distancia OP y el ángulo θ determinan la sensibilidad del gráfico de control.

Usualmente la máscara se sitúa sobre el último punto dibujado. Si alguno de los puntos previamente dibujados es recubierto por la máscara, es que ha ocurrido un cambio. Los puntos cubiertos por la parte superior de la máscara indican un decrecimiento en la media del proceso, en tanto que los cubiertos por la parte inferior de la máscara indican un incremento en la media del proceso. El primer punto recubierto por la máscara indica, aproximadamente, el tiempo en el que ocurrió el cambio. Cuando no hay puntos anteriores cubiertos por la máscara, es que el proceso está en control.

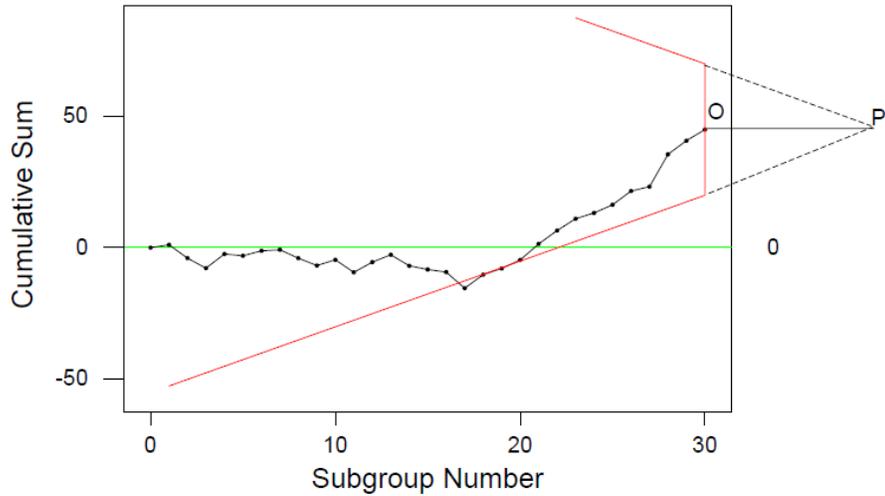


Figura 1-6 Construcción de una máscara V.

Muchos paquetes informáticos utilizan el procedimiento de Johnson y Leone para determinar el ángulo θ y la distancia d (distancia del segmento OP). Estos parámetros se fijan de la siguiente forma:

$$d = \frac{h}{K} = \frac{2}{\delta^2} \frac{\sigma^2}{\bar{n}} \ln \left(\frac{1 - \beta}{\alpha/2} \right)$$

$$\theta = \arctan \left(\frac{\delta}{2A} \right)$$

donde:

A depende de la escala del gráfico. Es la distancia horizontal entre puntos sucesivos del eje de abscisas medida en las unidades del eje de ordenadas. Si el gráfico se realiza con un programa estadístico este parámetro viene ya predeterminado y no necesita calcularlo el analista.

δ es la sensibilidad del análisis y es el grado de desajuste que queremos detectar, en número de desviaciones típicas. Si queremos detectar que la media aumente de μ_0 a μ_1 se tiene que $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma$

α es la probabilidad de una falsa alarma cuando el proceso está bajo control.

β es la probabilidad de NO detectar una desviación δ .

\bar{n} es el promedio de los tamaños muestrales. Si el gráfico es de observaciones individuales $\bar{n}=1$

En el Manual de calidad de Juran se presenta una versión simplificada de este procedimiento, elaborado a partir de una serie de simplificaciones y valores de parámetros de aplicación frecuente, y cuyos pasos son los siguientes:

1. Obtener una estimación del error estándar del estadístico que se dibuja; por ejemplo, puede ser obtenido de un gráfico de recorridos de otro estimador apropiado. Si se utiliza un gráfico de recorridos, el estimador es $\frac{\bar{R}}{d_2\sqrt{n}}$.

2. Determinar la mínima variación en la media D que se desea poder detectar. Calcular:

$$\delta = \frac{D}{\sigma_{\bar{X}}}$$

3. Determinar el nivel de significación α al que se desea tomar las decisiones. Para límites equivalentes a 3σ , el nivel de significación es $\alpha = 0,00135$.

