Contribuciones a la teoría del valor en juegos cooperativos con condicionamientos exógenos

José M^{a}Alonso Meijide

Enero de 2002

Índice

Introducción

El propósito de encontrar soluciones para diversos problemas que se plantean en las actividades humanas ha dado lugar, en muchas ocasiones, al desarrollo de nuevas disciplinas matemáticas. La introducción de modelos matemáticos ha permitido, en ámbitos como la Economía, la Medicina o la Ingeniería, dar respuesta a diversos problemas que se han presentado en el contexto de estas ciencias.

La Teoría de Juegos es una rama de las Matemáticas que se dedica al estudio de los problemas de decisión en los que interaccionan varios decisores. La Teoría de Juegos es una herramienta fundamental para las Ciencias Sociales (especialmente para la Economía y la Politología), pero también se ha aplicado con éxito en otros ámbitos, como la Biología, las Ciencias Medioambientales, o los problemas militares.

El primer trabajo importante de Teoría de Juegos fue publicado en el año 1928 por John von Neumann; en él se demuestra el teorema minimax en el contexto de los juegos bipersonales finitos de suma nula. En el año 1944, John von Neumann y Oscar Morgenstern publican *Theory of Games and Economic Behavior;* la aparición de esta obra suele considerarse como el nacimiento de la Teoría de Juegos. Cincuenta años más tarde, el gran impacto que la Teoría de Juegos ha tenido en el desarrollo de la Economía moderna queda oficialmente reconocido al serle concedido el Premio Nobel de Economía a tres teóricos de juegos: John Nash, Reinhard Selten y John Harsanyi.

Los juegos suelen clasificarse en dos tipos: los no cooperativos y los cooperativos. En los juegos cooperativos, que son los que se tratan en esta memoria, los jugadores disponen de mecanismos que les permiten tomar acuerdos vinculantes. El problema central de los juegos cooperativos es el de proponer cómo deben repartirse entre los jugadores los beneficios que se generan con su cooperación. Cuando cualquier reparto es posible decimos que estamos ante un juego cooperativo con utilidad transferible (abreviadamente, ante un juego TU).

En esta memoria se estudian algunos modelos de juegos cooperativos con utilidad transferible con condicionamientos exógenos. Estos condicionamientos exógenos vienen determinados por:

- Existencia de una estructura de uniones *a priori*, establecida a partir de una partición del conjunto de jugadores. Aquellos jugadores que forman parte de la misma unión presentan mayores posibilidades de colaboración entre sí que con aquellos que están fuera de la unión.

- Limitación en la comunicación entre los jugadores, que viene dada por un grafo. Este grafo proporciona un sistema de comunicación que determina que dos jugadores pueden comunicarse si existe un conjunto de arcos del grafo que los conecte.

- Presencia de un conjunto de puntos en un espacio euclídeo, uno para cada jugador. La situación de estos puntos proporciona información adicional sobre la posición ideológica de los jugadores. En principio, un jugador tiene más posibilidades de colaboración con aquellos jugadores cuyos puntos asociados estén próximos a su punto asociado.

En esta memoria se ha optado por empezar todos los capítulos con una revisión de resultados relacionados con los modelos que se van a estudiar, para presentar a continuación, los resultados originales. De acuerdo con estas consideraciones, esta memoria titulada *Contribuciones a la teoría del valor en juegos cooperativos con condicionamientos exógenos* se estructura en cuatro capítulos, que se resumen a continuación.

En la primera parte del capítulo 1 se introducen algunos conceptos y resultados básicos referentes a los juegos TU y a los valores de Shapley y de Banzhaf. A continuación se presentan, con algo más de profundidad, los juegos simples y, para este tipo de juegos, los índices de poder de Shapley-Shubik, Banzhaf-Coleman y Deegan-Packel. Los únicos resultados originales de este capítulo son referentes a este último índice de poder, para el que se propone una nueva caracterización, sin emplear la propiedad de fusión. También se ilustra su cálculo a partir de la extensión multilineal y empleando un método basado en funciones generatrices.

En el capítulo 2 se consideran juegos cooperativos en los que existe una estructura de uniones *a priori*. Para estas situaciones se han propuesto en la literatura diversos valores. Uno de ellos es el valor de Owen, que puede entenderse como una modificación del valor de Shapley. Otro valor propuesto en este contexto (que se denominará valor de Banzhaf-Owen) es el definido por Owen extendiendo el valor de Banzhaf a juegos con uniones *a priori*. En la segunda sección de este capítulo se presenta una nueva caracterización para el valor de Banzhaf-Owen empleando el concepto de valor coalicional. El valor de Banzhaf-Owen no satisface la propiedad de simetría en el juego cociente. En la tercera sección del capítulo 2 se propondrá una nueva modificación del valor de Banzhaf que sí cumple esta propiedad. Para este nuevo valor se proporcionan diversas caracterizaciones y se verá que existe una relación entre él y el valor de Owen similar a la relación existente entre el valor de Banzhaf y el valor de Shapley. En las siguientes secciones se definen y caracterizan dos extensiones para el índice de poder de Deegan-Packel para juegos simples con uniones *a priori*. A continuación, se presenta el modo de calcular los tres nuevos valores propuestos empleando la extensión multilineal del juego. En la siguiente sección se propone un procedimiento basado en funciones generatrices, que permite el cálculo de todos los valores coalicionales estudiados anteriormente, para juegos de mayoría ponderada con uniones *a priori*.

En el capítulo 3, se estudian situaciones cooperativas en las que los jugadores no pueden comunicarse libremente, sino a través de los arcos de un grafo de comunicación. Para estas situaciones, Myerson propuso un valor que se conoce con el nombre de valor de Myerson. Este valor es una extensión del valor de Shapley, ya que cuando todos los jugadores pueden comunicarse directamente (es decir, cuando el grafo es completo), el valor de Myerson coincide con el valor de Shapley. Además, el valor de Myerson de un juego con comunicación restringida mediante grafos, coincide con el valor de Shapley de un juego TU asociado al juego con comunicación restringida, que se denomina juego de comunicación. En este capítulo se proporcionan modificaciones del valor de Banzhaf y del índice de poder de Deegan-Packel para situaciones con comunicación restringida. Para estas modificaciones se proponen diversas caracterizaciones.

En el capítulo 4 se aborda el estudio de los juegos espaciales. Un juego espacial es un juego simple en el que cada jugador tiene asociado un punto en un espacio euclídeo m-dimensional. Estos puntos determinan el posicionamiento de los jugadores respecto a ciertas variables de interés. El poder de un jugador en un juego simple, calculado según el índice de poder de Shapley-Shubik, coincide con la probabilidad de que dicho jugador sea pívot, asumiendo una distribución de probabilidad uniforme sobre el conjunto de permutaciones de los jugadores. Al introducir el conjunto de puntos asociados a los jugadores, parece razonable suponer que la configuración espacial de estos puntos afecte a las probabilidades asignadas a estas permutaciones. En la segunda sección se hace una revisión de resultados existentes en la literatura, donde se proponen diversas modificaciones del modo de otorgar distintas probabilidades a las permutaciones de los jugadores. A continuación se presenta una nueva forma de asignación de probabilidades. En la tercera sección se extienden estas modificaciones a los juegos con uniones *a priori*. En la siguiente sección, se introduce y estudia una nueva familia de valores, a la que se denominará familia de valores pseudo-probabilísticos, que extiende la familia de valores probabilísticos. Para finalizar este capítulo, se propone una propiedad que se considera adecuada en este contexto: la simetría espacial. Con esta propiedad se caracterizan varios índices de poder para la familia de los juegos espaciales, viendo que algunos de ellos son valores pseudo-probabilísticos.

Se finaliza esta memoria con un apartado de conclusiones, en el que se relacionan las soluciones presentadas, un resumen de las propiedades utilizadas y la bibliografía más relevante que se ha empleado.

Capítulo 1

Índices de poder en juegos simples

Este capítulo está dedicado al estudio de los juegos simples. Se comenzará haciendo una revisión de conceptos y resultados básicos relativos a los juegos TU. Más adelante, se analizarán con más detalle los juegos simples, centrando este análisis en el estudio de distintos índices de poder.

1.1 Conceptos básicos de juegos con utilidad transferible

Definición 1.1.1 *Un juego cooperativo con utilidad transferible es un par* (N, v) *donde* $N = \{1, 2, ..., n\}$ *es el conjunto de jugadores y* $v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función que verifica que* $v(\emptyset) = 0$*.*

La función v se denomina función característica del juego. Dada una coalición $T \subseteq N, v(T)$ representa el pago que se pueden asegurar los jugadores de T, independientemente de cómo actúen el resto de los jugadores.

Vamos a denotar por $TU(N)$ el conjunto de todos los juegos cooperativos con utilidad transferible en los que el conjunto de jugadores es $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. En algunas ocasiones, identificaremos un juego (N, v) con su función característica v por cuestiones de simplicidad en la notación.

Un juego (N, v) de $TU(N)$ se dice que es superaditivo si para todo par de coaliciones $S, T \subseteq N$, tal que $S \cap T = \emptyset$ se tiene que $v(T \cup S) \geq v(T) + v(S)$.

Un juego (N, v) de $TU(N)$ se dice que es monótono si $v(T) \leq v(S)$, para todo par de coaliciones $S, T \subseteq N$ tal que $T \subseteq S$.

Dado un juego $(N, v) \in TU(N)$:

- Se dice que un jugador $i \in N$ es un títere si
  $v(S \cup i) = v(S) + v(i)$, para cualquier coalición $S \subseteq N \backslash i$.
- Se dice que $i \in N$ es un jugador nulo si
  $v(S \cup i) = v(S)$, para cualquier coalición $S \subseteq N \backslash i$.
- Se dice que dos jugadores $i, j \in N$ son simétricos si $v(S \cup i) = v(S \cup j)$, para cualquier coalición $S \subseteq N \backslash \{i, j\}$.
- Un soporte para el juego es una coalición T que verifica $v(S) = v(S \cap T)$, para cualquier coalición $S \subseteq N$.

Se dirá que un juego (N, v) de $TU(N)$ es un juego de unanimidad si existe una coalición S tal que:

$$v(T) = \begin{cases} 1 & si\ S \subseteq T \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

En este caso, se denotará por u_S su función característica. En Shapley (1953) se demuestra que dado un conjunto N finito, la familia de todos los juegos de unanimidad que pueden definirse, constituye una base del espacio vectorial $TU(N)$. En concreto, se demuestra el siguiente resultado.

Teorema 1.1.1 *Si $(N, v) \in TU(N)$ entonces*

$$v = \sum_{S \in 2^N \backslash \emptyset} c_S u_S, \tag{1.1}$$

donde c_S (coordenada de unanimidad) es el número real

$$c_S = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{s-t} v(T).$$

Además, (1.1) es la única forma de expresar v como combinación lineal de los juegos de unanimidad $\{u_S / S \in 2^N \backslash \emptyset\}$.

Dado un juego $(N, v) \in TU(N)$, suponiendo que existe algún tipo de acuerdo entre los jugadores, existe una cantidad $v(N)$ que los jugadores tienen para repartirse entre todos ellos. Esto puede hacerse de cualquier forma, pero parece lógico suponer que ningún jugador aceptará un pago menor de lo que puede obtener por sí solo. Teniendo en cuenta esto se obtiene un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que contiene a todos los vectores de pago "razonables". Este conjunto se denomina conjunto de imputaciones.

Definición 1.1.2 *Dado un juego $(N, v) \in TU(N)$ se dice que un vector $x \in \mathbb{R}^n$ es una imputación si satisface las dos condiciones siguientes:*
i) $x_i \geq v(i)$, *para todo* $i \in N$.
ii) $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$.
Dado un juego $(N, v) \in TU(N)$ se denotará por $I(N, v)$ el conjunto de imputaciones de dicho juego.

Es evidente que dadas dos imputaciones x y z distintas y teniendo en cuenta la segunda propiedad, existirán jugadores que prefieran una de ellas frente a la otra. Se formalizará esta idea con la siguiente definición.

Definición 1.1.3 *Sean $(N, v) \in TU(N)$ y $x, z \in I(N, v)$. Se dice que x domina a z a través de $S \in 2^N \backslash \emptyset$ si se verifica:*
i) $x_i > z_i$, *para todo* $i \in S$.
ii) $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$.

La primera condición establece que los jugadores de S prefieren el valor que les asigna el vector x al correspondiente en el vector z, mientras que la segunda condición establece que el vector x es factible para S, en el sentido de que la cantidad total propuesta por x para los jugadores de S no es superior a la cantidad que los jugadores de S pueden garantizarse, $v(S)$.

Se dice que x domina a z si existe una coalición $S \in 2^N \backslash \emptyset$ tal que x domina a z a través de S.

En Gillies (1953) se introduce el concepto de núcleo.

Definición 1.1.4 *Se define el núcleo de un juego* $(N, v) \in TU(N)$ *y se denotará por* $Nu(N, v)$ *como el siguiente subconjunto de* $I(N, v)$*,*

$$Nu(N, v) = \left\{ x \in I(N, v) \,/\, \sum_{i \in S} x_i \geq v(S)\,, \text{ para toda coalición } S \in 2^N \right\}.$$

Dado un conjunto finito N, pueden encontrarse juegos de $TU(N)$ en los que el núcleo es vacío y otros en los que está formado por más de un vector de pagos. Si el juego es superaditivo, el núcleo coincide con el conjunto de imputaciones no dominadas.

El núcleo, al igual que el conjunto estable definido por von Neumann y Morgenstern (1944), selecciona vectores de pagos teniendo en cuenta que el vector o conjunto de vectores seleccionado sea estable. En esta memoria, el estudio se centrará en soluciones que asignan a cada juego un único vector de pagos y que se determinan buscando que el resultado final sea "justo". Para ello, se proponen diversas propiedades y se trata de caracterizar una solución a partir de estas propiedades. En primer lugar, se establece el concepto de solución sobre $TU(N)$.

Definición 1.1.5 *Una solución sobre* $TU(N)$ *es una aplicación*

$$f : TU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

que a cada juego $(N, v) \in TU(N)$ *le hace corresponder un vector de* $\mathbb{R}^n$*, donde la componente* i*-ésima del vector representa el pago que recibe el jugador* i*.*

Se comenzará enunciando algunas propiedades empleadas en la literatura para caracterizar una solución $f : TU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Eficiencia (EFI). Una solución $f : TU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es eficiente si para todo juego $(N, v) \in TU(N)$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(N, v) = v(N).$$

Poder total (PT). Una solución $f : TU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad de poder total si para todo juego $(N, v) \in TU(N)$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(N, v) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{S \subseteq N \setminus i} [v(S \cup i) - v(S)].$$

La propiedad de poder total establece que el pago total obtenido por los jugadores es la suma de las medias de las contribuciones marginales de todos los jugadores. Es evidente que si una solución es eficiente entonces no puede satisfacer la propiedad de poder total.

Simetría (SIM). Una solución $f : TU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es simétrica si para todo juego $(N, v) \in TU(N)$ y para todo par de jugadores $i, j \in N$, simétricos en (N, v), se tiene que $f_i(N, v) = f_j(N, v)$.

Jugador nulo (JN). Una solución $f : TU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad de jugador nulo si para todo juego $(N, v) \in TU(N)$ y para todo jugador nulo en (N, v) $i \in N$, se tiene que $f_i(N, v) = 0$.

Soporte (SOP). Una solución $f : TU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad de soporte si para todo juego $(N, v) \in TU(N)$ y para todo soporte T de (N, v) se tiene que

$$\sum_{i \in T} f_i(N, v) = v(T).$$

En la caracterización de una solución $f : TU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$, es equivalente que f satisfaga la propiedad de soporte o las de eficiencia y jugador nulo, conjuntamente.

Aditividad (ADI). Una solución $f : TU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es aditiva si para todo par de juegos $(N, v) \in TU(N)$ y $(N, w) \in TU(N)$, se tiene que

$$f(N, v + w) = f(N, v) + f(N, w),$$

donde para cualquier coalición $T \subseteq N, (v + w)(T) = v(T) + w(T)$.

Monotonía fuerte (MF). Una solución $f : TU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad de monotonía fuerte si para todo par de juegos $(N, v) \in TU(N)$ y

$(N, w) \in TU(N)$ y cualquier jugador $i \in N$ tal que $v(S \cup i) - v(S) \geq w(S \cup i) - w(S)$, para toda coalición $S \subseteq N$, se tiene que

$$f_i(N, v) \geq f_i(N, w).$$

Entre las soluciones propuestas para $TU(N)$ se encuentran el valor de Shapley (Shapley, 1953) y el valor de Banzhaf, introducido en Banzhaf (1965) para la familia de los juegos simples y extendido en Owen (1975) a cualquier juego TU. Se reproduce aquí la caracterización del valor de Shapley obtenida por Shapley (1953) y la caracterización del valor de Banzhaf obtenida por Feltkamp (1995).

Teorema 1.1.2 *La única solución f definida en $TU(N)$ que satisface ADI, JN, SIM y EFI es el valor de Shapley. Dado un juego (N, v), esta solución asigna a cada jugador $i \in N$ el número real:*

$$\varphi_i(N, v) = \sum_{S \subseteq N \setminus i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}(v(S \cup i) - v(S)).$$

Teorema 1.1.3 *La única solución f definida en $TU(N)$ que satisface ADI, JN, SIM y PT es el valor de Banzhaf. Dado un juego (N, v), esta solución asigna a cada jugador $i \in N$ el número real:*

$$\beta_i(N, v) = \sum_{S \subseteq N \setminus i} \frac{1}{2^{n-1}}(v(S \cup i) - v(S)).$$

Nótese que sólo una propiedad diferencia estas dos caracterizaciones: el valor de Shapley verifica eficiencia mientras que el valor de Banzhaf verifica poder total.

En muchas ocasiones, la propiedad de eficiencia parece natural, por ejemplo cuando la finalidad del juego es distribuir costes o repartir beneficios. En otras ocasiones, por ejemplo en el contexto de situaciones de votación modelizadas como juegos TU, no existe un beneficio a repartir, por lo que algunos autores establecen que en estos casos no tiene sentido la propiedad de eficiencia, ya que la finalidad del juego es medir el poder, no distribuirlo. Para una discusión más detallada sobre este tema, véase Laruelle y Valenciano (1999).

A la vista de las expresiones proporcionadas por los teoremas anteriores, se ve que ambos valores asignan a cada jugador una suma ponderada de las contribuciones marginales que dicho jugador hace a todas las coaliciones a las que se une. En el capítulo 4 se verá que estas soluciones pertenecen a una familia de soluciones, denominada la familia de los valores probabilísticos. Para el valor de Shapley los pesos asignados a cada coalición dependen de su tamaño, mientras que en el valor de Banzhaf todas las coaliciones son equiprobables.

En 1985, Young caracterizó el valor de Shapley empleando la propiedad de monotonía fuerte.

Teorema 1.1.4 *La única solución f definida en $TU(N)$ que satisface MF, SIM y EFI es el valor de Shapley.*

Es inmediato comprobar que el valor de Banzhaf también satisface la propiedad de monotonía fuerte. En el siguiente teorema, proponemos una nueva caracterización del valor de Banzhaf, del que se omite la demostración por ser similar a la del teorema 1.1.4.

Teorema 1.1.5 *La única solución f definida en $TU(N)$ que satisface MF, SIM y PT es el valor de Banzhaf.*

Otras caracterizaciones del valor de Banzhaf pueden verse en Lehrer (1988) o en Nowak (1997). Otra caracterización del valor de Shapley fue obtenida por Hart y Mas-Colell (1989). A continuación, se describirá el procedimiento para obtener estos valores mediante la extensión multilineal del juego.

Extensiones multilineales

Una de las principales dificultades relacionadas con las soluciones presentadas anteriormente es que para su cálculo se necesita realizar la suma de un número grande de términos, aunque la función característica sea una función sencilla. La extensión multilineal de un juego TU proporciona una herramienta útil para el cálculo de diversas soluciones.

La función característica v de un juego cooperativo (N, v), es una función cuyo dominio es 2^N, la familia de todos los subconjuntos de N. Dicho dominio, puede considerarse también como el conjunto de todos los vectores de $\mathbb{R}^n$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ donde cada componente es 0 o 1, ya que cada subconjunto $S \in 2^N$ está en correspondencia biunívoca con el vector de $\mathbb{R}^n$ cuyas componentes son $x_i = 1$ si $i \in S$, y $x_i = 0$ si $i \notin S$.

Es decir, puede identificarse 2^N con el conjunto de vértices del cubo unitario en el espacio $\mathbb{R}^n$, $\{0,1\}^N$. Por lo tanto, la función característica v es una función real definida en los vértices del cubo unitario. Owen (1972b) propuso extender dicha función a todo el cubo unitario, es decir, al conjunto $[0,1]^N = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, \ldots, n\}$. Se denotará este cubo unitario por I^N y por e^S el S-vértice del cubo unitario, es decir, $e^S = \left(e_1^S, e_2^S, \ldots, e_n^S\right)$ dado por:

$$e_i^S = \begin{cases} 1 & si\ i \in S \\ 0 & si\ i \notin S \end{cases}$$

Existen muchas formas de extender la función característica a I^N; la propuesta por Owen es la siguiente.

Definición 1.1.6 *Sea $(N, v) \in TU(N)$. Se define la extensión multilineal de v como la función h definida por:*

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{S \subseteq N} \left\{ \prod_{i \in S} x_i \prod_{j \notin S} (1 - x_j) \right\} v(S), \tag{1.2}$$

para todo x_i, $0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, \ldots, n$.

Puede darse a esta extensión una interpretación probabilística. Si S es una coalición aleatoria, de tal forma que un jugador i tiene una probabilidad x_i de pertenecer a S, para $i = 1, 2, \ldots, n$, y además se supone que estos sucesos son independientes, tenemos entonces que la probabilidad de que una coalición particular S se forme, viene dada por la cantidad que aparece entre llaves en la expresión (1.2). Por lo que si se define la variable aleatoria $Y =$ "Ganancia de una coalición" se tiene que $P(Y = v(S)) = P(\text{se constituye } S)$, entonces:

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = E[Y],$$

donde E denota la esperanza matemática. Owen (1972b) determinó, "en cierto modo", la unicidad de esta extensión. Se reproduce tal unicidad en el siguiente teorema.

Teorema 1.1.6 *Sea v una función definida en todos los subconjuntos de N. Entonces, existe una única función multilineal, h, definida en I^N, que verifica que $h\left(e^S\right) = v(S)$, para todo $S \subseteq N$. Esta función es*

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{S \subseteq N} \left\{ \prod_{i \in S} x_i \prod_{j \notin S} (1 - x_j) \right\} v(S),$$

para todo x_i, $0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, \ldots, n$.

A partir de la extensión multilineal se pueden calcular los valores de Shapley (Owen, 1972b) y de Banzhaf (Owen, 1975). Reproducimos aquí dichos resultados.

Teorema 1.1.7 *Sea $(N, v) \in TU(N)$ y $h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ su extensión multilineal. El valor de Shapley de un jugador $i \in N$ en dicho juego viene dado por:*

$$\varphi_i(N, v) = \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x_i}(t, t, \ldots, t)\, dt.$$

Teorema 1.1.8 *Sea $(N, v) \in TU(N)$ y $h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ su extensión multilineal. El valor de Banzhaf de un jugador $i \in N$ en dicho juego viene dado por:*

$$\beta_i(N, v) = \frac{\partial h}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right).$$

1.2 Conceptos básicos de juegos simples

Una subfamilia muy importante de juegos cooperativos con utilidad transferible es la formada por los juegos simples, que tienen numerosas aplicaciones, especialmente en el campo de la política. A continuación, se presentan los conceptos y resultados fundamentales sobre juegos simples que se emplearán a lo largo de esta memoria.

Definición 1.2.1 *Un juego (N, v) de $TU(N)$ se dice que es simple si:*
i) Para toda $S \subseteq N, v(S) = 0$ o $v(S) = 1$.
ii) $v(N) = 1$.
iii) v es un juego monótono.

Se denotará por $SI(N)$ el conjunto de juegos simples con conjunto de jugadores N y por SI el conjunto de todos los juegos simples.

Dado un juego simple (N, v), una coalición S se denomina ganadora si $v(S) = 1$. En caso contrario se dice que S es una coalición perdedora. Se denotará por W el conjunto de todas las coaliciones ganadoras, es decir, $W = \{S \subseteq N / v(S) = 1\}$. Es evidente que N es un elemento de W y que si $S \in W$ y $S \subseteq T$, entonces $T \in W$. Una coalición ganadora es minimal si no contiene a ninguna otra coalición ganadora. Se denotará por W^m el conjunto de todas las coaliciones ganadoras minimales, es decir,

$$W^m = \{S \in W / v(T) = 0, \textit{ para toda coalición } T \subset S\}.$$

En algunas ocasiones se empleará la notación $M(v)$ para referirnos al conjunto de coaliciones minimales ganadoras del juego (N, v). Un juego simple puede caracterizarse dando el conjunto de coaliciones ganadoras, o también, dando el conjunto de coaliciones minimales ganadoras. Por lo tanto, puede definirse un juego simple como un par (N, W) donde W es el conjunto de coaliciones ganadoras, o como un par (N, W^m) donde W^m es el conjunto de coaliciones minimales ganadoras.

Dentro de los juegos simples desempeñan un papel importante los juegos propios y los juegos decisivos.

Definición 1.2.2 *Se dice que un juego simple (N, v) es un juego propio si para cualquier par de coaliciones ganadoras $S, T \in W$, se tiene que $S \cap T \neq \emptyset$.*

Para un juego simple, que el juego sea superaditivo es equivalente a que el juego sea propio.

Definición 1.2.3 *Se dice que un juego simple (N, v) es un juego decisivo si para cualquier coalición $S \subseteq N$, se tiene que $S \in W$ o $N \backslash S \in W$.*

A continuación se proporcionan varias definiciones en el contexto de los juegos simples, algunas de las cuales ya se presentaron anteriormente en el contexto general de los juegos TU, pero se reproducen aquí para mostrar la relación que guardan con el conjunto de coaliciones ganadoras W.

Dado un juego $(N, v) \in SI(N)$:

- *Se dice que dos jugadores* $i, j \in N$ *son jugadores simétricos si para toda coalición* $S \subseteq N \backslash \{i, j\}$ *tal que* $S \notin W$, *se tiene que:*

$$\begin{cases} S \cup \{i\} \in W \ \ y \ \ S \cup \{j\} \in W \\ \qquad\qquad o \\ S \cup \{i\} \notin W \ \ y \ \ S \cup \{j\} \notin W \end{cases}$$

- *Se dice que un jugador* $i \in N$ *es un jugador nulo si para toda* $S \subseteq N \backslash i$ *tal que* $S \notin W$, *se tiene que* $S \cup \{i\} \notin W$.

- *Se dice que* $i \in N$ *es un títere si:*

$$\begin{cases} \{\{i\}\} = W^m \\ o \\ \text{Para toda } S \subseteq N \backslash i \text{ tal que } S \notin W \text{ se tiene que } S \cup \{i\} \notin W \end{cases}$$

- *Se dice que* $i \in N$ *es un dictador si* $S \in W$ *si y sólo si* $i \in S$.

- *Se dice que* $i \in N$ *es un jugador con veto si* $S \in W$ *implica que* $i \in S$.

En un juego simple, un títere puede ser un dictador y entonces $v(i) = 1$, o un jugador nulo, en cuyo caso $v(i) = 0$.

Definición 1.2.4 *Un juego* $(N, v) \in SI\,(N)$ *se dice que es de mayoría ponderada si existe un conjunto de pesos* $w_1, w_2, ..., w_n$ *para los jugadores, con* $w_i \geq 0, 1 \leq i \leq n$, *y una cantidad* $q \in \mathbb{R}^+$ *tales que* $S \in W$ *si y sólo si* $\sum\limits_{i \in S} w_i \geq q$. *A la cantidad q se le denomina mayoría del juego.*

Habitualmente un juego de mayoría ponderada se representa por

$$[q; w_1, w_2, ..., w_n] .$$

Un parlamento puede verse como un juego de mayoría ponderada, en el que los jugadores son los partidos políticos, los pesos son el número de escaños de los que dispone cada partido y la mayoría del juego coincide con el número mínimo de votos necesarios para ganar una votación. Si el criterio es la mayoría simple $q = ent(t) + 1$, donde t es la mitad del número total de escaños del parlamento (si $x \in \mathbb{R}$, $ent\,(x)$ denotará la parte entera de x).

1.2.1 Índices de poder

Cuando se trabaja con juegos simples, en lugar de hablar de solución, se suele utilizar el término índice de poder, de acuerdo a las situaciones que modeliza, ya que los juegos simples se emplean normalmente como modelos de organismos de decisión donde los acuerdos suelen tomarse por votación. El interés de estos juegos suele centrarse en conocer el poder o influencia que tiene un jugador sobre el resultado final del mismo. Si bien puede emplearse cualquier concepto de solución definido en el contexto de los juegos TU, existen otros de aplicabilidad exclusiva a este ámbito, es más, inicialmente el valor de Banzhaf se planteó sólo para juegos simples, hasta que Owen en 1975 extendió este concepto a la familia de juegos TU. Numerosos trabajos en teoría de juegos están dedicados al estudio de índices de poder. En Laruelle (1999), puede encontrarse una panorámica sobre este tema.

Definición 1.2.5 *Un índice de poder sobre $SI(N)$ es una aplicación*

$$f : SI\,(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

que a cada juego $(N,v) \in SI\,(N)$ le hace corresponder un vector de $\mathbb{R}^n$, donde la componente i-ésima del vector representa el poder que tiene el jugador i.

Los resultados vistos en los teoremas 1.1.2 y 1.1.3 para el valor de Shapley y el valor de Banzhaf no sirven para caracterizar los índices de poder correspondientes en la familia de los juegos simples. La propiedad de aditividad no se puede aplicar en esta familia, ya que la suma de dos juegos simples no es un juego simple.

Dubey (1975), obtuvo una caracterización axiomática del índice de poder de Shapley, cambiando la propiedad de aditividad por una propiedad similar y razonable dentro del contexto de los juegos simples. Esta propiedad se denomina propiedad de transferencia. Con esta misma propiedad, Dubey y Shapley (1979) obtuvieron una caracterización del índice de poder de Banzhaf. Para establecer la propiedad de transferencia se hace necesaria la siguiente definición.

Definición 1.2.6 *Dados $(N,v)\,,(N,w) \in SI\,(N)$, se definen los juegos simples $(N, v \vee w)$ y $(N, v \wedge w)$ de la siguiente forma:*

$$(v \vee w)\,(S) = \max\{v(S), w(S)\}$$

$$(v \wedge w)(S) = \min\{v(S), w(S)\}$$

o de forma equivalente:

$$(v \vee w)(S) = \begin{cases} 1 \ si \ v(S) = 1 \ o \ w(S) = 1 \\ 0 \ si \ v(S) = 0 \ y \ w(S) = 0 \end{cases}$$

$$(v \wedge w)(S) = \begin{cases} 1 \ si \ v(S) = 1 \ y \ w(S) = 1 \\ 0 \ si \ v(S) = 0 \ o \ w(S) = 0 \end{cases}$$

A continuación, se presentan un par de propiedades que verifican estos nuevos juegos.

Proposición 1.2.1 *Sean* $(N, v), (N, w) \in SI(N)$. *Si ambos juegos son propios entonces el juego* $(N, v \wedge w)$ *también es propio.*

A continuación, se verá un ejemplo en el que el juego $(N, v \vee w)$ no es propio aunque sí lo son los juegos (N, v) *y* (N, w).

Ejemplo 1.2.1 *Considérense los juegos simples propios* (N, v) *y* (N, w), *donde* $N = \{1, 2, 3, 4\}$ *y el conjunto de coaliciones minimales ganadoras del juego* (N, v) *es:* $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}\}$ *y el conjunto de coaliciones minimales ganadoras del juego* (N, w) *es:* $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}$.

En este caso el conjunto de coaliciones minimales ganadoras de $(N, v \vee w)$ *es:* $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}$ *y se verifica que:*

$$\{1, 3\} \cap \{2, 4\} = \emptyset$$

por lo que $(N, v \vee w)$ *no es propio.*

En el siguiente resultado se prueba que la operación $\wedge$ es distributiva respecto a $\vee$.

Proposición 1.2.2 *Dados* $(N, v_1), (N, v_2), \ldots, (N, v_r), (N, w) \in SI(N)$ *se verifica:*

$$(v_1 \vee v_2 \vee \ldots \vee v_r) \wedge w = (v_1 \wedge w) \vee (v_2 \wedge w) \vee \ldots (v_r \wedge w).$$

Demostración

La demostración se hará por inducción en r.

Sea $r = 2$. Por una parte, se tiene que:

$$((v_1 \vee v_2) \wedge w)(S) = \min\left\{\max\left\{v_1(S), v_2(S)\right\}, w(S)\right\} =$$

$$\begin{cases} w(S) & si\ w(S) \leq \max\left\{v_1(S), v_2(S)\right\} \\ \max\left\{v_1(S), v_2(S)\right\} & si\ w(S) \geq \max\left\{v_1(S), v_2(S)\right\} \end{cases}$$

Por otro lado:

$$((v_1 \wedge w) \vee (v_2 \wedge w))(S) = \max\left\{\min\left\{v_1(S), w(S)\right\}, \min\left\{v_2(S), w(S)\right\}\right\} =$$

$$\begin{cases} w(S) & si\ w(S) \leq \max\left\{v_1(S), v_2(S)\right\} \\ \max\left\{v_1(S), v_2(S)\right\} & si\ w(S) \geq \max\left\{v_1(S), v_2(S)\right\} \end{cases}$$

con lo que el resultado estaría probado para $r = 2$.

Supóngase que se ha demostrado el resultado para cualquier valor de r menor o igual a $k - 1$; se verá que es cierto para k.

$$(v_1 \vee v_2 \vee ... \vee v_{k-1} \vee v_k) \wedge w = ((v_1 \vee v_2 \vee ... \vee v_{k-1}) \wedge w) \vee (v_k \wedge w) =$$

$$(v_1 \wedge w) \vee (v_2 \wedge w) \vee ... \vee (v_k \wedge w)\,,$$

donde en la primera igualdad se aplica lo probado para $r = 2$, y en la segunda igualdad se utiliza la hipótesis de inducción.$\square$

Obsérvese que dados dos juegos simples (N, v) y (N, w) se verifica que $v + w =(v \vee w) + (v \wedge w)$. Se enuncia ahora la siguiente propiedad, introducida por Dubey (1975):

Transferencia (TR). Un índice de poder $f : SI\,(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad de transferencia (o aditividad para juegos simples) si para todo par de juegos (N, v) y $(N, w) \in SI\,(N)$, se tiene que

$$f\,(N, v) + f(N, w) = f\,(N, v \vee w) + f(N, v \wedge w).$$

Dubey (1975) caracterizó el valor de Shapley para la familia de juegos simples (conocido con el nombre de índice de poder de Shapley-Shubik(1954)) al probar el siguiente resultado.

Teorema 1.2.1 *El único índice de poder* $f : SI(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *que verifica las propiedades* TR, JN, SIM *y* EFI *es el valor de Shapley.*

El valor de Shapley asigna a un jugador i, la media aritmética de las contribuciones que dicho jugador hace a las coaliciones formadas por los jugadores que preceden a i en las $n!$ permutaciones posibles de los jugadores. Como para juegos simples $v(S) = 1$ si $S \in W$ y $v(S) = 0$ en otro caso, se tiene que $v(S \cup i) - v(S) = 1$ si el jugador i hace ganadora a S, siendo $v(S \cup i) - v(S) = 0$ en cualquier otro caso. Por lo tanto:

$$\varphi_i(N, v) = \sum_{S \in S(i)} \frac{s!\,(n - s - 1)!}{n!},$$

donde $S(i) = \{S \subseteq N \backslash i / S \notin W \ y \ S \cup i \in W\}$.

Al conjunto de pares de coaliciones $(S, S \cup i)$ donde $S \in S(i)$, se le denomina conjunto de "swings" para el jugador i; es decir, un swing para un jugador i es un par de coaliciones $(S, S \cup i)$ donde $S \subseteq N \backslash i$, tales que S es perdedora mientras que $S \cup i$ es ganadora.

Definición 1.2.7 *Sea* (N, v) *un juego simple y* σ *una permutación de* N*. Para* $i \in N$, $\Pr(i, \sigma)$ *es el conjunto de jugadores* j *tales que* $\sigma(j) < \sigma(i)$*. Entonces* i *es un pívot para* σ *si* $\Pr(i, \sigma) \notin W$ *y* $\Pr(i, \sigma) \cup i \in W$.

Utilizando el concepto de pívot, se tiene que el índice de poder de Shapley-Shubik de un jugador i es la probabilidad de que dicho jugador sea pívot, suponiendo una distribución uniforme sobre el conjunto de todas las permutaciones del conjunto de jugadores N.

Utilizando de nuevo la propiedad de transferencia, Dubey y Shapley (1979) obtuvieron una caracterización para el valor de Banzhaf en la familia de los juegos simples (conocido con el nombre de índice de poder de Banzhaf-Coleman (Banzhaf(1965), Coleman (1971)).

Teorema 1.2.2 *El único índice de poder* $f : SI(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *que verifica las propiedades* TR, JN, SIM *y* PT *es el valor de Banzhaf.*

El valor de Banzhaf asigna a un jugador i, la media aritmética de las contribuciones que dicho jugador hace a las coaliciones a las que se puede unir.

De forma similar a la considerada anteriormente para el índice de poder de Shapley-Shubik, se tiene que el índice de poder de Banzhaf-Coleman de un jugador i en el juego simple (N, v) es:

$$\beta_i (N, v) = \sum_{S \in S(i)} \frac{1}{2^{n-1}}.$$

El índice de poder de Banzhaf-Coleman de un jugador i se corresponde con el número de swings para el jugador i, normalizado por el número de coaliciones a las que se puede unir.

1.2.2 Funciones generatrices

Los índices de poder de Shapley-Shubik y de Banzhaf-Coleman pueden obtenerse utilizando las extensiones multilineales. En esta sección se hace una revisión de otra herramienta para simplificar el cálculo de estos índices de poder, en juegos simples de mayoría ponderada. Esta herramienta se basa en la utilización de una técnica del análisis combinatorio: las funciones generatrices. Esta técnica fue empleada por David G. Cantor (1962) (aparece en Lucas (1983)) para el cálculo del índice de poder de Shapley y por Brams y Affuso (1976) para el cálculo del índice de poder de Banzhaf. En Fernández García (1998) se emplea este método para el cálculo de índices de poder en situaciones con comunicación restringida mediante grafos y en juegos de doble mayoría.

A continuación, se comentan los fundamentos del método de las funciones generatrices y los resultados obtenidos por Cantor y por Brams y Affuso. Para facilitar la comprensión de estos resultados, a diferencia del orden empleado hasta ahora, se empezará considerando el índice de Banzhaf-Coleman.

Funciones generatrices

A cada sucesión de números reales $a = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ puede hacérsele corresponder la serie

$$f_a (t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j.$$

Esta serie $f_a(t)$ se denomina función generatriz de la sucesión a, y puede ser finita o infinita. En esta serie, la variable t no tiene significado propio y sólo sirve para identificar a_j como el coeficiente correspondiente a t^j en el desarrollo de $f_a(t)$. Por este motivo, aunque en la mayoría de los problemas combinatorios la serie $f_a(t)$ es finita, la cuestión relativa a la convergencia de la serie no es una cuestión relevante si t se interpreta como una variable formal. Para facilitar la comprensión de este concepto, se proporcionan dos ejemplos. El primero se corresponde con una sucesión finita.

Ejemplo 1.2.2 *Considérese el producto finito de binomios lineales*

$$\prod_{r=1}^{n}(1+x_r t)=\sum_{r=0}^{n}a_r t^r,$$

donde $a_o=1$ *y para* $r>0$, a_r *está dado por*

$$a_r=\sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_r\leq n} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_r}.$$

Los coeficientes a_r *son funciones simétricas de la variables* $x_1,x_2,\ldots,x_n$. *El número de sumandos del coeficiente* a_r *coincide con el número de combinaciones de* r *elementos de un conjunto formado por* n *elementos. Si todos los valores* x_r *son iguales a* 1 *se tendrá que*

$$(1+t)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}t^r,$$

ya que en este caso los coeficientes a_r *son el número de combinaciones de* r *elementos de un conjunto formado por* n *elementos. Por lo tanto, la función* $f(t)=(1+t)^n$ *es la función generatriz de la sucesión* $a=\left\{\binom{n}{r}/r=0,1,\ldots,n\right\}$.

Ejemplo 1.2.3 *Considérese ahora la sucesión infinita de números reales* $\{1,1,\ldots\}$. *La función generatriz de esta sucesión es la serie*

$$f_a(t)=1+t+t^2+t^3+\ldots=\sum_{r=0}^{\infty}t^r,$$

que es convergente a la función $f(t)=\frac{1}{1-t}$, *cuando* $|t|<1$. *Por lo tanto, la función* $f(t)=\frac{1}{1-t}$ *es la función generatriz de la sucesión* $\{1,1,\ldots\}$, *porque su desarrollo en serie de potencias permite asociar los coeficientes numéricos de los infinitos sumandos con los elementos de la sucesión.*

Las funciones generatrices proporcionan un método para el recuento del número de elementos $c(r)$ de un conjunto finito, cuando estos elementos tienen una configuración que depende de una característica r. Así, en el primer ejemplo se vio que los coeficientes binomiales $\binom{n}{r}$ pueden obtenerse mediante la función $(1+t)^n$, ya que coinciden con los coeficientes de la serie formal.

Más adelante, se emplearán funciones generatrices de varias variables, por ejemplo

$$S(x,y,z) = \sum_{k\geq 0}\sum_{j\geq 0}\sum_{l\geq 0} c(k,j,l)\, x^k y^j z^l,$$

donde $c(k,j,l)$ son números reales que dependen de k, j y l.

Para un estudio más detallado de los fundamentos teóricos de las funciones generatrices y otros métodos de análisis combinatorio, puede consultarse el trabajo de Ríbnikov (1998).

Funciones generatrices y juegos de mayoría ponderada

Como se vio anteriormente, un juego de mayoría ponderada es un juego simple que puede representarse abreviadamente por $[q; w_1, w_2, ..., w_n]$. Se denotará por $w(S)$ a la cantidad $\sum_{i\in S} w_i$ y se hará la suposición de que los pesos son números enteros.

La siguiente proposición determina el número de swings de un jugador i en un juego simple de mayoría ponderada.

