



# 1 Incertidumbre en el cálculo de emisión de CO<sub>2</sub>

**Adela Martínez Calvo**  
**María Leyenda Rodríguez**

## 1. INTRODUCCIÓN

Llamaremos **incertidumbre** de una variable a la medida adimensional de su variabilidad obtenida mediante la siguiente expresión

$$I = 1,96 \frac{\sigma}{\mu}$$

siendo  $\mu$  y  $\sigma$  la media y la desviación típica (precisión) respectivamente de dicha variable<sup>1</sup> (medida).

Observemos como se puede calcular la incertidumbre de una medida a partir de medidas con incertidumbres conocidas, es decir, una medida indirecta Y que se obtiene a partir de dos medidas directas  $X_1$  y  $X_2$  mediante la expresión matemática:

$$Y = f(X_1, X_2)$$

en donde f es una función de dos variables. La incertidumbre de Y viene dada por:

$$I_Y = \sqrt{\left( \frac{\partial f(X_1, X_2)}{\partial X_1} I_{x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial f(X_1, X_2)}{\partial X_2} I_{x_2} \right)^2} \quad (1)$$

en donde  $I_{x_1}$  y  $I_{x_2}$  son las incertidumbres totales de las medidas directas.

Casos particulares sencillos,

### Variables no correlacionadas

|                             |                                                                                                                                                 |
|-----------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Incetidumbre de la suma     | $U_{total} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^n \omega_i} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n \omega_i^2 U_i^2}}{\sum_{i=1}^n \omega_i}$ |
| Incetidumbre de un producto | $U_{total} = \sqrt{\sum_{i=1}^n U_i^2}$                                                                                                         |

### Variables interdependientes

|                             |                                                                                                                             |
|-----------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Incetidumbre de la suma     | $U_{total} = \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i}{\sum_{i=1}^n \omega_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i U_i}{\sum_{i=1}^n \omega_i}$ |
| Incetidumbre de un producto | $U_{total} = \sum_{i=1}^n U_i$                                                                                              |

<sup>1</sup> Con esta definición, se está suponiendo implícitamente que la variable en estudio es normal

## NOTA:

Cuando nos referimos a variables no correlacionadas nos estamos refiriendo a medidas independientes y cuando nos referimos a variables interdependientes.

La notación empleada para es la siguiente,  $x_i$  es la media de la medida i-ésima e  $U_i$  es la incertidumbre de la medida i-ésima.

A continuación se detallan las expresiones que se han empleado para calcular las incertidumbres de las emisiones de CO<sub>2</sub> a partir de ciertas incertidumbres mensuales estimadas analíticamente.

## 2. INCERTIDUMBRE EN EL CÁLCULO DE LA EMISIÓN MENSUAL DE CO<sub>2</sub> POR GRUPO GENERADOR

### 2.1. Incertidumbre en el cálculo de la emisión mensual de CO<sub>2</sub> por grupo generador derivada del consumo de carbón

Esta emisión mensual viene dada por la expresión

$$E_k^c = DA_k^c \cdot FE_k^c \cdot FO_k^c = \left[ Q_k^c \cdot VCN_k^c \cdot 4,1868 \cdot 10^{-6} \right] \cdot \left[ \frac{C_k \cdot PM(CO_2) \cdot 10^4}{PA(C) \cdot VCN_k^c \cdot 4,1868} \right] \cdot \left[ \frac{C_{ek}}{C_k} \right]$$

$$= \frac{PM(CO_2)}{PA(C)} \cdot 10^{-2} \cdot Q_k^c \cdot C_{ek} = \frac{PM(CO_2)}{PA(C)} \cdot 10^{-2} \cdot Q_k^c \cdot \left[ C_k - \frac{C_{rk} \cdot A_k}{100 - C_{rk} - 2,4969 \cdot S_{rk}} \right]$$

siendo

$Q_k^c$ : consumo mensual de carbón en el grupo generador k (t),

$C_k$ : contenido en C (s/b) del carbón consumido mensualmente en el grupo k(%),

$C_{rk}$ : inquemados en residuos sólidos en el grupo k (%),

$S_{rk}$ : azufre en residuos sólidos en el grupo k (%) y

$A_k$ : contenido en cenizas (s/b) mensual del carbón en el grupo generador k (%).

Sean  $\mu_{Q_k^c}$  (respectivamente  $\mu_{C_k}$ ,  $\mu_{C_{rk}}$ ,  $\mu_{S_{rk}}$  y  $\mu_{A_k}$ ) y  $I_{Q_k^c}$  (respectivamente  $I_{C_k}$ ,  $I_{C_{rk}}$ ,  $I_{S_{rk}}$  y  $I_{A_k}$ ) la media y la incertidumbre de  $Q_k^c$  (respectivamente,  $C_k$ ,  $C_{rk}$ ,  $S_{rk}$  y  $A_k$ ).