4. Determinar el factor de escala k . Es el factor entre las escalas del eje vertical (estadístico considerado) respecto al eje horizontal (numeración de las muestras). Ewan (1963) recomendaba que era conveniente que k fuese un valor comprendido entre $\sigma_{\bar{X}}$ y $2\sigma_{\bar{X}}$, preferentemente cercano a $2\sigma_{\bar{X}}$.

5. Obtener la distancia principal d de la tabla siguiente utilizando el valor de δ obtenido en la etapa .

δ	θ	d
0,2	50'43'	330,4
0,4	11'19'	82,6
0,5	14°00'	52,9
0,6	16'42'	36,7
0,8	21'48'	20,6
1,0	26°34'	13,2
1,2	30°58'	9,2
1,3	32°59'	7,8
1,4	35°00'	6,7
1,6	38'40'	5,2
1,8	41'59'	4,1
2,0	45°00'	3,3
2,2	47°44'	2,7
2,4	50'12'	2,3
2,6	52'26'	2,0
2,8	54°28'	1,7
3,0	56'19'	1,5

6. Obtener el ángulo θ de la máscara de la tabla anterior hallando D/k , igualando a δ en la tabla y leyendo θ . Se debe utilizar interpolación lineal si fuese necesario.

Utilizar d y θ para construir la máscara en V.

El tamaño de las muestras para el gráfico CUSUM de medias es el mismo que para un gráfico . Sin embargo, Ewan (1963) sugiere, para obtener los mejores resultados, que se debe utilizar $n = 2,25s^2/D$ donde s es una estimación de la desviación típica del proceso.

En algunos procesos no es conveniente utilizar la máscara V. Se puede utilizar un método alternativo de tabulación que está muy bien adaptado a las aplicaciones con ordenador. Es equivalente al método de recorrido con la máscara.

También suele utilizarse otros procedimientos como el Nomograma de Kemp para la construcción de la máscara, en este caso se fija el ARL correspondiente

a la situación bajo control (es decir para μ_0) y el ARL que se desea obtener cuando el proceso está fuera de control y la media es $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma$.

Ewan (1963) compara los gráficos CUSUM y los para distintos cambios en la media del proceso. Para cambios entre y , el grafico CUSUM detecta el cambio con menos muestras de las que son necesarias en un grafico de medias . Para cambios mayores, no presentan ventaja los graficos CUSUM. La conclusion de Ewan supone que el gráfico sólo utiliza la regla de un punto fuera de los límites de control.

Si se utilizan otros criterios de existencia de situación de fuera de control (investigación de tendencias), entonces disminuye la ventaja de los gráficos CUSUM.

Autores como Montgomery desaconsejan esta forma de implementar el gráfico cusum (con máscara V) y prefieren el gráfico asociado al Cusum algorítmico o tabular analizado en la sección anterior. Entre los motivos aluden, entre otros, a que no está claro cuánto debemos extender hacia atrás los brazos de la máscara, dificultando la interpretación por partes del usuario.

Ejemplo: Realizar la construcción del gráfico cusum con máscara para el caso de los datos del acero.

Mediante el uso del paquete Statgraphics resulta:

Gráfico CuSum

Detectar cambio de 1,0 sigma = 10,1001

alpha = 0,01

beta = 0,01

V-máscara en la muestra 20

Gráfico de Rango

UCL: +3,0 sigma = 49,6723

Línea central = 23,4929

LCL: -3,0 sigma = 0,0

0 fuera de límites

Estimaciones

Media del Proceso = 519,295

Sigma del Proceso = 10,1001

Rango Medio = 23,4929

Gráfico CuSum para Resistencia_MPa

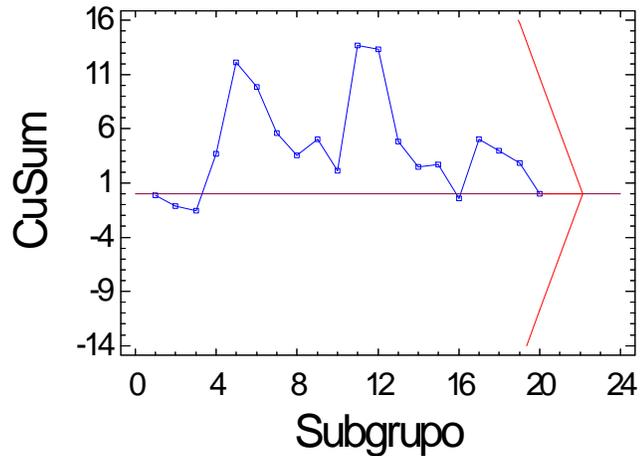


Figura 1-7 Gráfico Cusum para con máscara para los datos del acero.

1.4. Gráficos de control de medias móviles ponderadas exponencialmente (EWMA)

La salida de un proceso bajo supervisión puede analizarse también mediante la filosofía de las series temporales, pues en el fondo cuando se hacen las correspondientes gráficas de las submuestras en distintos períodos de tiempo, estas constituyen una serie temporal. En este sentido es donde se podría englobar los gráficos presentados en esta sección.

El gráfico de medias móviles con ponderación exponencial o gráfico EWMA (Exponentially Weighted Moving Average), fue introducido primeramente por Roberts (1959) y luego por Wortham y Ringer (1971), que lo propusieron para aplicarlo en procesos industriales, en sistemas de control en finanzas y en dirección, para las que los subgrupos formados por varios elementos no son aplicables.

Al igual que los gráficos CUSUM, son útiles para detectar pequeños cambios en la media.

Para este tipo de gráficos se toman normalmente datos individuales. Las observaciones individuales pueden ser medias (cuando las observaciones individuales de las que provienen las medias no están disponibles), lecturas individuales, cocientes, proporciones, o medidas similares.

1.4.1. Construcción del gráfico

El estadístico dibujado es la media ponderada de la observación actual y todas las observaciones precedentes, donde la media previa recibe más peso, es decir,

$$Z_t = \lambda x_t + (1 - \lambda)Z_{t-1} \quad 0 < \lambda < 1$$

Donde:

- $Z_0 = \mu$
- Z_t = media móvil ponderada exponencialmente en el tiempo actual t .
- Z_{t-1} = media móvil ponderada exponencialmente en el tiempo inmediatamente precedente $t - 1$.
- x_t = la observación presente.
- λ es el factor de ponderación para la observación actual, $0 \leq \lambda \leq 1$.

Si se cumplen las hipótesis de independencia y estabilidad sobre los x_t , se tiene que:

$$E(Z_t) = \mu$$

Y

$$Var(Z_t) = \sigma^2 \frac{\lambda(1 - \lambda)^{2t}}{2 - \lambda}$$

Cuando t aumenta, el último término entre paréntesis en la parte derecha converge rápidamente hacia uno, y la correspondiente expresión para la varianza se transforma en $Var(Z_t) = \sigma^2[\lambda/(2 - \lambda)]$.

Eligiendo $\lambda = 2/(t + 1)$, la expresión aproximada de la varianza se transforma en $Var(Z_t) \approx \sigma^2/t$ (varianza de medias de muestras de t elementos). Bajo estas condiciones, los límites de control se transforman en $\hat{\mu} \pm 3\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{t}}$. Para otros valores de λ , los límites de control son:

$$\begin{aligned} LSC &= \hat{\mu} + 3\hat{\sigma}\sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}} \\ LIC &= \hat{\mu} - 3\hat{\sigma}\sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}} \end{aligned}$$

Para las primeras observaciones, se debe utilizar la primera ecuación para la varianza. Si no se tiene una buena estimación para σ , se debe utilizar un gráfico de recorridos y estimar por $\frac{\bar{R}}{d_2\sqrt{n}}$. En el caso de valores individuales,

el recorrido móvil medio se puede utilizar en la forma en que se hizo para los gráficos de control de valores individuales.