Proposición 1.2.3 *Sea (N,v) un juego simple de mayoría ponderada dado por $[q; w_1, w_2, ..., w_n]$. Entonces el número de swings del jugador $i \in N$ es igual a*

$$\eta_i(v) = \sum_{k=q-w_i}^{q-1} b_k^i,$$

siendo b_k^i el número de coaliciones $S \subseteq N$ tales que $i \notin S$ y $w(S) = k$.

El índice de poder de Banzhaf-Coleman de un jugador $i \in N$ en un juego (N, v) es igual a $\beta_i(N, v) = \eta_i(v)/2^{n-1}$. El siguiente resultado debido a Brams y Affuso (1976) proporciona una función generatriz que permite el cálculo de los números $\{b_k^i\}_{k\geq 0}$.

Proposición 1.2.4 *Sea (N, v) un juego simple de mayoría ponderada dado por $[q; w_1, w_2, ..., w_n]$. Entonces para un jugador $i \in N$, la función generatriz de los números $\{b_k^i\}_{k\geq 0}$, definidos anteriormente, viene dada por*

$$B_i(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} (1 + x^{w_j}).$$

Se va a ilustrar con un ejemplo la utilidad de esta proposición para el cálculo del índice de poder de Banzhaf-Coleman.

Ejemplo 1.2.4 *El Parlamento de las Islas Baleares está constituido por* 59 *miembros. Después de las elecciones del 13 de junio de 1999, este Parlamento está compuesto por* 28 *miembros del PP,* 16 *miembros del $PSOE$,* 5 *miembros del partido socialista-regionalista $PSM-EN$,* 4 *miembros de $EU-EV$, una coalición de comunistas y otros partidos de izquierda,* 3 *miembros del partido de centro-regionalista UM, y* 3 *miembros de $PACTE$, una coalición de partidos progresistas que presentaron candidatura sólo en algunas islas. Se van a emplear estos resultados, aunque más adelante se formaron cinco grupos parlamentarios correspondientes con PP (28), $PSOE$ (17), $PSM-EN$ (5), $Mixto$ (5) y $EU-EV$ (4). Los* 5 *miembros del grupo mixto son los tres representantes de UM y dos de $PACTE$. El tercer miembro de $PACTE$ se integró en el grupo del $PSOE$.*

Puede representarse este Parlamento como $[30; 28, 16, 5, 4, 3, 3]$ *donde el jugador* 1 *es el PP, el jugador* 2 *es el $PSOE$, el jugador* 3 *es el $PSM-EN$, el jugador* 4 *es $EU-EV$, el jugador* 5 *es UM y el jugador* 6 *es el $PACTE$.*

Para calcular el número de swings del jugador 1, *considérese la función:*

$$B_1(x) = \left(1 + x^{16}\right)\left(1 + x^5\right)\left(1 + x^4\right)\left(1 + x^3\right)^2 =$$

$$x^{31} + 2x^{28} + x^{27} + x^{26} + x^{25} + 2x^{24} + 2x^{23} + x^{22} + x^{21} + x^{20} + 2x^{19} +$$

$$x^{16} + x^{15} + 2x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + 2x^8 + 2x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + 2x^3 + 1.$$

Entonces, se obtiene que $\eta_1(v) = \sum_{k=2}^{29} b_k^1 = 30$, *de forma similar se tiene que* $\eta_2(v) = \eta_3(v) = \eta_4(v) = \eta_5(v) = \eta_6(v) = 2$ *y el índice de poder de Banzhaf-Coleman es igual a*

$$\beta(N, v) = (15/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16).$$

A continuación, se analizará el índice de poder de Shapley-Shubik. Este índice en un juego simple (N, v) es igual a:

$$\varphi_i(N, v) = \sum_{\{S \subseteq N \setminus \{i\} / S \notin W \, y \, S \cup i \in W\}} \frac{s!\,(n-s-1)!}{n!} =$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{j!\,(n-j-1)!}{n!} d_j^i,$$

donde d_j^i representa el número de swings para el jugador i en coaliciones de tamaño j. Siguiendo un razonamiento similar al que se hizo anteriormente, se tiene que, para cualquier valor de j entre 0 y $n-1$,

$$d_j^i = \sum_{k=q-w_i}^{q-1} a_{kj}^i,$$

siendo a_{kj}^i el número de coaliciones $S \subseteq N$ formadas por j jugadores tales que $i \notin S$ y $w(S) = k$. El siguiente resultado, debido a David G. Cantor (1962), proporciona una función generatriz que permite el cálculo de los números $\left\{a_{kj}^i\right\}_{k \geq 0, j \geq 0}$.

Proposición 1.2.5 *Sea* (N, v) *un juego simple de mayoría ponderada dado por* $[q; w_1, w_2, ..., w_n]$. *Entonces para un jugador* $i \in N$, *la función generatriz de los números* $\left\{a_{kj}^i\right\}_{k \geq 0, j \geq 0}$, *definidos anteriormente, viene dada por*

$$S_i(x, z) = \prod_{j=1, j \neq i}^{n} \left(1 + x^{w_j} z\right).$$

A partir de esta proposición, se deduce que

$$S_i(x,z) = \sum_{j=0}^{n-1} \left[\sum_{k=0}^{w(N)} a_{kj}^i x^k \right] z^j.$$

Para determinar el índice de poder de Shapley-Shubik es necesario calcular los valores d_j^i que pueden identificarse por un polinomio de la forma

$$g_i(z) = \sum_{j=0}^{n-1} d_j^i z^j,$$

y como $d_i^j = \sum\limits_{k=q-w_i}^{q-1} a_{kj}^i$, se tiene que

$$g_i(z) = \sum_{j=0}^{n-1} d_j^i z^j = \sum_{j=0}^{n-1} \left[\sum_{k=q-w_i}^{q-1} a_{kj}^i \right] z^j.$$

Por tanto, para determinar los coeficientes de $g_i(z)$ es suficiente con seleccionar los coeficientes de los monomios $x^k z^j$ en los que el exponente k de la variable x tome valores entre $q - w_i$ y $q - 1$.

Se ilustrará este procedimiento con los datos correspondientes al Parlamento de las Islas Baleares.

Ejemplo 1.2.5 *El Parlamento de las Islas Baleares se correspondía con* $[30; 28, 16, 5, 4, 3, 3]$.

En este caso, se va a calcular el índice de poder de Shapley-Shubik correspondiente al jugador 2*; para ello, se considera la función:*

$$S_2(x,z) = \left(1 + x^{28}z\right)\left(1 + x^5 z\right)\left(1 + x^4 z\right)\left(1 + x^3 z\right)^2 =$$

$$x^{43}z^5 + 2x^{40}z^4 + x^{39}z^4 + x^{38}z^4 + x^{15}z^4 + x^{37}z^3 + 2x^{36}z^3 +$$

$$2x^{35}z^3 + x^{34}z^3 + 2x^{12}z^3 + x^{11}z^3 + x^{10}z^3 + x^{33}z^2 + x^{32}z^2 +$$

$$2x^{31}z^2 + x^9z^2 + 2x^8z^2 + 2x^7z^2 + x^6z^2 + x^{28}z + x^5z + x^4z + 2x^3z + 1.$$

Se eligen ahora los coeficientes de los monomios $x^k z^j$ *en los que el exponente* k *de la variable* x *tome valores entre* 14 *y* 29 (*en este caso son sólo dos* $x^{15}z^4$ *y* $x^{28}z$), *por lo que*

$$g_2(z) = \sum_{j=0}^{5} d_j^2 z^j = z^4 + z,$$

y finalmente, el índice de poder de Shapley-Shubik del jugador 2 *es igual a*

$$\varphi_2(N,v) = \sum_{j=0}^{5} \frac{j!\,(n-j-1)!}{n!} d_j^2 = \frac{4!(6-4-1)!}{6!}1 + \frac{1!(6-1-1)!}{6!}1 = \frac{1}{15}.$$

De modo similar, se obtendría el índice de poder de Shapley-Shubik de los restantes jugadores

$$\varphi(N,v) = (2/3, 1/15, 1/15, 1/15, 1/15, 1/15).$$

1.3 Nuevos resultados sobre el índice de poder de Deegan-Packel

Además de los índices de poder de Shapley-Shubik y de Banzhaf-Coleman, en la literatura pueden encontrarse otros índices para obtener una medida del poder de los jugadores en un juego simple. En esta sección se va a analizar el índice de poder introducido por Deegan y Packel en 1979, que proporciona una medida cuantitativa del poder de los distintos jugadores cuando se considera que el comportamiento de los mismos satisface ciertas condiciones.

En la caracterización del índice de poder de Deegan-Packel, sus autores emplearon propiedades comunes con el índice de poder de Shapley-Shubik, como son: eficiencia, jugador nulo y simetría; y una nueva propiedad, denominada propiedad de fusión.

El índice de poder de Deegan-Packel recoge la idea de que el poder de un jugador se basa exclusivamente en su participación en la formación de coaliciones minimales ganadoras, y que, *a priori*, todas estas coaliciones minimales ganadoras son igualmente plausibles. Para definir este índice de poder, se supone que el comportamiento de los jugadores está determinado por las siguientes condiciones.

- **Minimalidad:** Sólo originan una "victoria" las coaliciones minimales ganadoras.
- **Equiprobabilidad:** Todas las coaliciones minimales ganadoras son equiprobables.
- **Solidaridad:** Los jugadores que constituyen una coalición "victoriosa" se dividen el "botín" a partes iguales.

Estas condiciones parecen razonables en muchos casos. La condición de minimalidad es aplicable en el sentido de que los jugadores racionales quieren maximizar su poder y, por lo tanto, sólo se formarán coaliciones minimales ganadoras. La condición de equiprobabilidad dice que todas las coaliciones minimales ganadoras juegan el mismo papel y, finalmente, la propiedad de solidaridad establece que todos los jugadores de una coalición minimal ganadora sean tratados por igual.

Definición 1.3.1 *El índice de poder de Deegan-Packel de un jugador i en el juego simple (N,v) viene dado por:*

$$\rho_i(N,v) = \frac{1}{|M(v)|} \sum_{S \in M_i(v)} \frac{1}{|S|},$$

en donde $M(v)$ es el conjunto de coaliciones minimales ganadoras y $M_i(v) = \{S \in M(v) / i \in S\}$.

Se puede comprobar fácilmente que la definición del índice de poder de Deegan-Packel ρ para un jugador i es consistente con las tres condiciones anteriores. En primer lugar, sólo se consideran las coaliciones minimales ganadoras que contienen al jugador i (minimalidad), y todas estas coaliciones minimales ganadoras son tratadas del mismo modo (equiprobabilidad). Para cada coalición $S \in M_i(v)$, el término $1/|S|$ indica que el pago para el jugador i es el mismo que para los restantes $|S|-1$ jugadores en S (solidaridad). Obsérvese que en juegos de unanimidad, el índice de poder de Deegan-Packel coincide con el índice de poder de Shapley-Shubik.

Este valor también tiene una interpretación probabilística. Supongamos que el pago correspondiente a un jugador i perteneciente a una coalición minimal ganadora S es $1/|S|$ y que cada coalición minimal ganadora tiene una probabilidad $1/|M(v)|$ de formarse. Entonces la esperanza matemática del pago correspondiente al jugador i es precisamente ρ_i.

Este índice verifica las tres condiciones anteriores, pero es interesante tratar el problema de su unicidad, es decir, buscar un conjunto de propiedades razonables que sirvan para caracterizarlo unívocamente. Como en este modelo sólo son de interés las coaliciones minimales ganadoras, será necesario hacer una restricción de los juegos simples que se pueden combinar.

Definición 1.3.2 *Dos juegos simples (N, v) y (N, w) son fusionables si para cualquier par de coaliciones $S \in M(v)$ y $T \in M(w)$, se tiene que $S \nsubseteq T$ y $T \nsubseteq S$.*

Esta condición de fusión establece que las coaliciones minimales ganadoras del juego $(N, v \vee w)$ son precisamente la unión de las coaliciones minimales ganadoras de los juegos (N, v) y (N, w). Además, es evidente que si dos juegos (N, v) y (N, w) son fusionables se tiene que $|M(v \vee w)| = |M(v)| + |M(w)|$.

En el siguiente ejemplo se prueba que el valor de Deegan-Packel no verifica la propiedad de transferencia.

Ejemplo 1.3.1 *Considérense dos juegos simples (N, v) y (N, w) donde $N = \{1, 2, 3\}$, $M(v) = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ y $M(w) = \{1, 3\}$.*

El índice de Deegan-Packel para los juegos anteriores es

$$\rho(N, v) = (1/4, 1/2, 1/4), \rho(N, w) = (1/2, 0, 1/2).$$

Se tiene que $M(v \vee w) = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ y $M(v \wedge w) = \{1, 2, 3\}$ obteniéndose entonces que

$$\rho(N, v \vee w) = \rho(N, v \wedge w) = (1/3, 1/3, 1/3),$$

por lo que no se verifica la igualdad

$$\rho(N, v) + \rho(N, w) = \rho(N, v \vee w) + \rho(N, v \wedge w).$$

Sin embargo, el valor de Deegan-Packel satisface la siguiente propiedad:

Fusión (FUS). Una solución $f : SI(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad de fusión si para todo par de juegos $(N, v) \in SI(N)$ y $(N, w) \in SI(N)$ fusionables, se tiene que

$$f(N, v \vee w) = \frac{|M(v)| f(N, v) + |M(w)| f(N, w)}{|M(v \vee w)|}.$$

En Deegan y Packel (1979) se caracteriza la solución ρ con las propiedades de eficiencia, simetría, jugador nulo y fusión. En particular, probaron el resultado siguiente.

Teorema 1.3.1 *La única solución $f : SI(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que verifica las propiedades de EFI, SIM, JN y FUS es el índice de poder de Deegan-Packel.*

Nótese la similitud de esta caracterización con la presentada en el teorema 1.2.1 para el índice de poder de Shapley-Shubik. La diferencia fundamental entre ambos índices de poder es que el índice de poder de Shapley-Shubik satisface la propiedad de transferencia mientras que el índice de poder de Deegan-Packel satisface la propiedad de fusión.

En el siguiente ejemplo se calcula el índice de poder de Deegan-Packel de los distintos partidos que constituyen el Parlamento de las Islas Baleares.

Ejemplo 1.3.2 *El Parlamento de las Islas Baleares (formado por 59 escaños) puede representarse como $[30; 28, 16, 5, 4, 3, 3]$, donde el jugador 1 es el PP, el jugador 2 es el $PSOE$, el jugador 3 es el $PSM - EN$, el jugador 4 es $EU - EV$, el jugador 5 es UM y el jugador 6 es el $PACTE$.*

Una coalición es ganadora si dispone de 30 escaños como mínimo. Las coaliciones minimales ganadoras son las siguientes:

$$\{\{PP, PSOE\}, \{PP, PSM - EN\}, \{PP, EU - EV\}, \{PP, UM\},$$

$$\{PP, PACTE\}, \{PSOE, PSM - EN, EU - EV, UM, PACTE\}\}$$

El PP pertenece a 5 de las 6 coaliciones minimales ganadoras, cualquier coalición de 2 jugadores, en las que uno de ellos sea el PP es minimal ganadora. El resto de los jugadores se comportan de forma simétrica. El índice de poder de Deegan-Packel para este juego es igual a

$$\rho(N, v) = (5/12, 7/60, 7/60, 7/60, 7/60, 7/60).$$

Nueva caracterización del índice de poder de Deegan-Packel

En Young (1985) se proporciona una caracterización del valor de Shapley empleando la propiedad de monotonía fuerte en lugar de la propiedad de aditividad. Nowak (1997) obtuvo una caracterización similar para el valor de Banzhaf usando además la propiedad de "delegación" introducida por Lehrer (1988).

En el resto de esta sección se van a presentar nuevos resultados referentes al índice de poder de Deegan-Packel. En primer lugar, se obtendrá una nueva caracterización de este índice de poder empleando una propiedad similar a monotonía fuerte en lugar de la propiedad de fusión. A esta propiedad se le denominará propiedad de monotonía minimal.

Definición 1.3.3 *Un índice de poder $f : SI(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad de monotonía minimal (MM) si para todo par de juegos $(N,v), (N,w) \in SI(N)$, se tiene que*

$$f_i(N,w)\,|M(w)| \geq f_i(N,v)\,|M(v)|,$$

para todo jugador $i \in N$ tal que $M_i(v) \subseteq M_i(w)$.

En el siguiente ejemplo se prueba que el índice de poder de Shapley-Shubik no satisface esta propiedad.

Ejemplo 1.3.3 *Sean $(N,v), (N,w)$ dos juegos simples donde $N = \{1,2,3\}$ y los conjuntos de coaliciones minimales ganadoras son $M(v) = \{\{1,2\}\}$ y $M(w) = \{\{1,2\},\{2,3\}\}$, respectivamente. En este caso, $M_1(v) \subseteq M_1(w)$, pero $\varphi_1(N,w)\,|M(w)| = \frac{1}{3}$ y $\varphi_1(N,v)\,|M(v)| = \frac{1}{2}$.*

La naturaleza de la propiedad de monotonía minimal se basa en la siguiente idea: si para un jugador i toda coalición perteneciente a $M_i(v)$ también pertenece a $M_i(w)$ parece lógico que en el juego (N,w) dicho jugador tenga mayor poder que en el juego (N,v) (después de normalizarlo por el número de coaliciones minimales ganadoras de cada uno de los juegos).

Nótese que si un índice de poder $f : SI(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad de monotonía minimal, entonces cumple la siguiente igualdad:

$$f_i(N,w)\,|M(w)| = f_i(N,v)\,|M(v)|,$$

para todo par de juegos $(N, v), (N, w) \in SI(N)$ y para todo jugador $i \in N$ tal que $M_i(v) = M_i(w)$.

En el siguiente resultado se propone una nueva caracterización del índice de poder de Deegan-Packel.

Teorema 1.3.2 *El único índice de poder $f : SI(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que verifica las propiedades de MM, JN, SIM y EFI es el índice de poder de Deegan-Packel.*

Demostración

Se comenzará probando la existencia. En Deegan-Packel (1979) se demuestra que el valor de Deegan-Packel satisface la propiedad de jugador nulo, simetría y eficiencia. Para demostrar que satisface la propiedad de monotonía minimal, supóngase un par de juegos $(N, v), (N, w) \in SI(N)$, y un jugador $i \in N$ tal que $M_i(v) \subseteq M_i(w)$. Entonces

$$\rho_i(N, v) = \frac{1}{|M(v)|} \sum_{S \in M_i(v)} \frac{1}{|S|}.$$

Por otro lado,

$$\rho_i(N, w) = \frac{1}{|M(w)|} \sum_{S \in M_i(w)} \frac{1}{|S|} =$$

$$\frac{1}{|M(w)|} \sum_{S \in M_i(v)} \frac{1}{|S|} + \frac{1}{|M(w)|} \sum_{S \in M_i(w) \setminus M_i(v)} \frac{1}{|S|}.$$

Por lo tanto,

$$\rho_i(N, w)|M(w)| = \sum_{S \in M_i(v)} \frac{1}{|S|} + \sum_{S \in M_i(w) \setminus M_i(v)} \frac{1}{|S|} \geq$$

$$\sum_{S \in M_i(v)} \frac{1}{|S|} = \rho_i(N, v)|M(v)|.$$

Se verá ahora la unicidad. La demostración se hará por inducción en $|M(v)|$.

Si $|M(v)| = 1$, entonces $v = u_S$ para alguna coalición $S \subseteq N$. Si una solución f satisface las propiedades de eficiencia, simetría y jugador nulo, se tiene que

$$f_i(N,v) = \begin{cases} \frac{1}{|S|} & si\ i \in S \\ 0 & si\ i \notin S \end{cases}$$

Por lo tanto, la solución es única cuando $|M(v)| = 1$. Supóngase que el resultado está probado para cualquier valor de $|M(v)|$ desde 1 hasta $p-1$ y se verá que es cierto para $|M(v)| = p$. Sea entonces un juego $(N,v) \in SI(N)$ tal que $M(v) = \{S_1, S_2, \ldots, S_p\}$.

Sea $R = S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_p$ y sea $i \notin R$ tal que $M_i(v) \neq \emptyset$ (claramente existe por ser $|M(v)| > 1$). Considérese el juego $(N,v') \in SI(N)$ tal que $M(v') = \{S \in M(v) / i \in S\}$.

Como $M_i(v) = M_i(v')$, por la propiedad de monotonía minimal, se tiene que

$$f_i(N,v)\,|M(v)| = f_i(N,v')\,|M(v')|,$$

entonces, por hipótesis de inducción, $f_i(N,v)$ es única cuando $i \notin R$.

Falta demostrar la unicidad cuando $i \in R = S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_p$.

Por la propiedad de simetría, $f_i(N,v)$ debe ser igual a una constante c para todos los jugadores de R. Como la solución es eficiente y es única para todos los jugadores que no están en R, esta constante c tiene que ser única.$\square$

La extensión multilineal y el índice de poder de Deegan-Packel

En esta sección se verá cómo se puede obtener el índice de poder de Deegan-Packel de un juego $(N,v) \in SI(N)$ a partir de su extensión multilineal. En el siguiente lema, demostrado en Owen (1972b), se proporciona un método sencillo para calcular la extensión multilineal de un juego a partir de su expresión como combinación lineal de juegos de unanimidad.

Lema 1.3.3 *Si un juego v puede escribirse de la forma $v = \sum\limits_{S\subseteq N} c_S u_S$, entonces la extensión multilineal de v es de la siguiente forma:*

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{S\subseteq N} c_S \prod_{i\in S} x_i,$$

donde $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ y las cantidades c_S son constantes.

Anteriormente en la expresión (1.1) se vio que todo juego $(N, v) \in TU(N)$ puede escribirse como combinación lineal de juegos de unanimidad. En el caso particular en el que (N, v) sea un juego simple, se tiene que

$$v = \sum_{\substack{S\subseteq N\\ S\in W}} c_S u_S.$$

Por lo tanto, aplicando el lema 1.3.3, se obtiene que la extensión multilineal de un juego simple (N, v) es de la forma

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{S\subseteq N\\ S\in W}} c_S \prod_{i\in S} x_i,$$

donde, a partir de (1.1), se tiene que $c_S = 1$ si $S \in M(v)$.

A continuación, se describe el procedimiento para obtener el índice de poder de Deegan-Packel de un juego simple a partir de su extensión multilineal. Teniendo en cuenta la facilidad de cálculo de este índice de poder a partir del conocimiento del conjunto de coaliciones minimales ganadoras, este resultado no tiene mucha utilidad práctica, pero se incluye porque se considera interesante y para ver su semejanza con el procedimiento para calcular otros índices de poder a partir de la extensión multilineal del juego.

Teorema 1.3.4 *Sea (N, v) un juego simple. Puede calcularse el índice de poder de Deegan-Packel ρ_i de un jugador $i \in N$ en dicho juego, siguiendo los siguientes pasos:*
1. Obtener la extensión multilineal $h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ del juego (N, v).
2. En la expresión anterior eliminar aquellos monomios de la forma $c_S \prod\limits_{i\in S} x_i$ para los que $c_S \neq 1$. Con esto se ha obtenido una nueva función multilineal $l(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

3. Sea p el mínimo número de términos de los monomios $\prod_{i \in S} x_i$ que quedan en la función l obtenida en el paso anterior. Desde $k = p + 1$ hasta $k = n$ eliminar aquellos monomios con k términos que sean divisibles por algún monomio de la función l con número de términos desde p hasta $k - 1$. Con esto obtenemos una función g.
4. Finalmente, para obtener el índice de poder de Deegan-Packel ρ_i, de un jugador $i \in N$, basta con calcular

$$\rho_i (N, v) = \frac{1}{g (1, 1, \ldots, 1)} \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_i} (t, \ldots, t) \, dt.$$

Demostración

Sea $(N, v) \in SI (N)$ e $i \in N$.

Es inmediato comprobar que la función g que se obtiene después del paso 3 es igual a

$$g (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{S \in M(v)} \prod_{k \in S} x_k$$

Se tiene que $g (1, 1, \ldots, 1) = \sum_{S \in M(v)} 1 = |M (v)|$.
Por otra parte,

$$\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_i} (t, \ldots, t) \, dt = \int_0^1 \sum_{S \in M_i(v)} t^{|S|-1} dt = \sum_{S \in M_i(v)} \frac{1}{|S|},$$

con lo se finaliza la demostración.□

Como aclaración del teorema anterior, comentar que el motivo por el que se aplican los pasos 2 y 3 es porque es necesario eliminar de la expresión de la extensión multilineal aquellos términos que se corresponden con coaliciones ganadoras no minimales. Se ilustrará el procedimiento descrito en el teorema anterior para calcular el índice de poder de Deegan-Packel de los distintos partidos que constituyen el Parlamento de las Islas Baleares.

Ejemplo 1.3.4 *El Parlamento de las Islas Baleares puede representarse como* $[30; 28, 16, 5, 4, 3, 3]$. *Se va a calcular el índice de poder de Deegan-Packel del jugador* 1 (PP) *empleando el procedimiento descrito en el resultado anterior.*

En primer lugar, puede comprobarse fácilmente que este juego simple v *puede escribirse en términos de juegos de unanimidad de la siguiente forma, donde* $S = \{1\}$ *y* $T = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

$$v = \sum_{\substack{R \subseteq T \\ |R|=1}} u_{S\cup R} + u_T - \sum_{\substack{R \subseteq T \\ |R|=2}} u_{S\cup R} + \sum_{\substack{R \subseteq T \\ |R|=3}} u_{S\cup R} - \sum_{\substack{R \subseteq T \\ |R|=4}} u_{S\cup R}.$$

Aplicando el lema 1.3.3, se tiene que la extensión multilineal de este juego es:

$$h\left(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\right) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 + x_1x_6 + x_2x_3x_4x_5x_6 -$$

$$x_1x_2x_3 - x_1x_2x_4 - x_1x_2x_5 - x_1x_2x_6 - x_1x_3x_4 -$$

$$x_1x_3x_5 - x_1x_3x_6 - x_1x_4x_5 - x_1x_4x_6 - x_1x_5x_6 +$$

$$x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_5 + x_1x_2x_3x_6 + x_1x_2x_4x_5 + x_1x_2x_4x_6 +$$

$$x_1x_2x_5x_6 + x_1x_3x_4x_5 + x_1x_3x_4x_6 + x_1x_3x_5x_6 + x_1x_4x_5x_6 -$$

$$x_1x_2x_3x_4x_5 - x_1x_2x_3x_4x_6 - x_1x_2x_3x_5x_6 - x_1x_2x_4x_5x_6 - x_1x_3x_4x_5x_6.$$

Después de aplicar el paso 2, *eliminando aquellos monomios con coeficiente distinto de* 1, *se obtiene la función* l,

$$l\left(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\right) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 + x_1x_6 + x_2x_3x_4x_5x_6 +$$

$$x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_5 + x_1x_2x_3x_6 + x_1x_2x_4x_5 + x_1x_2x_4x_6 +$$

$$x_1x_2x_5x_6 + x_1x_3x_4x_5 + x_1x_3x_4x_6 + x_1x_3x_5x_6 + x_1x_4x_5x_6.$$

Eliminando de los monomios que forman la función l aquellos que pueden ser divididos por algún otro monomio de l, se obtiene la siguiente función g

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 + x_1x_6 + x_2x_3x_4x_5x_6.$$

Finalmente, para evaluar el poder del PP por medio del índice de Deegan-Packel, se aplica el paso 4, calculando

$$g(1,1,1,1,1,1) = 6 \text{ y } \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_1}(t, \ldots, t)\, dt = \int_0^1 5t dt = \frac{5}{2},$$

es decir, $\rho_1(N, v) = 5/12$.

De forma similar se obtendría que el índice de poder de Deegan-Packel de los restantes partidos sería igual a $7/60$.

La función generatriz y el índice de poder de Deegan-Packel

Para finalizar este capítulo se verá cómo se puede calcular el índice de poder de Deegan-Packel en juegos de mayoría ponderada empleando funciones generatrices.

Dado un juego simple (N, v) tanto el índice de poder de Banzhaf-Coleman como el índice de poder de Shapley-Shubik de un jugador $i \in N$ son sumas ponderadas del número de swings para el citado jugador, es decir, coaliciones perdedoras que pasan a ser ganadoras cuando se incorpora el jugador i. Sin embargo, para el índice de poder de Deegan-Packel de un jugador i sólo tienen influencia aquellos swings para i $(S, S \cup i)$ tales que $S \cup i$ sea una coalición minimal ganadora.

Para calcular el índice de poder de Deegan-Packel en un juego de mayoría ponderada, en primer lugar, se empleará una función generatriz que permita calcular el cardinal del total de coaliciones posibles; entre éstas, se elegirán las ganadoras y, finalmente, las minimales ganadoras. Para realizar esto, es necesario emplear $n+2$ variables, una indicadora de cada uno de los jugadores, otra que indique el número de jugadores que forman parte de la coalición y otra que indique el peso de dicha coalición.

Dado un juego simple (N, v), denotando por $m_s^i(v)$ el número de coaliciones minimales ganadoras S a las que pertenece el jugador $i \in N$, formadas por s jugadores, el índice de poder de Deegan-Packel de i en dicho juego es igual a

$$\rho_i(N, v) = \frac{1}{|M(v)|} \sum_{s=1}^{n} \frac{m_s^i(v)}{s}.$$

El siguiente resultado proporciona una función generatriz que permite el cálculo de los números $\left\{c_{jk(z_i)_{i\in N}}\right\}_{j\geq 0, k\geq 0}$, con $z_i = 0$ o $z_i = 1$, para $i = 1, 2, \ldots, n$ donde $c_{jk(z_i)_{i\in N}}$ es el número de coaliciones formadas por los j jugadores de $S = \{j/z_j = 1\}$ y de peso k. Es evidente que estas cantidades $c_{jk(z_i)_{i\in N}}$ son iguales a 1 (es posible formar una coalición con esas características) o a 0 (no es posible formar dicha coalición).

Proposición 1.3.1 *Sea (N, v) un juego simple de mayoría ponderada dado por $[q; w_1, w_2, ..., w_n]$. La función generatriz de los números $\left\{c_{jk(z_i)_{i\in N}}\right\}_{j\geq 0, k\geq 0}$, con $z_i = 0$ o $z_i = 1$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, definidos anteriormente viene dada por*

$$S(x, z_1, z_2, \ldots z_n, t) = \prod_{j=1}^{n} \left(1 + x^{w_j} z_j t\right).$$

A partir de la función generatriz anterior, para calcular el índice de poder de Deegan-Packel, en primer lugar, deben eliminarse aquellos monomios en los que la potencia de la variable x sea menor que q, pues interesa determinar las coaliciones ganadoras.

En un segundo paso, y de modo similar a como se hizo para la extensión multilineal deben eliminarse aquellos monomios que puedan dividirse por algún otro monomio de los que constituyen esta función. El número de monomios de la función resultante coincide con el número de coaliciones minimales ganadoras del juego, $|M(v)|$.

Finalmente, para obtener el valor de Deegan-Packel de un jugador $i \in N$ basta con seleccionar aquellos términos de la función anterior en los que aparezca la variable z_i. La potencia de la variable t indicará el número de jugadores que constituyen dicha coalición minimal ganadora.

Al igual que sucedía con la extensión multilineal, el procedimiento descrito anteriormente para el cálculo del índice de poder de Deegan-Packel en juegos de mayoría ponderada tiene poca utilidad práctica, aunque podría programarse para realizar los cálculos mediante un ordenador. Este resultado también es interesante porque sirve para comprobar que este índice también se puede calcular empleando funciones generatrices, al igual que sucedía con los índices de Shapley-Shubik y Banzhaf-Coleman. Para finalizar este capítulo, se ilustrará el procedimiento anterior calculando el índice de poder de Deegan-Packel de los distintos partidos que constituyen el Parlamento de las Islas Baleares.

Ejemplo 1.3.5 *El Parlamento de las Islas Baleares puede representarse como* $[30; 28, 16, 5, 4, 3, 3]$ *donde el jugador* 1 *es el* PP*, el jugador* 2 *es el* $PSOE$*, el jugador* 3 *es el* $PSM - EM$*, el jugador* 4 *es* $EU - EV$*, el jugador* 5 *es* UM *y el jugador* 6 *es el* $PACTE$*.*

En primer lugar se calcula la función $S(x, z_1, z_2, \ldots, z_6, t)$

$$S(x, z_1, z_2, \ldots, z_6, t) = \prod_{j=1}^{n} (1 + x^{w_j} z_j t) =$$

$$\left(1 + x^{28} z_1 t\right)\left(1 + x^{16} z_2 t\right)\left(1 + x^{5} z_3 t\right)\left(1 + x^{4} z_4 t\right)\left(1 + x^{3} z_5 t\right)\left(1 + x^{3} z_6 t\right) =$$

$$x^{59} z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6 t^6 + x^{31} z_2 z_3 z_4 z_5 z_6 t^5 + x^{43} z_1 z_3 z_4 z_5 z_6 t^5 + x^{54} z_1 z_2 z_4 z_5 z_6 t^5 +$$

$$x^{55} z_1 z_2 z_3 z_5 z_6 t^5 + x^{56} z_1 z_2 z_3 z_4 z_6 t^5 + x^{56} z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 t^5 + x^{15} z_3 z_4 z_5 z_6 t^4 +$$

$$x^{26} z_2 z_4 z_5 z_6 t^4 + x^{27} z_2 z_3 z_5 z_6 t^4 + x^{28} z_2 z_3 z_4 z_6 t^4 + x^{28} z_2 z_3 z_4 z_5 t^4 + x^{38} z_1 z_4 z_5 z_6 t^4 +$$

$$x^{39} z_1 z_3 z_5 z_6 t^4 + x^{40} z_1 z_3 z_4 z_6 t^4 + x^{40} z_1 z_3 z_4 z_5 t^4 + x^{50} z_1 z_2 z_5 z_6 t^4 + x^{51} z_1 z_2 z_4 z_6 t^4 +$$

$$x^{51}z_1z_2z_4z_5t^4 + x^{52}z_1z_2z_3z_6t^4 + x^{52}z_1z_2z_3z_5t^4 + x^{53}z_1z_2z_3z_4t^4 + x^{10}z_4z_5z_6t^3 +$$

$$x^{11}z_3z_5z_6t^3 + x^{11}z_3z_4z_6t^3 + x^{12}z_3z_4z_5t^3 + x^{22}z_2z_5z_6t^3 + x^{23}z_2z_4z_6t^3 +$$

$$x^{23}z_2z_4z_5t^3 + x^{24}z_2z_3z_6t^3 + x^{24}z_2z_3z_5t^3 + x^{25}z_2z_3z_4t^3 + x^{34}z_1z_5z_6t^3 +$$

$$x^{35}z_1z_4z_6t^3 + x^{35}z_1z_4z_5t^3 + x^{36}z_1z_3z_6t^3 + x^{36}z_1z_3z_5t^3 + x^{37}z_1z_3z_4t^3 +$$

$$x^{47}z_1z_2z_6t^3 + x^{47}z_1z_2z_5t^3 + x^{48}z_1z_2z_4t^3 + x^{49}z_1z_2z_3t^3 +$$

$$x^{44}z_1z_2t^2 + x^{33}z_1z_3t^2 + x^{32}z_1z_4t^2 + x^{31}z_1z_5t^2 + x^{31}z_1z_6t^2 +$$

$$x^{21}z_2z_3t^2 + x^{20}z_2z_4t^2 + x^{19}z_2z_5t^2 + x^{19}z_2z_6t^2 + x^{9}z_3z_4t^2 +$$

$$x^{8}z_3z_5t^2 + x^{8}z_3z_6t^2 + x^{7}z_4z_5t^2 + x^{7}z_4z_6t^2 + x^{6}z_5z_6t^2 +$$

$$x^{28}z_1t + x^{16}z_2t + x^{5}z_3t + x^{4}z_4t + x^{3}z_5t + x^{3}z_6t + 1.$$

De la función anterior se eligen aquellos términos en los que la potencia de la variable x sea mayor o igual que 30*, es decir,*

$$x^{59}z_1z_2z_3z_4z_5z_6t^6 + x^{31}z_2z_3z_4z_5z_6t^5 + x^{43}z_1z_3z_4z_5z_6t^5 +$$

$$x^{54}z_1z_2z_4z_5z_6t^5 + x^{55}z_1z_2z_3z_5z_6t^5 + x^{56}z_1z_2z_3z_4z_6t^5 + x^{56}z_1z_2z_3z_4z_5t^5 +$$

$$x^{38}z_1z_4z_5z_6t^4 + x^{39}z_1z_3z_5z_6t^4 + x^{40}z_1z_3z_4z_6t^4 + x^{40}z_1z_3z_4z_5t^4 +$$

$$x^{50}z_1z_2z_5z_6t^4 + x^{51}z_1z_2z_4z_6t^4 + x^{51}z_1z_2z_4z_5t^4 + x^{52}z_1z_2z_3z_6t^4 +$$

$$x^{52}z_1z_2z_3z_5t^4 + x^{53}z_1z_2z_3z_4t^4 + x^{34}z_1z_5z_6t^3 + x^{35}z_1z_4z_6t^3 +$$

$$+x^{35}z_1z_4z_5t^3 + x^{36}z_1z_3z_6t^3 + x^{36}z_1z_3z_5t^3 + x^{37}z_1z_3z_4t^3$$

$$+x^{47}z_1z_2z_6t^3 + x^{47}z_1z_2z_5t^3 + x^{48}z_1z_2z_4t^3 + x^{49}z_1z_2z_3t^3$$

$$+x^{44}z_1z_2t^2 + x^{33}z_1z_3t^2 + x^{32}z_1z_4t^2 + x^{31}z_1z_5t^2 + x^{31}z_1z_6t^2.$$

De los términos anteriores se eligen aquellos que no pueden ser divididos por otros términos, con lo que al final quedarían los términos:

$$x^{31}z_2z_3z_4z_5z_6t^5 + x^{44}z_1z_2t^2 + x^{33}z_1z_3t^2 + x^{32}z_1z_4t^2 + x^{31}z_1z_5t^2 + x^{31}z_1z_6t^2.$$

Por lo tanto, $|M(v)| = 6$, *el número de términos de la expresión anterior. Para calcular el índice de poder de un jugador* $i \in N$ *basta con sumar aquellos monomios en los que aparece la variable* z_i *dividido entre la potencia correspondiente de la variable* t, *y dividir el resultado final entre* $|M(v)|$. *Así para calcular el índice de poder del jugador* 4 *se tiene que* z_4 *aparece en dos monomios, dividiendo entre el exponente correspondiente de la variable* t, *se obtiene* $1/5 + 1/2 = 7/10$, *que dividido entre* $|M(v)|$ *es igual a* $7/60$.

De forma similar se obtendría el índice de poder de Deegan-Packel de los restantes jugadores:

$$\rho(N, v) = (5/12, 7/60, 7/60, 7/60, 7/60, 7/60).$$

Capítulo 2

Valores en juegos con uniones *a priori*

En los modelos considerados en el capítulo anterior se puede formar cualquier coalición, ya que no existe ninguna restricción en la cooperación entre los jugadores. Sin embargo, para representar ciertas situaciones de forma más adecuada es preciso tratar con nuevos modelos.

Uno de estos modelos es el de los juegos TU con un sistema de uniones. Un sistema de uniones es una partición del conjunto de jugadores que describe una estructura de coaliciones *a priori*. En las siguientes secciones se estudiarán varias soluciones para estos juegos y se propondrán herramientas para su cálculo, como las extensiones multilineales para cualquier juego TU o herramientas basadas en la utilización de funciones generatrices, para juegos de mayoría ponderada.

2.1 El valor de Owen

En primer lugar, presentaremos algunos conceptos y resultados básicos.

Definición 2.1.1 *Un juego TU con un sistema de uniones es una terna* (N, v, P)*, donde* (N, v) *es un juego TU y* $P = \{P_1, P_2, ..., P_m\}$ *es una partición de* N *que proporciona el sistema de uniones asociado.*

Se denotará por $U(N)$ el conjunto de todos los juegos TU con sistema de uniones y conjunto de jugadores N, y por U el conjunto de todos los juegos TU con sistema de uniones.

Dado un conjunto $N = \{1, 2, ..., n\}$, se utilizará la siguiente notación:

- Se denotará por $P(N)$ el conjunto de las particiones de N.
- Se denotará por P^n la partición de N dada por $\{\{1\}, \{2\}, ..., \{n\}\}$, (en este caso, diremos que el sistema de uniones es el trivial).
- Se denotará por P^N la partición de N dada por $\{N\}$, (aunque en algunos trabajos se considera que este sistema de uniones también es trivial, para nosotros el sistema de uniones trivial será sólo P^n, aquel en el que cada jugador es una unión).
- Dado un jugador $i \in N$, se denotará por $P(i)$ el conjunto de las particiones de N, en las que el jugador i constituye una coalición *a priori*, es decir, $P \in P(i)$ si existe $P_k \in P$ tal que $P_k = \{i\}$.

Definición 2.1.2 *Una solución sobre* $U(N)$ *es una aplicación*

$$f : U(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

que a cada juego $(N, v, P) \in U(N)$ *le asigna un vector de* $\mathbb{R}^n$*, en el que cada componente representa el pago que recibe el jugador correspondiente.*

El valor de Owen, propuesto y caracterizado por Owen en 1977 es una modificación del valor de Shapley adaptada al contexto de los juegos cooperativos con un sistema de uniones *a priori*.

En primer lugar, se define el juego cociente asociado a un juego con uniones *a priori*.

Definición 2.1.3 *Sea* $(N, v, P) \in U(N)$ *con* $P = \{P_1, P_2, ..., P_m\}$. *Se define el juego cociente asociado a* (N, v, P) *como el juego* $\left(M, v^P\right) \in TU(M)$ *tal que* $v^P(R) = v(\bigcup_{k \in R} P_k)$, *para todo* $R \subseteq M$, *siendo* $M = \{1, 2, ..., m\}$.

Diremos que dos uniones distintas $P_k, P_s \in P$ son simétricas en el juego $(N, v, P) \in U(N)$ si k y s son jugadores simétricos en el juego $\left(M, v^P\right)$.

En el capítulo anterior se vio que el valor de Shapley satisface la propiedad de simetría. Cuando se introduce un sistema de uniones *a priori*, parece lógico sustituir esta propiedad por dos nuevas propiedades: una propiedad de simetría dentro de cada unión y una propiedad de simetría entre uniones.

Simetría en cada unión (SU). Una solución $f : U(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es simétrica en cada unión si para todo $(N, v, P) \in U(N)$, se tiene que

$$f_i(N, v, P) = f_j(N, v, P),$$

para todo par de jugadores simétricos $i, j \in P_k$, con $P_k \in P$.