Entonces, aplicando la fórmula de agregación de incertidumbres para variables no correlacionadas se obtiene

$$\mu_{E_k^c} = \frac{PM(CO_2)}{PA(C)} \cdot 10^{-2} \cdot \mu_{Q_k^c} (\mu_{C_k} - \mu_Y \cdot \mu_{A_k})$$

$$I_{E_k^c} = \sqrt{I_{Q_k^c}^2 + \frac{1}{(\mu_{C_k} - \mu_Y \cdot \mu_{A_k})^2} \left[ \mu_{C_k}^2 \cdot I_{C_k}^2 + \mu_Y^2 \cdot \mu_{A_k}^2 \left( \frac{I_Y^2 \cdot I_{A_k}^2}{1,96^2} + I_Y^2 + I_{A_k}^2 \right) \right]}$$

El cálculo de  $I_{E_k^c}$  se encuentra en el apartado 5.

Siendo  $\gamma = \frac{C_{rk}}{100 - C_{rk} - 2,4969 \cdot S_{rk}}$ ,  $\mu_Y = \frac{\mu_{C_{rk}}}{100 - \mu_{C_{rk}} - 2,4969 \cdot \mu_{S_{rk}}}$  e

$$I_Y = \frac{\sqrt{(100 - 2,4969 \cdot \mu_{S_{rk}})^2 \cdot I_{C_{rk}}^2 + (2,4969 \cdot \mu_{C_{rk}} \cdot I_{S_{rk}})^2}}{(100 - \mu_{C_{rk}} - 2,4969 \cdot \mu_{S_{rk}})^2}$$

Para obtener  $I_s$  aplicamos la fórmula (1) directamente. Los cálculos están realizados en el apartado 6.

## 2.2. Incertidumbre en el cálculo de la emisión mensual de CO<sub>2</sub> por grupo generador derivada del consumo de fuelóleo

Esta emisión mensual viene dada por la expresión

$$\begin{aligned} E_k^F &= DA_k^F \cdot FE_k^F \cdot FO_k^F = [Q_k^F \cdot VCN^F \cdot 4,1868 \cdot 10^{-6}] \cdot [77,48] \cdot [0,995] \\ &= 9597 \cdot 4,1868 \cdot 10^{-6} \cdot 77,48 \cdot 0,995 \cdot Q_k^F \end{aligned}$$

siendo

$Q_k^F$ : consumo mensual de fuelóleo en el grupo generador k (TJ).

Sean  $\mu_{Q_k^F}$  y  $I_{Q_k^F}$  la media y la incertidumbre de  $Q_k^F$ .

Entonces  $\mu_{E_k^F} = 9597 \cdot 4,1868 \cdot 10^{-6} \cdot 77,48 \cdot 0,995 \cdot \mu_{Q_k^F}$  e  $I_{E_k^F} = I_{Q_k^F}$ .

## 2.3. Incertidumbre en el cálculo de la emisión mensual de CO<sub>2</sub> por grupo generador derivada del consumo de gasóleo

Esta emisión mensual viene dada por la expresión

$$\begin{aligned} E_k^G &= DA_k^G \cdot FE_k^G \cdot FO_k^G = [V_k \cdot 0,84 \cdot VCN^G \cdot 4,1868 \cdot 10^{-6}] \cdot [73,52] \cdot [0,995] \\ &= 0,84 \cdot 10285 \cdot 4,1868 \cdot 10^{-6} \cdot 73,52 \cdot 0,995 \cdot V_k \end{aligned}$$

siendo

$V_k$ : consumo mensual de gasóleo en el grupo generador k (m<sup>3</sup>).

Sean  $\mu_{V_k}$  y  $I_{V_k}$  la media y la incertidumbre de  $V_k$ .

Entonces  $\mu_{E_k^G} = 0,84 \cdot 10285 \cdot 4,1868 \cdot 10^{-6} \cdot 73,52 \cdot 0,995 \cdot \mu_{V_k}$  e  $I_{E_k^G} = I_{V_k}$ .