El gráfico EWMA puede expresarse de la forma general:

$$Z_{t,k} = \sum_{i=1}^k (w_i \bar{x}_{t-i+1}) + a$$

En donde t es el instante actual, k es el número de medias consideradas en cada punto y que se llama orden del gráfico, w_i son los k pesos considerados y a es una constante que puede ser nula. Con esta expresión general pueden obtenerse distintos gráficos:

- Si $k = 1$, $w_i = 1$ y $a = 0$ obtendríamos el gráfico de Shewart para la media
- Si $w_i = 1$ y $a = -k\mu_0$ se obtiene el gráfico CUSUM en donde:

$$S_{t,k} = \sum_{i=1}^k (\bar{x}_{t-i+1} - \mu_0) = \sum_{i=1}^k \bar{x}_{t-i+1} - k\mu_0$$

- Si $w_i = \frac{1}{k}$ y $a = 0$ se obtiene el denominado gráfico de Medias Móviles

$$M_{t,k} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \bar{x}_{t-i+1}$$

- Si $w_i = \lambda(1 - \lambda)^{i-1}$ y $a = (1 - \lambda)^t \mu_0$ es el gráfico EWMA donde el estadístico está expresado como:

$$Z_t = \sum_{i=1}^k \lambda(1 - \lambda)^{i-1} \bar{x}_{t-i+1} + (1 - \lambda)^t \mu_0$$

Al igual que el grafico CUSUM, el grafico EWMA es más efectivo que el grafico de medias para detectar pequeños cambios en la media; sin embargo, ambos gráficos funcionan peor que el grafico de medias para grandes cambios. Para superar esta dificultad, algunos autores han propuesto representar los limites de Shewhart y los límites EWMA en el mismo gráfico.

Ejemplo: Construir el gráfico EWMA para los datos de resistencia del acero con $\lambda = 0,2$.

Gráfico EWMA - Lambda = 0,2

UCL: +3,0 sigma = 523,812

Línea central = 519,295

LCL: -3,0 sigma = 514,778

0 fuera de límites

Gráfico EWMA para Resistencia_MPa

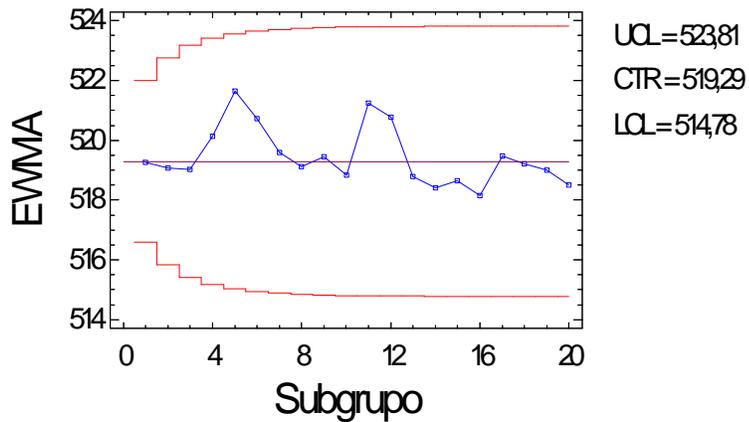


Figura 1-8 Gráfico EWMA para la resistencia del acero.

Gráfico de Rango

UCL: +3,0 sigma = 49,6723

Línea central = 23,4929

LCL: -3,0 sigma = 0,0

0 fuera de límites

Estimaciones

Media del Proceso = 519,295

Sigma del Proceso = 10,1001

Rango Medio = 23,4929

Como se comentó al principio de esta sección se puede realizar el estudio del proceso mediante la aplicación de la metodología de series temporales. Bajo esta perspectiva puede buscarse encontrarse el mejor modelo para los datos mediante el uso de la metodología Box-Jenkins de modelos ARIMA, siendo aplicables la mayoría de estas técnicas en este contexto.

Ejemplo: Analizar mediante un modelo ARIMA los datos del acero.