Esta propiedad establece que si dos jugadores de la misma unión *a priori* desempeñan el mismo papel en el juego (N, v) entonces reciben el mismo pago.

Simetría en el cociente (SC). Una solución $f : U(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es simétrica en el juego cociente si para todo $(N, v, P) \in U(N)$, se tiene que

$$\sum_{i \in P_k} f_i(N, v, P) = \sum_{i \in P_s} f_i(N, v, P),$$

para todo par de uniones simétricas $P_k, P_s \in P$.

Esta propiedad determina que dos uniones que se comportan de igual forma en el juego cociente obtienen el mismo pago.

A continuación, reescribimos las propiedades de eficiencia, jugador nulo, soporte y aditividad en el contexto de los juegos TU con sistema de uniones. Las designaremos de igual modo que las propiedades análogas en el contexto general de juegos TU.

Eficiencia (EFI). Una solución $f : U(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es eficiente si para todo juego $(N, v, P) \in U(N)$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(N, v, P) = v(N).$$

Jugador nulo (JN). Una solución $f : U(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad de jugador nulo si para todo juego $(N, v, P) \in U(N)$ y para todo jugador nulo en (N, v), $i \in N$, se tiene que $f_i(N, v, P) = 0$.

Soporte (SOP). Una solución $f : U(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad de soporte (SOP) si para todo juego $(N, v, P) \in U(N)$ y para todo soporte T de (N, v) se tiene que

$$\sum_{i \in T} f_i(N, v, P) = v(T).$$

Al igual que para los juegos TU, para la familia de juegos TU con sistema de uniones es equivalente que una solución satisfaga conjuntamente las propiedades de eficiencia y jugador nulo o que satisfaga la propiedad de soporte.

Aditividad (ADI). Una solución $f : U(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es aditiva si para todo par de juegos $(N, v, P) \in U(N)$ y $(N, w, P) \in U(N)$, se tiene que

$$f(N, v+w, P) = f(N, v, P) + f(N, w, P),$$

donde para cualquier coalición $T \subseteq N, (v+w)(T) = v(T) + w(T)$.

Empleando algunas de las propiedades anteriores, Owen probó el siguiente resultado.

Teorema 2.1.1 *La única solución f sobre $U(N)$ verificando las propiedades de EFI, JN, SU, SC y ADI es el valor de Owen. Dado un juego $(N, v, P) \in U(N)$, dicha solución asigna a cada jugador $i \in N$ el número real $\Phi_i(N, v, P)$ dado por:*

$$\sum_{R \subseteq M \backslash k} \sum_{T \subseteq P_k \backslash i} \frac{1}{p_k m} \frac{1}{\binom{m-1}{r}} \frac{1}{\binom{p_k-1}{t}} \left(v(Q \cup T \cup i) - v(Q \cup T)\right),$$

donde $Q = \underset{r \in R}{\cup} P_r$ y $P_k \in P$ es la unión tal que $i \in P_k$.

El valor de Shapley puede entenderse como una solución sobre el subconjunto de U formado por todas las ternas $(N, v, P^n) \in U(N)$ para todo N finito, es decir, puede pensarse que el valor de Shapley es una solución para juegos TU con sistema de uniones, pero que está definido sólo para el caso en que el sistema de uniones es el trivial. Visto de esta forma, el valor de Owen serviría para generalizar el valor de Shapley en los casos en los que el sistema de uniones no es el trivial. Basándose en esta idea, en Vázquez Brage (1998) se introduce el concepto de valor coalicional de Shapley.

Definición 2.1.4 *Un valor coalicional de Shapley es una aplicación f que asigna a cada $(N, v, P) \in U(N)$ un elemento de $\mathbb{R}^n$ verificando que, para todo $(N, v, P^n) \in U(N)$, $f(N, v, P^n) = \varphi(N, v)$ (recuérdese que φ denota el valor de Shapley).*

Es fácil comprobar que el valor de Owen es un valor coalicional de Shapley. En Vázquez Brage (1998), se proporcionan nuevas caracterizaciones para el valor de Owen, empleando el concepto de valor coalicional de Shapley y las propiedades de juego cociente, contribuciones equilibradas en las uniones y monotonía fuerte.

La propiedad de juego cociente establece que lo que ganan los jugadores de una coalición *a priori* coincide con lo que gana la coalición en el juego cociente.

Juego cociente (JC). Una solución $f : U(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad de juego cociente si para todo $(N, v, P) \in U(N)$ y para todo $P_k \in P$, se tiene que

$$\sum_{i \in P_k} f_i(N, v, P) = f_k\left(M, v^P, P^m\right).$$

En el teorema 1.1.4 se recordó la caracterización del valor de Shapley, obtenida por Young en 1985, empleando la propiedad de monotonía fuerte. Se enuncia esta propiedad en el contexto de los juegos TU con sistema de uniones, al igual que para propiedades anteriores, la designaremos del mismo modo.

Monotonía fuerte (MF). Una solución $f : U(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad de monotonía fuerte si para todo par de juegos $(N, v, P) \in U(N)$ y $(N, w, P) \in U(N)$ tales que $v(T \cup i) - v(T) \geq w(T \cup i) - w(T)$ para todo $i \in N$ y para todo $T \subseteq N \backslash i$, se tiene que $f_i(N, v, P) \geq f_i(N, w, P)$.

La propiedad de contribuciones equilibradas en las uniones establece que la ganancia (o pérdida) que supone para un jugador i que un jugador j abandone la unión P_k a la que pertenecen ambos, es igual a la que sufre el jugador j, cuando es el jugador i el que decide abandonar la unión P_k. Es decir:

Contribuciones equilibradas en las uniones (CEU). Una solución $f : U(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad de contribuciones equilibradas en las uniones si para todo juego $(N, v, P) \in U(N)$, para toda coalición $P_k \in P$ y para todo par de jugadores $i, j \in P_{k,}$ se verifica que

$$f_i(N, v, P) - f_i(N, v, P_{-j}) = f_j(N, v, P) - f_j(N, v, P_{-i}),$$

donde P_{-i} es el sistema de uniones que resulta cuando el jugador i deja la unión a la que pertenece, para formar una unión unitaria, es decir,

$$P_{-i} = \{P_1, ..., P_{k-1}, P_k \backslash i, P_{k+1}, ..., P_m, \{i\}\},$$

y P_{-j} se define de modo análogo.

Es interesante hacer notar que en esta propiedad de contribuciones equilibradas no se produce abandono del juego por parte de ningún jugador, sino que un jugador deja la unión a la que pertenece, para formar una unión unitaria. Esta propiedad refleja la idea de que todos los jugadores de una unión deben beneficiarse del mismo modo por formar dicha unión.

Con los conceptos anteriores, se presentan tres caracterizaciones del valor de Owen (Vázquez-Brage, 1998).

Teorema 2.1.2 *El valor de Owen es la única solución sobre $U(N)$ que verifica las propiedades de EFI, SU, SC y MF.*

Teorema 2.1.3 *El valor de Owen es el único valor coalicional de Shapley sobre U que verifica las propiedades de CEU y JC.*

Teorema 2.1.4 *El valor de Owen es la única solución sobre $U(N)$ que verifica las propiedades de EFI, JN, SC, ADI y CEU.*

Otras caracterizaciones del valor de Owen pueden encontrarse en Winter (1992) y Calvo, Lasaga y Winter (1996).

Anteriormente se ha definido el valor de Owen desde un punto de vista axiomático, es decir, como el único valor que satisface una serie de propiedades que se consideran plausibles dentro de la familia de juegos TU con sistema de uniones. Además, puede darse la siguiente interpretación al valor de Owen: supóngase que en un juego TU con sistema de uniones existen dos niveles de negociación; primero entre uniones y después entre jugadores de la misma unión. El reparto entre uniones se hace asignando a cada unión su valor de Shapley en el juego cociente. La cantidad asignada a cada unión en este primer reparto se divide entre los jugadores de cada unión teniendo en cuenta sus posibilidades de abandonar esa unión y entrar a formar parte de otras uniones.

2.2 El valor de Banzhaf-Owen

De acuerdo a la interpretación dada al valor de Owen, comentada al final de la sección anterior, Owen (1981) propuso una extensión del valor de Banzhaf para la familia de juegos TU con un sistema de uniones. En este caso, el reparto en los niveles de negociación se hace empleando el valor de Banzhaf. Se denominará a esta solución valor de Banzhaf-Owen y se denotará por Ψ.

Definición 2.2.1 *Dado un juego $(N, v, P) \in U(N)$, el valor de Banzhaf-Owen asigna a cada jugador $i \in N$ el número real $\Psi_i(N, v, P)$ dado por:*

$$\sum_{R \subseteq M \setminus k} \sum_{T \subseteq P_k \setminus i} \frac{1}{2^{m-1}} \frac{1}{2^{p_k - 1}} \left(v(Q \cup T \cup i) - v(Q \cup T) \right),$$

donde $Q = \bigcup_{r \in R} P_r$ y $P_k \in P$ es la unión tal que $i \in P_k$.

El valor de Banzhaf-Owen no fue caracterizado hasta el año 2001, en el que aparecen dos axiomatizaciones de este valor (Albizuri, 2001) y (Amer, Carreras y Giménez, 2001). Ambas caracterizaciones emplean, entre otras, la denominada propiedad de delegación, que ya fue empleada por Lehrer en 1988 para obtener una caracterización del valor de Banzhaf sin utilizar el axioma de aditividad.

En esta sección presentamos otra caracterización del valor de Banzhaf-Owen empleando el concepto de valor coalicional de Banzhaf. En el teorema 2.1.3 se vio una caracterización del valor de Owen empleando el concepto de valor coalicional de Shapley.

En el primer capítulo se proporcionaron caracterizaciones de los valores de Shapley y de Banzhaf en las que la única diferencia residía en que el valor de Shapley satisface eficiencia mientras que el valor de Banzhaf satisface la propiedad de poder total. El valor de Owen es una extensión del valor de Shapley para juegos con uniones *a priori*. Este valor satisface las propiedades de simetría en cada unión y simetría en el juego cociente, que se pueden interpretar como una extensión de la propiedad de simetría que satisface el valor de Shapley. Parece lógico suponer que de modo similar, al introducir una modificación del valor de Banzhaf para juegos TU con sistema de uniones, dicha modificación debería verificar la propiedad de simetría en el juego cociente. Sin embargo, el valor de Banzhaf-Owen no verifica esta propiedad como se comprueba en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.2.1 *Considérese el juego TU* (N, u_N) *, donde* $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *y* u_N *es el juego de unanimidad de la coalición total* N*. Tomando la estructura de coaliciones* $P = \{P_1, P_2\}$*, donde* $P_1 = \{1, 2, 3\}$ *y* $P_2 = \{4, 5\}$ *es fácil comprobar que el valor de Banzhaf-Owen para el juego* (N, u_N, P) *es*

$$\Psi(N, u_N, P) = (1/8, 1/8, 1/8, 1/4, 1/4).$$

El juego cociente u_N^P *es el juego de unanimidad con conjunto de jugadores* $M = \{1, 2\}$*. En este juego, los dos jugadores son simétricos, pero en el juego* (N, u_N, P) *se tiene que* $\sum\limits_{i \in P_1} \Psi_i(N, u_N, P) \neq \sum\limits_{i \in P_2} \Psi_i(N, u_N, P)$*.*

En primer lugar se introducirá el concepto de valor coalicional, del que como caso particular se obtendrían el valor coalicional de Shapley y el valor coalicional de Banzhaf. Un valor coalicional de un determinado valor debe coincidir con este valor si el sistema de uniones es el trivial, es decir, aquel en el que cada jugador constituye una unión.

Definición 2.2.2 *Dado un valor* f *sobre* (N, v) *, un valor coalicional de* f *es una aplicación* g *que asigna a cada* $(N, v, P) \in U(N)$ *un elemento de* $\mathbb{R}^n$ *verificando que, para todo* $(N, v, P^n) \in U(N), g(N, v, P^n) = f(N, v)$*.*

Definición 2.2.3 *Un valor coalicional de Banzhaf es una aplicación* f *que asigna a cada* $(N, v, P) \in U(N)$ *un elemento de* $\mathbb{R}^n$ *verificando que, para todo* $(N, v, P^n) \in U(N), f(N, v, P^n) = \beta(N, v)$*.*

En la nueva caracterización del valor de Banzhaf-Owen se emplearán, además del concepto de valor coalicional de Banzhaf, dos nuevas propiedades, denominadas propiedad de indiferencia en las uniones y propiedad de juego cociente para coaliciones formadas por un único jugador.

Definición 2.2.4 *Una solución* $f : U(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *satisface la propiedad de indiferencia en las uniones (IU) si para todo juego* $(N, v, P) \in U(N)$ *, para toda unión* $P_k \in P$ *y para todo par de jugadores* $i, j \in P_k, (i \neq j)$ *se verifica que*

$$f_i(N, v, P) = f_i(N, v, P_{-j}).$$

Esta propiedad dice que si un jugador decide de modo unilateral dejar la unión a la que pertenece, el pago obtenido por el resto de los jugadores de dicha unión sigue siendo el mismo.

Definición 2.2.5 *Una solución $f : U(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad de juego cociente para coaliciones formadas por un único jugador (JCU) si para todo jugador $i \in N$, para todo $P \in P(i)$ y para todo juego $(N, v, P) \in U(N)$, se tiene que*

$$f_i(N, v, P) = f_k\left(M, v^P, P^m\right),$$

donde $k \in M = \{1, 2, \ldots, m\}$ es la unión tal que $P_k = \{i\}$.

Esta propiedad establece que si una coalición *a priori* está formada por un único jugador, el pago obtenido por ese jugador coincide con el pago asignado a la coalición correspondiente en el juego entre uniones *a priori*.

Lema 2.2.1 *El valor de Banzhaf-Owen es un valor coalicional de Banzhaf.*

Demostración

Dado $(N, v, P^n) \in U(N)$, se tiene que para todo $i \in N$, se verifica que existe $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $P_k = \{i\}$. Como $m = n$ y $p_k = 1$, entonces

$$\Psi_i(N, v, P^n) = \sum_{R \subseteq M \backslash k} \sum_{T \subseteq P_k \backslash i} \frac{1}{2^{m-1}} \frac{1}{2^{p_k - 1}} \left(v(Q \cup T \cup i) - v(Q \cup T)\right) =$$

$$\sum_{S \subseteq N \backslash i} \frac{1}{2^{n-1}} \left(v(S \cup i) - v(S)\right) = \beta_i(N, v),$$

donde $Q = \bigcup_{r \in R} P_r$.□

Lema 2.2.2 *El valor de Banzhaf-Owen verifica la propiedad de indiferencia en las uniones.*

Demostración

Sea $(N, v, P) \in U(N)$, con $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$.

Dado $P_k \in P$ e $i, j \in P_k$ puede considerarse

$$P_{-j} = \left\{P'_1, P'_2, \ldots, P'_{m+1}\right\},$$

donde $P'_l = P_l$, para todo $l \in \{1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, m\}$, $P'_k = P_k \backslash j, P'_{m+1} = \{j\}$. Si $M' = \{1, 2, \ldots, m+1\}$, se tiene que

$$\Psi_i(N, v, P_{-j}) = \sum_{R \subseteq M' \backslash k} \sum_{T \subseteq P'_k \backslash i} \frac{1}{2^{m'-1}} \frac{1}{2^{p'_k - 1}} (v(Q \cup T \cup i) - v(Q \cup T)) = \tag{2.1}$$

$$\sum_{R \subseteq M \backslash k} \sum_{T \subseteq P_k \backslash i} \frac{1}{2^{m-1}} \frac{1}{2^{p_k - 1}} (v(Q \cup T \cup i) - v(Q \cup T)) = \Psi_i(N, v, P),$$

donde en (2.1) $Q = \bigcup_{r \in R} P_r$.□

Lema 2.2.3 *El valor de Banzhaf-Owen verifica la propiedad de juego cociente para coaliciones formadas por un único jugador.*

Demostración

Sea $(N, v, P) \in U(N)$, con $P \in P(i)$, es decir, $P_k = \{i\}$ para algún $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Entonces, se tiene que

$$\Psi_i(N, v, P) = \sum_{R \subseteq M \backslash k} \sum_{T \subseteq P_k \backslash i} \frac{1}{2^{m-1}} \frac{1}{2^{p_k - 1}} (v(Q \cup T \cup i) - v(Q \cup T)) = \tag{2.2}$$

$$\sum_{R \subseteq M \backslash k} \frac{1}{2^{m-1}} (v(Q \cup i) - v(Q)) = \sum_{R \subseteq M \backslash k} \frac{1}{2^{m-1}} \left(v^P(R \cup k) - v^P(R)\right) =$$

$$\beta_k\left(M, v^P\right) = \Psi_i\left(M, v^P, P^m\right),$$

donde en (2.2) $Q = \bigcup_{r \in R} P_r$.□

En el siguiente resultado, se caracteriza el valor de Banzhaf-Owen como la única extensión posible del valor de Banzhaf al contexto de los juegos TU con sistema de uniones verificando las dos propiedades anteriores.

Teorema 2.2.4 *El valor de Banzhaf-Owen es el único valor coalicional de Banzhaf que verifica IU y JCU.*

Demostración

Existencia:

En los tres lemas anteriores se demostró que el valor de Banzhaf-Owen es un valor coalicional de Banzhaf y que satisface IU y JCU.

Unicidad:

Supóngase que existen dos valores coalicionales de Banzhaf f^1 y f^2 verificando IU y JCU.

Puede encontrarse entonces un juego $(N, v) \in TU(N)$, y para este juego, una partición $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\} \in P(N)$, con el máximo número de coaliciones *a priori* tal que $f_i^1(N, v, P) \neq f_i^2(N, v, P)$, para algún jugador $i \in N$.

Por ser ambas soluciones valores coalicionales de Banzhaf, necesariamente $m < n$. Supóngase que $i \in P_k$, entonces son posibles dos casos:

- $|P_k| = 1$, entonces $P_k = \{i\}$.

Por la propiedad de juego cociente para coaliciones formadas por un único jugador, se tiene que

$$f_i^1(N, v, P) = f_i^1\left(M, v^P, P^m\right) \text{ y } f_i^2(N, v, P) = f_i^2\left(M, v^P, P^m\right).$$

Como f^1 y f^2 son valores coalicionales de Banzhaf

$$f_i^1\left(M, v^P, P^m\right) = \beta_i\left(M, v^P\right) = f_i^2\left(M, v^P, P^m\right),$$

y, por lo tanto, $f_i^1(N, v, P) = f_i^2(N, v, P)$. Lo cual es una contradicción.

- $|P_k| > 1$, sea entonces $j \in P_k$, tal que $j \neq i$. Por la propiedad de indiferencia en las uniones

$$f_i^1(N, v, P) = f_i^1(N, v, P_{-j}) \text{ y } f_i^2(N, v, P) = f_i^2(N, v, P_{-j}).$$

Por la maximalidad de la partición P, se tiene que

$$f_i^1(N, v, P_{-j}) = f_i^2(N, v, P_{-j}),$$

con lo que $f_i^1(N, v, P) = f_i^2(N, v, P)$, lo que es absurdo.$\square$

Más adelante se compararán, mediante un par de ejemplos, el valor de Owen, el valor de Banzhaf-Owen y una nueva versión coalicional del valor de Banzhaf, que se introduce a continuación.

2.3 El valor de Banzhaf coalicional simétrico

En esta sección se va a proponer y a caracterizar una extensión alternativa del valor de Banzhaf para la familia de los juegos cooperativos con utilidad transferible y sistema de uniones. Este valor, al que denominaremos valor de Banzhaf coalicional simétrico, satisface la propiedad de simetría en el juego cociente. Algunos de los resultados de esta sección y de secciones siguientes aparecen en Alonso, Colmenero y Fiestras (2001) y Alonso y Fiestras (2001).

En primer lugar, se propondrá una modificación de la propiedad de poder total, teniendo en cuenta que la existencia de uniones *a priori* limita la cooperación entre los jugadores. Para definir esta nueva propiedad se empleará el concepto de valor coalicional y la propiedad de juego cociente.

Si quiere proponerse un valor $f : U(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que satisfaga la propiedad de juego cociente, debe cumplir que para cualquier juego $(N, v, P) \in U(N)$ con $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$,

$$\sum_{i \in N} f_i(N, v, P) = \sum_{k \in M} \sum_{i \in P_k} f_i(N, v, P) = \sum_{k \in M} f_k\left(M, v^P, P^m\right). \tag{2.3}$$

Si este valor es un valor coalicional de Banzhaf, debe coincidir con el valor de Banzhaf cuando el sistema de uniones es el trivial, por lo tanto,

$$\sum_{k \in M} f_k\left(M, v^P, P^m\right) = \sum_{k \in M} \beta_k\left(M, v^P\right). \tag{2.4}$$

Como el valor de Banzhaf satisface la propiedad de poder total, se obtiene la siguiente igualdad

$$\sum_{k \in M} \beta_k\left(M, v^P\right) = \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{k \in M} \sum_{T \subseteq M \setminus k} \left[v^P(T \cup k) - v^P(T)\right]. \tag{2.5}$$

Considerando las igualdades (2.3), (2.4) y (2.5) se obtiene la siguiente propiedad, a la que se denominará propiedad del poder total coalicional.

Definición 2.3.1 *Una solución $f : U(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ verifica la propiedad de poder total coalicional (PTC) si para todo $(N, v, P) \in U(N)$ con $P = \{P_k / k \in M = \{1, \ldots, m\}\}$ se cumple que*

$$\sum_{i \in N} f_i(N, v, P) = \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{k \in M} \sum_{T \subseteq M \setminus k} \left[v^P(T \cup k) - v^P(T)\right].$$

Ahora, puede caracterizarse un nuevo valor en el siguiente resultado.

Teorema 2.3.1 *Existe una única solución $f : U(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ verificando las propiedades de PTC, JN, SU, SC y ADI. Esta solución se denotará por Π y se denominará valor de Banzhaf coalicional simétrico.*

Dado un juego $(N, v, P) \in U(N)$, esta solución asigna a cada jugador $i \in N$ el número real

$$\Pi_i(N, v, P) =$$

$$\sum_{R \subseteq M \backslash k} \sum_{T \subseteq P_k \backslash i} \frac{1}{2^{m-1}} \frac{t!\,(p_k - t - 1)!}{p_k!} \left(v(Q \cup T \cup i) - v(Q \cup T)\right), \tag{2.6}$$

donde $Q = \bigcup\limits_{r \in R} P_r$ y $P_k \in P$ es la unión tal que $i \in P_k$.

Demostración

Existencia:

En primer lugar se comprobará que Π verifica las propiedades enumeradas en el teorema. Se comenzará con la propiedad de poder total coalicional.

Dado $(N, v, P) \in U(N)$, se tiene que

$$\sum_{i \in N} \Pi_i(N, v, P) = \sum_{k \in M} \sum_{i \in P_k} \Pi_i(N, v, P) =$$

$$\sum_{k \in M} \sum_{R \subseteq M \backslash k} \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{i \in P_k} \sum_{T \subseteq P_k \backslash i} \frac{t!\,(p_k - t - 1)!}{p_k!} \left[v(Q \cup T \cup i) - v(Q \cup T)\right]. \tag{2.7}$$

Dados $P_k \in P$ y $R \subseteq M \backslash k$, considérese $Q = \bigcup\limits_{r \in R} P_r$ y el juego TU $\left(P_k, \tilde{v}^Q\right) \in TU(P_k)$, con función característica $\tilde{v}^Q(T) = v(Q \cup T) - v(Q)$, para todo $T \subseteq P_k$.

Entonces, el valor de Shapley de un jugador $i \in P_k$ en el juego $\left(P_k, \tilde{v}^Q\right)$ es igual a:

$$\varphi_i\left(P_k, \tilde{v}^Q\right) = \sum_{T \subseteq P_k \setminus i} \frac{t!\,(p_k - t - 1)!}{p_k!} \left[\tilde{v}^Q\,(T \cup i) - \tilde{v}^Q\,(T)\right] = \tag{2.8}$$

$$\sum_{T \subseteq P_k \setminus i} \frac{t!\,(p_k - t - 1)!}{p_k!} \left[v\,(Q \cup T \cup i) - v\,(Q) - (v\,(Q \cup T) - v\,(Q))\right] =$$

$$\sum_{T \subseteq P_k \setminus i} \frac{t!\,(p_k - t - 1)!}{p_k!} \left[v\,(Q \cup T \cup i) - v\,(Q \cup T)\right].$$

Por la eficiencia del valor de Shapley, se obtiene

$$\sum_{i \in P_k} \varphi_i\left(P_k, \tilde{v}^Q\right) = \tilde{v}^Q\,(P_k) = v\,(Q \cup P_k) - v\,(Q) =$$

$$\sum_{i \in P_k} \sum_{T \subseteq P_k \setminus i} \frac{t!\,(p_k - t - 1)!}{p_k!} \left[v\,(Q \cup T \cup i) - v\,(Q \cup T)\right].$$

Insertando este resultado en la expresión anterior (2.7), se tiene que:

$$\sum_{i \in N} \Pi_i\,(N, v, P) = \sum_{k \in M} \sum_{R \subseteq M \setminus k} \frac{1}{2^{m-1}} \left[v\,(Q \cup P_k) - v\,(Q)\right] =$$

$$\frac{1}{2^{m-1}} \sum_{k \in M} \sum_{R \subseteq M \setminus k} \left[v^P\,(R \cup k) - v^P\,(R)\right].$$

A partir de la expresión (2.6) es fácil comprobar que Π verifica las propiedades de jugador nulo y simetría en cada unión.

Se ha demostrado que la cantidad total que obtienen los jugadores de P_k es igual a:

$$\sum_{i \in P_k} \Pi_i\,(N, v, P) = \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{R \subseteq M \setminus k} \left[v^P\,(R \cup k) - v^P\,(R)\right]. \tag{2.9}$$

Entonces, este valor satisface la propiedad de simetría en el cociente: dadas dos uniones simétricas $P_k, P_s \in P$, se tiene que $v^P(R \cup k) = v^P(R \cup s)$, para todo $R \subseteq M \setminus \{k, s\}$. Además, $v^P(R \cup k) = v^P(T \cup s)$, donde $T = (R \setminus s) \cup k$, para todo $R \subseteq M \setminus k$ y $s \in R$. De la expresión (2.9), se deduce que

$$\sum_{i \in P_k} \Pi_i(N, v, P) = \sum_{j \in P_s} \Pi_j(N, v, P).$$

Finalmente, la expresión (2.6) es lineal en v, y entonces, la solución es aditiva.

Unicidad:

Es suficiente demostrar que cualquier solución f que satisface las propiedades enumeradas en el teorema coincide con Π para los juegos de unanimidad. La propiedad de aditividad y el hecho de que la familia de los juegos de unanimidad constituyen una base de la familia de los juegos TU, garantizan la unicidad de este valor.

Considérese un conjunto finito N y el juego de unanimidad u_T, con $T \subseteq N$. Dada una partición $P = \{P_1, P_2, ..., P_m\} \in P(N)$ tomando

$$m(T) = \{j \in M / P_j \cap T \neq \emptyset\} \;\; y \; T'_j = P_j \cap T.$$

El juego cociente $\left(M, u_T^P\right)$ queda definido como

$$u_T^P(R) = \begin{cases} 1 & si \; m(T) \subseteq R \\ 0 & si \; m(T) \nsubseteq R \end{cases}$$

para todo $R \subseteq M$.

Supóngase entonces una solución f que cumpla las propiedades consideradas en el teorema.

Como f satisface la propiedad de jugador nulo, $f_i(N, u_T, P) = 0$, para todo jugador $i \notin T$. Más aún, por las propiedades de poder total coalicional, jugador nulo y simetría en el juego cociente, se tiene que

$$\sum_{i \in P_k} f_i(N, u_T, P) = \begin{cases} 0 & si \; k \notin m(T) \\ \frac{1}{2^{|m(T)|-1}} & si \; k \in m(T) \end{cases}$$

para todo $k \in M$.

Una solución f que satisface la propiedad de simetría en las uniones, otorga a todo jugador que pertenece a T'_k la misma cantidad. Por lo tanto,

$$f_i(N, u_T, P) = \begin{cases} 0 & si\ i \notin T \\ \frac{1}{t'_k 2^{|m(T)|-1}} & si\ i \in T'_k \end{cases}$$

Por otro lado, si $i \notin T$ es fácil probar que $\Pi_i(N, u_T, P) = 0$. Cuando $i \in T$ entonces $i \in T'_k = T \cap P_k$ y $u_T(Q \cup S \cup i) - u_T(Q \cup S) = 1$ si y sólo si $Q = \bigcup\limits_{r \in R} P_r$ donde $m(T) \backslash k \subseteq R \subseteq M \backslash k$, y $T'_k \backslash i \subseteq S \subseteq P_k \backslash i$. Por lo tanto, si $i \in T'_k$,

$$\Pi_i(N, u_T, P) = \sum_{m(T)\backslash k \subseteq R \subseteq M \backslash k} \; \sum_{T'_k \backslash i \subseteq S \subseteq P_k \backslash i} \frac{1}{2^{m-1}} \frac{s!\,(p_k - s - 1)!}{p_k!} = \frac{1}{t'_k 2^{|m(T)|-1}}.$$

En consecuencia, f y Π coinciden para cualquier juego (N, u_T, P) y la demostración queda finalizada.□

Este resultado revela que las propiedades que satisface el valor coalicional de Banzhaf simétrico y el valor de Owen son muy similares. La única diferencia es que el primero verifica la propiedad de poder total coalicional, mientras que el segundo satisface la propiedad de eficiencia. Nótese que esto está en correspondencia con las diferencias entre el valor de Banzhaf y el valor de Shapley vistas en el primer capítulo.

Es interesante hacer notar que el valor de Banzhaf coalicional simétrico se corresponde con un valor que consiste en repartir en el juego cociente de acuerdo al valor de Banzhaf (expresión (2.9)) y dentro de cada una de las coaliciones se reparte esta cantidad de acuerdo con el valor de Shapley (expresión (2.8)). Nuestra intención al definir este valor era obtener una nueva extensión del valor de Banzhaf que verificase las propiedades de simetría en el cociente y juego cociente. Por lo tanto, esta nueva extensión del valor de Banzhaf recoge algunas de las propiedades interesantes que satisface el valor de Owen, a diferencia del valor de Banzhaf-Owen. Más adelante, se hará una comparación de estos valores mediante un ejemplo.

En el teorema 2.1.2 se vio una caracterización del valor de Owen empleando la propiedad de monotonía fuerte. De forma parecida, puede obtenerse otra caracterización del valor de Banzhaf coalicional simétrico, sustituyendo la propiedad de eficiencia por la de poder total coalicional, de la que se omite la demostración por ser similar a la de los teoremas 2.1.2 y 2.3.1.

Teorema 2.3.2 *El valor de Banzhaf coalicional simétrico es la única solución sobre $U(N)$ verificando las propiedades de PTC, SU, SC y MF.*

En el teorema 2.1.3 se caracteriza el valor de Owen como el único valor coalicional de Shapley que satisface las propiedades de juego cociente y contribuciones equilibradas en las uniones. Ahora, se va a probar que el valor de Banzhaf coalicional simétrico satisface propiedades análogas.

Lema 2.3.3 *El valor de Banzhaf coalicional simétrico es un valor coalicional de Banzhaf y satisface la propiedad de juego cociente.*

Demostración

(1) Dado un juego $(N, v) \in TU(N)$, considérese el sistema de uniones trivial P^n y el juego (N, v, P^n). Como el cardinal de cada unión P_k es igual a 1, sustituyendo en (2.6), se obtiene que $\Pi_i(N, v, P^n) = \beta_i(N, v)$. Esto quiere decir que Π es un valor coalicional de Banzhaf.

(2) De la expresión (2.9) se deduce que el valor de Banzhaf coalicional simétrico satisface la propiedad de juego cociente.$\square$

Lema 2.3.4 *El valor de Banzhaf coalicional simétrico verifica la propiedad de contribuciones equilibradas en las uniones.*

Demostración

Sea $(N, v, P) \in U(N)$, con $P = \{P_1, P_2, ..., P_m\}$ y $M = \{1, 2, \ldots, m\}$. Sea $P_k \in P$ e $i, j \in P_k$.

Por la expresión (2.6) se tiene que

$$\Pi_i(N, v, P) =$$

$$\sum_{R\subseteq M\backslash k}\sum_{T\subseteq P_k\backslash i}\frac{1}{2^{m-1}}\frac{1}{p_k}\frac{1}{\binom{p_k-1}{t}}\left[v\left(Q\cup T\cup i\right)-v\left(Q\cup T\right)\right]=$$

$$\sum_{R\subseteq M\backslash k}\sum_{T\subseteq P_k\backslash\{i,j\}}\frac{1}{2^{m-1}}\frac{1}{p_k}\frac{1}{\binom{p_k-1}{t}}\left[v\left(Q\cup T\cup i\right)-v\left(Q\cup T\right)\right]+$$

$$\sum_{R\subseteq M\backslash k}\sum_{T\subseteq P_k\backslash i/j\in T}\frac{1}{2^{m-1}}\frac{1}{p_k}\frac{1}{\binom{p_k-1}{t}}\left[v\left(Q\cup T\cup i\right)-v\left(Q\cup T\right)\right]=$$

$$\sum_{R\subseteq M\backslash k}\sum_{T\subseteq P_k\backslash\{i,j\}}\frac{1}{2^{m-1}}\frac{1}{p_k}\frac{1}{\binom{p_k-1}{t}}\left[v\left(Q\cup T\cup i\right)-v\left(Q\cup T\right)\right]+$$

$$\sum_{R\subseteq M\backslash k}\sum_{T\subseteq P_k\backslash\{i,j\}}\frac{1}{2^{m-1}}\frac{1}{p_k}\frac{1}{\binom{p_k-1}{t+1}}\left[v\left(Q\cup T\cup j\cup i\right)-v\left(Q\cup T\cup j\right)\right],$$

donde $Q=\bigcup_{r\in R}P_r$. Considerando ahora

$$P_{-j}=\left\{P_1',P_2',...,P_{m+1}'\right\},$$

donde $P_l'=P_l$, para todo $l\in\{1,...,k-1,k+1,...,m\}\,,P_k'=P_k\backslash j$, $P_{m+1}'=\{j\}$ y $M'=\{1,2,...,m+1\}$.

Entonces, puede escribirse

$$\Pi_i\left(N,v,P_{-j}\right)=$$

$$\sum_{R\subseteq M'\backslash k}\sum_{T\subseteq P_k'\backslash i}\frac{1}{2^{m}}\frac{1}{p_k-1}\frac{1}{\binom{p_k-2}{t}}\left[v\left(Q\cup T\cup i\right)-v\left(Q\cup T\right)\right]=$$

$$\sum_{R\subseteq M'\setminus\{k,m+1\}} \sum_{T\subseteq P_k\setminus\{i,j\}} \frac{1}{2^m}\frac{1}{p_k-1}\frac{1}{\binom{p_k-2}{t}}\left[v\left(Q\cup T\cup i\right)-v\left(Q\cup T\right)\right]+$$

$$\sum_{R\subseteq M'\setminus k/m+1\in R} \sum_{T\subseteq P_k\setminus\{i,j\}} \frac{1}{2^m}\frac{1}{p_k-1}\frac{1}{\binom{p_k-2}{t}}\left[v\left(Q\cup T\cup i\right)-v\left(Q\cup T\right)\right]=$$

$$\sum_{R\subseteq M\setminus k} \sum_{T\subseteq P_k\setminus\{i,j\}} \frac{1}{2^m}\frac{1}{p_k-1}\frac{1}{\binom{p_k-2}{t}}\left[v\left(Q\cup T\cup i\right)-v\left(Q\cup T\right)\right]+$$

$$\sum_{R\subseteq M\setminus k} \sum_{T\subseteq P_k\setminus\{i,j\}} \frac{1}{2^m}\frac{1}{p_k-1}\frac{1}{\binom{p_k-2}{t}}\left[v\left(Q\cup T\cup j\cup i\right)-v\left(Q\cup T\cup j\right)\right].$$

De esta forma:

$$\Pi_i\left(N,v,P\right)-\Pi_i\left(N,v,P_{-j}\right)=$$

$$\sum_{R\subseteq M\setminus k} \sum_{T\subseteq P_k\setminus\{i,j\}} A_1\left[v\left(Q\cup T\cup i\right)-v\left(Q\cup T\right)\right]+$$

$$\sum_{R\subseteq M\setminus k} \sum_{T\subseteq P_k\setminus\{i,j\}} A_2\left[v\left(Q\cup T\cup j\cup i\right)-v\left(Q\cup T\cup j\right)\right],$$

donde

$$A_1=\frac{1}{2^{m-1}}\frac{1}{p_k}\frac{1}{\binom{p_k-1}{t}}-\frac{1}{2^m}\frac{1}{p_k-1}\frac{1}{\binom{p_k-2}{t}}$$

y

$$A_2 = \frac{1}{2^{m-1}} \frac{1}{p_k} \frac{1}{\binom{p_k - 1}{t+1}} - \frac{1}{2^m} \frac{1}{p_k - 1} \frac{1}{\binom{p_k - 2}{t}}.$$

Puede escribirse $A_1 = B - C$ y $A_2 = D - C$. Se va a comprobar que $A_1 + A_2 = 0$, o lo que es lo mismo, que $B + D = 2C$.

$$B + D = \frac{1}{2^{m-1}} \frac{1}{p_k} \left(\frac{1}{\binom{p_k - 1}{t}} + \frac{1}{\binom{p_k - 1}{t+1}} \right) =$$

$$\frac{1}{2^{m-1}} \frac{1}{p_k} \frac{t!\,(p_k - t - 1)! + (t+1)!\,(p_k - t - 2)!}{(p_k - 1)!} =$$

$$\frac{1}{2^{m-1}} \frac{1}{p_k} \frac{t!\,(p_k - t - 2)!\,(p_k - t - 1) + (t+1)\,t!\,(p_k - t - 2)!}{(p_k - 1)!} =$$

$$\frac{1}{2^{m-1}} \frac{1}{p_k} \frac{t!\,(p_k - t - 2)!\,(p_k - t - 1 + t + 1)}{(p_k - 1)!} =$$

$$\frac{1}{2^{m-1}} \frac{1}{p_k - 1} \frac{t!\,(p_k - t - 2)!}{(p_k - 2)!} =$$

$$\frac{2}{2^m} \frac{1}{p_k - 1} \frac{1}{\binom{p_k - 2}{t}} = 2C.$$

Por lo tanto,

$$\Pi_i\,(N, v, P) - \Pi_i\,(N, v, P_{-j}) =$$

$$A_1 \sum_{R \subseteq M \setminus k} \sum_{T \subseteq P_k \setminus \{i,j\}} [v\,(Q \cup T \cup i) - v\,(Q \cup T)] -$$

$$A_1 \sum_{R \subseteq M \backslash k} \sum_{T \subseteq P_k \backslash \{i,j\}} \left[v\left(Q \cup T \cup j \cup i\right) + v\left(Q \cup T \cup j\right) \right].$$

Como esta expresión depende de i del mismo modo que depende de j, entonces se tiene que:

$$\Pi_i\left(N, v, P\right) - \Pi_i\left(N, v, P_{-j}\right) = \Pi_j\left(N, v, P\right) - \Pi_j\left(N, v, P_{-i}\right)$$

y la demostración está finalizada.□

Teorema 2.3.5 *El valor de Banzhaf coalicional simétrico* (Π) *es el único valor coalicional de Banzhaf que satisface las propiedades de* CEU *y* JC.

Demostración

Existencia:

Se sigue de los dos lemas anteriores que el valor de Banzhaf coalicional simétrico es un valor coalicional de Banzhaf que satisface CEU y JC.

Unicidad:

La demostración es inmediata empleando razonamientos similares a los utilizados en Vázquez-Brage (1996), donde se demuestra que existe un único valor coalicional de Shapley que satisface las propiedades de juego cociente y contribuciones equilibradas en las uniones.□

Puede encontrarse otra caracterización de Π similar a la caracterización del valor de Owen del teorema 2.1.4, empleando la propiedad de contribuciones equilibradas en las uniones, sin verlo como un valor coalicional de Banzhaf. Se omite la demostración por emplear razonamientos similares a los de resultados anteriores.

Teorema 2.3.6 *El valor de Banzhaf coalicional simétrico es la única solución sobre* $U(N)$ *que verifica las propiedades de* PTC, JN, SC, ADI *y* CEU.

Empleando la propiedad de transferencia en lugar de la propiedad de aditividad, obtenemos una caracterización del valor de Banzhaf coalicional simétrico para los juegos simples con uniones *a priori*. Esta caracterización es similar a la obtenidad en Vázquez-Brage (1998), para el valor de Owen en juegos simples.

Teorema 2.3.7 *El único índice de poder* $f : SU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *que verifica las propiedades de* PTC, JN, SU, SC *y* TR *es el valor de Banzhaf coalicional simétrico.*

Demostración

Existencia:

Se probó anteriormente que Π satisface las cuatro primeras propiedades. Además, como se verifica que $(v \vee w) + (v \wedge w) = v + w$ y Π verifica la propiedad de aditividad también satisface la propiedad de transferencia.

Unicidad:

Se sigue la demostración utilizada por Dubey, (1975) para demostrar la unicidad del índice de poder de Shapley-Shubik, teniendo en cuenta como se vio anteriormente, que el valor de Banzhaf coalicional simétrico en juegos de unanimidad está caracterizado por las cuatro primeras propiedades.$\square$

También puede caracterizarse Π para la familia de los juegos simples a partir del teorema 2.3.5 en el que se caracteriza este nuevo valor como el único valor coalicional de Banzhaf con las propiedades de contribuciones equilibradas en las uniones y juego cociente.

Para finalizar esta sección, se incluyen dos ejemplos en los que se comparan los valores de Owen, Banzhaf-Owen y Banzhaf coalicional simétrico.

El Parlamento de las Islas Baleares

El Parlamento de las Islas Baleares está constituido por 59 miembros, su composición resultante de las elecciones del 13 de junio de 1999 puede representarse como $[30; 28, 16, 5, 4, 3, 3]$ donde el jugador 1 es el PP, el jugador 2 es el $PSOE$, el jugador 3 es el $PSM - EN$, el jugador 4 es $EU - EV$, el jugador 5 es UM y el jugador 6 es el $PACTE$.