## 2.4. Incertidumbre en el cálculo de la emisión mensual de CO<sub>2</sub> por grupo generador

Esta emisión mensual viene dada por la expresión

$$E_{Mk} = E_k^C + E_k^F + E_k^G.$$

Entonces, se calcula la incertidumbre aplicando la fórmula de agregación de incertidumbres para variables no correlacionadas

$$\mu_{E_{Mk}} = \mu_{E_k^C} + \mu_{E_k^F} + \mu_{E_k^G} \text{ e } I_{E_{Mk}} = \frac{\sqrt{\mu_{E_k^C}^2 \cdot I_{E_k^C}^2 + \mu_{E_k^F}^2 \cdot I_{E_k^F}^2 + \mu_{E_k^G}^2 \cdot I_{E_k^G}^2}}{\mu_{E_k^C} + \mu_{E_k^F} + \mu_{E_k^G}}.$$

### 3. INCERTIDUMBRE EN EL CÁLCULO DE LA EMISIÓN MENSUAL DE CO<sub>2</sub> TOTAL CENTRAL

---

La emisión mensual de CO<sub>2</sub> total central se obtiene mediante la expresión

$$E_{MT} = \sum_k E_{Mk} .$$

En este caso la incertidumbre se calcula como la incertidumbre de una suma de variables interdependientes,

$$\mu_{E_{MT}} = \sum_k \mu_{E_{Mk}} \text{ e } I_{E_{MT}} = \frac{\sum_k \mu_{E_{Mk}} \cdot I_{E_{Mk}}}{\sum_k \mu_{E_{Mk}}} .$$

Esta forma de calcular la incertidumbre es conservadora, ya que existen algunas variables que son independientes, como es el caso del consumo de carbón para cada grupo, por lo que la incertidumbre en realidad es algo menor.

## 4. INCERTIDUMBRE EN EL CÁLCULO DE LA EMISIÓN ANUAL DE CO<sub>2</sub> TOTAL CENTRAL

---

La emisión anual de CO<sub>2</sub> total central se obtiene mediante la expresión

$$E_{AT} = \sum_M E_{MT}.$$

Entonces, la incertidumbre anual se calcula aplicando la fórmula de agregación de incertidumbres para variables interdependientes

$$\mu_{E_{AT}} = \sum_M \mu_{E_{MT}} \text{ e } I_{E_{AT}} = \frac{\sum_M \mu_{E_{MT}} \cdot I_{E_{MT}}}{\sum_M \mu_{E_{MT}}}.$$



## 5. CALCULO DE LA INCERTIDUMBRE DE $E_k^c$

Sea

$$E_k^c = \frac{PM(CO_2)}{PA(C)} \cdot 10^{-2} \cdot Q_k^c \cdot \left[ C_k - \frac{C_{rk} \cdot A_k}{100 - C_{rk} - 2,4969 \cdot S_{rk}} \right]$$

Considerando

$$\gamma = \frac{C_{rk}}{100 - C_{rk} - 2,4969 \cdot S_{rk}}$$

Obtenemos que

$$E_k^c \sim Q_k^c \cdot [C_k - \gamma \cdot A_k]$$

Observamos que calcular la incertidumbre de  $E_k^c$  es lo mismo que calcular la incertidumbre de  $Q_k^c \cdot [C_k - \gamma \cdot A_k]$ . Por simplificar la notación consideramos  $X = C_k - \gamma \cdot A_k$ .

Por tanto, como  $E_k^c = Q_k^c \cdot X$ , es decir, es producto de dos medidas no correlacionadas, su incertidumbre vendrá dada por la siguiente expresión;

$$I_{E_k} = \sqrt{I_{Q_k^c}^2 + I_X^2}$$

A continuación, nos centraremos en el cálculo de la incertidumbre de X. Para ello, consideraremos una nueva variable  $Y = \gamma \cdot A_k$ ; de la que calcularemos su media y varianza.

- $\mu_Y = \mu_\gamma \cdot \mu_{A_k}$
- $\text{Var}(Y) = \text{Var}(\gamma \cdot A_k) = \mu_{A_k}^2 \sigma_\gamma^2 + \mu_\gamma^2 \sigma_{A_k}^2 + \sigma_\gamma^2 \sigma_{A_k}^2$

$$= \mu_{A_k}^2 \frac{\mu_\gamma^2 I_\gamma^2}{1,96^2} + \mu_\gamma^2 \frac{\mu_{A_k}^2 I_{A_k}^2}{1,96^2} + \frac{\mu_\gamma^2 I_\gamma^2}{1,96^2} \frac{\mu_{A_k}^2 I_{A_k}^2}{1,96^2} = \frac{\mu_Y^2 \cdot \mu_{A_k}^2 \left( \frac{I_Y^2 \cdot I_{A_k}^2}{1,96^2} + I_Y^2 + I_{A_k}^2 \right)}{1,96^2}$$