Gráfico ARIMA

UCL: +3,0 sigma = 533,628

Línea central = 519,338

LCL: -3,0 sigma = 505,048

0 fuera de límites

Gráfico de Rango

UCL: +3,0 sigma = 49,6723

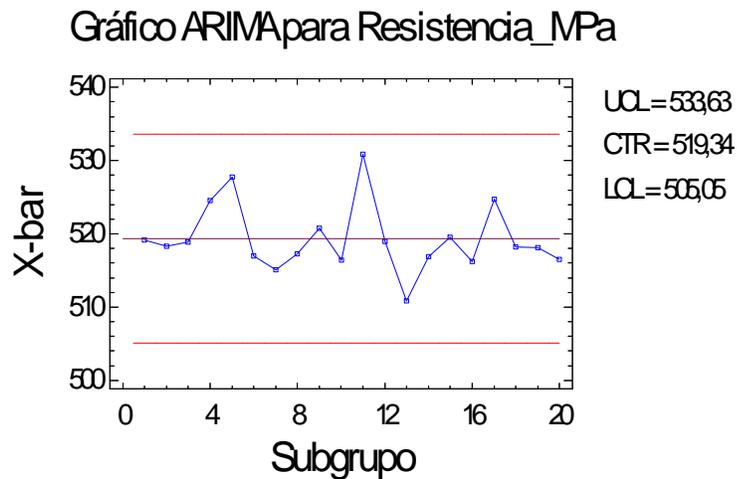


Figura 1-9 Gráfico ARIMA para los datos de resistencia del acero.

Línea central = 23,4929

LCL: -3,0 sigma = 0,0

0 fuera de límites

Estimaciones

Media del Proceso = 519,338

Sigma del Proceso = 10,651

Rango Medio = 23,4929

Resumen del Modelo ARIMA

Parámetro Estimado Error Estd. t P-Valor

AR(1) -0,00091808 0,232564 -0,00394765 0,9969

AR(2) -0,317454 0,232903 -1,36303 0,1907

Media 519,338 0,804927 645,2 0,0000

Constante 684,681

Pronóstico hacia atrás: si

Varianza del ruido blanco estimado = 21,0982 con 17 grados de libertad

Desviación típica del Ruido blanco estimado = 4,59327

Bibliografía

- [1] A. L. Goel, S. M. Wu (1971), Determination of A.R.L. and a contour nomogram for CUSUM charts to control normal mean, *Technometrics* 13, 221-230.
- [2] D. Brook, D. A. Evans (1972), An approach to the probability distribution of cusum run length, *Biometrika* 59, 539-548.
- [3] J. M. Lucas, R. B. Crosier (1982), Fast initial response for cusum quality-control schemes: Give your cusum a headstart, *Technometrics* 24, 199-205.
- [4] L. C. Vance (1986), Average run lengths of cumulative sum control charts for controlling normal means, *Journal of Quality Technology* 18, 189-193.
- [5] E. S. Page (1954). Continuous inspection schemes. *Biometrika*, 41, 100-15.
- [6] K.-H. Waldmann (1986), Bounds for the distribution of the run length of one-sided and two-sided CUSUM quality control schemes, *Technometrics* 28, 61-67.
- [7] R. B. Crosier (1986), A new two-sided cumulative quality control scheme, *Technometrics* 28, 187-194. xewma.arl for zero-state ARL computation of EWMA control charts and xcusum.ad for the steady-state ARL.
- [8] S. V. Crowder (1987), A simple method for studying run-length distributions of exponentially weighted moving average charts, *Technometrics* 29, 401-407.
- [9] J. M. Lucas, M. S. Saccucci (1990), Exponentially weighted moving average control schemes: Properties and enhancements, *Technometrics* 32, 1-12.
- [10] S. Chandrasekaran, J. R. English, R. L. Disney (1995), Modeling and analysis of EWMA control schemes with variance-adjusted control limits, *IIE Transactions* 277, 282-290.
- [11] T. R. Rhoads, D. C. Montgomery, C. M. Mastrangelo (1996), Fast initial response scheme for exponentially weighted moving average control chart, *Quality Engineering* 9, 317-327.
- [12] S. H. Steiner (1999), EWMA control charts with time-varying control limits and fast initial response, *Journal of Quality Technology* 31, 75-86.
- [13] S. Knoth (2003), EWMA schemes with non-homogeneous transition kernels, *Sequential Analysis* 22, 241-255.

- [14] S. Knoth (2004), Fast initial response features for EWMA Control Charts, forthcoming in Statistical Papers.