Las coaliciones minimales ganadoras son:

$$\{PP, PSOE\}, \{PP,\ EU - EV\}, \{PP,\ PACTE\}, \{PP, UM\}$$

$$\{PP, PSM - EN\} \ y \ \{PSOE, PSM - EN, UM, EU - EV, PACTE\}.$$

Podría esperarse que la Presidencia del Gobierno estuviese ocupada por un miembro del PP. El poder de los jugadores calculado mediante el índice de poder de Shapley-Shubik (φ) y el índice de poder Banzhaf-Coleman (β), que aparece en la Tabla 1, confirmaría esta hipótesis:

Tabla 1

Partido	φ	β
PP	2/3	15/16
PSOE	1/15	1/16
PSM-EN	1/15	1/16
EU-EV	1/15	1/16
UM	1/15	1/16
PACTE	1/15	1/16

Puede presumirse la existencia de acuerdos entre los partidos de izquierda. Además, teniendo en cuenta las ideas regionalistas de $PSM - EN$ y UM puede asumirse que ambos constituirán una unión. Entonces, se considera que la estructura de uniones *a priori* sería la siguiente:

$$P = \{\{PP\}, \{PSOE, EU - EV, PACTE\}, \{PSM - EN, UM\}\},$$

donde P_1 tiene 28 escaños, P_2 tiene 23 escaños y P_3 tiene 8 escaños.

Con este sistema de uniones, puede recalcularse el poder de cada partido representado en este Parlamento por medio de índices de poder para juegos con uniones *a priori*. En la Tabla 2, se presentan tres índices: el valor de Owen (Φ), el valor de Banzhaf-Owen (Ψ) y el valor de Banzhaf coalicional simétrico (Π).

Tabla 2

Partido	Φ	Ψ	Π
PP	1/3	1/2	1/2
PSOE	1/9	1/8	1/6
PSM-EN	1/6	1/4	1/4
EU-EV	1/9	1/8	1/6
UM	1/6	1/4	1/4
PACTE	1/9	1/8	1/6

Excepto para el PP, el poder total correspondiente a cada partido es mayor. La coalición de gobierno está formada por los partidos de izquierda y por los partidos regionalistas.

En este ejemplo, el valor de Owen y el valor de Banzhaf coalicional simétrico reflejan la simetría existente entre las uniones en el juego cociente. El valor de Banzhaf-Owen no satisface esta propiedad (por ejemplo, la segunda y la tercera unión son simétricas, pero la segunda unión recibe $3/8$ y la tercera unión recibe $1/2$).

El Consejo de la Unión Europea

El Consejo de la Unión Europea está compuesto por un representante de cada estado miembro, en estos momentos son 15 los estados miembros representados en este Consejo.

Algunas de las decisiones que debe aprobar el Consejo de la Unión Europea tienen que ser por unanimidad (es necesario el voto favorable de los 15 miembros), mientras que otras se aprueban por mayoría simple (es suficiente el voto favorable de 8 miembros).

Si representamos estas reglas de decisión mediante un juego simple, todos los miembros en el Consejo son simétricos. El índice de poder de Shapley-Shubik asigna en los dos sistemas de votación un poder igual a $1/15$, mientras que el índice de poder de Banzhaf-Coleman asigna a cada estado una cantidad igual a $1/2^{14}$ cuando el sistema de votación es por unanimidad y $3432/2^{14}$ cuando el sistema de votación es mediante mayoría simple.

Pero, en muchas ocasiones, existe una estructura de cooperación *a priori* que permite considerar este Consejo como un juego simple con un sistema de uniones. Por ejemplo, si se consideran tres uniones constituidas cada una de ellas por 5 miembros, está claro que todas las uniones son simétricas y todos los jugadores que constituyen estas uniones también son simétricos.

En este contexto, hay dos niveles de negociación, por ejemplo en el caso de unanimidad, en una primera etapa sólo las decisiones de los representantes de las 3 uniones son importantes y es más fácil alcanzar un acuerdo que en la primera situación donde era necesario el voto positivo de los 15 miembros. El valor de Owen asigna en cada uno de los dos sistemas de votación un poder de 1/15 a cada estado. Nótese que aunque la situación es cualitativamente diferente de la primera, porque existe una estructura de uniones *a priori,* el valor de Owen coincide con el valor de Shapley tanto si el sistema de votación es por mayoría o por unanimidad.

El índice de Banzhaf coalicional simétrico le asigna a cada estado miembro un poder de 1/20, cuando el sistema de votación es por unanimidad y 1/10 cuando el sistema de votación es por mayoría simple de los estados miembros. La suma de los índices de poder de los partidos que constituyen una unión coincide con el índice de poder de Banzhaf-Coleman correspondiente en el juego cociente. En el caso de unanimidad, el valor de Banzhaf-Owen le asigna a cada estado un poder igual a $1/2^6$ y un poder igual a $12/2^6$ cuando el sistema de votación es por mayoría simple. A diferencia con el valor de Banzhaf coalicional simétrico, en ninguno de los dos casos coincide con el valor de Banzhaf de cada unión en el juego cociente.

2.4 El índice de poder de Deegan-Packel coalicional

En esta sección y en la siguiente se van a proponer dos versiones coalicionales del índice de poder definido por Deegan y Packel, para el caso en que junto al juego simple, se tenga una partición del conjunto de los jugadores que determine un sistema de uniones *a priori.* El índice de poder de Deegan-Packel se basa en suponer que el comportamiento de los jugadores está determinado por tres condiciones: minimalidad, equiprobabilidad y solidaridad.

En la primera versión coalicional del índice de poder de Deegan-Packel, se mantendrán las condiciones de minimalidad y equiprobabilidad pero se introducirá una modificación en la condición de solidaridad, teniendo en cuenta que existe una partición del conjunto de jugadores. Se van a proponer dos nuevas condiciones para sustituirla, que respetan la filosofía del índice de poder de Deegan-Packel no coalicional. Estas nuevas condiciones son:

- **Solidaridad entre uniones *a priori*:** Las uniones *a priori* que constituyen una coalición "victoriosa" se dividen el "botín" a partes iguales.

- **Solidaridad dentro de las uniones *a priori***: Los jugadores de una unión *a priori* que forman parte de una coalición victoriosa dividen la parte que les corresponde del "botín" a partes iguales.

Al igual que sucedía con la condición de solidaridad, las nuevas condiciones parecen razonables en multitud de ocasiones: la solidaridad entre uniones *a priori* es una propiedad que determina que cada una de las uniones a priori juega el mismo papel dentro de una coalición minimal ganadora en la que estén representadas; y la condición de solidaridad dentro de las uniones *a priori* establece que cada uno de los jugadores de una unión juegan el mismo papel dentro de la coalición minimal ganadora a la que pertenecen los citados jugadores.

Definición 2.4.1 *Dado* $(N, v, P) \in SU(N)$ *con* $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$, *se define el índice de poder de Deegan-Packel coalicional de un jugador* $i \in P_k$ *como:*

$$\zeta_i (N, v, P) = \frac{1}{|M(v)|} \sum_{S \in M_i(v)} \frac{1}{|m(S)|} \frac{1}{|S \cap P_k|},$$

donde $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ *y* $m(S) = \{j \in M / P_j \cap S \neq \emptyset\}$.

Se puede comprobar que la definición del índice ζ para un jugador $i \in P_k$ es consistente con las condiciones anteriores. Es evidente que, al igual que el índice de poder de Deegan-Packel, verifica las condiciones de minimalidad y equiprobabilidad. Para cada coalición $S \in M_i(v)$, el término $\frac{1}{|m(S)|}$ indica que aquellas uniones *a priori* que tienen al menos un jugador en la coalición minimal ganadora S juegan el mismo papel. Así pues, este índice verifica la condición de solidaridad entre uniones *a priori*. Además, el término $\frac{1}{|S \cap P_k|}$ indica que el pago para el jugador i es el mismo que para los restantes $|S \cap P_k| - 1$ jugadores de $S \cap P_k$. Por tanto, satisface la condición de solidaridad dentro de las uniones *a priori*.

Al igual que el índice de poder no coalicional, este índice tiene una interpretación probabilística. Supongamos que el pago correspondiente a un jugador $i \in P_k$ que pertenece a una coalición minimal ganadora S es $\frac{1}{|m(S)|} \frac{1}{|S \cap P_k|}$, ya que todas las uniones representadas en S obtienen $\frac{1}{|m(S)|}$ y la cantidad obtenida por cada unión P_k se la reparten los jugadores de $S \cap P_k$ de forma solidaria. Si además todas las coaliciones minimales ganadoras tienen una probabilidad $\frac{1}{|M(v)|}$ de formarse, la esperanza matemática del pago correspondiente al jugador i es precisamente ζ_i.

Otros valores coalicionales, como el valor de Owen o el valor de Banzhaf coalicional simétrico, satisfacen la propiedad de simetría en el cociente. Sin embargo, esto no ocurre para el índice de poder de Deegan-Packel coalicional, ya que la propiedad de minimalidad es incompatible con la propiedad de simetría en el cociente. Se verá esto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4.1 *Considérese el juego simple con conjunto de jugadores* $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, *con sistema de uniones constituido por* 3 *uniones a priori* $P = \{P_1, P_2, P_3\}$ *con* $P_1 = \{1\}, P_2 = \{2, 3\}$ *y* $P_3 = \{4, 5\}$, *y conjunto de coaliciones minimales ganadoras* $M(v) = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4, 5\}\}$.

En el juego cociente, que tiene como coaliciones minimales ganadoras a $M\left(v^P\right) = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, P_3\}\}$, *las uniones a priori* P_2 *y* P_3 *son jugadores simétricos, por lo que cualquier valor que verifique la propiedad de simetría en el cociente les otorgaría la misma cantidad a las dos uniones.*

Sin embargo, esto no es compatible con la condición de minimalidad, según la cual las tres coaliciones minimales ganadoras son equiprobables, por lo que la probabilidad asignada a cada una de ellas es $1/3$. *Esto unido a las dos condiciones de solidaridad determina que el "botín" que reciben* P_2 *y* P_3 *no puede ser el mismo. Puede comprobarse que para este juego, el índice* ζ *es igual a*

$$\zeta(N, v, P) = (1/2, 1/6, 1/6, 1/12, 1/12).$$

Con este mismo ejemplo, se ve que el índice de poder de Deegan-Packel coalicional no verifica la propiedad de juego cociente. De acuerdo a este índice de poder

$$\sum_{i=2}^{3} \zeta_i(N, v, P) = \frac{1}{3} \text{ y } \sum_{i=4}^{5} \zeta_i(N, v, P) = \frac{1}{6}.$$

Sin embargo, el índice de poder de Deegan-Packel (ρ) *empleado para medir el poder de cada unión en el juego* $\left(M, v^P\right)$ *asigna a las uniones* P_2 *y* P_3 *el valor* $1/4$.

Para el índice de poder de Deegan-Packel coalicional, la simetría entre dos uniones *a priori* viene determinada por el “comportamiento simétrico” de estas uniones en las coaliciones minimales ganadoras. Para caracterizar este índice se introduce la definición de uniones *a priori* fuertemente simétricas, que recoge las ideas incluidas en las condiciones de solidaridad entre uniones *a priori*, minimalidad y equiprobabilidad. Antes de formalizar esta definición, es necesario introducir el siguiente concepto.

Definición 2.4.2 *Dado* $(N, v, P) \in SU(N)$*, con* $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$ *y una coalición perdedora* $S \subseteq N \backslash P_k$*, se dirá que* $T \subseteq P_k$*, con* $P_k \in P$ *hace minimal ganadora a* S *si* $v(S \cup T) = 1$ *y* $v(S \cup R) = 0$*, para toda coalición* $R \subset T$*. Es decir, todos los jugadores de* T *son necesarios y suficientes para convertir a* S *en una coalición ganadora.*

Definición 2.4.3 *Dado* $(N, v, P) \in SU(N)$*, con* $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$*, dos uniones a priori* $P_k, P_j \in P$ *son fuertemente simétricas si dada una coalición perdedora* $S \subseteq N \backslash \{P_k, P_j\}$*, el número de subcoaliciones de* P_k *que hacen minimal ganadora a* S *coincide con el número de subcoaliciones de* P_j *que hacen minimal ganadora a* S*. Es decir, dada* $S \subseteq N \backslash \{P_k, P_j\}$ *con* $v(S) = 0$ *los conjuntos:*

$$M_{P_k}(S) = \{T \subseteq P_k / v(S \cup T) = 1 \text{ y } v(S \cup R) = 0, \forall R \subset T\}$$

$$M_{P_j}(S) = \{L \subseteq P_j / v(S \cup L) = 1 \text{ y } v(S \cup F) = 0, \forall F \subset L\}$$

tienen el mismo cardinal.

Vamos a reformular la propiedad de fusión en el contexto de los juegos simples con uniones *a priori* (emplearemos el mismo nombre para designarla). Así, diremos que dos juegos simples con uniones *a priori* (N, v, P) y (N, w, P) son fusionables si lo son los juegos simples (N, v) y (N, w).

Fusión (FUS). Un índice de poder $f : SU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad de fusión si para todo par de juegos simples con uniones a priori (N, v, P) y (N, w, P) fusionables, se tiene que

$$f(N, v \vee w, P) = \frac{|M(v)| f(N, v, P) + |M(w)| f(N, w, P)}{|M(v \vee w)|}.$$

Antes de caracterizar el índice de poder de Deegan-Packel coalicional, se introduce la siguiente propiedad, a la que se denominará propiedad de simetría fuerte, basada en la condición de solidaridad entre uniones *a priori*. Según esta propiedad dos coaliciones fuertemente simétricas reciben el mismo pago.

Definición 2.4.4 *Un índice de poder $f : SU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ verifica la propiedad de simetría fuerte (SF) si para todo $(N, v, P) \in SU(N)$ y para todo par de coaliciones fuertemente simétricas $P_k, P_j \in P$ se cumple que*

$$\sum_{i \in P_k} f_i(N, v, P) = \sum_{i \in P_j} f_i(N, v, P).$$

Teorema 2.4.1 *El único índice de poder $f : SU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que satisface las propiedades de JN, SU, SF, EFI y FUS es el índice de poder de Deegan-Packel coalicional.*

Demostración

Existencia:

Sea $(N, v, P) \in SU(N)$, con $P = \{P_1, P_2, ..., P_m\}$ y $M = \{1, 2, ..., m\}$.

Se va a probar que el índice de poder de Deegan-Packel coalicional verifica las propiedades enunciadas en el teorema.

Si $i \in N$ es un jugador nulo entonces $M_i(v) = \emptyset$, por lo que $\zeta_i(N, v, P) = 0$ ya que no hay ningún término en el sumatorio.

Si dos jugadores $i, j \in P_k$ son simétricos, entonces:

$$\zeta_i(N, v, P) - \zeta_j(N, v, P) = \frac{1}{|M(v)|} \sum_{S \in M_i(v) \setminus M_j(v)} \frac{1}{|m(S)|} \frac{1}{|S \cap P_k|} -$$

$$\frac{1}{|M(v)|} \sum_{T \in M_j(v) \setminus M_i(v)} \frac{1}{|m(T)|} \frac{1}{|T \cap P_k|}.$$

Existe una biyección entre los conjuntos $M_i(v) \setminus M_j(v)$ y $M_j(v) \setminus M_i(v)$ ya que si una coalición $S \in M_i(v) \setminus M_j(v)$ entonces $T = S \setminus i \cup j \in M_j(v) \setminus M_i(v)$ y, recíprocamente si $T \in M_j(v) \setminus M_i(v)$ entonces

$S = T\backslash j \cup i \in M_i(v)\backslash M_j(v)$. Como $|m(S)| = |m(T)|$ y $|S \cap P_k| = |T \cap P_k|$ se tiene que $\zeta_i(N,v,P) - \zeta_j(N,v,P) = 0$.

Para cualquier unión $P_k \in P$, se tiene que

$$\sum_{i\in P_k} \zeta_i(N,v,P) = \frac{1}{|M(v)|}\sum_{i\in P_k}\sum_{S\in M_i(v)} \frac{1}{|m(S)|}\frac{1}{|S\cap P_k|}.$$

Dada una coalición $S \in M_i(v)$, con $i \in P_k$ hay exactamente $|S \cap P_k|$ términos que contribuyen a la suma anterior como $\frac{1}{|M(v)|}\frac{1}{|m(S)|}\frac{1}{|S\cap P_k|}$, por lo que al sumar en P_k se obtiene

$$\sum_{i\in P_k} \zeta_i(N,v,P) = \frac{1}{|M(v)|}\sum_{S\in M_{P_k}(v)} \frac{1}{|m(S)|}, \tag{2.10}$$

siendo $M_{P_k}(v) = \{S \in M(v) / S \cap P_k \neq \emptyset\}$.

Sean $P_k, P_j \in P$ un par de uniones *a priori* fuertemente simétricas. Se tiene que:

$$\sum_{i\in P_k} \zeta_i(N,v,P) - \sum_{i\in P_j} \zeta_i(N,v,P) = \frac{1}{|M(v)|}\sum_{S\in M_{P_k}(v)\backslash M_{P_j}(v)} \frac{1}{|m(S)|} -$$

$$\frac{1}{|M(v)|}\sum_{S'\in M_{P_j}(v)\backslash M_{P_k}(v)} \frac{1}{|m(S')|}.$$

Existe una biyección entre $M_{P_k}(v)\backslash M_{P_j}(v)$ y $M_{P_j}(v)\backslash M_{P_k}(v)$ ya que para cada coalición $S \in M_{P_k}(v)\backslash M_{P_j}(v)$ existe una única coalición $T \subseteq P_j$, tal que $S' = T \cup S\backslash(S\cap P_k) \in M_{P_j}(v)\backslash M_{P_k}(v)$, por ser P_k y P_j fuertemente simétricas. Además, se tiene que $|m(S)| = |m(S')|$. De modo similar, dada $S' \in M_{P_j}(v)\backslash M_{P_k}(v)$ existe una única coalición $S \in M_{P_k}(v)\backslash M_{P_j}(v)$ tal que $|m(S)| = |m(S')|$, por lo que $\sum\limits_{i\in P_k} \zeta_i(N,v,P) - \sum\limits_{i\in P_j} \zeta_i(N,v,P) = 0$.

Para probar la eficiencia, considérese una coalición $S \in M(v)$ y todos los términos de la suma $\sum\limits_{i\in N} \zeta_i(N,v,P)$ en los cuales interviene S. Hay precisamente

$|S|$ términos (uno para cada $i \in S$), de los cuales $|S \cap P_k|$ términos son de la forma $\frac{1}{|M(v)|}\frac{1}{|m(S)|}\frac{1}{|S\cap P_k|}$ para cada $k \in m(S)$. Entonces cada $k \in m(S)$ contribuye con $\frac{1}{|M(v)|}\frac{1}{|m(S)|}$ a la suma total, como hay precisamente $|m(S)|$ términos de esa forma, se ve que cada $S \in M(v)$ contribuye con $\frac{1}{|M(v)|}$ a la suma. Como hay $|M(v)|$ contribuciones, se tiene que $\sum_{i\in N} \zeta_i(N, v, P) = 1$.

Finalmente, el valor propuesto verifica la propiedad de fusión ya que para todo $k \in M$, para todo jugador $i \in P_k$ y para todo par de juegos (N, v, P) y (N, w, P) fusionables se tiene que

$$\zeta_i(N, v \vee w, P) = \frac{1}{|M(v \vee w)|} \sum_{S \in M_i(v \vee w)} \frac{1}{|m(S)|}\frac{1}{|S \cap P_k|} =$$

$$\frac{1}{|M(v \vee w)|}\left[\sum_{S\in M_i(v)} \frac{1}{|m(S)|}\frac{1}{|S \cap P_k|} + \sum_{S\in M_i(w)} \frac{1}{|m(S)|}\frac{1}{|S \cap P_k|}\right] =$$

$$\frac{|M(v)|\,\zeta_i(N, v, P) + |M(w)|\,\zeta_i(N, w, P)}{|M(v \vee w)|}.$$

Unicidad:

Se probará, en primer lugar, que cualquier índice de poder f que verifique las propiedades del enunciado del teorema, coincide con ζ en los juegos de unanimidad.

Dado un juego de unanimidad u_S, es evidente que $|M(u_S)| = 1$ ya que $M(u_S) = \{S\}$.

Para un juego de unanimidad u_S, dos uniones *a priori* P_k,$P_j \in P$ tales que $S \cap P_k \neq \emptyset$ y $S \cap P_j \neq \emptyset$, son fuertemente simétricas. Si un jugador $i \notin S$, entonces i es un jugador nulo.

Por las propiedades de eficiencia, jugador nulo, simetría dentro de las uniones y simetría fuerte se tiene que:

$$f_i(N, u_S, P) = \begin{cases} \frac{1}{|m(S)|}\frac{1}{|S\cap P_k|} & si\ i \in S \cap P_k \\ 0 & si\ i \notin S \end{cases},$$

por lo tanto, coincide con ζ en los juegos de unanimidad.

Consideremos ahora un juego $(N, v, P) \in SU(N)$ con conjunto de coaliciones minimales ganadoras $M(v) = \{S_1, S_2, ..., S_p\}$ (por lo tanto, $|M(v)| = p$). Entonces $v = u_{S_1} \vee u_{S_2} \vee \ldots \vee u_{S_p}$.

Por medio del axioma de fusión se tiene que:

$$f_i(N, v, P) = \frac{1}{|M(v)|} \sum_{k=1}^{p} |M(u_{S_k})| f_i(N, u_{S_k}, P) =$$

$$\frac{1}{|M(v)|} \sum_{S \in M_i(v)} \frac{1}{|m(S)|} \frac{1}{|S \cap P_k|} = \zeta_i(N, v, P),$$

en donde se ha utilizado la expresión de f obtenida anteriormente y el hecho de que $|M(u_{S_k})| = 1$.$\square$

En secciones previas de este capítulo se presentaron caracterizaciones del valor de Banzhaf-Owen y del valor de Banzhaf coalicional simétrico empleando el concepto de valor coalicional de Banzhaf. Más adelante, se obtiene una nueva caracterización para el índice de poder de Deegan-Packel coalicional usando la propiedad de valor coalicional de Deegan-Packel.

En primer lugar, se demostrará que este índice, al igual que el valor de Owen y el valor de Banzhaf coalicional simétrico satisface la propiedad de contribuciones equilibradas en las uniones. Además, se prueba que es un índice de poder coalicional de Deegan-Packel, es decir, coincide con el índice de poder de Deegan-Packel si el sistema de uniones es el trivial.

Lema 2.4.2 *El índice de poder de Deegan-Packel coalicional verifica la propiedad de contribuciones equilibradas en las uniones.*

Demostración

Sea $(N, v, P) \in SU(N)$, con $P = \{P_1, P_2, ..., P_m\}$ y $M = \{1, 2, ..., m\}$.

Sean $P_k \in P$ e $i, j \in P_k$. Puede considerarse entonces la partición $P_{-j} = \{P'_1, P'_2, .., P'_{m+1}\}$ donde $P'_l = P_l$, para todo $l \in M \backslash k$, $P'_k = P_k \backslash j$ y $P'_{m+1} = \{j\}$.

Dada una coalición S, $m(S) = \{l \in \{1,2,...,m\} / P_l \cap S \neq \emptyset\}$ y $m'(S) = \{l \in \{1,2,...,m+1\} / P'_l \cap S \neq \emptyset\}$. Obsérvese que para cualquier $S \subseteq N \backslash j$, se tiene que $m(S) = m'(S)$.

$$\zeta_i(N,v,P) - \zeta_i(N,v,P_{-j}) =$$

$$\frac{1}{|M(v)|} \sum_{S \in M_i(v)} \frac{1}{|m(S)|} \frac{1}{|S \cap P_k|} - \frac{1}{|M(v)|} \sum_{S \in M_i(v)} \frac{1}{|m'(S)|} \frac{1}{|S \cap P'_k|} =$$

$$\frac{1}{|M(v)|} \left[\sum_{S \in M_i(v) \backslash M_j(v)} \frac{1}{|m(S)|} \frac{1}{|S \cap P_k|} + \sum_{S \in M_i(v) \cap M_j(v)} \frac{1}{|m(S)|} \frac{1}{|S \cap P_k|} \right] -$$

$$\frac{1}{|M(v)|} \left[\sum_{S \in M_i(v) \backslash M_j(v)} \frac{1}{|m'(S)|} \frac{1}{|S \cap P'_k|} + \sum_{S \in M_i(v) \cap M_j(v)} \frac{1}{|m'(S)|} \frac{1}{|S \cap P'_k|} \right]$$

En la expresión anterior, téngase en cuenta que si $S \in M_i(v) \backslash M_j(v)$, $|m(S)| = |m'(S)|$ y $|S \cap P_k| = |S \cap P'_k|$, mientras que si $S \in M_i(v) \cap M_j(v)$, $|m(S)| = |m'(S)| - 1$ y $|S \cap P_k| = |S \cap P'_k| + 1$.

De aquí se deduce que:

$$\zeta_i(N,v,P) - \zeta_i(N,v,P_{-j}) =$$

$$\frac{1}{|M(v)|} \sum_{S \in M_i(v) \cap M_j(v)} \frac{1}{|m(S)|} \frac{1}{|S \cap P_k|} -$$

$$\frac{1}{|M(v)|} \sum_{S \in M_i(v) \cap M_j(v)} \frac{1}{|m(S)| + 1} \frac{1}{|S \cap P_k| - 1}.$$

Como esta expresión depende de i del mismo modo que depende de j, entonces se tiene que:

$$\zeta_i(N,v,P) - \zeta_i(N,v,P_{-j}) = \zeta_j(N,v,P) - \zeta_j(N,v,P_{-i}) . \square$$

Lema 2.4.3 *El índice de poder de Deegan-Packel coalicional es un índice de poder coalicional de Deegan-Packel.*

Demostración

Sea $(N, v, P^n) \in SU(N)$, dado un jugador i, se tiene que existe un único $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tal que $P_k = \{i\}$ y si $S \in M_i(v)$, $|m(S)| = |S|$ y $|S \cap P_k| = 1$. Entonces:

$$\zeta_i(N, v, P^n) = \frac{1}{|M(v)|} \sum_{S \in M_i(v)} \frac{1}{|m(S)|} \frac{1}{|S \cap P_k|} =$$

$$\frac{1}{|M(v)|} \sum_{S \in M_i(v)} \frac{1}{|S|} = \rho_i(N, v) . \square$$

En el ejemplo 2.4.1 se demostró que el índice de poder de Deegan-Packel coalicional no verifica la propiedad del juego cociente. Se va a definir para cada juego $(N, v, P) \in U(N)$ una "familia de juegos cociente asociada". El cardinal de esta familia es $|M(v)|$, el número de coaliciones minimales ganadoras.

Definición 2.4.5 *Dado* $(N, v, P) \in SU(N)$ *con* $M(v) = \{S_1, S_2, \ldots, S_p\}$ *y* $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$, *se define la familia de juegos cociente asociada a* (N, v, P) *como* $\left\{\left(M, u_{m(S)}\right)\right\}_{S \in M(v)}$ *donde* $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ *y* $u_{m(S)}$ *es el juego de unanimidad en* $m(S)$.

El subconjunto de M que representa a una coalición $S \in M(v)$, en el juego entre uniones *a priori*, es $m(S)$, ya que ahora cada unión *a priori* es un único jugador. Parece lógico que exista una relación entre lo que ganan los jugadores de una unión en el juego inicial y lo que gana esta unión en la familia de juegos cociente asociada. Teniendo en cuenta que por la condición de equiprobabilidad, todas las coaliciones minimales ganadoras tienen la misma probabilidad de formarse, se propone la siguiente propiedad, a la que se denominará propiedad de la familia de los juegos cociente asociada. Esta propiedad establece que lo que gana una unión en el juego inicial es lo mismo que la media de lo que gana la unión en la familia de juegos cociente asociada.

Definición 2.4.6 *Un índice de poder* $f : SU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *verifica la propiedad de la familia de los juegos cociente asociada* (JCA) *si para todo juego* $(N, v, P) \in U(N)$ *y para todo* $P_k \in P$ *se cumple que*

$$\sum_{i \in P_k} f_i(N, v, P) = \frac{1}{|M(v)|} \sum_{S \in M(v)} f_k\left(M, u_{m(S)}, P^m\right).$$

Esta propiedad tiene una interpretación probabilística. Dado $(N, v, P) \in SU(N)$, si el pago correspondiente a la unión $P_k \in P$ en el juego asociado a una coalición $S \in M(v)$ es $f_k\left(M, u_{m(S)}, P^m\right)$, como todas las coaliciones minimales ganadoras de (N, v) son equiprobables, entonces la esperanza de las cantidades anteriores es el pago que recibirán los jugadores que forman la unión P_k.

Con las propiedades anteriores, se obtiene la siguiente caracterización del índice de poder de Deegan-Packel coalicional.

Teorema 2.4.4 *El índice de poder de Deegan-Packel coalicional es el único índice de poder coalicional de Deegan-Packel que verifica CEU y JCA.*

Demostración

Existencia:

En los lemas 2.4.2 y 2.4.3 se demostró que el índice de poder de Deegan-Packel coalicional verifica CEU y que es un valor coalicional de Deegan-Packel, respectivamente.

En la expresión (2.10) se vio que, dado $(N, v, P) \in SU(N)$, para $P_k \in P$ se tiene que:

$$\sum_{i \in P_k} \zeta_i(N, v, P) = \frac{1}{|M(v)|} \sum_{\substack{S \in M(v) \\ S \cap P_k \neq \emptyset}} \frac{1}{|m(S)|}.$$

Por otra parte,

$$\frac{1}{|M(v)|} \sum_{S \in M(v)} \zeta_k\left(M, u_{m(S)}, P^m\right) = \frac{1}{|M(v)|} \sum_{\substack{S \in M(v) \\ S \cap P_k \neq \emptyset}} \frac{1}{|m(S)|},$$

con lo que quedaría demostrada la existencia.

Unicidad:

Supóngase que existe otro índice de poder coalicional de Deegan-Packel f, distinto de ζ, verificando las propiedades de la familia de juegos cociente asociada y contribuciones equilibradas en las uniones.

Puede encontrarse entonces $(N, v) \in SI(N)$ y $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\} \in P(N)$ con el máximo número de uniones tal que $f(N, v, P) \neq \zeta(N, v, P)$. Este número m necesariamente tiene que ser menor que n porque ambos índices son índices de poder coalicionales de Deegan-Packel.

Por la propiedad de la familia de juegos cociente asociada, para todo $P_k \in P$, se tiene la siguiente igualdad

$$\sum_{i \in P_k} f_i(N, v, P) = \frac{1}{|M(v)|} \sum_{S \in M(v)} f_k\left(M, u_{m(S)}, P^m\right).$$

Como f y ζ son dos índices de poder coalicionales de Deegan-Packel

$$f_k\left(M, u_{m(S)}, P^m\right) = \zeta_k\left(M, u_{m(S)}, P^m\right) = \rho_k\left(M, u_{m(S)}\right), \textit{para todo } k \in M,$$

y, por lo tanto,

$$\sum_{i \in P_k} f_i(N, v, P) = \sum_{i \in P_k} \zeta_i(N, v, P),$$

es decir, los dos índices coinciden en las uniones.

El resto de la demostración de la unicidad es idéntica a la de los teoremas 2.1.3 y 2.3.5, por lo tanto, se omite.□

2.5 El índice de poder de Deegan-Packel coalicional simétrico

A continuación, se va a proponer otra extensión del índice de poder de Deegan-Packel que a diferencia del índice de poder de Deegan-Packel coalicional, satisface la propiedad de simetría en el juego cociente.

De las tres condiciones en las que se basa el índice de poder de Deegan-Packel: minimalidad, equiprobabilidad y solidaridad, las dos primeras se mantenían en el índice de poder de Deegan-Packel coalicional, mientras que la condición de solidaridad se sustituía por las condiciones de solidaridad entre uniones *a priori* y solidaridad dentro de las uniones *a priori*.

En esta versión coalicional del índice de poder de Deegan-Packel se mantienen estas dos condiciones de solidaridad, pero se modificará la condición de minimalidad y se sustituirá la condición de equiprobabilidad por dos nuevas condiciones. Así se tiene:

- **Minimalidad en el juego cociente:** Sólo originan una "victoria" las coaliciones minimales ganadoras, cuyo representante en el cociente, es decir, aquellas uniones *a priori* con algún jugador en dicha coalición, sea una coalición minimal ganadora en el juego cociente.

- **Equiprobabilidad entre coaliciones minimales ganadoras en el cociente**: Todas las coaliciones minimales ganadoras en el juego cociente son equiprobables.

- **Equiprobabilidad entre coaliciones minimales ganadoras "idénticas en el cociente":** Todas las coaliciones minimales ganadoras, cuyo representante en el cociente es la misma coalición minimal ganadora en dicho juego cociente, son equiprobables.

En el siguiente ejemplo se hará una interpretación de estas condiciones:

Ejemplo 2.5.1 *Supóngase un juego simple* (N, v) *con* $N = \{1,2,3,4,5,6\}$ *y* $M(v) = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ *donde* $S_1 = \{1,2\}, S_2 = \{1,3,4\}, S_3 = \{1,5,6\}$, $S_4 = \{1,3,5\}$ *y* $S_5 = \{2,3,4,5,6\}$. *Si en este juego está definido un sistema de uniones a priori* $P = \{P_1, P_2, P_3\}$ *donde* $P_1 = \{1\}, P_2 = \{2,3,4\}$ *y* $P_3 = \{5,6\}$, *el juego cociente* $\left(M, v^P\right)$ *tiene como coaliciones minimales ganadoras a:* $\{\{P_1, P_2\}, \{P_1, P_3\}, \{P_2, P_3\}\}$.

Las condiciones anteriores establecen:

Por la condición de minimalidad en el juego cociente la coalición minimal ganadora S_4 *no origina una victoria porque su representante en el cociente,* $\{P_1, P_2, P_3\}$, *no es una coalición minimal ganadora en el juego cociente.*

Por la condición de equiprobabilidad entre coaliciones minimales ganadoras en el cociente $\{P_1, P_2\}, \{P_1, P_3\}$ *y* $\{P_2, P_3\}$ *son equiprobables.*

Finalmente, por la condición de equiprobabilidad entre coaliciones minimales ganadoras idénticas en el cociente, las coaliciones S_1 *y* S_2 *que dan lugar a* $\{P_1, P_2\}$, *una coalición minimal ganadora en el cociente, son equiprobables.*

A continuación, se propondrá un nuevo valor que sea consistente con las condiciones anteriores. En primer lugar, se introduce la notación necesaria.

Dado un juego $(N, v, P) \in SU(N)$, con $M(v) = \{S_1, S_2, \ldots, S_l\}$, $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$ y $M = \{1, 2, \ldots, m\}$:

- Se denotará por $M\left(v^P\right)$ el conjunto de coaliciones minimales ganadoras en el juego cociente, es decir,

$$M\left(v^P\right) = \left\{R \subseteq M / v^P(R) = 1 \text{ } y \text{ } v^P(R') = 0 \text{ } para\ todo \text{ } R' \subset R\right\}.$$

- Dada una unión *a priori* $k \in M$ se denotará por $M_k\left(v^P\right)$ el conjunto de coaliciones minimales ganadoras en el juego cociente a las que pertenece k.

- Se denotará por $M(v, P)$ el subconjunto de $M(v)$ formado por aquellas coaliciones cuyo representante en el juego cociente sea una coalición minimal ganadora, es decir,

$$M(v, P) = \left\{S \in M(v) / m(S) \in M\left(v^P\right)\right\}.$$

- Dado $S \in M(v, P)$, se denotará por $P(S)$ el subconjunto de coaliciones $S' \in M(v, P)$ que tienen el mismo representante en el juego cociente, es decir, que cumplen que $m(S) = m(S')$.

- Dado $i \in N$, se denotará por $M_i(v, P)$ el subconjunto formado por las coaliciones de $M(v, P)$ a las que pertenece i, por lo tanto,

$$M_i(v, P) = \{S \in M(v, P) / i \in S\} = \left\{S \in M_i(v) / m(S) \in M\left(v^P\right)\right\}.$$

Empleando la notación anterior, se define un nuevo índice de poder, al que se denominará índice de poder de Deegan-Packel coalicional simétrico.

Definición 2.5.1 *Dado $(N, v, P) \in SU(N)$, se define el índice de poder de Deegan-Packel coalicional simétrico de un jugador $i \in P_k$ como:*

$$\Lambda_i(N, v, P) = \frac{1}{\left|M\left(v^P\right)\right|} \sum_{S \in M_i(v,P)} \frac{1}{|P(S)|} \frac{1}{|m(S)|} \frac{1}{|S \cap P_k|}. \qquad (2.11)$$

Este índice Λ es consistente con las condiciones que se establecieron anteriormente: Sólo las coaliciones minimales ganadoras que originan una coalición minimal ganadora en el juego cociente tienen influencia, (minimalidad en el juego cociente) y, teniendo en cuenta la cantidad $\frac{1}{|M(v^P)|}$, todas ellas son tratadas de forma equiprobable (equiprobabilidad entre coaliciones minimales ganadoras en el juego cociente). Todas las coaliciones que originan la misma coalición minimal ganadora en el cociente son tratadas del mismo modo $\frac{1}{|P(S)|}$ (equiprobabilidad entre coaliciones minimales ganadoras idénticas en el cociente). Finalmente, como ocurría para el índice de poder de Deegan-Packel coalicional ζ, el índice de poder de Deegan-Packel coalicional simétrico Λ, cumple las condiciones de solidaridad entre uniones *a priori* $\left(\frac{1}{|m(S)|}\right)$ y solidaridad dentro de las uniones *a priori* $\left(\frac{1}{|S\cap P_k|}\right)$.

Este índice también tiene una interpretación probabilística. Supongamos que el pago correspondiente a un jugador $i \in P_k$ que pertenece a una coalición minimal ganadora S cuyo representante en el cociente sea minimal ganadora es $\frac{1}{|m(S)|}\frac{1}{|S\cap P_k|}$, ya que todas las uniones *a priori* representadas en S obtienen $\frac{1}{|m(S)|}$ y la cantidad obtenida por cada unión P_k se la reparten de forma solidaria los jugadores de $S \cap P_k$. Si además una coalición minimal ganadora S cuyo representante en el cociente sea minimal ganadora tiene una probabilidad $\frac{1}{|M(v^P)|}\frac{1}{|P(S)|}$ de formarse, la esperanza matemática del pago correspondiente al jugador i es precisamente Λ_i.

A diferencia con el índice de poder de Deegan-Packel coalicional, se verá más adelante que el índice de poder de Deegan-Packel coalicional simétrico satisface la propiedad de simetría en el cociente. Teniendo en cuenta la influencia del juego cociente en la definición de este índice de poder, para caracterizarlo se van a emplear dos propiedades de fusión; una en el cociente y otra, dentro de las uniones *a priori*.

Definición 2.5.2 *Dos juegos* $(N,v,P),(N,w,P) \in SU(N)$ *son fusionables en el cociente si para cualquier par de coaliciones* $R \in M\left(v^P\right)$ *y* $R' \in M\left(w^P\right)$, *se tiene que* $R \nsubseteq R'$ *y* $R' \nsubseteq R$. *En este caso, es fácil comprobar que* $M\left(v^P \vee w^P\right) = M\left((v\vee w)^P\right) = M\left(v^P\right) \cup M\left(w^P\right)$ *con* $M\left(v^P\right) \cap M\left(w^P\right) = \emptyset$.

Es decir, dos juegos simples con uniones *a priori* son fusionables en el cociente, si son fusionables los juegos cocientes asociados.

Definición 2.5.3 *Dos juegos* $(N, v, P), (N, w, P) \in SU(N)$ *son fusionables en uniones a priori si los juegos* (N, v) *y* (N, w) *son fusionables y, además, dadas dos coaliciones* $S \in M(v)$ *y* $T \in M(w)$, *se tiene que* $m(S) = m(T)$.

Para que dos juegos simples con uniones *a priori* sean fusionables en uniones *a priori*, es necesario que el conjunto de uniones con representantes en cualquier coalición minimal ganadora de ambos juegos sea el mismo, es decir, si dos juegos $(N, v, P), (N, w, P) \in SU(N)$ son fusionables en uniones *a priori* implica que $v^P = w^P = u_R$, para algún $R \subseteq M$, pero el recíproco no es cierto, en general. Nótese también que dos juegos $(N, v, P), (N, w, P) \in SU(N)$ fusionables en el cociente no son fusionables en uniones *a priori* y, recíprocamente. Teniendo en cuenta las dos definiciones anteriores, se enuncian las siguientes propiedades.

Definición 2.5.4 *Un índice de poder* $f : SU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *verifica la propiedad de fusión en el cociente* $(FUSC)$ *si para cualquier par de juegos fusionables en el cociente* $(N, v, P), (N, w, P) \in SU(N)$ *se cumple que*

$$f(N, (v \vee w), P) = \frac{\left|M\left(v^P\right)\right| f(N, v, P) + \left|M\left(w^P\right)\right| f(N, w, P)}{|M(v^P \vee w^P)|}.$$

Definición 2.5.5 *Un índice de poder* $f : SU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *verifica la propiedad de fusión en uniones a priori* $(FUSU)$ *si para cualquier par de juegos fusionables en uniones a priori* $(N, v, P), (N, w, P) \in SU(N)$ *se cumple que*

$$f(N, v \vee w, P) = \frac{|M(v)| f(N, v, P) + |M(w)| f(N, w, P)}{|M(v \vee w)|}.$$

Si la solución buscada satisface la condición de minimalidad en el cociente, hay que tener en cuenta que algunas coaliciones minimales ganadoras en el juego original no tendrán influencia si su representante en el juego cociente no es minimal. Se verá en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.5.2 *Supóngase un juego* $(N, v, P) \in SU(N)$ *en el que* $N = \{1, 2, 3, 4\}, M(v) = \{S_1, S_2\}$ *donde* $S_1 = \{1, 2\}$ *y* $S_2 = \{1, 3, 4\}$ *y* $P = \{P_1, P_2, P_3\}$ *donde* $P_1 = \{1\}, P_2 = \{2, 3\}$ *y* $P_3 = \{4\}$. *Al pasar al juego cociente los representantes de* S_1 *y* S_2 *son* $\{P_1, P_2\}$ *y* $\{P_1, P_2, P_3\}$ *respectivamente. Como el segundo representante no es una coalición minimal ganadora una solución* f *que satisfaga la condición de minimalidad en el juego cociente debería cumplir que* $f(N, v, P) = f(N, w, P)$, *donde* $M(w) = \{S_1\}$.

La siguiente propiedad, a la que se denominará propiedad de independencia de coaliciones ganadoras no minimales en el cociente se basa en el efecto nulo que en el resultado final del juego tienen las coaliciones minimales ganadoras en el juego original cuyo representante en el cociente no es minimal ganadora.