Luego, la media de X es

- $\mu_X = \mu_{C_k} - \mu_Y \cdot \mu_{A_k}$

y su varianza viene dada por la siguiente expresión

- $\text{Var}(X) = \text{Var}(C_k - \gamma \cdot A_k) = \text{Var}(C_k) + \text{Var}(\gamma \cdot A_k)$

$$= \frac{\mu_{C_k}^2 \cdot I_{C_k}^2}{1,96^2} + \frac{\mu_Y^2 \cdot \mu_{A_k}^2 \left( \frac{I_Y^2 \cdot I_{A_k}^2}{1,96^2} + I_Y^2 + I_{A_k}^2 \right)}{1,96^2} = \frac{\mu_{C_k}^2 \cdot I_{C_k}^2 + \mu_Y^2 \cdot \mu_{A_k}^2 \left( \frac{I_Y^2 \cdot I_{A_k}^2}{1,96^2} + I_Y^2 + I_{A_k}^2 \right)}{1,96^2}$$

La expresión que determina la incertidumbre de X es la siguiente

$$I_x = \frac{1}{\mu_{C_k} - \mu_Y \cdot \mu_{A_k}} \cdot \sqrt{\mu_{C_k}^2 \cdot I_{C_k}^2 + \mu_Y^2 \cdot \mu_{A_k}^2 \left( \frac{I_Y^2 \cdot I_{A_k}^2}{1,96^2} + I_Y^2 + I_{A_k}^2 \right)}$$

Finalmente, obtenemos la expresión de la incertidumbre de  $E_k^c$

$$I_{E_k^c} = \sqrt{I_{Q_k^c}^2 + I_X^2} = \sqrt{I_{Q_k^c}^2 + \frac{1}{(\mu_{C_k} - \mu_Y \cdot \mu_{A_k})^2} \left[ \mu_{C_k}^2 \cdot I_{C_k}^2 + \mu_Y^2 \cdot \mu_{A_k}^2 \left( \frac{I_Y^2 \cdot I_{A_k}^2}{1,96^2} + I_Y^2 + I_{A_k}^2 \right) \right]}$$

## 6. CALCULO DE LA INCERTIDUMBRE DE $\gamma$

Sea

$$\gamma = \frac{C_{rk}}{100 - C_{rk} - 2,4969 \cdot S_{rk}}$$

Luego,

$$\gamma = f(C_{rk}, S_{rk})$$

Por lo tanto la incertidumbre de  $\gamma$ , vendrá dada por la siguiente expresión:

$$I_{\gamma} = \sqrt{\left(\frac{\partial f(C_{rk}, S_{rk})}{\partial C_{rk}}\right)^2 \cdot I_{C_{rk}}^2 + \left(\frac{\partial f(C_{rk}, S_{rk})}{\partial S_{rk}}\right)^2 \cdot I_{S_{rk}}^2}$$

Dónde,

$$\frac{\partial f(C_{rk}, S_{rk})}{\partial C_{rk}} = \frac{100 - C_{rk} - 2,4969 \cdot S_{rk} - C_{rk}(-1)}{(100 - C_{rk} - 2,4969 \cdot S_{rk})^2}$$

$$= \frac{100 - 2,4969 \cdot S_{rk}}{(100 - C_{rk} - 2,4969 \cdot S_{rk})^2}$$

$$\frac{\partial f(C_{rk}, S_{rk})}{\partial S_{rk}} = \frac{-C_{rk}(-2,4969)}{(100 - C_{rk} - 2,4969 \cdot S_{rk})^2}$$

$$= \frac{2,4969 \cdot C_{rk}}{(100 - C_{rk} - 2,4969 \cdot S_{rk})^2}$$

De esta forma obtenemos

$$I_{\gamma} = \sqrt{\left(\frac{100 - 2,4969 \cdot \mu_{S_{rk}}}{(100 - \mu_{C_{rk}} - 2,4969 \cdot \mu_{S_{rk}})^2}\right)^2 \cdot I_{C_{rk}}^2 + \left(\frac{2,4969 \cdot \mu_{C_{rk}}}{(100 - \mu_{C_{rk}} - 2,4969 \cdot \mu_{S_{rk}})^2}\right)^2 \cdot I_{S_{rk}}^2}$$

$$I_{\gamma} = \frac{\sqrt{(100 - 2,4969 \cdot \mu_{S_{rk}})^2 \cdot I_{C_{rk}}^2 + (2,4969 \cdot \mu_{C_{rk}} \cdot I_{S_{rk}})^2}}{(100 - \mu_{C_{rk}} - 2,4969 \cdot \mu_{S_{rk}})^2}$$