Definición 2.5.6 *Un índice de poder $f : SU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ verifica la propiedad de independencia de coaliciones ganadoras no minimales en el cociente (IMC) si dado $(N, v, P) \in SU(N)$ con alguna coalición $S \in M(v)$ tal que $m(S) \notin M\left(v^P\right)$ entonces se cumple que*

$$f(N, v, P) = f(N, v_S^*, P),$$

donde $M(v_S^*) = M(v) \setminus S$.

En el siguiente resultado se caracteriza el índice de poder de Deegan-Packel coalicional simétrico.

Teorema 2.5.1 *El único índice de poder $f : SU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que satisface las propiedades de $JN, SU, SC, EFI, IMC, FUSC$ y $FUSU$ es el índice de poder de Deegan-Packel coalicional simétrico.*

Demostración

Sea $(N, v, P) \in SU(N)$, donde $P = \{P_1, P_2, ..., P_m\}$ y $M = \{1, 2, ..., m\}$.

Existencia:

Se va a probar que el índice de poder de Deegan-Packel coalicional simétrico Λ verifica las propiedades anteriores.

Si $i \in N$ es un jugador nulo, entonces $M_i(v, P) = \emptyset$, por lo que $\Lambda_i(N, v, P) = 0$, ya que no hay ningún término en el sumatorio.

Si dos jugadores $i, j \in P_k$ son simétricos, entonces:

$$\Lambda_i(N, v, P) - \Lambda_j(N, v, P) =$$

$$\frac{1}{|M(v^P)|} \sum_{S \in M_i(v,P) \setminus M_j(v,P)} \frac{1}{|P(S)|} \frac{1}{|m(S)|} \frac{1}{|S \cap P_k|} -$$

$$\frac{1}{|M(v^P)|}\sum_{S'\in M_j(v,P)\backslash M_i(v,P)}\frac{1}{|P(S')|}\frac{1}{|m(S')|}\frac{1}{|S'\cap P_k|}.$$

Existe una biyección entre $M_i(v,P)\backslash M_j(v,P)$ y $M_j(v,P)\backslash M_i(v,P)$ ya que si una coalición $S\in M_i(v,P)\backslash M_j(v,P)$ entonces $S'=(S\backslash i)\cup j\in M_j(v,P)\backslash M_i(v,P)$ y, recíprocamente, si $S'\in M_j(v,P)\backslash M_i(v,P)$ entonces $S=(S'\backslash j)\cup i\in M_i(v,P)\backslash M_j(v,P)$. Como $|m(S)|=|m(S')|, |P(S)|=|P(S')|$ y $|S\cap P_k|=|S'\cap P_k|$ se tiene que $\Lambda_i(N,v,P)-\Lambda_j(N,v,P)=0$.

Dada una unión $P_k\in P$, se tiene que

$$\sum_{i\in P_k}\Lambda_i(N,v,P)=\frac{1}{|M(v^P)|}\sum_{i\in P_k}\sum_{S\in M_i(v,P)}\frac{1}{|P(S)|}\frac{1}{|m(S)|}\frac{1}{|S\cap P_k|}.$$

Dado $S\in M_i(v,P)$, con $i\in P_k$, hay exactamente $|S\cap P_k|$ términos que contribuyen a la suma total como $\frac{1}{|M(v^P)|}\frac{1}{|P(S)|}\frac{1}{|m(S)|}$, por lo que al sumar en P_k se obtiene

$$\sum_{i\in P_k}\Lambda_i(N,v,P)=\frac{1}{|M(v^P)|}\sum_{\substack{S\in M(v,P)\\ S\cap P_k\neq\emptyset}}\frac{1}{|P(S)|}\frac{1}{|m(S)|}=$$

$$\frac{1}{|M(v^P)|}\sum_{R\in M_k(v^P)}\frac{1}{|R|}. \tag{2.12}$$

Es decir, la cantidad que asigna la solución Λ a una unión $P_k\in P$ coincide con el índice de poder de Deegan-Packel del jugador $k\in M$ en el juego cociente, como el índice de poder de Deegan-Packel es simétrico, se tiene que si dos uniones P_k,$P_j\in P$ son simétricas en el cociente, se verifica que

$$\sum_{i\in P_k}\Lambda_i(N,v,P)=\sum_{i\in P_j}\Lambda_i(N,v,P),$$

con lo que el índice Λ satisface la propiedad de simetría en el cociente. De (2.12) se deduce además que el índice de poder de Deegan-Packel coalicional simétrico satisface la propiedad de juego cociente.

Como el índice de poder de Deegan-Packel coalicional simétrico satisface la propiedad de juego cociente y el índice de poder de Deegan-Packel es eficiente, se tiene que el índice de poder de Deegan-Packel coalicional simétrico satisface la propiedad de eficiencia.

Se va a probar que Λ satisface la propiedad de independencia de coaliciones ganadoras no minimales en el cociente: si $(N, v, P) \in SU(N)$ es tal que existe $S \in M(v)$ tal que $m(S) \notin M\left(v^P\right)$ y tomamos v_S^* como el juego tal que $M(v_S^*) = M(v) \backslash S$, se tiene que $M(v, P) = M(v_S^*, P)$ y $\left|M\left(v^P\right)\right| = \left|M\left(v_S^{*P}\right)\right|$. Por lo tanto, a partir de la expresión (2.11), en la definición 2.5.1

$$\Lambda(N, v, P) = \Lambda(N, v_S^*, P).$$

El índice Λ satisface la propiedad de fusión en el cociente ya que dado un par de juegos $(N, v, P), (N, w, P) \in SU(N)$ fusionables en el cociente, se tiene que para todo jugador $i \in P_k$

$$\Lambda_i(N, v \vee w, P) = \frac{1}{\left|M\left((v \vee w)^P\right)\right|} \sum_{S \in M_i(v \vee w, P)} \frac{1}{|P(S)|} \frac{1}{|m(S)|} \frac{1}{|S \cap P_k|} =$$

$$\frac{1}{\left|M\left((v \vee w)^P\right)\right|} \sum_{S \in M_i(v, P)} \frac{1}{|P(S)|} \frac{1}{|m(S)|} \frac{1}{|S \cap P_k|} +$$

$$\frac{1}{\left|M\left((v \vee w)^P\right)\right|} \sum_{S \in M_i(w, P)} \frac{1}{|P(S)|} \frac{1}{|m(S)|} \frac{1}{|S \cap P_k|} =$$

$$\frac{\left|M\left(v^P\right)\right| \Lambda_i(N, v, P) + \left|M\left(w^P\right)\right| \Lambda_i(N, w, P)}{|M(v^P \vee w^P)|}.$$

El valor propuesto verifica la propiedad de fusión en uniones *a priori*, ya que dado un par de juegos $(N, v, P), (N, w, P) \in SU(N)$ fusionables en uniones *a priori*, se tiene que $\left|M\left(v^P\right)\right| = \left|M\left(w^P\right)\right| = \left|M\left((v \vee w)^P\right)\right| = 1$. Además, para cualquier $S \in M(v), |P(S)| = |M(v)|$, para cualquier $S \in M(w), |P(S)| = |M(w)|$ y para cualquier $S \in M(v \vee w), |P(S)| = |M(v \vee w)| = |M(v)| + |M(w)|$. Por tanto

$$\Lambda_i(N, v \vee w, P) = \frac{1}{\left|M\left((v \vee w)^P\right)\right|} \sum_{S \in M_i(v \vee w, P)} \frac{1}{|P(S)|} \frac{1}{|m(S)|} \frac{1}{|S \cap P_k|} =$$

$$\frac{1}{|M(v \vee w)|} \sum_{S \in M_i(v \vee w, P)} \frac{1}{|m(S)|} \frac{1}{|S \cap P_k|} =$$

$$\frac{1}{|M(v \vee w)|} \left[\sum_{S \in M_i(v,P)} \frac{1}{|m(S)|} \frac{1}{|S \cap P_k|} + \sum_{S \in M_i(w,P)} \frac{1}{|m(S)|} \frac{1}{|S \cap P_k|} \right] =$$

$$\frac{|M(v)| \Lambda_i(N, v, P) + |M(w)| \Lambda_i(N, w, P)}{|M(v \vee w)|}.$$

Unicidad:

Supóngase que existe otro índice f verificando las propiedades enumeradas en el enunciado del teorema. Considérese un juego $(N, v, P) \in SU(N)$ y sea $M(v) = \{S_1, S_2, ..., S_p\}$ el conjunto de coaliciones minimales ganadoras (por lo tanto, $|M(v)| = p$). Teniendo en cuenta que este índice f satisface IMC puede suponerse que el representante en el juego cociente de cada coalición $S \in M(v)$, es una coalición minimal ganadora en $\left(M, v^P\right)$.

En primer lugar, se verá que f y Λ coinciden en cualquier juego de unanimidad. Sea (N, u_S, P) con $S \subseteq N$. En este caso, es evidente que $|M(u_S)|$ $= 1$, porque $M(u_S) = \{S\}$.

Además, dos uniones *a priori* $P_k, P_j \in P$ tales que $S \cap P_k \neq \emptyset$ y $S \cap P_j \neq \emptyset$, son simétricas en el cociente. Si un jugador $i \notin S$, entonces i es un jugador nulo.

Por las propiedades de eficiencia, jugador nulo, simetría dentro de las uniones y simetría en el cociente se tiene que:

$$f_i(N, u_S, P) = \begin{cases} \frac{1}{|m(S)|} \frac{1}{|S \cap P_k|} & si\ i \in S \cap P_k \\ 0 & si\ i \notin S \end{cases}$$

expresión que coincide con $\Lambda_i(N, u_S, P)$.

Consideremos la partición de $M(v)$ dada por $\{T_1, T_2, \ldots, T_r\}$ de tal forma que dos coaliciones $S_l, S_{l'} \in M(v)$ están en el mismo elemento de la partición,

T_h, si y sólo si $m(S_l) = m(S_{l'})$. Se tiene que $v = v_{T_1} \vee v_{T_2} \vee ... \vee v_{T_r}$ donde $v_{T_h} = u_{T_{h_1}} \vee u_{T_{h_2}} \vee \ldots \vee u_{T_{h_{t_h}}}$ y $T_h = \left\{T_{h_1}, T_{h_2}, \ldots, T_{h_{t_h}}\right\} \subseteq M(v)$ para todo $h \in R = \{1, 2, \ldots, r\}$.

A partir de la propiedad de fusión en el cociente se tiene que:

$$f_i(N, v, P) = \frac{1}{|M(v^P)|} \sum_{h=1}^{r} \left|M\left(v^P_{T_h}\right)\right| f_i(N, v_{T_h}, P). \qquad (2.13)$$

Como f también satisface la propiedad de fusión en uniones *a priori*, se tiene que

$$f_i(N, v_{T_h}, P) = \frac{1}{|T_h|} \sum_{l=1}^{t_h} f_i\left(N, u_{T_{h_l}}, P\right) = \frac{1}{|T_h|} \sum_{\substack{S \in M_i(v,P)/ \\ P(S)=T_h}} \frac{1}{|m(S)|} \frac{1}{|S \cap P_k|}.$$

Teniendo en cuenta que $\left|M\left(v^P_{T_h}\right)\right| = 1$, para todo $h \in R$, la expresión (2.13) es igual a:

$$\frac{1}{|M(v^P)|} \sum_{h=1}^{r} \frac{1}{|T_h|} \sum_{\substack{S \in M_i(v,P)/ \\ P(S)=T_h}} \frac{1}{|m(S)|} \frac{1}{|S \cap P_k|} =$$

$$\frac{1}{|M(v^P)|} \sum_{S \in M_i(v,P)} \frac{1}{|m(S)|} \frac{1}{|S \cap P_k|} \frac{1}{|P(S)|} = \Lambda_i(N, v, P). \square$$

En secciones anteriores se enunciaron resultados en los que se caracterizaban diversas soluciones coalicionales (valor de Owen, valor de Banzhaf-Owen, valor de Banzhaf coalicional simétrico,...) empleando entre otras la propiedad de ser valor coalicional del valor para juegos TU al que extienden. Se verá que el índice de poder de Deegan-Packel coalicional simétrico es un índice coalicional de Deegan-Packel y se propondrá otra caracterización basándose en este hecho.

Es fácil comprobar que el índice de poder de Deegan-Packel coalicional simétrico no satisface la propiedad de contribuciones equilibradas en las uniones. Sin embargo, satisface la siguiente propiedad, a la que se denominará contribuciones ponderadas en las uniones. Esta propiedad se basa en razonamientos similares a la propiedad de monotonía minimal, con la que se obtuvo una nueva caracterización del índice de poder de Deegan-Packel.

Definición 2.5.7 *Un índice de poder $f : SU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ verifica la propiedad de contribuciones ponderadas en las uniones (CPU) si para todo juego $(N, v, P) \in SU(N)$, para todo $P_k \in P$ y para todo par de jugadores $i, j \in P_k, (i \neq j)$ se cumple que*

$$\left|M\left(v^P\right)\right| f_i(N, v, P) - \left|M\left(v^{P_{-j}}\right)\right| f_i(N, v, P_{-j}) =$$

$$\left|M\left(v^P\right)\right| f_j(N, v, P) - \left|M\left(v^{P_{-i}}\right)\right| f_j(N, v, P_{-i}).$$

En los siguientes lemas, se probará que el índice de poder de Deegan-Packel coalicional simétrico satisface la propiedad anterior y que es un índice de poder coalicional de Deegan-Packel. Al probar que satisface CPU se está demostrando que no satisface la propiedad de contribuciones equilibradas en las uniones, ya que en general $\left|M\left(v^P\right)\right| \neq \left|M\left(v^{P_{-i}}\right)\right|$ y $\left|M\left(v^{P_{-i}}\right)\right| \neq \left|M\left(v^{P_{-j}}\right)\right|$.

Lema 2.5.2 *El índice de poder de Deegan-Packel coalicional simétrico verifica la propiedad de contribuciones ponderadas en las uniones.*

Demostración

Sea $(N, v, P) \in SU(N)$, con $P = \{P_1, P_2, ..., P_m\}$ y $M = \{1, 2, ..., m\}$.

Sean $P_k \in P$ e $i, j \in P_k$. Considérese $P_{-j} = \left\{P'_1, P'_2, .., P'_{m+1}\right\}$ donde $P'_l = P_l$, para todo $l \in M \backslash k$, $P'_k = P_k \backslash j$ y $P'_{m+1} = \{j\}$.

Dada una coalición S, sean

$$m(S) = \{l \in \{1, 2, ..., m\} / P_l \cap S \neq \emptyset\},$$

$$P(S) = \{T \in M(v, P) / m(T) = m(S)\},$$

$$m'(S) = \{l \in \{1, 2, ..., m+1\} / P'_l \cap S \neq \emptyset\} \text{ y}$$

$$P'(S) = \{T \in M(v, P_{-j}) / m'(S) = m'(T)\}.$$

Obsérvese que si $S \subseteq N \backslash j$, se tiene que $m(S) = m'(S)$.

$$\left|M\left(v^P\right)\right| \Lambda_i(N, v, P) - \left|M\left(v^{P_{-j}}\right)\right| \Lambda_i(N, v, P_{-j}) =$$

$$\sum_{S \in M_i(v,P)} \frac{1}{|P(S)|} \frac{1}{|m(S)|} \frac{1}{|S \cap P_k|} - \sum_{S' \in M_i(v,P_{-j})} \frac{1}{|P'(S')|} \frac{1}{|m'(S')|} \frac{1}{|S' \cap P_k|} =$$

$$\sum_{S \in M_i(v,P) \backslash M_j(v,P)} \frac{1}{|P(S)|} \frac{1}{|m(S)|} \frac{1}{|S \cap P_k|} +$$

$$\sum_{S \in M_i(v,P) \cap M_j(v,P)} \frac{1}{|P(S)|} \frac{1}{|m(S)|} \frac{1}{|S \cap P_k|} -$$

$$\sum_{S' \in M_i(v,P_{-j}) \backslash M_j(v,P_{-j})} \frac{1}{|P'(S')|} \frac{1}{|m'(S')|} \frac{1}{|S' \cap P'_k|} -$$

$$\sum_{S' \in M_i(v,P_{-j}) \cap M_j(v,P_{-j})} \frac{1}{|P'(S')|} \frac{1}{|m'(S')|} \frac{1}{|S' \cap P'_k|}.$$

Se puede comprobar que $M_i(v, P) \backslash M_j(v, P) = M_i(v, P_{-j}) \backslash M_j(v, P_{-j})$. Además, si $S \in M_i(v, P) \backslash M_j(v, P)$, se tiene que $|m(S)| = |m'(S)|$, $|P(S)| = |P'(S)|$ y $|S \cap P_k| = |S \cap P'_k|$.

De aquí se deduce que:

$$\left|M\left(v^P\right)\right| \Lambda_i(N, v, P) - \left|M\left(v^{P_{-j}}\right)\right| \Lambda_i(N, v, P_{-j}) =$$

$$\sum_{S \in M_i(v,P) \cap M_j(v,P)} \frac{1}{|P(S)|} \frac{1}{|m(S)|} \frac{1}{|S \cap P_k|} -$$

$$\sum_{S' \in M_i(v,P_{-j}) \cap M_j(v,P_{-j})} \frac{1}{|P'(S')|} \frac{1}{|m'(S')|} \frac{1}{|S' \cap P'_k|}.$$

Como se verifica que $M_i(v, P_{-j}) \cap M_j(v, P_{-j}) = M_j(v, P_{-i}) \cap M_i(v, P_{-i})$, se finaliza la demostración.$\square$

Lema 2.5.3 *El índice de poder de Deegan-Packel coalicional simétrico es un índice de poder coalicional de Deegan-Packel.*

Demostración

Sea $(N, v, P^n) \in SU(N)$, en este caso $M\left(v^{P^n}\right) = M(v)$, por lo que dado un jugador i, se tiene que $M_i(v) = M_i(v, P)$. Además, existe un único $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tal que $P_k = \{i\}$ y si $S \in M_i(v)$, $m(S) = S$, $|P(S)| = 1$ y $|S \cap P_k| = 1$. Entonces:

$$\Lambda_i(N, v, P^n) = \frac{1}{|M(v^{P^n})|} \sum_{S \in M_i(v,P)} \frac{1}{|P(S)|} \frac{1}{|m(S)|} \frac{1}{|S \cap P_k|} =$$

$$\frac{1}{|M(v)|} \sum_{S \in M_i(v)} \frac{1}{|S|} = \rho_i(N, v) .\square$$

Teorema 2.5.4 *El índice de poder de Deegan-Packel coalicional simétrico es el único índice de poder coalicional de Deegan-Packel que verifica CPU y JC.*

Se omite la demostración de este resultado anterior por emplear argumentos análogos a los utilizados en la demostración de los teoremas 2.1.3, 2.3.5 y 2.4.4.

En el siguiente ejemplo, correspondiente al Parlamento de Cataluña, se comparan el índice de poder de Deegan-Packel coalicional y el índice de poder de Deegan-Packel coalicional simétrico.

Ejemplo 2.5.3 *La composición del Parlamento de Cataluña (formado por 135 escaños), resultante de las elecciones de 1999 es la siguiente: CIU (56 escaños), $PSOE$ (50 escaños), ERC (12 escaños), PP (12 escaños) e IC (5 escaños).*

Las coaliciones minimales ganadoras son:

$$\{\{CIU, ERC\}, \{CIU, PSOE\}, \{CIU, PP\}, \{PSOE, ERC, PP\}\}.$$

Vamos a considerar dos sistemas de uniones a priori, dados por:

$$P^1 = \{\{CIU\}, \{PP\}, \{PSOE\}, \{ERC, IC\}\}$$

$$P^2 = \{\{CIU\}, \{PP\}, \{PSOE, ERC, IC\}\}$$

En la siguiente tabla se presentan el índice de poder de Deegan-Packel y el índice de poder de Deegan-Packel coalicional para los dos sistemas de uniones considerados.

Partido	ρ	$\zeta(P^1)$	$\zeta(P^2)$
CIU	*0.375*	*0.375*	*0.375*
PSOE	*0.208*	*0.208*	*0.187*
PP	*0.208*	*0.208*	*0.250*
ERC	*0.208*	*0.208*	*0.187*
IC	*0*	*0*	*0*

Se observa que con el primer sistema de uniones el índice ζ coincide con ρ, ya que todas las uniones a priori tienen como máximo un representante en cada coalición minimal ganadora. Sin embargo, con el segundo sistema de uniones, el valor de $PSOE$ y ERC se ve afectado porque forman parte de la misma unión y de una de las coaliciones minimales ganadoras. La diferencia en el pago recibido la recoge el PP, que es el otro partido que forma la coalición minimal ganadora a la que pertenecen $PSOE$ y ERC.

En la siguiente tabla se presentan el índice de poder de Deegan-Packel y el índice de poder de Deegan-Packel coalicional simétrico para los dos sistemas de uniones considerados.

Partido	ρ	$\Lambda(P^1)$	$\Lambda(P^2)$
CIU	*0.375*	*0.375*	*0.333*
PSOE	*0.208*	*0.208*	*0.167*
PP	*0.208*	*0.208*	*0.333*
ERC	*0.208*	*0.208*	*0.167*
IC	*0*	*0*	*0*

Al igual que sucedía para el índice de poder de Deegan-Packel coalicional, se observa que con el primer sistema de uniones el índice Λ *coincide con* ρ*, ya que todas las uniones a priori tienen como máximo un representante en cada coalición minimal ganadora. Sin embargo, con el segundo sistema de uniones, las tres uniones a priori son simétricas en el juego cociente, por lo que obtienen el mismo valor. Como* $PSOE$ *y* ERC *son jugadores simétricos ambos reciben a su vez el mismo valor.*

Es interesante hacer notar que el índice de poder de Deegan-Packel coalicional simétrico penaliza a las coaliciones minimales ganadoras $\{CIU, ERC\}$ *y* $\{CIU, PSOE\}$ *con respecto a las demás. Esto se debe a que originan la misma coalición minimal ganadora en el juego cociente.*

2.6 Extensiones multilineales

En el capítulo anterior se vio cómo pueden calcularse los valores de Shapley y de Banzhaf y el índice de poder de Deegan-Packel empleando la extensión multilineal. Se comenzará esta sección reproduciendo los resultados que permiten calcular el valor de Owen (Owen y Winter, 1992) y el valor de Banzhaf-Owen (Carreras y Magaña, 1994) utilizando la extensión multilineal.

Teorema 2.6.1 *Sea* (N, v, P) *un juego cooperativo con sistema de uniones donde* $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$ *es la partición del conjunto de jugadores* N *que determina la estructura de coaliciones a priori. Puede calcularse el valor de Owen de un jugador* $i \in P_j$, Φ_i, *siguiendo los siguientes pasos:*

1. Obtener la extensión multilineal $h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *del juego* (N, v).
2. Para todo $l \neq j$ *y para todo* $k \in P_l$*, reemplazar la variable* x_k *por* y_l*. Se obtiene así una nueva función de* x_i*, donde* $i \in P_j$ *e* y_l*, donde* $l \neq j$.
3. En la función obtenida anteriormente, reducir todos los exponentes a 1*, es decir, reemplazar cada* y_l^a *con* $a \geq 1$*, por* y_l*. Con esto se ha obtenido una nueva función multilineal* $g\left((x_i)_{i\in P_j}, (y_l)_{l\neq j}\right)$.
4. En la función g *sustituir cada* y_l *por* r *e integrar con respecto a* r*, obteniendo*

$$\alpha_j\left((x_i)_{i\in P_j}\right) = \int_0^1 g\left((x_i)_{i\in P_j}, r, r, \ldots, r\right) dr$$

5. Finalmente, para obtener el valor de Owen, Φ_i, calcular

$$\Phi_i (N, v, P) = \int_0^1 \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} (t, \ldots, t) \, dt.$$

Teorema 2.6.2 *Sea (N, v, P) un juego cooperativo con sistema de uniones donde $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$ es la partición del conjunto de jugadores N que determina la estructura de coaliciones a priori. Puede calcularse el valor de Banzhaf-Owen de un jugador $i \in P_j$, Ψ_i, siguiendo los siguientes pasos:*

1. 2. 3. Idénticos a los del teorema anterior.
4. Derivar la función g respecto a x_i.
5. El valor de Banzhaf-Owen se obtiene sustituyendo, en la función obtenida en el paso anterior, cada x_k con $k \in P_j$ y cada y_l por $1/2$.

La extensión multilineal y el valor de Banzhaf coalicional simétrico

A continuación, se describe el procedimiento para obtener el valor de Banzhaf coalicional simétrico a partir de la extensión multilineal.

Teorema 2.6.3 *Sea (N, v, P) un juego cooperativo con sistema de uniones donde $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$ es la partición del conjunto de jugadores N que determina la estructura de coaliciones a priori. Puede calcularse el valor de Banzhaf coalicional simétrico de un jugador $i \in P_j$, Π_i, siguiendo los siguientes pasos:*

1. 2. 3. Idénticos a los de los teoremas 2.6.1 y 2.6.2.
4. En la función g obtenida en el paso anterior, sustituir cada y_l por $1/2$. Se obtiene entonces una nueva función $\alpha_j \left((x_k)_{k \in P_j} \right)$, definida por $\alpha_j \left((x_k)_{k \in P_j} \right) = g \left((x_k)_{k \in P_j}, (1/2, 1/2, \ldots, 1/2)_{l \neq j} \right)$.
5. Finalmente, el valor Π_i se obtendría como

$$\Pi_i (N, v, P) = \int_0^1 \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} (t, t, \ldots, t) \, dt$$

Demostración

Sea $(N, v, P) \in U(N)$ e $i \in P_j$.

Sea $h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la extensión multilineal del juego (N, v). Aplicando los pasos 2 y 3 puede comprobarse que los sumandos correspondientes a coaliciones S tales que $S \cap P_l \neq \emptyset$ y $S^c \cap P_l \neq \emptyset$ para $l \neq j$, se anulan. Esto es debido a que en el paso 2 los sumandos correspondientes a estas coaliciones incluyen términos de la forma $ky_l^{a_1}(1 - y_l)^{a_2}$, con $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$. Al realizar el paso 3 estos términos se anulan ya que se convierten en $k(y_l - y_l)$.

Por lo tanto, después del paso 3 las coaliciones S para las cuales el término correspondiente de la extensión multilineal no se anula son de la forma

$$S = Q \cup T,$$

donde $T \subseteq P_j$ y $Q = \bigcup\limits_{l \in L} P_l$, con $L \subseteq M \backslash j$. La función que se obtiene después de aplicar el paso 3 es:

$$g\left((x_k)_{k \in P_j}, (y_j)_{j \neq l}\right) =$$

$$\sum_{T \subseteq P_j} \sum_{L \subseteq M \backslash j} \left[\prod_{k \in T} x_k \prod_{k \in P_j \backslash T} (1 - x_k) \prod_{l \in L} y_l \prod_{l \notin L \cup j} (1 - y_l)\right] v(Q \cup T).$$

Sustituyendo cada y_l por $1/2$ (paso 4) se tiene que:

$$\alpha_j\left((x_k)_{k \in P_j}\right) = \sum_{T \subseteq P_j} \sum_{L \subseteq M \backslash j} \left[\prod_{k \in T} x_k \prod_{k \in P_j \backslash T} (1 - x_k) \frac{1}{2^{m-1}}\right] v(Q \cup T).$$

Derivando ahora la función $\alpha_j\left((x_k)_{k \in P_j}\right)$ respecto a x_i.

$$\frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i}\left((x_k)_{k \in P_j}\right) =$$

$$\sum_{T \subseteq P_j \backslash i} \sum_{L \subseteq M \backslash j} \left[\prod_{k \in T} x_k \prod_{k \in P_j \backslash (T \cup i)} (1 - x_k) \frac{1}{2^{m-1}}\right] \{v(Q \cup T \cup i) - v(Q \cup T)\}.$$

Finalmente, por el paso 5,

$$\int_0^1 \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i}(t,t,\ldots,t)\,dt =$$

$$\int_0^1 \sum_{T\subseteq P_j\backslash i}\sum_{L\subseteq M\backslash j}\left[\prod_{k\in T} t \prod_{k\in P_j\backslash (T\cup i)}(1-t)\,\frac{1}{2^{m-1}}\right]\{v(Q\cup T\cup i)-v(Q\cup T)\}\,dt =$$

$$\sum_{T\subseteq P_j\backslash i}\sum_{L\subseteq M\backslash j}\frac{1}{2^{m-1}}\int_0^1 t^{|T|}(1-t)^{p_j-|T|-1}\,dt\,\{v(Q\cup T\cup i)-v(Q\cup T)\} =$$

$$\sum_{T\subseteq P_j\backslash i}\sum_{L\subseteq M\backslash j}\frac{1}{2^{m-1}}\frac{|T|!\,(p_j-|T|-1)!}{p_j!}\{v(Q\cup T\cup i)-v(Q\cup T)\} =$$

$$\sum_{T\subseteq P_j\backslash i}\sum_{L\subseteq M\backslash j}\frac{1}{2^{m-1}}\frac{1}{p_j}\frac{1}{\binom{p_j-1}{|T|}}\{v(Q\cup T\cup i)-v(Q\cup T)\} = \Pi_i(N,v,P)\,.\square$$

A continuación, se ilustrará el procedimiento descrito en el resultado anterior, calculando el índice de poder de Banzhaf coalicional simétrico, en el juego simple que se puede considerar al estudiar el Parlamento de las Islas Baleares resultante de las elecciones del año 1999.

Ejemplo 2.6.1 *Este juego puede representarse como*

$$[30;28,16,5,4,3,3]\,,$$

donde el jugador 1 *es el* PP*, el jugador* 2 *es el* $PSOE$*, el jugador* 3 *es el* $PSM-EM$*, el jugador* 4 *es* $EU-EV$*, el jugador* 5 *es* UM *y el jugador* 6 *es el* $PACTE$*. Supondremos que la estructura de uniones a priori es la siguiente:*

$$P=\{\{1\},\{2,4,6\},\{3,5\}\}\,.$$

En el ejemplo 1.3.4, se vio que este juego simple puede escribirse de la siguiente forma, donde $S = \{1\}$ *y* $T = \{2,3,4,5,6\}$.

$$v = \sum_{\substack{R\subseteq T\\|R|=1}} u_{S\cup R} + u_T - \sum_{\substack{R\subseteq T\\|R|=2}} u_{S\cup R} + \sum_{\substack{R\subseteq T\\|R|=3}} u_{S\cup R} - \sum_{\substack{R\subseteq T\\|R|=4}} u_{S\cup R}.$$

Aplicando el lema 1.3.3, la extensión multilineal de este juego es:

$$h(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 + x_1x_6 + x_2x_3x_4x_5x_6 -$$

$$x_1x_2x_3 - x_1x_2x_4 - x_1x_2x_5 - x_1x_2x_6 - x_1x_3x_4 -$$

$$x_1x_3x_5 - x_1x_3x_6 - x_1x_4x_5 - x_1x_4x_6 - x_1x_5x_6 +$$

$$x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_5 + x_1x_2x_3x_6 + x_1x_2x_4x_5 + x_1x_2x_4x_6 +$$

$$x_1x_2x_5x_6 + x_1x_3x_4x_5 + x_1x_3x_4x_6 + x_1x_3x_5x_6 + x_1x_4x_5x_6 -$$

$$x_1x_2x_3x_4x_5 - x_1x_2x_3x_4x_6 - x_1x_2x_3x_5x_6 - x_1x_2x_4x_5x_6 - x_1x_3x_4x_5x_6.$$

Se va a calcular el índice de poder de Banzhaf coalicional simétrico para el jugador 2. *Teniendo en cuenta que el jugador* 2 *pertenece a la segunda unión a priori, aplicando el segundo paso, se sustituye* x_1 *por* y_1 *(primera unión) y* x_3 *y* x_5 *por* y_3 *(tercera unión) obteniendo la siguiente función:*

$$y_1x_2 + y_1x_6 + y_1x_4 + 2y_1y_3 + x_2x_4x_6y_3^2 -$$

$$y_1x_2x_4 - y_1x_2x_6 - 2y_1y_3x_2 - 2y_1y_3x_4 - 2y_1y_3x_6 - y_1x_4x_6 - y_1y_3^2 +$$

$$2y_1x_2y_3x_4 + y_1x_2y_3^2 + 2y_1x_2x_6y_3 + y_1x_2x_4x_6 + y_1y_3^2x_4 + 2y_1y_3x_4x_6 + y_1x_6y_3^2 -$$

$$y_1x_2x_4y_3^2 - y_1x_2x_4x_6y_3 - y_1x_2x_6y_3^2 - y_1x_2x_4x_6y_3 - y_1x_4x_6y_3^2.$$

En el paso 3 *se reducen todos los exponentes a* 1*, obteniendo la función* g

$$g(y_1, x_2, x_4, x_6, y_3) = y_1x_2 + y_1x_6 + y_1x_4 + y_1y_3 + x_2x_4x_6y_3 -$$

$$y_1x_2x_4 - y_1x_2x_6 - y_1y_3x_4 - y_1y_3x_6 - y_1x_4x_6 + y_1x_2y_3x_4 -$$

$$y_1x_2y_3 + y_1x_2x_6y_3 + y_1x_2x_4x_6 + y_1y_3x_4x_6 - 2y_1x_2x_4x_6y_3.$$

En el paso 4 *se sustituye* y_1 *e* y_3 *por* $1/2$*, obteniendo la función* α_2

$$\alpha_2(x_2, x_4, x_6) = \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_4 + \frac{1}{4}x_6 - \frac{1}{4}x_2x_4 - \frac{1}{4}x_2x_6 - \frac{1}{4}x_4x_6 + \frac{1}{2}x_2x_4x_6 + \frac{1}{4}.$$

Derivando la función anterior respecto a x_2*, se obtiene la siguiente expresión:*

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{4}x_6 + \frac{1}{2}x_4x_6,$$

por lo que el valor del jugador 2 *se calcularía finalmente aplicando el paso* 5*, del siguiente modo,*

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2\right) dt = \frac{1}{6}.$$

De forma similar, podría calcularse el valor de Banzhaf coalicional simétrico del resto de los jugadores:

$$\Pi(N, v, P) = (1/2, 1/6, 1/4, 1/6, 1/4, 1/6).$$

La extensión multilineal y el índice de poder de Deegan-Packel coalicional

En esta subsección, se describirá el procedimiento para obtener el índice de poder de Deegan-Packel coalicional de un juego simple con uniones *a priori* (N, v, P) a partir de su extensión multilineal.

Teorema 2.6.4 *Sea* (N, v, P) *un juego simple con uniones a priori donde* $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$ *es la partición del conjunto de jugadores* N *que determina la estructura de coaliciones a priori. Puede calcularse el índice de* *poder de Deegan-Packel coalicional de un jugador $i \in P_j$, ζ_i, en dicho juego, siguiendo los siguientes pasos:*

1. 2. 3. Idénticos a los necesarios para obtener el índice de poder de Deegan-Packel del juego (N, v), descritos en el teorema 1.3.4, obteniéndose la siguiente función

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{S \in M(v)} \prod_{k \in S} x_k.$$

4. En la función g, para todo $l \neq j$ y para todo $k \in P_l$ reemplazar la variable x_k por y_l. Se ha construido así una función g_1 de x_k, con $k \in P_j$ e y_l, donde $l \neq j$.
5. En la función g_1 reducir todos los exponentes a 1, es decir, reemplazar cada y_l^a con $a \in \mathbb{N}$, por y_l. Se obtiene así una función g_2.
6. A partir de g_2 calcular la función g_3 de x_k, con $k \in P_j$ del siguiente modo:

$$g_3((x_k)_{k \in P_j}) = \int_0^1 g_2\left(t, \ldots, t, (x_k)_{k \in P_j}\right) dt.$$

7. Finalmente, el índice de poder de Deegan-Packel coalicional ζ_i se obtiene calculando

$$\zeta_i(N, v, P) = \frac{1}{g(1, 1, \ldots, 1)} \int_0^1 \frac{\partial g_3}{\partial x_i}(t, \ldots, t)\, dt.$$

Demostración

Sea $(N, v, P) \in SU(N)$ e $i \in P_j$.

A partir de la función g que se obtiene después del paso 3, tenemos que

$$g(1, 1, \ldots, 1) = \sum_{S \in M(v)} 1 = |M(v)|.$$

Después de los pasos 4 y 5, se obtiene la función,

$$g_2\left((x_k)_{k \in P_j}, (y_l)_{l \neq j}\right) = \sum_{S \in M(v)} \prod_{l \in m(S) \setminus j} y_l \prod_{k \in P_j \cap S} x_k.$$

Una vez efectuado el paso 6, se obtiene

$$g_3((x_k)_{k\in P_j}) = \int_0^1 g_2\left(t, \ldots, t, (x_k)_{k\in P_j}\right) dt = \int_0^1 \sum_{S\in M(v)} t^{|m(S)|-1} \prod_{k\in P_j\cap S} x_k dt =$$

$$\sum_{S\in M(v)} \frac{1}{|m(S)|} \prod_{k\in P_j\cap S} x_k.$$

Finalmente, después del paso 7,

$$\int_0^1 \frac{\partial g_3}{\partial x_i}(t, \ldots, t)\, dt = \frac{1}{|m(S)|} \int_0^1 \sum_{S\in M_i(v)} t^{|S\cap P_j|-1} dt = \sum_{S\in M_i(v)} \frac{1}{|m(S)|} \frac{1}{|S\cap P_j|},$$

con lo que se finaliza la demostración.□

En el siguiente ejemplo se ilustrará el procedimiento descrito en el teorema anterior para calcular el índice de poder de Deegan-Packel coalicional.

Ejemplo 2.6.2 *El Parlamento de las Islas Baleares puede representarse como* $[30; 28, 16, 5, 4, 3, 3]$*. Se va a calcular el índice de poder de Deegan-Packel coalicional del jugador* 1 (PP) *empleando el procedimiento descrito en el resultado anterior. Supóngase que el sistema de uniones a priori viene dado por*

$$P = \{\{1\}, \{2, 4, 6\}, \{3, 5\}\}.$$

Como se vio en el ejemplo 1.3.4 después de aplicar el paso 3, se obtiene la siguiente función

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 + x_1x_6 + x_2x_3x_4x_5x_6.$$

En el paso 4, se sustituyen x_2, x_4 *y* x_6 *por* y_2 *(segunda unión) y* x_3 *y* x_5 *por* y_3 *(tercera unión) obteniendo la siguiente función*

$$g_1(x_1, y_2, y_3) = x_1y_2 + x_1y_3 + x_1y_2 + x_1y_3 + x_1y_2 + y_2^3y_3^2.$$

En el paso 5, se reducen todos los exponentes a 1*, obteniendo la función*

$$g_2(x_1, y_2, y_3) = 3x_1y_2 + 2x_1y_3 + y_2y_3.$$

En el paso 6, se calcula

$$g_3(x_1) = \int_0^1 g_2(x_1, t, t)\, dt = \int_0^1 \left(5tx_1 + t^2\right) dt = \frac{5}{2}x_1 + \frac{1}{3}.$$

Finalmente, para evaluar el índice de poder de Deegan-Packel coalicional del jugador 1*, se aplica el paso* 7

$$\zeta_1(N, v, P) = \frac{1}{g(1,1,1,1,1,1)} \int_0^1 \frac{\partial g_3}{\partial x_1}(t)\, dt = \frac{5}{12}.$$

De forma similar se obtendría el índice de poder de Deegan-Packel coalicional de los restantes jugadores:

$$\zeta(N, v, P) = (5/12, 1/9, 1/8, 1/9, 1/8, 1/9).$$

La extensión multilineal y el índice de poder de Deegan-Packel coalicional simétrico

En esta subsección se verá cómo se puede obtener el índice de poder de Deegan-Packel coalicional simétrico de un juego simple con uniones *a priori* (N, v, P) a partir de su extensión multilineal.

Teorema 2.6.5 *Sea* (N, v, P) *un juego simple con uniones a priori donde* $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$ *es la partición del conjunto de jugadores* N *que determina la estructura de coaliciones a priori. Puede calcularse el índice de poder de Deegan-Packel coalicional simétrico de un jugador* $i \in P_j$, Λ_i, *en dicho juego, siguiendo los siguientes pasos:*

1. 2. 3. Idénticos a los necesarios para obtener el índice de poder de Deegan-Packel del juego (N, v), *descritos en el teorema 1.3.4, obteniéndose la siguiente función*

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{S \in M(v)} \prod_{k \in S} x_k.$$

4. Para todo $l \in \{1, 2, \dots, m\}$ y para todo $k \in P_l$, reemplazar x_k por y_l. Se obtiene así una función de y_l, donde $l = 1, 2, \dots, m$. En esta función reducir todos los exponentes a 1, es decir, reemplazar cada y_l^a con $a \geq 1$, por y_l. Si hay varios monomios iguales, suprimir todos excepto 1.
5. Sea t el mínimo número de términos de los monomios $\prod\limits_{l \in R} y_l$ donde $R \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ que quedan en la función obtenida en el paso anterior. Desde $k = t + 1$ hasta $k = m$, eliminar aquellos monomios con k términos que sean divisibles por algún otro monomio de esta función con número de términos desde t hasta $k - 1$. Se obtiene así una función $g_1(y_1, y_2, \dots, y_m)$.
6. En la función g, eliminar aquellos términos que al reemplazar cada x_k por y_l, para todo $l \in \{1, 2, \dots, m\}$ y reducir todos los exponentes a 1, no coincidan con algún término de g_1.
7. En la función obtenida en el paso anterior dividir cada uno de los términos $\prod\limits_{i \in S} x_i, S \subseteq N$ por el número de sumandos que dan lugar al mismo término de g_1. Obtenemos así una función g_2.
8. En la función g_2 sustituir, para todo $l \neq j$ y para todo $k \in P_l$, la variable x_k por y_l. Se obtiene así una función g_3 que depende de x_k, donde $k \in P_j$ e y_l, con $l \neq j$.
9. En la función g_3 reducir todos los exponentes a 1, es decir, reemplazar cada y_l^a con $a \in \mathbb{N}$, por y_l. Se obtiene así una función g_4.
10. A partir de g_4 calcular la función g_5 de x_k, con $k \in P_j$ del siguiente modo:

$$g_5((x_k)_{k \in P_j}) = \int_0^1 g_4 \left((x_k)_{k \in P_j}, t, \dots, t \right) dt.$$

11. Finalmente, el índice de poder de Deegan-Packel coalicional simétrico ζ_i se obtiene calculando

$$\Lambda_i(N, v, P) = \frac{1}{g_1(1, 1, \dots, 1)} \int_0^1 \frac{\partial g_5}{\partial x_i}(t, \dots, t)\, dt.$$

Demostración

La función g_1 que resulta del paso 5, se correspondería con la obtenida después del paso 3 para calcular el índice de poder de Deegan-Packel del juego cociente

$\left(M, v^P\right)$, que es igual a:

$$g_1\left(y_1, y_2, \ldots, y_m\right) = \sum_{\substack{R \subseteq M \\ R \in M\left(v^P\right)}} \prod_{l \in R} y_l.$$

Se tiene que $g_1(1, 1, \ldots, 1) = \sum\limits_{R \in M(v^P)} 1 = \left|M\left(v^P\right)\right|$.

En el paso 6 se eliminan en la función g los términos correspondientes a aquellas coaliciones minimales ganadoras cuyos representantes en el cociente no son minimales ganadoras, es decir se obtiene la función

$$\sum_{S \in M(v,P)} \prod_{k \in S} x_k.$$

En el paso 7, se divide cada uno de los términos $\prod\limits_{k \in S} x_k$ de la función anterior entre $|P(S)|$, obteniendo

$$g_2\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \sum_{S \in M(v,P)} \frac{1}{|P(S)|} \prod_{k \in S} x_k.$$

Despúes de los pasos 8 y 9, se obtiene la función

$$g_4\left(\left(x_k\right)_{k \in P_j}, \left(y_l\right)_{l \neq j}\right) = \sum_{S \in M(v,P)} \frac{1}{|P(S)|} \prod_{l \in m(S) \setminus j} y_l \prod_{k \in P_j \cap S} x_k.$$

En el paso 10, se calcula

$$g_5(\left(x_k\right)_{k \in P_j}) = \int_0^1 g_4\left(\left(x_k\right)_{k \in P_j}, t, \ldots, t\right) dt =$$

$$\int_0^1 \sum_{S \in M(v,P)} \frac{1}{|P(S)|} t^{|m(S)|-1} \prod_{k \in P_j \cap S} x_k dt = \sum_{S \in M(v,P)} \frac{1}{|P(S)|} \frac{1}{|m(S)|} \prod_{k \in P_j \cap S} x_k.$$

Finalmente, después del paso 11,

$$\int_0^1 \frac{\partial g_5}{\partial x_i}(t, \ldots, t)\, dt = \frac{1}{|P(S)|} \frac{1}{|m(S)|} \int_0^1 \sum_{S \in M_i(v,P)} t^{|S \cap P_j|-1} dt =$$

$$\sum_{S\in M_i(v,P)} \frac{1}{|P(S)|}\frac{1}{|m(S)|}\frac{1}{|S\cap P_j|},$$

con lo se finaliza la demostración.□

Al igual que sucedía para el índice de poder de Deegan-Packel no coalicional, teniendo en cuenta la facilidad de cálculo de los dos índices de poder coalicionales de Deegan-Packel a partir del conocimiento de los conjuntos de coaliciones minimales ganadoras del juego simple y del juego cociente, el resultado anterior y el referente al índice de poder de Deegan-Packel coalicional no tienen mucha utilidad práctica. Se incluyen para ver su semejanza con el procedimiento de cálculo de otros índices de poder coalicionales a partir de la extensión multilineal del juego. Para finalizar esta sección, se empleará de nuevo el Parlamento de las Islas Baleares para calcular el índice de poder de Deegan-Packel coalicional simétrico, mediante el procedimiento descrito en el teorema anterior.

Ejemplo 2.6.3 *El Parlamento de las Islas Baleares puede representarse como* $[30; 28, 16, 5, 4, 3, 3]$. *Se va a calcular el índice de poder de Deegan-Packel coalicional simétrico del jugador* 2 $(PSOE)$. *Se recuerda que el sistema de uniones a priori viene dado por*

$$P = \{\{1\}, \{2, 4, 6\}, \{3, 5\}\}.$$

Como se vio en el ejemplo 1.3.4, la función g que se obtiene después de aplicar el paso 3 es:

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 + x_1x_6 + x_2x_3x_4x_5x_6.$$

En el paso 4, se sustituye x_1 *por* y_1 *(primera unión),* x_2, x_4 *y* x_6 *por* y_2 *(segunda unión) y,* x_3 *y* x_5 *por* y_3 *(tercera unión), se reducen todos los exponentes a* 1 *y, cuando hay varios monomios iguales, eliminamos todos menos uno, obteniendo*

$$y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 + y_1y_2y_3.$$

En el paso 5, se elimina el último término, obteniendo la función g_1

$$g_1(y_1, y_2, y_3) = y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3.$$

En este caso en el paso 6, no se debe eliminar ningún término. En el paso 7, se obtiene la función

$$g_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{x_1x_2}{3} + \frac{x_1x_3}{2} + \frac{x_1x_4}{3} + \frac{x_1x_5}{2} + \frac{x_1x_6}{3} + x_2x_3x_4x_5x_6.$$

En el paso 8, se sustituye x_1 por y_1 (primera unión) y, x_3 y x_5 por y_3 (tercera unión) obteniendo la siguiente función

$$g_3(y_1, x_2, x_4, x_6, y_3) = \frac{y_1x_2}{3} + y_1y_3 + \frac{y_1x_4}{3} + \frac{y_1x_6}{3} + x_2x_4x_6y_3^2.$$

En el paso 9, se reducen todos los exponentes a 1, *obteniendo la función*

$$g_4(y_1, x_2, x_4, x_6, y_3) = \frac{y_1x_2}{3} + y_1y_3 + \frac{y_1x_4}{3} + \frac{y_1x_6}{3} + x_2x_4x_6y_3.$$

En el paso 10, se calcula

$$g_5(x_2, x_4, x_6) = \int_0^1 g_4(t, t, x_2, x_4, x_6)\, dt =$$

$$\int_0^1 \left(\frac{x_2t}{3} + t^2 + \frac{x_4t}{3} + \frac{x_6t}{3} + x_2x_4x_6t\right) dt = \frac{1}{6}x_2 + \frac{1}{6}x_4 + \frac{1}{6}x_6 + \frac{1}{2}x_2x_4x_6 + \frac{1}{3}.$$

Finalmente, para evaluar el índice de poder de Deegan-Packel coalicional simétrico del jugador 2, *se aplica el paso 11*

$$\Lambda_2(N, v, P) = \frac{1}{g_1(1,1,1)} \int_0^1 \frac{\partial g_5}{\partial x_2}(t, t, t)\, dt = \frac{1}{9}.$$

De forma similar, se obtendrá el índice de poder de Deegan-Packel coalicional simétrico de los restantes jugadores:

$$\Lambda(N, v, P) = (1/3, 1/9, 1/6, 1/9, 1/6, 1/9).$$

2.7 Funciones generatrices

En esta sección se verá cómo es posible, empleando funciones generatrices, calcular diversos índices de poder en juegos de mayoría ponderada con uniones *a priori*.

El índice de poder de Banzhaf-Owen

Recuérdese que el valor de Banzhaf-Owen es una solución $f : U(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que dado un juego $(N, v, P) \in U(N)$ asigna a cada jugador $i \in N$ el número real:

$$\Psi_i(N, v, P) = \sum_{R \subseteq M \setminus j} \sum_{T \subseteq P_j \setminus i} \frac{1}{2^{m-1}} \frac{1}{2^{p_j - 1}} \left(v(Q \cup T \cup i) - v(Q \cup T) \right), \quad (2.14)$$

donde $Q = \bigcup_{r \in R} P_r$ y $P_j \in P$ es la unión tal que $i \in P_j$.

En primer lugar, se comenzará dando dos definiciones que sólo se emplearán en esta sección, y que se utilizarán para facilitar la introducción de nuevos resultados.

Definición 2.7.1 *Dado $(N, v, P) \in U(N)$, donde $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$, se dice que una coalición $S \subseteq N$ es compatible con la estructura de uniones a priori P para la unión P_j, si S es de la forma $S = \bigcup_{k \in R \subseteq M \setminus j} P_k \cup T$, con $T \subseteq P_j$.*

Dado $(N, v, P) \in U(N)$, denotaremos por $C(j, P)$ el conjunto de coaliciones compatibles con la estructura de coaliciones para la unión P_j.

Definición 2.7.2 *Dado $(N, v, P) \in SU(N)$ se define un swing compatible con P, para un jugador $i \in P_j$, como un par de coaliciones $(S \cup i, S)$ tal que S es perdedora, $S \in C(j, P)$ y $S \cup i$ es ganadora.*

Se representará por $\eta_i(N, v, P)$ el número de swings compatibles con P para un jugador i, en el juego simple con uniones *a priori* (N, v, P).

En un juego simple, para un jugador $i \in P_j$, las cantidades $v(S \cup i) - v(S)$ donde $S \in C(j, P)$ son iguales a 1 sólo si el jugador i hace ganadora a la coalición S, siendo igual a 0 en el resto de los casos. Por lo tanto, sustituyendo en (2.14), el índice de poder de Banzhaf-Owen de un jugador $i \in P_j$ es igual al número de swings compatibles con P para i, dividido entre 2^{m+p_j-2}, es decir:

$$\Psi_i(N, v, P) = \frac{\eta_i(N, v, P)}{2^{m+p_j-2}}.$$

Por ello, para calcular el índice de poder de Banzhaf-Owen en un juego simple con uniones *a priori* es suficiente calcular el número de swings compatibles con P para cada uno de los jugadores.

El siguiente resultado determina el número de swings, compatibles con P, para un jugador en un juego simple de mayoría ponderada con uniones *a priori* (N, v, P).

Teorema 2.7.1 *Sea* (N, v, P) *un juego simple con uniones a priori y de mayoría ponderada con* $v = [q; w_1, w_2, \dots, w_n]$*. El número de swings compatibles para un jugador* $i \in P_j$ *en dicho juego viene dado por:*

$$\eta_i (N, v, P) = \sum_{k=q-w_i}^{q-1} b_k^i,$$

siendo b_k^i *el número de coaliciones* $S \in C(j, P)$ *tales que* $i \notin S$ *y* $w(S) = k$*.*

Demostración

Sea $(N, v, P) \in SU(N)$ con $v = [q; w_1, w_2, \dots, w_n]$ e $i \in P_j$.

Las coaliciones compatibles para la unión P_j, a las que no pertenece i, con peso comprendido entre $q - w_i$ y $q - 1$ son coaliciones perdedoras. Si a una de estas coaliciones se incorpora el jugador i, el peso de la coalición es por lo menos igual a q, por lo que se convierte en una coalición ganadora.

Si b_k^i denota el número de coaliciones S compatibles con la estructura de coaliciones para la unión P_j que no incluyen al jugador i y que tienen peso k comprendido entre $q - w_i$ y $q - 1$, los swings compatibles para el jugador i en el juego (N, v, P) se obtienen sumando los números $\{b_k^i\}_{k \geq 0}$ para valores de k comprendidos entre $q - w_i$ y $q - 1$. Por tanto, $\eta_i (N, v, P) = \sum\limits_{k=q-w_i}^{q-1} b_k^i$.$\square$

El siguiente resultado proporciona una función que permite determinar los números $\{b_k^i\}_{k \geq 0}$ anteriores y calcular el valor de Banzhaf-Owen en juegos de mayoría ponderada con uniones *a priori*.

Teorema 2.7.2 *Sea* (N, v, P) *un juego simple con uniones a priori y de mayoría ponderada con* $v = [q; w_1, w_2, ..., w_n]$*. Entonces dado un jugador*

$i \in P_j$, la función generatriz de los números $\{b_k^i\}_{k\geq 0}$, definidos anteriormente viene dada por:

$$B_i(x) = \prod_{r=1, r\neq j}^{m} \left(1 + x^{w(P_r)}\right) \prod_{j_l=1, j_l\neq i}^{p_j} \left(1 + x^{w_{j_l}}\right),$$

donde $w(P_r) = \sum_{j\in P_r} w_j$ *y* $P_j = \left\{j_1, j_2, ..., j_{p_j}\right\}$

Demostración

Sea $(N, v, P) \in SU(N)$ con $v = [q; w_1, w_2, \ldots, w_n]$ e $i \in P_j$.

Considérese la siguiente función

$$\left(1 + x^{w(P_1)}\right) \ldots \left(1 + x^{w(P_{j-1})}\right) \left(1 + x^{w(P_{j+1})}\right) \ldots \left(1 + x^{w(P_m)}\right) \left(1 + x^{w_{j_1}}\right) ... \tag{2.15}$$

$$\ldots \left(1 + x^{w_{j_{p_j}}}\right) = 1 + \sum_{S\in C(j,P)} \prod_{l\in S} x^{w_l} = 1 + \sum_{S\in C(j,P)} x^{\sum_{l\in S} w_l} = 1 + \sum_{S\in C(j,P)} x^{w(S)}.$$

Agrupando las potencias del mismo orden, y haciendo $k = w(S)$, resulta que la función anterior es igual a:

$$\sum_{k=0}^{w(N)} b_k x^k,$$

donde $b_0 = 1$ y b_k, para $k > 0$ es el número de coaliciones compatibles con la estructura de uniones *a priori* para la unión P_j con peso k. Para calcular los números $\{b_k^i\}_{k\geq 0}$, basta suprimir en (2.15) el factor $(1 + x^{w_i})$.$\square$

Ejemplo 2.7.1 *Se va a calcular el índice de poder de Banzhaf-Owen para el juego simple de mayoría ponderada correspondiente al Parlamento de las Islas Baleares. Este juego puede representarse como* $[30; 28, 16, 5, 4, 3, 3]$. *Considerando la estructura de uniones a priori dada por:*

$$P = \{\{1\}, \{2, 4, 6\}, \{3, 5\}\},$$

Para calcular el número de swings para el jugador 4, hay que construir la función:

$$B_4(x) = \left(1 + x^{28}\right)\left(1 + x^{8}\right)\left(1 + x^{16}\right)\left(1 + x^{3}\right) =$$

$$x^{55} + x^{52} + x^{47} + x^{44} + x^{39} + x^{36} + x^{31} + x^{28} + x^{27} +$$

$$x^{24} + x^{19} + x^{16} + x^{11} + x^{8} + x^{3} + 1.$$

Entonces, se obtiene que $\eta_4(v) = \sum\limits_{k=26}^{29} b_k^4 = 2$. *De forma similar, se tendría que* $\eta_1(v) = \eta_3(v) = \eta_4(v) = \eta_5(v) = \eta_6(v) = 2$.

Se obtendría de modo inmediato que el índice de Banzhaf-Owen es igual a:

$$\Psi(N, v, P) = (1/2, 1/8, 1/4, 1/8, 1/4, 1/8).$$

El índice de poder de Banzhaf coalicional simétrico

Para construir la función generatriz que permita calcular el índice de poder de Banzhaf coalicional simétrico en juegos de mayoría ponderada, hay que tener en cuenta un argumento similar al que se utilizó para el cálculo de la función generatriz que permitía obtener el índice de poder de Shapley-Shubik.

En este caso, dado un juego $(N, v, P) \in SU(N)$, el índice de poder de Banzhaf coalicional simétrico de un jugador $i \in P_j$, es igual a:

$$\Pi_i(N, v, P) =$$

$$\sum_{\{S \in C(i,P)/S \notin W \text{ y } S \cup i \in W\}} \frac{1}{2^{m-1}} \frac{|S \cap P_j|!\,(p_j - |S \cap P_j| - 1)!}{p_j!} =$$

$$\sum_{l=0}^{p_j - 1} \frac{1}{2^{m-1}} \frac{l!\,(p_j - l - 1)!}{p_j!} d_l^i,$$

donde d_l^i representa el número de swings $(S \cup i, S)$ compatibles con P para el jugador i, en el juego (N, v, P), de tal forma que el número de jugadores de S que pertenecen a P_j es l. Siguiendo un razonamiento similar al que se hizo para el índice de poder de Shapley-Shubik, se tiene que, para cualquier valor de l entre 0 y $p_j - 1$,

$$d_l^i = \sum_{k=q-w_i}^{q-1} a_{kl}^i,$$

siendo a_{kl}^i el número de swings compatibles con P para el jugador i, en (N, v, P) con peso k que contienen l jugadores de la unión P_j.

Teorema 2.7.3 *Sea (N, v, P) un juego simple con uniones a priori y de mayoría ponderada con $v = [q; w_1, w_2, ..., w_n]$. Entonces dado un jugador $i \in P_j$, la función generatriz de los números $\{a_{kl}^i\}_{k \geq 0, l \geq 0}$, definidos anteriormente, viene dada por:*

$$S_i(x, z) = \prod_{r=1, r \neq j}^{m} \left(1 + x^{w(P_r)}\right) \prod_{j_l=1, j_l \neq i}^{p_j} \left(1 + x^{w_{j_l}} z\right).$$

Demostración

Sea $(N, v, P) \in SU(N)$ con $v = [q; w_1, w_2, \ldots, w_n]$ e $i \in P_j$ siendo $P_j = \left\{i_1, i_2, \ldots, i_{p_j}\right\}$.

Considérese la siguiente función

$$\left(1 + x^{w(P_1)}\right) \ldots \left(1 + x^{w(P_{j-1})}\right) \left(1 + x^{w(P_{j+1})}\right) \ldots \left(1 + x^{w(P_m)}\right) \left(1 + x^{w_{j_1}} z\right) \ldots \tag{2.16}$$

$$\ldots \left(1 + x^{w_{j_{p_j}}} z\right) = 1 + \sum_{S \in C(i,P)} \prod_{k \in S \backslash P_j} x^{w_k} \prod_{k \in S \cap P_j} x^{w_k} z =$$

$$1 + \sum_{S \in C(j,P)} x^{\sum_{k \in S} w_k} z^{|S \cap P_j|} = 1 + \sum_{S \in C(j,P)} x^{w(S)} z^{|S \cap P_j|}.$$

Agrupando las potencias del mismo orden, y haciendo $k = w(S)$, resulta que el término anterior es igual a:

$$\sum_{k=0}^{w(N)} \sum_{l=0}^{p_j} a_{kl} x^k z^l$$

donde $a_{00} = 1$ y a_{kl} cuando al menos uno de los índices k o l es mayor que 0, es el número de coaliciones compatibles con la estructura de coaliciones para la unión P_j con peso k y que contienen l jugadores de P_j. Para calcular los números $\{a^i_{kl}\}_{k\geq 0, l\geq 0}$, basta suprimir en (2.16) el factor $(1 + x^{w_i})$.□

Empleando la proposición anterior se pueden calcular los números $\{a^i_{kl}\}_{k\geq 0, l\geq 0}$. Ahora bien, para determinar el valor de Banzhaf coalicional simétrico es necesario calcular los valores d^i_l que pueden identificarse por un polinomio de la forma

$$g_i(z) = \sum_{l=0}^{p_j - 1} d^i_l z^l,$$

y como $d^i_l = \sum\limits_{k=q-w_i}^{q-1} a^i_{kl}$, se tiene que

$$g_i(z) = \sum_{l=0}^{p_j-1} d^i_l z^l = \sum_{l=0}^{p_j-1} \left[\sum_{k=q-w_i}^{q-1} a^i_{kl} \right] z^l.$$

Por la proposición anterior

$$S_i(x, z) = \sum_{l=0}^{p_j-1} \left[\sum_{k=0}^{w(N)-w_i} a^i_{kl} x^k \right] z^l,$$

de lo que se deduce que para determinar los coeficientes de $g_i(z)$ es suficiente, para cada potencia de la variable z en $S_i(x, z)$, seleccionar los coeficientes de los monomios $x^k z^l$ en los que el exponente k de la variable x tome valores entre $q - w_i$ y $q - 1$.

Ejemplo 2.7.2 *Se va a calcular el índice de poder de Banzhaf coalicional simétrico para el juego de mayoría ponderada correspondiente al Parlamento* *de las Islas Baleares. Recuérdese que este juego puede representarse como* $[30; 28, 16, 5, 4, 3, 3]$ *y que consideramos la estructura de uniones a priori dada por:*

$$P = \{\{1\}, \{2,4,6\}, \{3,5\}\},$$

Para calcular el número de swings compatibles para el jugador 3*, hay que considerar la función:*

$$S_3(x,z) = \left(1+x^{28}\right)\left(1+x^{23}\right)\left(1+x^3 z\right) =$$

$$x^{54}z + x^{31}z + x^{26}z + x^3 z + x^{51} + x^{28} + x^{23} + 1.$$

Se eligen ahora los coeficientes de los monomios $x^k z^j$ *en los que el exponente* k *de la variable* x *tome valores entre* 25 *y* 29 $($*en este caso son sólo dos* $x^{26}z$ *y* $x^{28}$$)$*, por lo que*

$$g_3(z) = \sum_{j=0}^{1} d_j^3 z^j = z + 1,$$

y el índice de poder de Banzhaf coalicional simétrico del jugador 3 *se calcularía*

$$\Pi_3(N,v,P) = \frac{1}{2^2}\sum_{j=0}^{1}\frac{j!\,(2-j-1)!}{2!}d_j^3 = \frac{1}{4}\frac{1!0!}{2!}1 + \frac{1}{4}\frac{0!1!}{2!}1 = \frac{1}{4}.$$

De modo similar, podría calcularse este índice para los restantes jugadores:

$$\Pi(N,v,P) = (1/2, 1/6, 1/4, 1/6, 1/4, 1/6).$$

Índice de poder de Owen

A continuación, se describirá el procedimiento para calcular el índice de poder de Owen en juegos de mayoría ponderada empleando funciones generatrices.

En este caso, dado un juego $(N,v,P) \in SU(N)$, el índice de poder de Owen de un jugador i de P_j, viene dado por:

$$\Phi_i(N,v,P) =$$

$$\sum_{\substack{\{S \in C(i,P)/ \\ S \notin W \ y \ S \cup i \in W\}}} \frac{|m_j(S)|!\,(m - |m_j(S)| - 1)!}{m!} \frac{|S \cap P_j|!\,(p_j - |S \cap P_j| - 1)!}{p_j!} =$$

$$\sum_{r=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{p_j-1} \frac{r!\,(m-r-1)!}{m!} \frac{l!\,(p_j-l-1)!}{p_j!} d_{rl}^i,$$

donde $m_j(S) = \{k \in M \backslash j / P_k \subseteq S\}$ y d_{rl}^i representa el número de swings $(S \cup i, S)$ compatibles con P para el jugador $i \in P_j$ en el juego (N, v, P), de tal forma que en S están contenidas r uniones *a priori* distintas de P_j y el número de elementos de S que pertenecen a P_j es l. Siguiendo un razonamiento similar al que se hizo para el valor de Banzhaf coalicional simétrico, se tiene que, para cualquier valor de r entre 0 y $m-1$, y de l entre 0 y $p_j - 1$,

$$d_{rl}^i = \sum_{k=q-w_i}^{k=q-1} a_{klr}^i,$$

siendo a_{klr}^i el número de swings compatibles con P para el jugador i, en coaliciones de peso k, que contienen l jugadores de la coalición P_j y r uniones *a priori* distintas de P_j.

Teorema 2.7.4 *Sea (N, v, P) un juego simple con coaliciones a priori y de mayoría ponderada donde $v = [q; w_1, w_2, \ldots, w_n]$. Entonces dado un jugador $i \in P_j$, la función generatriz de los números $\{a_{klr}^i\}_{k \geq 0, l \geq 0, r \geq 0}$ definidos anteriormente viene dada por:*

$$S_i(x, z, t) = \prod_{r=1, r \neq j}^{m} \left(1 + x^{w(P_r)} t\right) \prod_{j_k = 1, j_k \neq i}^{p_j} \left(1 + x^{w_{j_k}} z\right).$$

Demostración

Sea $(N, v, P) \in SU(N)$ con $v = [q; w_1, w_2, \ldots, w_n]$ e $i \in P_j$.

Considérese la siguiente función

$$\left(1 + x^{w(P_1)} t\right) \ldots \left(1 + x^{w(P_{j-1})} t\right) \left(1 + x^{w(P_{j+1})} t\right) \ldots \left(1 + x^{w(P_m)} t\right) \left(1 + x^{w_{j_1}} z\right) \ldots \tag{2.17}$$

$$\ldots\left(1+x^{w_{j p_j}}z\right)=1+\sum_{S\in C(j,P)}\prod_{r\in m_j(S)}\left(x^{w(P_r)}t\right)\prod_{k\in S\cap P_j}\left(x^{w_k}z\right)=$$

$$1+\sum_{S\in C(j,P)}x^{\sum_{k\in S}w_k}t^{|m_j(S)|}z^{|S\cap P_j|}=1+\sum_{S\in C(j,P)}x^{w(S)}t^{|m_j(S)|}z^{|S\cap P_j|}.$$

Agrupando las potencias del mismo orden, y haciendo $k=w\,(S)$, resulta que la función anterior es igual a:

$$\sum_{k=0}^{w(N)}\sum_{r=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{p_j}a_{klr}x^k t^r z^l$$

donde $a_{000}=1$ y a_{klr}, cuando al menos uno de los índices k,l o r es mayor que 0, es el número de coaliciones compatibles con el sistema de uniones para el jugador i con peso k que contiene a r coaliciones distintas de P_j y con l jugadores de P_j. Para calcular los números $\{a^i_{klr}\}_{k\geq 0,l\geq 0,r\geq 0}$, basta suprimir en (2.17) el factor $(1+x^{w_i})$.□

En la proposición anterior, se presenta un método para el cálculo de los números $\{a^i_{klr}\}_{k\geq 0,l\geq 0,r\geq 0}$. De modo similar a como ocurría para el valor de Banzhaf coalicional simétrico, para determinar el valor de Owen es necesario calcular los valores d^i_{rl} que pueden identificarse por un polinomio de la forma

$$g_i\,(z,t)=\sum_{r=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{p_j-1}d^i_{rl}t^r z^l,$$

y como $d^i_{rl}=\sum\limits_{k=q-w_i}^{q-1}a^i_{klr}$, se tiene que

$$g_i\,(z,t)=\sum_{r=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{p_j-1}d^i_{rl}z^l t^r=\sum_{r=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{p_j-1}\left[\sum_{k=q-w_i}^{q-1}a^i_{klr}\right]t^r z^l.$$

Por la proposición anterior

$$S_i\,(x,z,t)=\sum_{r=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{p_j-1}\left[\sum_{k=0}^{w(N)-w_i}a^i_{klr}x^k\right]t^r z^l,$$

de lo que se deduce que para determinar los coeficientes de $g_i(z,t)$ es suficiente, para cada par de potencias de la variable z y t en $S_i(x,z,t)$, seleccionar los coeficientes de los monomios $x^k t^r z^l$ en los que el exponente k de la variable x tome valores entre $q - w_i$ y $q - 1$.

Ejemplo 2.7.3 *Siguiendo con el ejemplo anterior que se representaba como* $[30; 28, 16, 5, 4, 3, 3]$, *con la estructura de uniones a priori dada por:*

$$P = \{\{1\}, \{2,4,6\}, \{3,5\}\}.$$

Para calcular el número de swings compatibles para el jugador 6, *considérese la función:*

$$S_6(x,z,t) = \left(1 + x^{28}t\right)\left(1 + x^8 t\right)\left(1 + x^{16}z\right)\left(1 + x^4 z\right) =$$

$$x^{56}tz^2 + x^{48}tz^2 + x^{28}tz^2 + x^{20}z^2 + x^{52}tz + x^{44}tz + x^{40}tz +$$

$$x^{32}tz + x^{24}tz + x^{12}tz + x^{16}z + x^4 z + x^{36}t + x^{28}t + x^8 t + 1.$$

Se eligen ahora los coeficientes de los monomios $x^k t^r z^l$ *en los que el exponente* k *de la variable* x *tome valores entre* 27 *y* 29 *(son dos* $x^{28}tz^2$ *y* $x^{28}t$*), por lo que*

$$g_6(z,t) = \sum_{r=0}^{2}\sum_{l=0}^{2} d_{rl}^i t^r z^l = tz^2 + t,$$

y el índice de poder de Owen del jugador 6 *se calcularía*

$$\Phi_6(N,v,P) = \sum_{r=0}^{2}\sum_{l=0}^{2} \frac{r!\,(m-r-1)!}{m!}\frac{l!\,(p_j - l - 1)!}{p_j!} d_{rl}^i =$$

$$\frac{1!1!}{3!}\frac{0!2!}{3!}1 + \frac{1!1!}{3!}\frac{2!0!}{3!}1 = \frac{1}{9}.$$

De modo similar, se calcularía el índice de Owen de los restantes jugadores:

$$\Phi(N,v,P) = (1/3, 1/9, 1/6, 1/9, 1/6, 1/9).$$

Índice de poder de Deegan-Packel coalicional

En esta subsección se indicará cómo podría obtenerse el índice de poder de Deegan-Packel coalicional de un juego de mayoría ponderada y con uniones *a priori* (N, v, P) empleando funciones generatrices.

Recuérdese que dado $(N, v, P) \in SU(N)$, con $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$, el índice de poder de Deegan-Packel coalicional de un jugador $i \in P_j$ viene dado por la siguiente expresión

$$\zeta_i(N, v, P) = \frac{1}{|M(v)|} \sum_{S \in M_i(v)} \frac{1}{|m(S)|} \frac{1}{|S \cap P_j|}.$$

Para calcular el índice de poder de Deegan-Packel coalicional de un jugador $i \in P_j$ es necesario calcular el número de coaliciones minimales ganadoras, $(|M(v)|)$, y para cada coalición minimal ganadora S a la que pertenece i, el número de uniones *a priori* que tienen intersección no vacía con S $(|m(S)|)$ y el número de jugadores de P_j que pertenecen a S $(|S \cap P_j|)$.

En este caso, es preciso emplear una función de $m + n + 1$ variables, una para los pesos, otra indicadora de unión para cada una de las m uniones *a priori*, y finalmente, otra variable indicadora de jugador para cada uno de los n jugadores.

Para calcular el índice de poder de Deegan-Packel coalicional, en primer lugar, se empleará una función generatriz que permita calcular el cardinal del total de coaliciones posibles. Entre éstas, se elegirán las ganadoras y, finalmente, las minimales ganadoras.

El siguiente resultado proporciona una función generatriz que permite el cálculo de los números $\{c_{kz_1z_2\ldots z_ny_1y_2\ldots y_m}\}$, donde $k \geq 0$, $z_i = 0$ o $z_i = 1$, para $i = 1, 2, \ldots, n$ e $y_j = 0$ o $y_j = 1$, para $j = 1, 2, \ldots, m$.

Las cantidades $c_{kz_1z_2\ldots z_ny_1y_2\ldots y_m}$, donde $z_i = 1$ si $i \in S$, $z_i = 0$ si $i \notin S$, $y_j = 1$ si $j \in R$ e $y_j = 0$ si $j \notin R$ es el número de coaliciones formadas por los jugadores de S, de tal forma que estén representadas las uniones $R \subseteq M$ y de peso k. Es evidente que los números $\{c_{kz_1z_2\ldots z_ny_1y_2\ldots y_m}\}$ son iguales a 1 (es posible formar una coalición con esas características) o a 0 (no es posible formar dicha coalición).

Teorema 2.7.5 *Sea* (N, v, P) *un juego simple de mayoría ponderada con uniones a priori donde* $v = [q; w_1, w_2, ..., w_n]$*. La función generatriz de los números* $\{c_{kz_1z_2...z_ny_1y_2...y_m}\}$*, definidos anteriormente viene dada por*

$$S(x, z_1, z_2, \ldots z_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = \prod_{j=1}^{n} \left(1 + x^{w_j} z_j y_{p(j)}\right),$$

donde $p(j)$ *es la unión a la que pertenece el jugador* j*.*

A partir de la expresión anterior se obtienen todas las coaliciones posibles. En un primer paso, para trabajar sólo con las coaliciones ganadoras deben eliminarse aquellos monomios en los que la potencia de la variable x sea menor que q.

En un segundo paso, y de modo similar a como se hizo para la extensión multilineal del índice de poder de Deegan-Packel coalicional y para el método de cálculo del índice de poder de Deegan-Packel empleando funciones generatrices, deben eliminarse todos los monomios que puedan dividirse por algún otro monomio de los que constituyen esta función. El número de monomios de la función resultante es el número de coaliciones minimales ganadoras del juego, $|M(v)|$.

Finalmente, para obtener el índice de poder de Deegan-Packel coalicional de un jugador $i \in P_j$, bastará con seleccionar aquellos términos en los que aparezca la variable z_i. La potencia de la variable y_j indica el número de jugadores de P_j que constituyen dicha coalición minimal ganadora, y el número de variables y_l distintas que aparezcan indica el número de uniones *a priori* que tienen intersección no vacía con dicha coalición.

Se va a ilustrar el procedimiento anterior calculando el índice de poder de Deegan-Packel coalicional correspondiente al Parlamento de las Islas Baleares.

Ejemplo 2.7.4 *Este Parlamento se representa como* $[30; 28, 16, 5, 4, 3, 3]$*, y se considera la estructura de uniones a priori dada por:*

$$P = \{\{1\}, \{2, 4, 6\}, \{3, 5\}\}.$$

En primer lugar se calcula la función $S(x, z_1, z_2, \ldots, z_6, y_1, y_2, y_3)$

$$S(x, z_1, z_2, \ldots, z_6, y_1, y_2, y_3) = \prod_{j=1}^{6} \left(1 + x^{w_j} z_j y_{p(j)}\right) =$$

$$\left(1+x^{28}z_1y_1\right)\left(1+x^{16}z_2y_2\right)\left(1+x^{5}z_3y_3\right)$$

$$\left(1+x^{4}z_4y_2\right)\left(1+x^{3}z_5y_3\right)\left(1+x^{3}z_6y_2\right).$$

Para no alargar excesivamente este trabajo, no se recogen los cálculos intermedios. En un segundo paso, de la función anterior se eligen aquellos términos en los que la potencia de la variable x sea mayor o igual que 30. *De éstos, se eligen ahora aquellos que no puedan ser divididos por otros términos, con lo que al final se tendría:*

$$x^{31}z_2z_3z_4z_5z_6y_2^3y_3^2+x^{44}z_1z_2y_1y_2+x^{33}z_1z_3y_1y_3+$$

$$x^{32}z_1z_4y_1y_2+x^{31}z_1z_5y_1y_3+x^{31}z_1z_6y_1y_2.$$

Por lo tanto, $|M(v)|=6$, *el número de términos de la expresión anterior. Para calcular el índice de poder de Deegan-Packel coalicional de un jugador* $i\in P_j$ *basta con sumar aquellos monomios en los que aparece la variable* z_i *dividido entre el producto del exponente correspondiente de la variable* y_j *y el número de variables* y_l *distintas que aparezcan. Finalmente se divide el resultado entre* $|M(v)|$.

Así para calcular el índice de poder del jugador 2 *se tiene que* z_2 *aparece en dos monomios, dividiendo entre los dos productos correspondientes, obtenemos* $\frac{1}{2}\frac{1}{3}+\frac{1}{2}1=\frac{2}{3}$, *que dividido a su vez entre* $|M(v)|$ *es igual a* $\frac{1}{9}$.

De forma similar se obtendría el índice de poder de Deegan-Packel coalicional de los restantes jugadores:

$$\zeta(N,v,P)=(5/12,1/9,1/8,1/9,1/8,1/9).$$

Índice de poder de Deegan-Packel coalicional simétrico

Para finalizar esta sección se indicará cómo podría obtenerse el valor de Deegan-Packel coalicional simétrico de un juego simple de mayoría ponderada y con uniones *a priori* (N,v,P) empleando funciones generatrices.

Recuérdese que dado $(N,v,P)\in SU(N)$, con $P=\{P_1,P_2,\ldots,P_m\}$, el índice de poder de Deegan-Packel coalicional simétrico de un jugador $i\in P_j$

viene dado por la siguiente expresión

$$\Lambda_i(N,v,P) = \frac{1}{|M(v^P)|} \sum_{S\in M_i(v,P)} \frac{1}{|P(S)|} \frac{1}{|m(S)|} \frac{1}{|S\cap P_j|}.$$

Para calcular el índice de poder de Deegan-Packel coalicional simétrico de un jugador $i \in P_j$ es necesario calcular el número de coaliciones minimales ganadoras del juego cociente, $\left(\left|M\left(v^P\right)\right|\right)$. Además, para cada $S \in M_i(v)$, cuyo representante en el cociente $(m(S))$ sea minimal ganadora, el número de coaliciones minimales ganadoras T en (N,v) tal que $m(T) = m(S)$ $(|P(S)|)$, el número de uniones *a priori* con representantes en S $(|m(S)|)$ y el número de jugadores de P_j que pertenecen a S $(|S\cap P_j|)$.

En este caso, es necesario emplear dos funciones generatrices. En primer lugar, se empleará una función generatriz que permita calcular todas las coaliciones ganadoras en el juego cociente, para elegir después las minimales ganadoras de este juego cociente. La segunda función generatriz es la descrita en el teorema 2.7.5; permitirá calcular todas las coaliciones posibles del juego. Entre éstas, se eligirán las minimales ganadoras cuyo representante en el cociente sea minimal ganadora.

El siguiente resultado proporciona una función generatriz que permite el cálculo de los números $\{c_{jky_1y_2\dots y_m}\}$, donde $j \geq 0, k \geq 0$, $y_i = 0$ o $y_i = 1$, para $i = 1, 2, \dots, m$.

Las cantidades $c_{jky_1y_2\dots y_m}$, donde $y_i = 1$ si $i \in R$ e $y_i = 0$ si $i \notin R$ es el número de coaliciones en el juego cociente formadas por j uniones *a priori* y de peso k. Es evidente que estas cantidades son iguales a 1 (es posible formar una coalición de uniones *a priori* con esas características) o a 0 (no es posible formar dicha coalición).

Teorema 2.7.6 *Sea (N,v,P) un juego simple de mayoría ponderada con uniones a priori donde $v = [q; w_1, w_2, ..., w_n]$. La función generatriz de los números $\{c_{jky_1y_2\dots y_m}\}_{j\geq 0,k\geq 0}$, definidos anteriormente viene dada por*

$$S(x, y_1, y_2, \dots, y_m, t) = \prod_{j=1}^{m} \left(1 + x^{w(P_j)} y_j t\right).$$

El resultado anterior es similar al que se vio en la proposición 1.3.1 para el índice de poder de Deegan-Packel. Siguiendo un razonamiento idéntico al que se hizo en ese caso, se obtendrían todas las coaliciones minimales ganadoras en el juego cociente.

A partir de la función generatriz definida en el teorema 2.7.5 deben efectuarse los mismos pasos que los vistos anteriormente para el índice de poder de Deegan-Packel coalicional, y al final deben eliminarse aquellas coaliciones minimales ganadoras cuyo representante en el cociente no sea minimal ganadora.

Es evidente que el cálculo de los índices de poder coalicionales de Deegan-Packel empleando los procedimientos descritos en estas dos últimas subsecciones son bastante tediosos, pero pueden programarse para realizar los cálculos mediante un ordenador. El interés de estos resultados, al igual que para el caso no coalicional, reside en que sirve para comprobar que estos índices de poder también se pueden calcular empleando funciones generatrices, al igual que sucedía con los índices de poder de Owen y de Banzhaf-Owen. Para finalizar el capítulo, se ilustrará el procedimiento anterior, calculando el índice de poder de Deegan-Packel coalicional simétrico correspondiente al Parlamento de las Islas Baleares.

Ejemplo 2.7.5 *Este Parlamento se representa como* $[30; 28, 16, 5, 4, 3, 3]$*, y se considera la estructura de uniones a priori dada por:*

$$P = \{\{1\}, \{2, 4, 6\}, \{3, 5\}\}.$$

En primer lugar, se calcula la función $S(x, y_1, y_2, y_3, t)$

$$S(x, y_1, y_2, y_3, t) = \prod_{j=1}^{3} \left(1 + x^{w(P_j)} y_j t\right) =$$

$$\left(1 + x^{28} y_1 t\right) \left(1 + x^{23} y_2 t\right) \left(1 + x^{8} y_3 t\right).$$

Después de realizar los cálculos intermedios y elegir sólo las coaliciones minimales ganadoras, quedarían los términos

$$x^{51} y_1 y_2 t^2 + x^{36} y_1 y_3 t^2 + x^{31} y_2 y_3 t^2.$$

De aquí se deduce que el número de coaliciones minimales ganadoras del juego cociente es $\left|M\left(v^P\right)\right| = 3$ *y que son las formadas por dos uniones a priori cualesquiera.*

Después se calcula la función $S\left(x, z_1, z_2, \ldots, z_6, y_1, y_2, y_3\right)$

$$S\left(x, z_1, z_2, \ldots, z_6, y_1, y_2, y_3\right) = \prod_{j=1}^{n}\left(1 + x^{w_j} z_j y_{p(j)}\right) =$$

$$\left(1 + x^{28} z_1 y_1\right)\left(1 + x^{16} z_2 y_2\right)\left(1 + x^{5} z_3 y_3\right)$$

$$\left(1 + x^{4} z_4 y_2\right)\left(1 + x^{3} z_5 y_3\right)\left(1 + x^{3} z_6 y_2\right).$$

Tal y como se describió anteriormente, se eligen los términos correspondientes a coaliciones minimales ganadoras:

$$x^{31} z_2 z_3 z_4 z_5 z_6 y_2^3 y_3^2 + x^{44} z_1 z_2 y_1 y_2 + x^{33} z_1 z_3 y_1 y_3 +$$

$$x^{32} z_1 z_4 y_1 y_2 + x^{31} z_1 z_5 y_1 y_3 + x^{31} z_1 z_6 y_1 y_2.$$

En este caso, todas estas coaliciones minimales ganadoras inducen coaliciones minimales ganadoras en el cociente (ya que las variables y_l *que aparecen en cada uno de los términos se corresponden con las uniones a priori que constituyen una coalición minimal ganadora en el cociente). Para calcular el índice de poder de Deegan-Packel coalicional simétrico de un jugador* $i \in P_j$ *basta con considerar aquellos monomios en los que aparece la variable* z_i*. Para cada uno de ellos se obtiene el inverso del producto entre el exponente de* y_j *y el número de variables* y_l *que aparecen (incluyendo* y_j*). Finalmente, se suman estos valores y se divide el resultado entre* $\left|M\left(v^P\right)\right|$.

Por ejemplo, para calcular el índice de poder de Deegan-Packel del jugador 3 *se tiene que* z_3 *aparece en dos monomios, dividiendo entre los dos productos correspondientes, se obtiene* $\frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$*, que dividido entre* $\left|M\left(v^P\right)\right|$ *es igual a* $\frac{1}{6}$.

De forma similar, se obtendría el índice de poder de Deegan-Packel coalicional simétrico de los restantes jugadores:

$$\Lambda\left(N, v, P\right) = \left(1/3, 1/9, 1/6, 1/9, 1/6, 1/9\right).$$

Capítulo 3

Valores en juegos con comunicación restringida

En la teoría clásica de los juegos cooperativos se supone que todos los jugadores pueden comunicarse libremente. Para estos juegos se estudiaron en el primer capítulo diversas soluciones, como el valor de Shapley o el valor de Banzhaf.

En otras situaciones los jugadores actúan de forma no cooperativa, pero también son posibles situaciones intermedias, en las que existe comunicación, pero ésta se encuentra restringida. En este capítulo se estudiarán situaciones en las que la restricción en la comunicación está modelizada por un grafo. En este modelo, la existencia de un arco del grafo entre dos jugadores indica que pueden comunicarse directamente. Si dos jugadores no están unidos por un arco no pueden comunicarse directamente, aunque sí puede ser posible la comunicación a través de otros jugadores. En 1977, Myerson propuso y caracterizó un nuevo valor en este contexto, conocido con el nombre de valor de Myerson.

El valor de Myerson puede caracterizarse mediante las propiedades de eficiencia en componentes y justicia. Myerson definió el juego de comunicación asociado a estas situaciones y demostró que el valor de Shapley de este juego coincide con el valor de Myerson del juego original. Por ello, puede considerarse que el valor de Myerson es una extensión del valor de Shapley.

En el capítulo anterior, se definió el valor de Banzhaf coalicional simétrico; una extensión del valor de Banzhaf en el contexto de los juegos cooperativos con un sistema de uniones *a priori*. Para caracterizarlo, se empleó, entre otras, la propiedad de poder total coalicional. Esta propiedad se obtenía modificando la propiedad del poder total, teniendo en cuenta la existencia del sistema de uniones.

En la primera parte de este capítulo se propondrá y caracterizará un nuevo valor mediante la propiedad de justicia y otra modificación de la propiedad del poder total, construida en este caso, teniendo en cuenta la existencia de restricciones en la comunicación. También se probará que este nuevo valor coincide con el valor de Banzhaf del juego de comunicación asociado.

Más adelante, se propondrá y caracterizará un nuevo índice de poder para la familia de juegos simples con comunicación restringida mediante grafos, empleando la propiedad de eficiencia en componentes y una modificación de la propiedad de justicia. Para definir esta nueva propiedad se tendrá en cuenta el número de coaliciones minimales ganadoras. También se probará que este índice de poder coincide con el índice de poder de Deegan-Packel del juego de comunicación asociado.

3.1 El valor de Myerson

En esta sección se introducirá el valor propuesto por Myerson en 1977. En primer lugar, presentaremos los conceptos necesarios.

Definición 3.1.1 *Sea $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ un conjunto finito no vacío. Un grafo no orientado sin lazos en N es un conjunto de pares no ordenados de elementos distintos. Cada uno de estos pares no ordenados $i : j$ se denomina arco. (Nótese que $i : j = j : i$, ya que los pares son no ordenados).*

Se denotará por g^N el grafo completo sobre N y por $GR(N)$ el conjunto de grafos no orientados definidos en N, es decir:

$$g^N = \{i : j / i \in N, j \in N, i \neq j\} \ \text{ y } \ GR(N) = \left\{g / g \subseteq g^N\right\}.$$

Dados $S \subseteq N$, $g \in GR(N)$ y un par de elementos $i \in N$ y $j \in N$, se dice que i y j están conectados en S por g si $i = j$ o si existe $k \geq 1$ y un subconjunto $\{i_0, i_1, \ldots, i_k\} \subseteq S$ tales que

$$i_0 = i, i_k = j, i_{h-1} : i_h \in g, \ \text{para todo } h = 1, 2, \ldots, k.$$

Obsérvese que $g = \emptyset$, representa el caso en que no se puede establecer comunicación entre ningún par de jugadores. Dado $g \in GR(N)$ y $S \subseteq N$, se denotará por S/g el conjunto de componentes conexas de S asociadas al grafo g, es decir,

$$S/g = \{\{k/j \text{ y } k \text{ están conectados en } S \text{ por } g\} / j \in S\}.$$

S/g es una partición de S formada por subconjuntos maximales de elementos de S conectados por g. Si $S/g = S$, se dirá que S es una componente conectada por g. Nótese que $S/g^N = S$, para cualquier coalición $S \subseteq N$.

Definición 3.1.2 *Se define un juego TU con comunicación como una terna (N, v, g) donde $(N, v) \in TU(N)$ y $g \in GR(N)$.*

Se denotará por $C(N)$ el conjunto de todos los juegos TU con comunicación y conjunto de jugadores N.

Definición 3.1.3 *Dado un juego TU con comunicación (N, v, g), se denomina juego de comunicación asociado a (N, v, g) al juego $(N, v/g) \in TU(N)$ dado por:*

$$v/g(T) = \sum_{R \in T/g} v(R).$$

A la vista de la definición del juego de comunicación, es evidente que $v/g^N = v$. La función característica del juego de comunicación v/g asigna a una coalición $T \subseteq N$ la suma de los valores asignados por la función v a la partición de T formada por las componentes conexas de T asociadas a g.

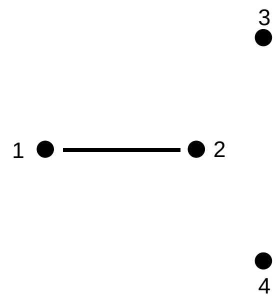
Se ilustrarán estas ideas mediante un ejemplo sencillo.

Ejemplo 3.1.1 *Sea $(N, v) \in TU(N)$ donde $N = \{1, 2, 3, 4\}$ y v es el juego definido por:*

- $v(T) = 2$ *si* $\{1, 2\} \subseteq T, |T| \leq 3$
- $v(N) = 4$

- $v(T) = 0$ *en cualquier otro caso*

1. Si se considera el grafo de comunicación $g = \{1:2\}$,



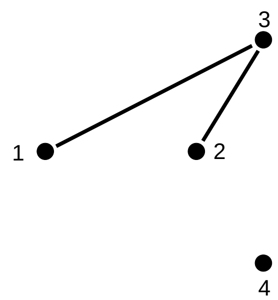
el juego de comunicación asociado $(N, v/g)$ *sería de la forma:*

- $v/g(T) = 2$ *si* $\{1,2\} \subseteq T$
- $v/g(T) = 0$ *en cualquier otro caso*

ya que la función característica del juego de comunicación asigna a la coalición total

$$v/g(N) = \sum_{R \in N/g} v(R) = v(\{1,2\}) + v(\{3\}) + v(\{4\}) = 2.$$

2. Si se considera el grafo de comunicación $g = \{1:3, 2:3\}$,

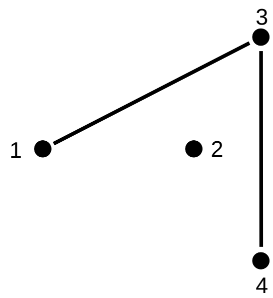


el juego de comunicación asociado $(N, v/g)$ *sería de la forma:*

- $v/g(T) = 2$ *si* $\{1,2,3\} \subseteq T$
- $v/g(T) = 0$ *en cualquier otro caso*

ya que ahora los jugadores 1 *y* 2 *necesitan al jugador* 3 *para poder comunicarse y el jugador* 4 *es un jugador nulo.*

3. Finalmente, si el grafo de comunicación fuese $g = \{1:3, 3:4\}$,



el juego de comunicación asociado $(N, v/g)$ *sería:*

$v/g\,(T) = 0$ *para cualquier coalición* $T \subseteq N$

ya que ahora los jugadores 1 *y* 2 *no podrían comunicarse y la función característica asignaría una cantidad igual a* 0 *a cualquier coalición.*

Definición 3.1.4 *Una solución sobre* $C\,(N)$ *es una aplicación*

$$f : C\,(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

que a cada juego $(N, v, g) \in C\,(N)$ *le asigna un vector de* $\mathbb{R}^n$*, en el que cada componente se corresponde con el pago que recibe el jugador correspondiente.*

En una situación con comunicación se proponen, entre otras, las siguientes propiedades:

Eficiencia en componentes $(EFIC)$. Una solución $f : C\,(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ verifica la propiedad de eficiencia en componentes si para todo juego $(N, v, g) \in C\,(N)$ y para todo $S \in N/g$, se cumple que

$$\sum_{i \in S} f_i\,(N, v, g) = v\,(S)\,.$$

Esta propiedad establece que si S es una componente conexa de N asociada al grafo g, entonces los jugadores de S obtienen $v\,(S)$ que es la cantidad que les garantiza la función característica del juego.

Dado $g \in GR(N)$, para todo $i : j \in g$ se define el grafo $g \backslash i : j \in GR(N)$ como el grafo que se obtiene a partir de g eliminando el arco $i : j$, es decir

$$g \backslash i : j = \{h : k \in g / \ h : k \neq i : j\}.$$

Estabilidad (EST). Una solución $f : C(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es estable si para todo juego $(N, v, g) \in C(N)$ y para todo $i : j \in g$, se tiene que

$$f_i(N, v, g) \geq f_i(N, v, g \backslash i : j), \ f_j(N, v, g) \geq f_j(N, v, g \backslash i : j).$$

Según esta propiedad, la comunicación directa entre dos jugadores no puede ser perjudicial para ninguno de ellos.

Justicia (JUS). Una solución $f : C(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es justa si para todo juego $(N, v, g) \in C(N)$ y para todo $i : j \in g$, se tiene que

$$f_i(N, v, g) - f_i(N, v, g \backslash i : j) = f_j(N, v, g) - f_j(N, v, g \backslash i : j).$$

La propiedad de justicia establece que si dos jugadores dejan de comunicarse directamente, ambos pierden (o ganan) lo mismo. Con estas propiedades Myerson (1977) obtuvo el siguiente resultado.

Teorema 3.1.1 *Existe una única solución $f : C(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ verificando las propiedades de $EFIC$ y JUS. Si el juego es superaditivo, también verifica EST. Esta función coincide con el valor de Shapley del juego de comunicación asociado, es decir, $f(N, v, g) = \varphi(N, v/g)$, para todo juego $(N, v, g) \in C(N)$.*

Si se considera el juego de comunicación $\left(N, v, g^N\right)$, se verifica que $v/g^N = v$ y, en consecuencia, el valor de Myerson coincide con el valor de Shapley.

3.2 El valor de Banzhaf para juegos con comunicación restringida

A continuación se propondrá una modificación del valor de Banzhaf para juegos con comunicación restringida mediante grafos.

Se verá que este nuevo valor puede caracterizarse empleando la propiedad de justicia y una modificación de la propiedad de poder total, a la que se denominará poder total con comunicación restringida.

El poder total en situaciones con comunicación restringida

Para obtener un nuevo valor para situaciones con comunicación restringida, que extienda al valor de Banzhaf, parece lógico utilizar una modificación de la propiedad de poder total. Esta propiedad va a desempeñar un papel similar al jugado por la propiedad de eficiencia en componentes que satisface el valor de Myerson.

Se recuerda que la propiedad de poder total establece que dado un juego $(N, v) \in TU(N)$, se tiene que

$$\sum_{i\in N} f_i(N, v) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i\in N} \sum_{\substack{T\subseteq N \\ i\in T}} [v(T) - v(T\backslash i)] . \tag{3.1}$$

Ahora, dado $(N, v, g) \in C(N)$, debe proponerse un valor razonable para $\sum_{i\in S} f_i(N, v, g)$, donde $S \in N/g$.

En primer lugar, la cantidad $1/2^{n-1}$ que aparece en la expresión (3.1) porque entre los n jugadores se suponía que existía una cooperación total, parece lógico sustituirla por $1/2^{s-1}$, ya que ahora sólo intervienen los jugadores de la componente conexa S.

Si en (3.1) se consideraba la suma en todos los jugadores $i \in N$ y en todas las subcoaliciones de N a las que pertenece i, en una situación con comunicación, la suma debe incluir únicamente a los jugadores $i \in S$ y a aquellas subcoaliciones de S a las que pertenece i.

Finalmente, las coaliciones T y $T\backslash i$ no obtienen $v(T)$ y $v(T\backslash i)$, sino que la existencia de restricciones en la comunicación modelizadas mediante el grafo g, les otorgaría respectivamente

$$\sum_{R\in T/g} v(R) \quad y \quad \sum_{R\in (T\backslash i)/g} v(R),$$

es decir, el valor asignado por la función característica del juego de comunicación v/g.

Con todas estas consideraciones se propone la propiedad de poder total con comunicación restringida.

Definición 3.2.1 *Una solución $f : C(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ verifica la propiedad de poder total con comunicación restringida $(PTCR)$ si para todo juego $(N, v, g) \in C(N)$ y para todo $S \in N/g$, se cumple que:*

$$\sum_{i \in S} f_i(N, v, g) = \frac{1}{2^{s-1}} \sum_{i \in S} \sum_{\substack{T \subseteq S \\ i \in T}} \left[\sum_{R \in T/g} v(R) - \sum_{R \in (T \backslash i)/g} v(R) \right].$$

En la expresión anterior, nótese que si $R \in T/g$ e $i \notin R$, entonces $R \in (T \backslash i)/g$. Con esta nueva propiedad y las propiedades de justicia y estabilidad, se caracteriza un nuevo valor en el contexto de juegos con comunicación restringida.

Teorema 3.2.1 *Existe una única solución $f : C(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ verificando las propiedades de $PTCR$ y JUS. Si el juego es superaditivo, también satisface EST. Esta función coincide con el valor de Banzhaf del juego de comunicación asociado, es decir, $f(N, v, g) = \beta(N, v/g)$, para todo juego $(N, v, g) \in C(N)$.*

Demostración

Existencia:

En primer lugar se comprobará que $f(N, v, g) = \beta(N, v/g)$ satisface la propiedad de poder total con comunicación restringida.

Dados $(N, v) \in TU(N)$ y $g \in GR(N)$, para cada $S \in N/g$, se define un nuevo juego con función característica v^S, dada por

$$v^S(T) = \sum_{R \in (T \cap S)/g} v(R), \text{ para todo } T \subseteq N.$$

Si dos jugadores están conectados en T por g también lo están en N, por lo que,

$$T/g = \bigcup_{S \in N/g} (T \cap S)/g \text{ y } v/g = \sum_{S \in N/g} v^S.$$

Como $v^S(T) = v^S(T \cap S)$ para cualquier coalición T, se tiene que S es un soporte para v^S y cualquier jugador $i \notin S$ es un jugador nulo. Entonces $\beta_i(N, v^S) = 0$, si $i \notin S$.

Empleando las propiedades de jugador nulo y poder total que verifica el valor de Banzhaf, se tiene que para cualquier $T \in N/g$,

$$\sum_{i\in N}\beta_i\left(N,v^T\right)=\sum_{i\in T}\beta_i\left(N,v^T\right)=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{i\in T}\sum_{\substack{L\subseteq N\\ i\in L}}\left[v^T(L)-v^T(L\backslash i)\right].$$

Como el valor de Banzhaf es lineal, y teniendo en cuenta que si $S,T\in N/g$, se verifica que $S\cap T=\emptyset$, para cualquier $S\in N/g$ se cumple que

$$\sum_{i\in S}\beta_i(N,v/g)=\sum_{T\in N/g}\sum_{i\in S}\beta_i\left(N,v^T\right)=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{i\in S}\sum_{\substack{L\subseteq N\\ i\in L}}\left[v^S(L)-v^S(L\backslash i)\right]=$$

$$\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{i\in S}\sum_{\substack{L\subseteq N\\ i\in L}}\left[\sum_{R\in(L\cap S)/g}v(R)-\sum_{R\in((L\cap S)\backslash i)/g}v(R)\right]. \tag{3.2}$$

Dado $i\in S$, se verifica la siguiente igualdad

$$\{L\subseteq N/i\in L\}=\bigcup_{\substack{L'\subseteq S\\ i\in L'}}P_{L'},$$

donde el conjunto $P_{L'}$ está formado por aquellas coaliciones cuyos representantes en S son precisamente los jugadores de L', es decir, dado $L'\subseteq S$ tal que $i\in L'$

$$P_{L'}=\{L\subseteq N/L\cap S=L'\}.$$

Dada una coalición L tal que $i\in L$, se obtiene un único conjunto $P_{L'}$ dado por $P_{L'}=\{L'\cup R/R\subseteq N\backslash S\}$, con $L'=L\cap S$. El cardinal de $P_{L'}$ es $|P_{L'}|=2^{n-s}$.

Para cualquier $V\in P_{L'}$, se verifica que $V\cap S=L'$ y $(V\cap S)\backslash i=L'\backslash i$. Por tanto, para cualquier $V\in P_{L'}$ se tiene que

$$\sum_{R\in(V\cap S)/g}v(R)-\sum_{R\in((V\cap S)\backslash i)/g}v(R)=\sum_{R\in L'/g}v(R)-\sum_{R\in(L'\backslash i)/g}v(R).$$

Por lo que volviendo a la expresión (3.2) se obtiene la siguiente igualdad

$$\sum_{i\in S}\beta_i\left(N,v/g\right)=$$

$$\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{i\in S}\sum_{\substack{L'\subseteq S\\ i\in L'}}\left[\sum_{V\in P_{L'}}\left[\sum_{R\in(V\cap S)/g}v\left(R\right)-\sum_{R\in((V\setminus i)\cap S)/g}v\left(R\right)\right]\right]=$$

$$\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{i\in S}\sum_{\substack{L'\subseteq S\\ i\in L'}}2^{n-s}\left[\sum_{R\in L'/g}v\left(R\right)-\sum_{R\in(L'\setminus i)/g}v\left(R\right)\right]=$$

$$\frac{1}{2^{s-1}}\sum_{i\in S}\sum_{\substack{L'\subseteq S\\ i\in L'}}\left[\sum_{R\in L'/g}v\left(R\right)-\sum_{R\in(L'\setminus i)/g}v\left(R\right)\right].$$

Con lo que estaría demostrado que $\beta\left(N,v/g\right)$ verifica la propiedad de poder total con comunicación restringida.

A continuación se prueba que $\beta\left(N,v/g\right)$ también satisface justicia. Dados $(N,v)\in TU\left(N\right)$, $g\in GR\left(N\right)$ e $i:j\in g$, se define el juego

$$w=v/g-v/\left(g\setminus i:j\right).$$

Nótese que $S/g=S/\left(g\setminus i:j\right)$ si $\{i,j\}\nsubseteq S$, por lo tanto si $i\notin S$ o $j\notin S$, se obtiene que

$$w\left(S\right)=\sum_{T\in S/g}v\left(T\right)-\sum_{T\in S/(g\setminus i:j)}v\left(T\right)=0.$$

Por lo que las únicas coaliciones en las que la función característica puede no anularse son aquellas que contienen a los dos jugadores i y j. Así pues, los jugadores i,j son jugadores simétricos en (N,w). En ese caso, como el valor de Banzhaf satisface la propiedad de simetría se sigue que $\beta_i\left(N,w\right)=\beta_j\left(N,w\right)$.

Finalmente, por la linealidad de β,

$$\beta_i (N, v/g) - \beta_i (N, v/ (g \backslash i : j)) = \beta_i (N, w) =$$

$$\beta_j (N, w) = \beta_j (N, v/g) - \beta_j (N, v/ (g \backslash i : j)) .$$

Unicidad:

Supóngase que existen dos soluciones f^1 y f^2 verificando $PTCR$ y JUS. Pueden encontrarse entonces $(N, v) \in TU(N)$ y $g \in GR(N)$ con el mínimo número de arcos tal que $f^1 (N, v, g) \neq f^2 (N, v, g)$.

Si $g = \emptyset$, entonces las componentes conexas de N/g son los jugadores y por la propiedad de poder total con comunicación restringida tenemos que

$$f_i^1 (N, v, g) = f_i^2 (N, v, g) , \text{ para cualquier } i \in N.$$

Supongamos $g \neq \emptyset$. Sea $i \in N$.

- $\{i\} \in N/g$ entonces $f_i^1 (N, v, g) = f_i^2 (N, v, g)$, por la propiedad de poder total con comunicación restringida.
- Existe $j \in N$ tal que $i : j \in g$, por la minimalidad de g se tiene que

  $$f_k^1 (N, v, g \backslash i : j) = f_k^2 (N, v, g \backslash i : j) , \text{ para cualquier } k \in N.$$

  Como ambas soluciones satisfacen la propiedad de justicia, se obtiene:

  $$f_i^1 (N, v, g) - f_j^1 (N, v, g) = f_i^1 (N, v, g \backslash i : j) - f_j^1 (N, v, g \backslash i : j) =$$

  $$f_i^2 (N, v, g \backslash i : j) - f_j^2 (N, v, g \backslash i : j) = f_i^2 (N, v, g) - f_j^2 (N, v, g) .$$

  Por lo que

  $$f_i^1 (N, v, g) - f_i^2 (N, v, g) = f_j^1 (N, v, g) - f_j^2 (N, v, g) , \tag{3.3}$$

  para cualquier par de jugadores i, j conectados directamente por g.

Por lo tanto, dada $S \in N/g$ y cualquier par de jugadores $i, j \in S$, también se verifica la expresión (3.3). Como consecuencia,

$$f_i^1(N,v,g) - f_i^2(N,v,g) = d_S(g)\,, \text{ para cualquier } i \in S,$$

donde $d_S(g)$ depende sólo de S y g, pero no de i. Pero por la propiedad de poder total con comunicación restringida, se tiene que

$$\sum_{i\in S} f_i^1(N,v,g) = \sum_{i\in S} f_i^2(N,v,g)\,,$$

y entonces,

$$0 = \sum_{i\in S}\left(f_i^1(N,v,g) - f_i^2(N,v,g)\right) = |S|\, d_S(g)\,,$$

por tanto, $d_S(g) = 0$.

Con lo que se llega a que

$$f_i^1(N,v,g) = f_i^2(N,v,g)\,, \text{ para cualquier } i \in N.$$

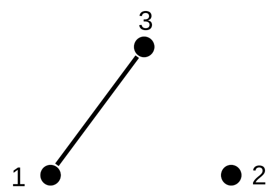
Se omite la demostración de que la solución propuesta es estable para juegos superaditivos, pues se sigue un procedimiento análogo al empleado para probar que el valor de Myerson es estable para juegos superaditivos. Esto es debido a que tanto el valor de Shapley como el valor de Banzhaf son valores probabilísticos, que es la única característica del valor de Shapley que se emplea en dicha demostración.□

El siguiente ejemplo ilustra el cálculo de este valor.

Ejemplo 3.2.1 *Considérese un juego con comunicación* $(N,v,g) \in C(N)$ *donde* $N = \{1,2,3\}$, v *es el juego de mayoría, es decir:*

- $v(T) = 1$ *si* $|T| \geq 2$
- $v(T) = 0$ *en cualquier otro caso*

y el grafo de comunicación $g = \{1:3\}$.



El valor de Banzhaf del juego (N, v) *es igual a:*

$$\beta(N, v) = (1/2, 1/2, 1/2).$$

El juego de comunicación $(N, v/g)$ *viene dado por*

- $v/g(T) = 1$ *si* $\{1, 3\} \subseteq T$
- $v/g(T) = 0$ *en cualquier otro caso*

Por lo tanto el valor de Banzhaf del juego $(N, v/g)$ *es igual a:*

$$\beta(N, v/g) = (1/2, 0, 1/2).$$

Se vio en el capítulo anterior cómo la propiedad de contribuciones equilibradas en las uniones puede emplearse para caracterizar el valor de Owen, el valor de Banzhaf coalicional simétrico y el índice de poder de Deegan-Packel coalicional. Myerson (1980) había definido una propiedad similar en el contexto de los juegos con comunicación restringida mediante grafos. Esta propiedad se denomina contribuciones equilibradas en el grafo y con ella Myerson obtuvo otra caracterización del valor de Myerson.

La propiedad de contribuciones equilibradas en el grafo proporciona una relación entre el valor obtenido por un jugador en un juego con un sistema de comunicación y el valor obtenido por dicho jugador si toma la decisión de dejar de comunicarse con el resto de los jugadores.

Para formalizar estas ideas se hace necesario introducir nueva notación. Así dado $g \in GR(N)$, se denotará, para cualquier jugador $i \in N$, por g_{-i} al elemento de $GR(N)$ dado por $g_{-i} = \{j : h \in g / j \neq i, h \neq i\}$.

Contribuciones equilibradas en el grafo (CEG). Una solución $f : C(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ verifica la propiedad de contribuciones equilibradas en el grafo si para todo juego $(N, v, g) \in C(N)$ y para todo par de jugadores $i, j \in N$, se cumple que:

$$f_i(N, v, g) - f_i(N, v, g_{-j}) = f_j(N, v, g) - f_j(N, v, g_{-i}).$$

La pérdida (o ganancia) que para el jugador j supone el aislamiento del jugador i coincide con la que experimenta el jugador i si se aisla el jugador j. Con esta propiedad, Myerson (1980) obtiene el siguiente resultado.

Teorema 3.2.2 *Existe una única solución $f : C(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ verificando las propiedades $EFIC$ y CEG. Esta función es el valor de Myerson.*

Se verá que puede obtenerse un resultado similar para la modificación del valor de Banzhaf que se propuso anteriormente para aquellas situaciones en las que existe comunicación restringida mediante un grafo. Para empezar, se probará que el valor $\beta(N, v/g)$ satisface la propiedad de contribuciones equilibradas en el grafo.

Lema 3.2.3 *El valor $\beta(N, v/g)$ verifica CEG.*

Demostración

Dado $(N, v, g) \in C(N)$ e $i, j \in N$, considérese el juego w definido por:

$$w = v/g - v/g_{-i} - v/g_{-j} + v(i)\, u_{\{i\}} + v(j)\, u_{\{j\}},$$

donde $u_{\{i\}}$ y $u_{\{j\}}$ son los juegos de unanimidad con soportes $\{i\}$ y $\{j\}$, respectivamente.

Sea $S \subseteq N \backslash \{i, j\}$. Como $j \notin S, v/g_{-j}(S \cup i) = v/g(S \cup i)$. Además $v/g_{-i}(S \cup i) = v/g(S) + v(i)$, ya que $i \notin S$.

Entonces,

$$w(S \cup i) = v/g(S \cup i) - v/g(S) - v(i) - v/g(S \cup i) + v(i) = -v/g(S).$$

Análogamente, $w(S \cup j) = -v/g(S)$. Por ello, los jugadores i, j son simétricos en (N, w) y como el valor de Banzhaf verifica simetría, se tiene que

$$\beta_i(N, w) = \beta_j(N, w).$$

Por ser el valor de Banzhaf lineal

$$\beta_i (N, v/g) - \beta_i (N, v/g_{-j}) - \beta_i \left(N, v/g_{-i} - v(i) u_{\{i\}} - v(j) u_{\{j\}}\right) =$$

$$\beta_j (N, v/g) - \beta_j (N, v/g_{-i}) - \beta_j \left(N, v/g_{-j} - v(i) u_{\{i\}} - v(j) u_{\{j\}}\right).$$

Dada $S \subseteq N \backslash i$ se tiene que

$$v/g_{-i} (S \cup i) - v(i) u_{\{i\}} (S \cup i) - v(j) u_{\{j\}} (S \cup i) =$$

$$v/g (S) + v(i) - v(i) - v(j) u_{\{j\}} (S) =$$

$$v/g (S) - v(j) u_{\{j\}} (S) = v/g_{-i} (S) - v(i) u_{\{i\}} (S) - v(j) u_{\{j\}} (S).$$

Por lo tanto, el jugador i es un jugador nulo en $v/g_{-i} - v(i) u_{\{i\}} - v(j) u_{\{j\}}$. Ya que el valor de Banzhaf verifica la propiedad de jugador nulo se obtiene

$$\beta_i \left(N, v/g_{-i} - v(i) u_{\{i\}} - v(j) u_{\{j\}}\right) = 0.$$

Análogamente, el jugador j es un jugador nulo en $v/g_{-j} - v(i) u_{\{i\}} - v(j) u_{\{j\}}$ y entonces

$$\beta_j \left(N, v/g_{-j} - v(i) u_{\{i\}} - v(j) u_{\{j\}}\right) = 0.$$

Con lo que queda probado que

$$\beta_i (N, v/g) - \beta_i (N, v/g_{-j}) = \beta_j (N, v/g) - \beta_j (N, v/g_{-i}),$$

es decir, la solución propuesta satisface la propiedad de contribuciones equilibradas en el grafo.$\square$

Ahora ya puede enunciarse el siguiente resultado.

Teorema 3.2.4 *Existe una única solución $f : C(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ verificando las propiedades $PTCR$ y CEG. Esta función asigna a cada juego $(N, v, G) \in C(N)$, el vector $\beta(N, v/g)$.*

Demostración

Existencia:

En el teorema 3.2.1 se comprobó que $\beta(N, v/g)$ satisface $PTCR$ y en el lema 3.2.3 que satisface CEG.

Unicidad:

En Myerson (1980) se prueba que si un valor satisface CEG entonces satisface JUS. Como en el teorema 3.2.1 se probó que existe un único valor que satisface $PTCR$ y JUS la demostración está finalizada.$\square$

Nota: Al igual que ocurría con el valor de Myerson, como $v/g^N = v$, se tiene que en el caso en que la comunicación entre los jugadores es total, este nuevo valor coincide con el valor de Banzhaf, por lo que puede considerarse una extensión de dicho valor.

Para finalizar esta sección, en el siguiente ejemplo se comprobará que los valores de Shapley y Banzhaf del juego de comunicación no tienen por qué ser iguales, aunque lo sean el valor de Banzhaf y el valor de Shapley del juego sin tener en cuenta las restricciones en la comunicación.

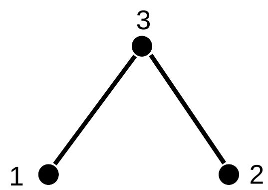
Ejemplo 3.2.2 *Considérese un juego con comunicación* $(N, v, g) \in C(N)$ *donde* $N = \{1, 2, 3\}$*,* v *es el juego de unanimidad de* $\{1, 2\}$*, es decir:*

- $v(T) = 1$ *si* $\{1, 2\} \subseteq T$
- $v(T) = 0$ *en cualquier otro caso*

El valor de Shapley y el valor de Banzhaf son respectivamente:

$$\varphi(N, v) = \beta(N, v) = (1/2, 1/2, 0).$$

Si se considera el siguiente grafo de comunicación $g = \{1 : 3, 2 : 3\}$,



Se tiene que el juego de comunicación $(N, v/g)$ *viene dado por:*

- $v/g\,(N) = 1$
- $v/g\,(T) = 0$ *para todo* $T \neq N$

Por lo tanto, el valor de Shapley y el valor de Banzhaf del juego $(N, v/g)$ *son iguales a:*

$$\varphi\,(N, v/g) = (1/3, 1/3, 1/3) \text{ y } \beta\,(N, v/g) = (1/4, 1/4, 1/4)\,.$$

En el juego $(N, v/g)$ *el jugador* 3 *no es un jugador nulo. En este juego es más difícil alcanzar un acuerdo, ya que se necesita la colaboración de todos los jugadores. Por ese motivo el poder total de este juego es más pequeño que en el juego original, en este caso* $3/4$. *Ya que el valor de Banzhaf es simétrico, cada jugador obtiene* $1/4$. *Como el valor de Shapley es eficiente y simétrico otorga* $1/3$ *a cada uno de los jugadores.*

3.3 El índice de poder de Deegan-Packel para juegos con comunicación restringida

En esta sección se propondrá y caracterizará un nuevo valor para juegos simples con comunicación restringida mediantes grafos, empleando las propiedades de eficiencia en componentes y dos nuevas propiedades que se proponen en este contexto; las propiedades de juego nulo y la propiedad de justicia minimal. Más adelante, se verá que este nuevo valor coincide con el índice de poder de Deegan-Packel del juego de comunicación asociado.

Se van a considerar únicamente juegos (N, v, g), donde (N, v) es un juego simple propio. Por ello, existe una única coalición $S \in N/g$, tal que $S \in W$, o bien, para toda $S \in N/g$, $S \notin W$. El caso interesante se corresponde con aquellos juegos simples propios (N, v) y grafos $g \in GR\,(N)$ tales que (N, v, g) posea una única componente conexa que sea una coalición ganadora. Vamos a denotar por $CS\,(N)$ el conjunto de todos los juegos simples propios con comunicación y conjunto de jugadores N.

El índice de poder de Deegan-Packel satisface la propiedad de eficiencia, por lo que parece lógico que una modificación de este índice para situaciones con comunicación restringida, debería verificar la propiedad de eficiencia en componentes. En el caso particular de juegos simples, la propiedad de eficiencia en componentes se reformula del siguiente modo.

Eficiencia en componentes $(EFIC)$. Una solución $f : CS(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ verifica la propiedad de eficiencia en componentes si para todo juego simple con comunicación restringida (N, v, g) y para todo $S \in N/g$, se cumple que $\sum_{i \in S} f_i(N, v, g) = 1$ si $S \in W$ y $\sum_{i \in S} f_i(N, v, g) = 0$ si $S \notin W$.

Dado $(N, v, g) \in CS(N)$, tal que para toda $S \in N/g$, se tiene que $S \notin W$ parece lógico suponer que el índice de poder de cualquier jugador sea igual a 0, por lo que se propone la siguiente propiedad.

Juego nulo (JUN). Una solución $f : CS(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ verifica la propiedad de juego nulo si para todo juego simple con comunicación restringida (N, v, g) tal que $v/g = 0$ (o, equivalentemente si $M(v/g) = \emptyset$) se tiene que $f_i(N, v, g) = 0$ para todo $i \in N$

La propiedad de justicia minimal

En el primer capítulo se obtuvo una caracterización del índice de poder de Deegan-Packel empleando la propiedad de monotonía minimal. Esta propiedad se definía a partir de una modificación de la propiedad de monotonía fuerte, introduciendo una ponderación establecida en base al número de coaliciones minimales ganadoras del juego.

Para caracterizar este nuevo índice de poder, se empleará una modificación similar de la propiedad de justicia, a la que se denominará propiedad de justicia minimal.

Definición 3.3.1 *Un índice de poder $f : CS(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ verifica la propiedad de justicia minimal $(JUSM)$ si para todo juego $(N, v, g) \in CS(N)$ y para todo $i : j \in g$, se tiene que:*

$$|M(v/g)| \left(f_i(N, v, g) - f_j(N, v, g)\right) =$$

$$|M(v/(g \backslash i : j))| \left(f_i(N, v, g \backslash i : j) - f_j(N, v, g \backslash i : j)\right).$$

Con la propiedad anterior y eficiencia en componentes, se caracteriza un nuevo índice de poder en el contexto de los juegos simples con comunicación restringida mediante grafos.

Teorema 3.3.1 *Existe un único índice de poder $f : CS(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ verificando las propiedades de JUN, $EFIC$ y $JUSM$. Este índice coincide con el índice de poder de Deegan-Packel del juego de comunicación asociado, es decir, $f(N,v,g) = \rho(N,v/g)$, para todo juego $(N,v,g) \in CS(N)$.*

Demostración

Existencia:

Dado un juego $(N,v,g) \in CS(N)$, veremos que $\rho(N,v/g)$ satisface las propiedades enunciadas en el teorema.

Esta solución satisface la propiedad de juego nulo, pues si $v/g = 0$ entonces $\rho_i(N,v/g) = 0$, para todo $i \in N$.

En el caso de que $v/g = 0$, satisface la propiedad de eficiencia en componentes, ya que por la propiedad de juego nulo se tiene que $\rho_i(N,v/g) = 0$, para todo $i \in N$. Por tanto, para cualquier $S \in N/g$, $\sum\limits_{i\in S} \rho_i(N,v/g) = 0$.

Supongamos que $v/g \neq 0$, entonces existe $S \in N/g$ tal que S es ganadora. En este caso $v/g = v^S$ siendo

$$v^S(T) = \bigvee_{R\in(T\cap S)/g} v(R), \text{ para toda } T \subseteq N.$$

Entonces $v^S = u_{S_1} \vee u_{S_2} \vee \ldots \vee u_{S_k}$ siendo para cada $i \in \{1,2,\ldots,k\}$, S_i un conjunto conexo de S. Puesto que los juegos $u_{S_1}, u_{S_2}, \ldots, u_{S_k}$ son fusionables y ρ verifica la propiedad de fusión, se tiene que

$$\left|M\left(v^S\right)\right| \rho_i\left(N,v^S\right) = \sum_{j=1}^{k} \rho_i\left(N,u_{S_j}\right) = \sum_{j/i\in S_j} \frac{1}{|S_j|},$$

ya que si $i \notin S_j$, i es un jugador nulo en $\left(N,u_{S_j}\right)$, todos los jugadores de S_j son simétricos y ρ es eficiente.

Por tanto,

$$\sum_{i\in S}\rho_i\left(N,v^S\right)=\frac{1}{|M\left(v^S\right)|}\sum_{i\in S}\sum_{j/i\in S_j}\frac{1}{|S_j|}=\frac{1}{|M\left(v^S\right)|}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i\in S_j}\frac{1}{|S_j|}=1.$$

Queda pues demostrado que $f\left(N,v,g\right)=\rho\left(N,v/g\right)$ verifica la propiedad de eficiencia en componentes.

Sólo falta probar que $\rho\left(N,v/g\right)$ satisface la propiedad de justicia minimal.

Dado $(N,v,g)\in CS\left(N\right)$ e $i:j\in g$, se tiene que

$$|M\left(v/g\right)|\left(\rho_i\left(N,v,g\right)-\rho_j\left(N,v,g\right)\right)=$$

$$\sum_{S\in M_i(v/g)\backslash M_j(v/g)}\frac{1}{|S|}-\sum_{S\in M_j(v/g)\backslash M_i(v/g)}\frac{1}{|S|},\tag{3.4}$$

siendo $M_i\left(v/g\right)=\left\{S\in M\left(v/g\right)/i\in S\right\}$ y $M_j\left(v/g\right)=\left\{S\in M\left(v/g\right)/j\in S\right\}.$

Si $S\in M_i\left(v/g\right)\backslash M_j\left(v/g\right)$ entonces S es minimal ganadora en $(N,v/g)$ de tal forma que los jugadores de S están conectados por g. Además, $i\in S$ y $j\notin S$. Por tanto, S está conectada en el grafo $g\backslash i:j$ y es minimal ganadora en $\left(N,v/\left(g\backslash i:j\right)\right)$, es decir, $S\in M_i\left(v/\left(g\backslash i:j\right)\right)\backslash M_j\left(v/\left(g\backslash i:j\right)\right).$

Con el mismo razonamiento, si $S\in M_i\left(v/\left(g\backslash i:j\right)\right)\backslash M_j\left(v/\left(g\backslash i:j\right)\right)$ entonces $S\in M_i\left(v/g\right)\backslash M_j\left(v/g\right)$. Si se tiene que $M_i\left(v/g\right)\backslash M_j\left(v/g\right)=\emptyset$ entonces $M_i\left(v/\left(g\backslash i:j\right)\right)\backslash M_j\left(v/\left(g\backslash i:j\right)\right)=\emptyset$, por lo que en cualquier caso

$$M_i\left(v/g\right)\backslash M_j\left(v/g\right)=M_i\left(v/\left(g\backslash i:j\right)\right)\backslash M_j\left(v/\left(g\backslash i:j\right)\right).$$

De forma similar se tiene que

$$M_j\left(v/g\right)\backslash M_i\left(v/g\right)=M_j\left(v/\left(g\backslash i:j\right)\right)\backslash M_i\left(v/\left(g\backslash i:j\right)\right).$$

Por lo que la expresión (3.4) es igual a

$$\sum_{S\in M_i(v/(g\backslash i:j))\backslash M_j(v/(g\backslash i:j))}\frac{1}{|S|}-\sum_{S\in M_j(v/(g\backslash i:j))\backslash M_i(v/(g\backslash i:j))}\frac{1}{|S|}=$$

$$|M(v/(g\backslash i:j))|(\rho_i(N,v,g\backslash i:j)-\rho_j(N,v,g\backslash i:j)).$$

Unicidad:

Supóngase que existen dos soluciones f^1 y f^2 verificando $EFIC$, $JUSM$ y JUN. Puede encontrarse entonces un juego simple propio (N,v) y $g \in GR(N)$ con el mínimo número de arcos tal que $f^1(N,v,g) \neq f^2(N,v,g)$.

Si $g=\emptyset$, entonces las componentes conexas de N/g son los jugadores y por la propiedad de eficiencia en componentes se obtiene que

$$f_i^1(N,v,g)=f_i^2(N,v,g)\,,\ \textit{para cualquier}\ i\in N.$$

Si $g\neq\emptyset$ y $|M(v/g)|=0$, por la propiedad de juego nulo se tiene que

$$f_i^1(N,v,g)=f_i^2(N,v,g)=0,\ \textit{para cualquier}\ i\in N.$$

Finalmente, supongamos que $g\neq\emptyset$ y $|M(v/g)|>0$. Dado un jugador $i\in N$.

- $\{i\}\in N/g$ entonces $f_i^1(N,v,g)=f_i^2(N,v,g)$, por la propiedad de eficiencia en componentes.
- Existe $j\in N$ tal que $i:j\in g$, por la minimalidad de g,

  $$f_k^1(N,v,g\backslash i:j)=f_k^2(N,v,g\backslash i:j)\,,\ \textit{para cualquier}\ k\in N.$$

  Teniendo en cuenta la propiedad de justicia minimal se obtiene

  $$|M(v/g)|(f_i^1(N,v,g)-f_j^1(N,v,g))=$$

  $$|M(v/(g\backslash i:j))|(f_i^1(N,v,g\backslash i:j)-f_j^1(N,v,g\backslash i:j))=$$

  $$|M(v/(g\backslash i:j))|(f_i^2(N,v,g\backslash i:j)-f_j^2(N,v,g\backslash i:j))=$$

  $$|M(v/g)|(f_i^2(N,v,g)-f_j^2(N,v,g)).$$

  Por lo que

  $$f_i^1(N,v,g)-f_i^2(N,v,g)=f_j^1(N,v,g)-f_j^2(N,v,g)\,,$$

  para cualquier par de jugadores i,j conectados por g.

El resto de la demostración de la unicidad es idéntica a la del teorema 3.2.1 y por lo tanto, se omite.□

Las propiedades de estabilidad minimal y de contribuciones equilibradas minimales en el grafo

Anteriormente se demostró que el valor de Banzhaf del juego de comunicación, al igual que ocurría con el valor de Shapley del juego de comunicación, es estable cuando el juego es superaditivo. También se proporcionaron caracterizaciones de estos valores empleando la propiedad de contribuciones equilibradas en el grafo.

En esta subsección se definirán dos propiedades similares a las anteriores y se propondrá otra caracterización para el índice de poder de Deegan-Packel del juego de comunicación. Estas nuevas propiedades se introducen teniendo en cuenta el número de coaliciones minimales ganadoras, siguiendo la misma filosofía que las propiedades de monotonía minimal o contribuciones ponderadas en las uniones. Estas propiedades son las siguientes:

Definición 3.3.2 *Un índice de poder $f : CS(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ verifica la propiedad de estabilidad minimal $(ESTM)$ si para todo juego $(N, v, g) \in CS(N)$ y para todo $i : j \in g$, se tiene que:*

$$|M(v/g)| f_i(N, v, g) \geq |M(v/(g \backslash i : j))| f_i(N, v, g \backslash i : j),$$

$$|M(v/g)| f_j(N, v, g) \geq |M(v/(g \backslash i : j))| f_j(N, v, g \backslash i : j)$$

Definición 3.3.3 *Un índice de poder $f : CS(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ verifica la propiedad de contribuciones equilibradas minimales en el grafo $(CEMG)$ si para todo juego $(N, v, g) \in CS(N)$ y para todo par de jugadores $i, j \in N$, se tiene que:*

$$|M(v/g)| f_i(N, v, g) - |M(v/g_{-j})| f_i(N, v, g_{-j}) =$$

$$|M(v/g)| f_j(N, v, g) - |M(v/g_{-i})| f_j(N, v, g_{-i}).$$

En los dos lemas siguientes, se probará que el índice de poder de Deegan-Packel del juego de comunicación $\rho(N, v/g)$ satisface las propiedades anteriores.

Lema 3.3.2 *El índice de poder $\rho(N, v/g)$ verifica $ESTM$.*

Demostración

Teniendo en cuenta que el índice de poder de Deegan-Packel verifica la propiedad de monotonía minimal, para demostrar este resultado basta con probar que dado un juego $(N, v, g) \in CS(N)$, para todo $i : j \in g$, se tiene que $M_i (v/ (g \backslash i : j)) \subseteq M_i (v/g)$.

Dada una coalición $S \in M_i (v/ (g \backslash i : j))$ se tiene que S es una coalición minimal ganadora conectada por $g \backslash i : j$. Del mismo modo se tiene que dicha coalición $S \in M_i (v/g)$ ya que S sigue estando conectada por g. La demostración del resultado para el jugador j es idéntica.□

Lema 3.3.3 *El índice de poder $\rho(N, v/g)$ verifica $CEMG$.*

Demostración

Dado un juego $(N, v, g) \in CS(N)$, si $|M(v/g)| = 0$, el resultado es trivial.

Si $|M(v/g)| > 0$, para todo par de jugadores $i, j \in N$, se tiene que:

$$|M(v/g)| \rho_i (N, v/g) - |M(v/g_{-j})| \rho_i (N, v/g_{-j}) =$$

$$\sum_{S \in M_i(v/g)} \frac{1}{|S|} - \sum_{S \in M_i(v/g_{-j})} \frac{1}{|S|} =$$

$$\sum_{S \in M_i(v/g) \backslash M_j(v/g)} \frac{1}{|S|} + \sum_{S \in M_i(v/g) \cap M_j(v/g)} \frac{1}{|S|} -$$

$$\sum_{S \in M_i(v/g_{-j}) \backslash M_j(v/g_{-j})} \frac{1}{|S|} - \sum_{S \in M_i(v/g_{-j}) \cap M_j(v/g_{-j})} \frac{1}{|S|}. \qquad (3.5)$$

Se comprueba fácilmente que

$$M_i (v/g) \backslash M_j (v/g) = M_i (v/g_{-j}) \backslash M_j (v/g_{-j})$$

y

$$M_i (v/g_{-j}) \cap M_j (v/g_{-j}) = M_j (v/g_{-i}) \cap M_i (v/g_{-i}) = \emptyset.$$

De aquí se sigue que la expresión (3.5) depende de i del mismo modo que depende de j, por lo que es igual a:

$$\sum_{S\in M_j(v/g)} \frac{1}{|S|} - \sum_{S\in M_j(v/g_{-i})} \frac{1}{|S|} =$$

$$|M(v/g)|\,\rho_j(N, v/g) - |M(v/g_{-i})|\,\rho_j(N, v/g_{-i})\,.\Box$$

En el siguiente lema se demostrará que si un índice de poder satisface la propiedad de contribuciones equilibradas minimales en el grafo entonces satisface la propiedad de justicia minimal.

Lema 3.3.4 *Si un índice de poder* $f : CS(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *satisface* $CEMG$ *entonces satisface* $JUSM$.

Demostración

Nótese que si $i : j \in g$, tomando $g' = g\backslash i : j$ se tiene que $g'_{-i} = g_{-i}$ y $g'_{-j} = g_{-j}$.

Como f satisface $CEMG$, dado un juego $(N, v, g) \in CS(N)$, para todo $i : j \in g$, se tiene que

$$|M(v/g)|\,f_i(N, v, g) - |M(v/(g\backslash i : j))|\,f_i(N, v, g\backslash i : j) =$$

$$|M(v/g)|\,f_j(N, v, g) - |M(v/g_{-i})|\,f_j(N, v, g_{-i}) +$$

$$|M(v/g_{-j})|\,f_i(N, v, g_{-j}) - |M(v/(g\backslash i : j))|\,f_j(N, v, g\backslash i : j) +$$

$$|M(v/g_{-i})|\,f_j(N, v, g_{-i}) - |M(v/g_{-j})|\,f_i(N, v, g_{-j}) =$$

$$|M(v/g)|\,f_j(N, v, g) - |M(v/(g\backslash i : j))|\,f_j(N, v, g\backslash i : j)\,.$$

Con lo que f satisface $JUSM$.$\Box$

En el último resultado de este capítulo se proporciona otra caracterización del índice de poder de Deegan-Packel del juego de comunicación.

Teorema 3.3.5 *Existe un único índice de poder* $f : CS(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *verificando* JUN, $EFIC$ *y* $CEMG$. *Este índice asigna a cada juego* $(N, v, g) \in CS(N)$, *el vector* $\rho(N, v/g)$.

Demostración

Existencia:

En el teorema 3.3.1 se comprobó que $\rho(N, v/g)$ satisface JUN y $EFIC$ y en el lema 3.3.3 que satisface $CEMG$.

Unicidad:

En el teorema 3.3.1 se probó que existe un único valor que satisface las propiedades de JUN, $EFIC$ y $JUSM$, con lo que a partir del lema anterior, la demostración está finalizada.$\square$

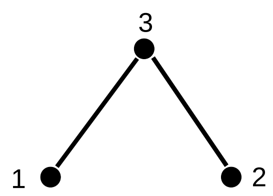
Nota: Al igual que ocurría con los valores de Myerson y el valor de Banzhaf del juego de comunicación, si se considera el juego de comunicación $\left(N, v, g^N\right)$, se verifica que $v/g^N = v$ y, en consecuencia, este nuevo índice de poder coincide con el índice de poder de Deegan-Packel.

A continuación, ilustramos con un ejemplo el cálculo del índice de poder de Deegan-Packel en un juego simple con comunicación.

Ejemplo 3.3.1 *Dado un juego simple con comunicación* $(N, v, g) \in CS(N)$ *donde* $N = \{1, 2, 3\}$*, el conjunto de coaliciones minimales ganadoras del juego* (N, v) *viene dado por* $M(v) = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$*. El índice de Deegan-Packel de este juego es igual a:*

$$\rho(N, v) = (1/2, 1/4, 1/4).$$

Si se considera el grafo de comunicación $g = \{1 : 3, 2 : 3\}$,



el conjunto de coaliciones minimales ganadoras del juego de comunicación $(N, v/g)$ *es igual a* $M(v/g) = \{\{1, 3\}\}$.

Por lo tanto, el índice de poder de Deegan-Packel del juego $(N, v/g)$ *es:*

$$\rho(N, v/g) = (1/2, 0, 1/2).$$

En el juego de comunicación el jugador 2 *está penalizado por no poder comunicarse directamente con el jugador* 1. *El jugador* 2 *necesita al jugador* 3 *para poder comunicarse con el jugador* 1 *y obtener una coalición ganadora, pero esta coalición ganadora ya no sería minimal ganadora. La cantidad que pierde el jugador* 2 *la recibe el jugador* 3.

Puede efectuarse el cálculo de los valores estudiados en este capítulo, para la familia de juegos con comunicación restringida, a partir de las extensiones multilineales. Basta tener en cuenta que estos valores coinciden con los valores de Banzhaf, Shapley y Deegan-Packel del juego de comunicación asociado, para los que se describió el procedimiento de cálculo a partir de la extensión multilineal. En el caso particular de juegos de mayoría ponderada, en Fernández García (1998) se describe cómo calcular el valor de Myerson empleando funciones generatrices. Para finalizar este capítulo, vamos a calcular los tres valores con comunicación restringida considerados en este capítulo para los partidos con representación en el Parlamento de las Islas Baleares.

Ejemplo 3.3.2 *Recordemos que este parlamento puede representarse como un juego de mayoría ponderada* $[30; 28, 16, 5, 4, 3, 3]$ *donde el jugador* 1 *es el* PP, *el jugador* 2 *es el* $PSOE$, *el jugador* 3 *es el* $PSM-EM$, *el jugador* 4 *es* $EU-EV$, *el jugador* 5 *es* UM *y el jugador* 6 *es el* $PACTE$. *Las coaliciones minimales ganadoras son:*

$$\{PP, PSOE\}\,,\ \ \{PP,\ EU-EV\}\,,\ \ \{PP,\ PACTE\}\,,\ \ \{PP, UM\}$$

$$\{PP, PSM-EN\}\ y\ \ \{PSOE, PSM-EN, UM, EU-EV, PACTE\}\,.$$

Los índices de poder de Shapley-Shubik, Banzhaf-Coleman y Deegan-Packel son iguales a:

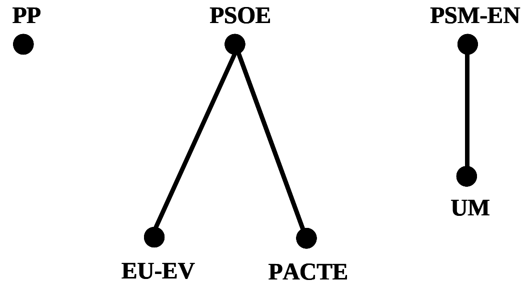
$$\varphi\,(N, v) = (2/3, 1/15, 1/15, 1/15, 1/15, 1/15)$$

$$\beta\,(N, v) = (15/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16)$$

$$\rho\,(N, v) = (5/12, 7/60, 7/60, 7/60, 7/60, 7/60)$$

Si se considera el grafo con componentes conexas las asociadas a las uniones a priori en el capítulo anterior, tenemos

$$g = \{PSOE : EU - EV, PSOE : PACTE, PSM - EN : UM\},$$



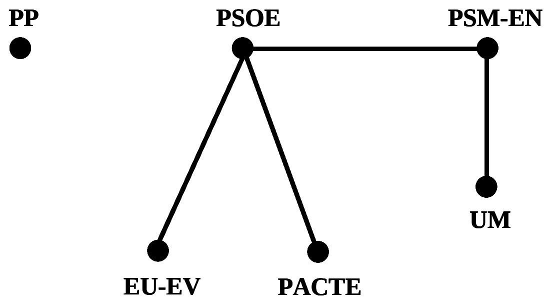
El juego de comunicación v/g *asociado al grafo* g *es igual al juego nulo, ya que*

$$N/g = \{\{PP\}, \{PSOE, EU - EV, PACTE\}, \{PSM - EN, UM\}\},$$

está formado por tres coaliciones perdedoras. Entonces,

$$\varphi(N, v/g) = \beta(N, v/g) = \rho(N, v/g) = 0.$$

Supongamos ahora que dejando aislado al PP*, los restantes cinco jugadores pueden comunicarse. Por ejemplo, si al grafo anterior se le añade un arco que comunique* $PSOE$ *y* $PSM - EN$*, se obtiene el sistema de comunicación dado por el siguiente grafo,*



Ahora, la coalición ganadora $\{PSOE, EU - EV, PACTE, PSM - EN, UM\}$ *está conectada y los índices de poder de Shapley-Shubik, Banzhaf-Coleman y Deegan-Packel del juego de comunicación asociado son iguales a:*

$$\varphi\left(N, v/g\right) = (0, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5)$$

$$\beta\left(N, v/g\right) = (0, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16)$$

$$\rho\left(N, v/g\right) = (0, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5)\,.$$

Capítulo 4

Juegos espaciales

En este capítulo se estudian los juegos espaciales, que son juegos simples en los que cada jugador tiene asociado un punto en un espacio euclídeo m-dimensional, que refleja su posición ideológica con respecto a ciertas variables de interés. Para esta familia de juegos se propondrán soluciones, a las que se denominarán índices de poder espaciales, que se corresponden con versiones modificadas de índices de poder estudiados en los capítulos 1 y 2. También se introduce una familia de valores, a los que se dará el nombre de valores pseudo-probabilísticos, que extiende a la familia de valores probabilísticos. Se verá que algunos de los índices de poder espaciales propuestos, son valores pseudo-probabilísticos.

4.1 Introducción

En primer lugar se presenta la definición de juego espacial, ilustrándola con un par de ejemplos.

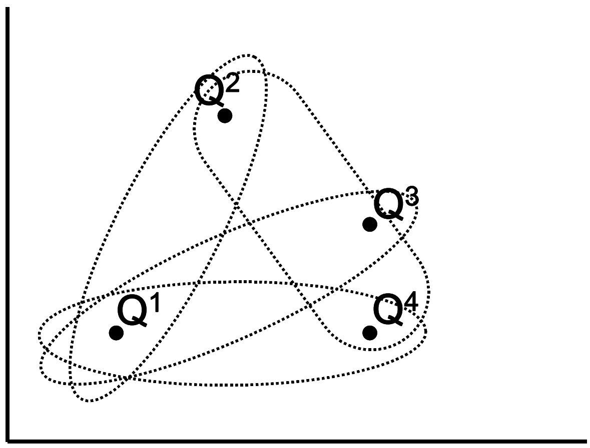
Definición 4.1.1 *Se define un juego espacial* m*-dimensional como una terna* $\left(N, v, \{Q^i\}_{i\in N}\right)$ *tal que* (N, v) *es un juego simple y* $\{Q^i\}_{i\in N}$ *es una colección de puntos en* $\mathbb{R}^m$ *que refleja las posiciones ideológicas de los jugadores. Llamamos a* Q^i *el punto ideal del jugador* i*. Supondremos que, al menos, dos puntos ideales son distintos. Denotaremos por* $E\left(N, \{Q^i\}_{i\in N}\right)$ *el conjunto de los juegos espaciales con conjunto de jugadores* N *y con puntos ideales* $\{Q^i\}_{i\in N}$*.*

En un juego espacial, además de la función característica del juego, que determina si una coalición es ganadora o perdedora, se dispone de información adicional sobre los intereses de los jugadores. Esta información la proporciona la posición de sus puntos ideales. Si dos jugadores tienen sus puntos ideales próximos, sus intereses son similares. Los juegos espaciales han sido estudiados en Owen, (1972a y 1990) y Owen y Shapley (1989). En estos trabajos, se siguen dos objetivos claramente diferenciados, así, en Owen (1990) el interés se centra en la búsqueda de un punto resumen del juego. La finalidad de los otros trabajos es la obtención de índices de poder teniendo en cuenta la disposición espacial de los puntos ideales de los jugadores. En esta memoria, estudiaremos los juegos espaciales bajo esta segunda óptica.

Ejemplo 4.1.1 *Considérese el juego espacial bidimensional dado por*

$$N = \{1,2,3,4\}, W^m = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3,4\}\},$$

$$Q^1 = (1,1), Q^2 = (2,3), Q^3 = (3,2) \text{ y } Q^4 = (3,1).$$

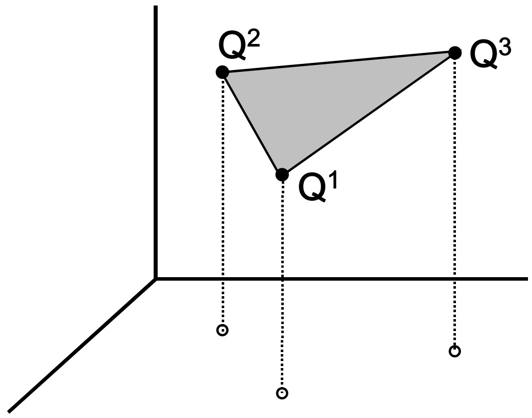


Sin tener en cuenta la posición de los puntos ideales, es decir, analizando sólo la función característica, la situación del jugador 1 *es la más ventajosa, ya que hace ganadora a cualquier coalición formada por un único jugador. Claramente, los restantes jugadores desempeñan el mismo papel. Sin embargo, al considerar las posiciones de los puntos ideales de los jugadores* 2, 3 *y* 4 *no está claro que tengan el mismo poder.*

Ejemplo 4.1.2 *Considérese el juego espacial tridimensional dado por*

$$N = \{1,2,3\}, W^m = \{\{1,2,3\}\},$$

$$Q^1 = (4,4,4)\,, Q^2 = (2,2,7) \;\; y \; Q^3 = (3,7,8)\,.$$



En este caso, como el juego simple es un juego de unanimidad, todos los jugadores desempeñan el mismo papel. Al considerar las posiciones ideológicas, es evidente que los jugadores 1 *y* 2 *tienen intereses similares, por estar próximos sus puntos ideales.*

4.2 Índices de poder espaciales de Shapley-Shubik

En esta sección, se van a estudiar "modificaciones espaciales" del índice de poder de Shapley-Shubik. Para calcular un índice de poder en un juego espacial, habrá que tener en cuenta la información que proporciona la función característica del juego y la situación de los puntos ideales.

Definición 4.2.1 *Un índice de poder espacial sobre* $E\left(N, \{Q^i\}_{i\in N}\right)$ *es una aplicación*

$$f : E\left(N, \left\{Q^i\right\}_{i\in N}\right) \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

que a cada juego $(N, v, \{Q^i\}_{i\in N})$ *le asigna un vector de* $\mathbb{R}^n$*, en el que cada componente representa el poder espacial del jugador correspondiente.*

Dado un juego simple (N, v), el índice de poder de Shapley-Shubik de un jugador $i \in N$ coincide con la probabilidad de que dicho jugador sea pívot, suponiendo una distribución uniforme sobre el conjunto de todas las permutaciones del conjunto de jugadores N. Es decir, se considera que todas las permutaciones de los jugadores son equiprobables, por lo que tienen una probabilidad igual a $1/n!$.

Sin embargo, al introducir los puntos ideales $\{Q^i\}_{i \in N}$ esta suposición no parece aceptable, porque al considerar la estructura espacial del juego es lógico suponer que no todas las permutaciones de los jugadores deberían tener la misma probabilidad. Owen (1972a) sugiere que las probabilidades asignadas a las distintas permutaciones de los jugadores deberían cumplir las siguientes propiedades.

- Si la distancia entre los puntos ideales de dos jugadores es “pequeña”, las probabilidades asignadas a las permutaciones en las que los jugadores correspondientes están próximos deben ser mayores que las asignadas a las permutaciones en las que estén alejados.

- Las probabilidades asignadas a las distintas permutaciones deben permanecer invariantes bajo movimientos rígidos de los puntos ideales, es decir, traslaciones, rotaciones, reflexiones y dilataciones.

- Una permutación y la permutación inversa deberían tener la misma probabilidad.

- Las probabilidades asignadas a las diferentes permutaciones deben ser funciones continuas de los puntos ideales, exceptuando posibles discontinuidades en casos como: dos o más puntos coincidentes, tres o más puntos alineados, etc.

- Si los puntos ideales Q^i y Q^j de dos jugadores i y j coinciden, el efecto sobre las probabilidades de las permutaciones debería ser el mismo que si se considera a los dos jugadores i y j, como un único jugador.

Es posible definir varias asignaciones de probabilidades de las permutaciones de los jugadores que satisfagan las propiedades anteriores. A continuación, se describen las propuestas por Owen (1972a), Shapley (1977) y una tercera, basada en el cálculo de las distancias entre los puntos ideales de los jugadores, que se propone como alternativa a las dos anteriores. A partir de estas modificaciones se obtienen índices de poder espaciales. Queremos hacer notar que estos índices de poder espaciales no están caracterizados. Su naturaleza reside en considerar que las probabilidades asignadas a las permutaciones de los jugadores dependen de la posición de los puntos ideales, a diferencia del índice de poder de Shapley-Shubik donde todas las permutaciones de los jugadores se consideran equiprobables.

Modificación de Owen

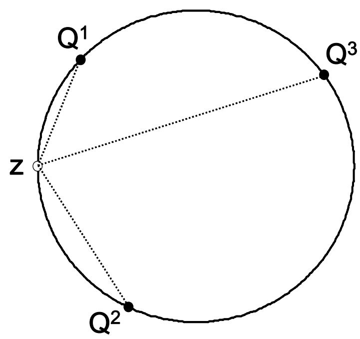
En Owen, (1972a) se propone la siguiente asignación de probabilidades de las permutaciones de los jugadores en un juego espacial.

Tomemos un juego espacial m-dimensional $(N, v, \{Q^i\}_{i\in N})$ donde los puntos $\{Q^i\}_{i\in N}$ determinan una esfera $\mathbb{S}$ de dimensión $(n-2)$. Un punto arbitrario de esta esfera $z \in \mathbb{S}$ establece una permutación de los jugadores, en base a las distancias desde el punto z a sus correspondientes puntos ideales $\{Q^i\}_{i\in N}$. Ilustraremos esta idea en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.2.1 *Considérese el juego espacial bidimensional dado por*

$$N = \{1,2,3\}, W^m = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\},$$

$$Q^1 = (-0.73, 0.68), Q^2 = (-0.43, -0.90) \text{ y } Q^3 = (0.63, 0.81).$$

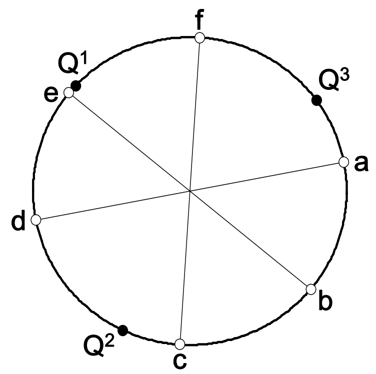


el punto $z = (-1,0)$ *establece la permutación* $1,2,3,$ *ya que se verifica que:*

$$d\left(z,Q^1\right) < d\left(z,Q^2\right) < d\left(z,Q^3\right).$$

Entonces, a cada permutación de los jugadores, se le asigna una probabilidad que es proporcional a la medida de los puntos de la esfera $\mathbb{S}$ que determinan dicha permutación. En el ejemplo anterior, la correspondencia entre permutaciones de jugadores y arcos de la circunferencia es la indicada en la siguiente tabla teniendo en cuenta las posiciones de los puntos a, b, c, d, e, f sobre la circunferencia

permutación	arco que la define
$1, 2, 3$	de
$1, 3, 2$	ef
$2, 3, 1$	bc
$2, 1, 3$	cd
$3, 1, 2$	fa
$3, 2, 1$	ab



Dado un juego espacial $\left(N, v, \{Q^i\}_{i\in N}\right)$ se define el conjunto A_i como

$$A_i = \{z \in \mathbb{S}/i \text{ es pívot en la permutación inducida por } z\},$$

la modificación de las probabilidades propuestas por Owen da lugar al índice de poder espacial dado por

$$f_i\left(N, v, \{Q^i\}_{i\in N}\right) = \frac{\mu(A_i)}{\mu(\mathbb{S})}, \tag{4.1}$$

donde μ es la medida de Lebesgue. Se comprueba fácilmente que los puntos $z \in \mathbb{S}$ que no determinan un orden estricto de los jugadores constituyen un conjunto de medida cero, por lo que $\sum\limits_{i\in N} f_i = 1$. En Owen (1972a), se demuestra que el cociente (4.1) no depende de la dimensión de la esfera $\mathbb{S}$ en la que están situados los puntos $\{Q^i\}_{i\in N}$, por lo que para facilitar los cálculos puede considerarse la esfera de menor dimensión que contenga a estos puntos.

Para el ejemplo 4.2.1 este índice de poder espacial es igual a

$$f\left(N, v, \left\{Q^i\right\}_{i\in N}\right) = (0.42, 0.28, 0.30)\,.$$

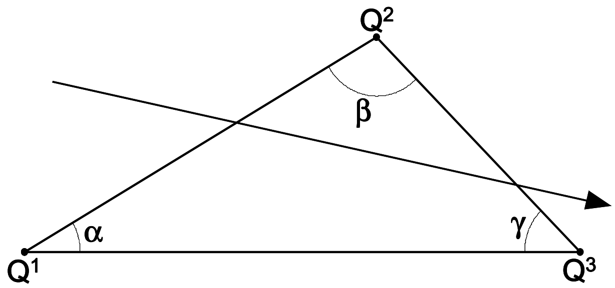
Modificación de Shapley

Esta asignación de probabilidades de las distintas permutaciones de los jugadores en un juego espacial fue propuesta por Shapley (1977) y se basa en los órdenes determinados por el conjunto de funcionales lineales ($\mathbb{R}^{m*}$, espacio dual de $\mathbb{R}^m$), evaluados en los puntos ideales de los jugadores.

Ejemplo 4.2.2 *Considérese el juego espacial bidimensional dado por*

$$N = \{1, 2, 3\}\,, W^m = \{\{1, 2\}\,, \{1, 3\}\,, \{2, 3\}\}\,,$$

donde la situación de los puntos ideales de los jugadores se corresponde con el siguiente gráfico.



El funcional representado mediante la flecha, define la permutación de los jugadores $1, 2, 3$*, ya que se tiene que* $f(Q^1) < f(Q^2) < f(Q^3)$ *(esta permutación se corresponde con el orden de las proyecciones ortogonales de los puntos ideales sobre la recta correspondiente).*

Se puede ver fácilmente que si f y g son dos funcionales, de tal forma que $f = rg$, con $r \in \mathbb{R}, r > 0$, entonces ambos funcionales inducen la misma permutación sobre el conjunto de jugadores. Por lo tanto, basta utilizar un funcional en cada dirección del espacio dual.

Para un juego espacial m-dimensional $\left(N, v, \{Q^i\}_{i\in N}\right)$, considerando únicamente los elementos de $\mathbb{K}$ (la esfera unitaria de $\mathbb{R}^{m*}$), es decir, los funcionales lineales f con $|f| = 1$, se define para cada jugador $i \in N$ el conjunto B_i de la siguiente forma

$$B_i = \{f \in \mathbb{K}/i \text{ es pívot en la permutación inducida por } f\}.$$

A partir de la medida de Lebesgue de estos conjuntos, la modificación de las probabilidades propuestas por Shapley da lugar al índice de poder espacial dado por

$$f_i\left(N, v, \left\{Q^i\right\}_{i\in N}\right) = \frac{\mu(B_i)}{\mu(\mathbb{K})}. \tag{4.2}$$

Se comprueba fácilmente que si todos los puntos ideales son distintos, la medida de Lebesgue del subconjunto de $\mathbb{K}$ consistente en los elementos que no inducen una permutación con un único pívot es 0, por lo tanto, se tiene que $\sum\limits_{i\in N} f_i = 1$.

Owen y Shapley (1989) definen un punto final del juego a partir de la solución anterior, al que denominan centro de poder. En ese trabajo estudian diversas propiedades de este punto.

Definición 4.2.2 *El centro de poder del juego espacial* $\left(N, v, \{Q^i\}_{i\in N}\right)$ *es el punto dado por*

$$P' = \sum_{i\in N} f_i Q^i,$$

donde f está definida según (4.2).

Con la configuración espacial del ejemplo 4.2.2, es fácil comprobar que para que un funcional f determine la permutación $1, 2, 3$ es necesario y suficiente que vaya de izquierda a derecha y que la perpendicular a f trazada desde el punto Q^2 quede en el interior del ángulo $Q^1Q^2Q^3$. Este ángulo tiene una medida igual a β radianes, por lo tanto, la medida del conjunto de funcionales que determina la permutación $1, 2, 3$ es β. La medida del conjunto que determina la permutación inversa es también β. Como para este juego, el pívot es el jugador que ocupa la posición central de la permutación se tiene que $\mu(B_2) = 2\beta$. De modo similar, se obtendría que $\mu(B_1) = 2\alpha$ y $\mu(B_2) = 2\gamma$, con lo que la medida del poder espacial que determina la modificación propuesta por Shapley para este juego espacial es igual a:

$$f\left(N, v, \{Q^i\}_{i\in N}\right) = \left(\frac{\alpha}{\Pi}, \frac{\beta}{\Pi}, \frac{\gamma}{\Pi}\right).$$

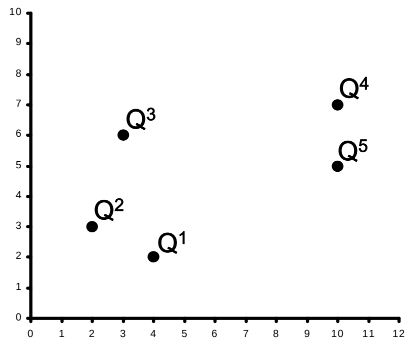
Modificación basada en distancias

Las modificaciones propuestas por Owen y Shapley, asignan distintas probabilidades a las permutaciones de los jugadores, teniendo en cuenta la configuración espacial de los puntos ideales de los jugadores. Estas modificaciones presentan algún inconveniente, como la dificultad de cálculo, (sobre todo la propuesta por Owen) y, además, en ciertos casos, algunas permutaciones de los jugadores tienen probabilidad nula. Se verá esto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.2.3 *Considérese el juego espacial bidimensional dado por*

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5\}, W^m = \{\{1, 2, 3, 4, 5\}\},$$

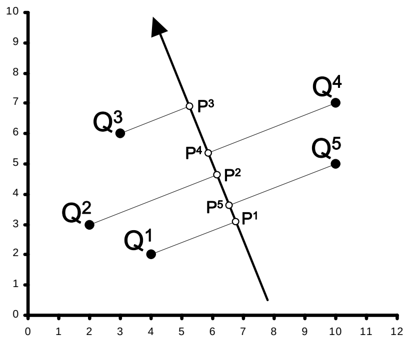
$$Q^1 = (4, 2), Q^2 = (2, 3), Q^3 = (3, 6), Q^4 = (10, 7) \text{ y } Q^5 = (10, 5).$$



Empleando la modificación propuesta por Shapley, ningún funcional $f \in \mathbb{R}^{5*}$ *determina la permutación de los jugadores* $1, 2, 3, 4, 5$, *que parece bastante lógica teniendo en cuenta la configuración espacial de los puntos ideales. Sin* *embargo, otras permutaciones que parecen menos probables como, por ejemplo, la permutación* $1, 5, 2, 4, 3$ *tienen medida no nula. Esta permutación la establece, entre otros, el funcional* $f \in \mathbb{R}^{5*}$ *definido por*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^5 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \rightarrow & (-6, 15) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

En el siguiente gráfico se representa el orden establecido por este funcional f.

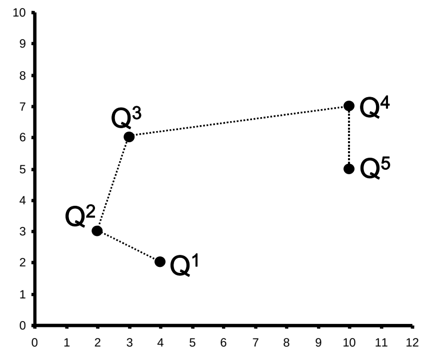


A continuación, se presenta una nueva modificación de las probabilidades asignadas a las permutaciones de los jugadores. A diferencia de las modificaciones propuestas por Owen y Shapley, ésta proporciona probabilidad positiva a todas las posibles permutaciones de los jugadores, pero de tal forma que aquellas permutaciones de los jugadores que tienen mayor "longitud", (es decir, que son tales que para unir los puntos ideales de los jugadores correspondientes, es preciso recorrer un camino mayor), tienen menor probabilidad que aquellas permutaciones de longitud menor. En primer lugar, formalizaremos estas ideas.

Definición 4.2.3 *Dada una permutación* σ *del conjunto de jugadores* N, *tal que* $\sigma(i_1) < \sigma(i_2) < \ldots < \sigma(i_n)$ *se define la longitud de* σ *como*

$$l(\sigma) = d\left(Q^{i_1}, Q^{i_2}\right) + d\left(Q^{i_2}, Q^{i_3}\right) + \ldots + d\left(Q^{i_{n-1}}, Q^{i_n}\right).$$

En el ejemplo 4.2.3 la longitud de la permutación $1, 2, 3, 4, 5$ vendrá dada por la longitud de la poligonal:



Parece lógico suponer que, cuanto mayor es la longitud de una permutación más difícil es que ésta llegue a realizarse. Por lo tanto, la probabilidad asignada a una permutación será inversamente proporcional a su longitud. Así pues, se asigna a cada permutación σ la siguiente probabilidad (donde $\Pi(N)$ es el conjunto de permutaciones de N).

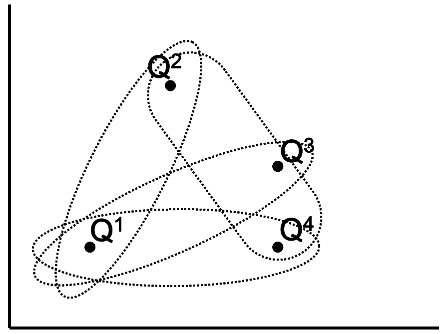
$$P(\sigma) = \frac{\frac{1}{l(\sigma)}}{\sum\limits_{\sigma \in \Pi(N)} \frac{1}{l(\sigma)}}.$$

Dado un juego espacial $\left(N, v, \{Q^i\}_{i\in N}\right)$, si C_i es el subconjunto de $\Pi(N)$ formado por las permutaciones en las que un jugador $i \in N$ es pívot, se define un nuevo índice de poder espacial para el jugador i como la suma de las probabilidades de estas permutaciones, es decir,

$$f_i\left(N, v, \left\{Q^i\right\}_{i\in N}\right) = \sum_{\sigma \in C_i} P(\sigma).$$

Como se comentó anteriormente, esta modificación otorga probabilidad positiva a todas las permutaciones, ya que no hay información adicional sobre el juego que nos lleve a pensar que ciertas permutaciones son imposibles. Además tiene la ventaja de la facilidad de cálculo y de que puede extenderse de modo sencillo a otros modelos. Más adelante, se verá cómo se aplicaría esta modificación a la familia de juegos con uniones *a priori*. Para finalizar esta sección, se ilustrará el cálculo de este índice de poder espacial con los datos del ejemplo 4.2.1.

Ejemplo 4.2.4 *Recordemos las posiciones de los puntos ideales así como las coaliciones minimales ganadoras.*



En primer lugar, habría que calcular las longitudes de las 24 permutaciones posibles de los 4 jugadores (realmente sólo hace falta calcular 12 porque una permutación y la inversa tienen la misma longitud). En estas permutaciones, se mira qué jugador es el pívot y se calcularía el índice de poder espacial basado en distancias, obteniendo:

$$f\left(N, v, \{Q^i\}_{i\in N}\right) = (0.464, 0.179, 0.158, 0.199).$$

En este ejemplo, analizando el índice de poder espacial basado en distancias, el jugador 1 *(que presenta una posición ventajosa si sólo se tiene en cuenta la función característica) es el jugador con más poder. El resto de los jugadores (que desempeñan el mismo papel en la función característica) tienen un poder similar pero, de tal forma, que el jugador con menos poder, el* 3, *es el que tiene su punto ideal más alejado del punto ideal del jugador* 1.

4.3 Índices de poder espaciales de Owen

Dado un juego simple con uniones *a priori* $(N, v, P) \in SU(N)$, donde $P = \{P_1, P_2, \ldots P_r\}$, el índice de poder de Owen de un jugador $j \in P_k$ coincide con la probabilidad de que dicho jugador sea pívot, suponiendo una distribución uniforme sobre el subconjunto de $\Pi(N)$ formado por aquellas permutaciones que respeten la condición de que entre dos jugadores de la misma unión *a priori* no aparece ningún jugador de otra unión *a priori*. Al igual que para el índice de poder de Shapley-Shubik se supone que todas las permutaciones posibles son equiprobables sólo que, en este caso, el conjunto de permutaciones posibles son aquellas que respetan la condición anterior.

Se define un juego espacial m-dimensional con uniones *a priori*, como una cuaterna $(N, v, P, \{Q^i\}_{i\in N})$, donde $(N, v, \{Q^i\}_{i\in N})$ es un juego espacial m-dimensional y P es una partición del conjunto de jugadores que determina la estructura de cooperación *a priori*. Se denotará por $E\left(N, P, \{Q^i\}_{i\in N}\right)$ el conjunto de juegos espaciales con uniones *a priori*, con conjunto de jugadores N, conjunto de puntos ideales $\{Q^i\}_{i\in N}$ y sistema de uniones dado por la partición P. En esta sección se van a extender las tres modificaciones consideradas en la sección anterior para el índice de poder de Shapley-Shubik al caso con uniones *a priori*. En este caso, un índice de poder espacial sobre $E\left(N, P, \{Q^i\}_{i\in N}\right)$ es una aplicación

$$f : E\left(N, P, \left\{Q^i\right\}_{i\in N}\right) \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

que a cada juego $(N, v, P, \{Q^i\}_{i\in N})$ le asigna un vector de R^n, en el que cada componente representa el poder espacial del jugador correspondiente.

Modificación de Owen

La modificación propuesta por Owen, en 1972 para el índice de poder de Shapley-Shubik puede aplicarse para un juego espacial con uniones *a priori* de la siguiente forma. Tomemos un juego espacial con uniones *a priori* $(N, v, P, \{Q^i\}_{i\in N})$ donde los puntos $\{Q^i\}_{i\in N}$ determinan una esfera $\mathbb{S}$ de dimensión $(n-2)$. Un punto arbitrario de esta esfera $z \in \mathbb{S}$ determina una permutación de los jugadores compatible con la estructura de uniones *a priori*, siempre que la permutación determinada por las distancias desde el punto z a los correspondientes puntos ideales $\{Q^i\}_{i\in N}$, sea compatible con la estructura de uniones *a priori*.

Por ejemplo, si se verifica que

$$d\left(z, Q^{i_1}\right) < d\left(z, Q^{i_2}\right) < \ldots < d\left(z, Q^{i_n}\right),$$

el punto z determina la permutación $i_1, i_2, \ldots, i_n$, que será compatible con la estructura de uniones *a priori* si se cumple que, para todo $j \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$

$$i_j, i_{j+2} \in P_k \Longrightarrow i_{j+1} \in P_k$$

para cualesquiera $P_k \in P$.

De forma similar al caso sin uniones *a priori*, a cada una de estas permutaciones de los jugadores, se les asigna una probabilidad que es proporcional a la medida de los puntos z que determinan esa permutación. De esta forma, si definimos $\mathbb{S}'$ como el conjunto de puntos de la esfera que determinan una permutación compatible con la estructura de uniones *a priori* y el conjunto A_i' como

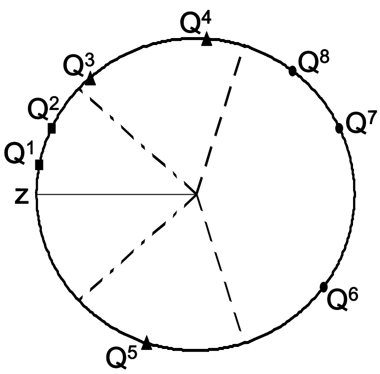
$$A_i' = \{z \in \mathbb{S}'/i \text{ es pívot en la permutación inducida por } z\},$$

la modificación espacial de poder de Owen viene dada por

$$f_i\left(N, v, P, \{Q^i\}_{i\in N}\right) = \frac{\mu(A_i')}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i')},$$

siempre que al menos uno de los conjuntos A_i' tenga medida no nula (es decir, $\mu(A_i') > 0$). En otro caso no se podría definir.

Ejemplo 4.3.1 *Considérese el gráfico siguiente, que muestra los puntos ideales de un juego espacial con uniones a priori, donde* $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $P = \{P_1, P_2, P_3\}$ *con* $P_1 = \{1, 2\}$, $P_2 = \{3, 4, 5\}$ *y* $P_3 = \{6, 7, 8\}$



El punto z determina la permutación, $1, 2, 3, 5, 4, 8, 6, 7$ *que es compatible con el sistema de uniones a priori*

Evidentemente, los cálculos en este caso son más tediosos que en las situaciones sin uniones *a priori*. Se ilustrará esta modificación en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.3.2 *Considérese el juego espacial bidimensional con uniones a priori dado por*

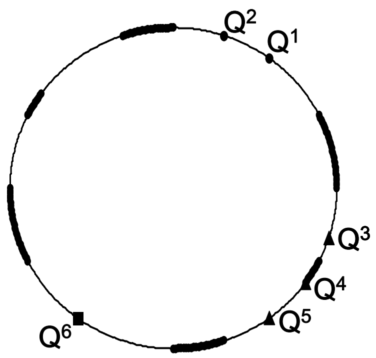
$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, W^m = \{S \subseteq N / |S| = 4\},$$

$$Q^1 = (0.59, 0.81), Q^2 = (0.31, 0.95), Q^3 = (0.95, -0.31),$$

$$Q^4 = (0.81, -0.59), Q^5 = (0.59, -0.81), Q^6 = (-0.59, -0.81).$$

$$P = \{P_1, P_2, P_3\}, \text{ donde } P_1 = \{1, 2\}, P_2 = \{3, 4, 5\} \text{ y } P_3 = \{6\}$$

El conjunto de puntos z de la esfera que no dan lugar a una permutación compatible con la estructura de uniones a priori, son los representados en oscuro en el siguiente gráfico.



Si se calcula el índice de poder espacial mediante el procedimiento descrito anteriormente, se obtiene

$$f\left(N, v, P, \{Q^i\}_{i\in N}\right) = (0.107, 0, 0.393, 0.250, 0.107, 0.143).$$

Los jugadores con más poder son el 3 *y el* 4. *Es de destacar que el jugador* 2 *tiene poder igual a cero porque no existe ningún punto de la esfera que determine una permutación compatible con el sistema de uniones a priori en la que sea pívot.*

Modificación de Shapley

Según la modificación propuesta por Shapley, un funcional $f \in \mathbb{R}^{m*}$ define una permutación de los jugadores de la siguiente forma: un jugador i precede a otro jugador j si $f(Q^i) < f(Q^j)$.

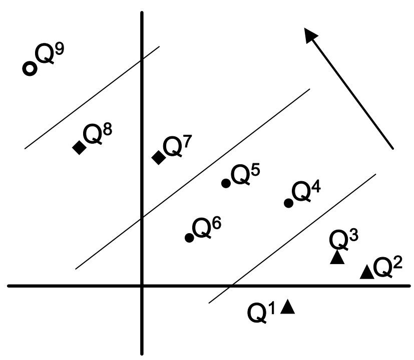
Al considerar un sistema de uniones *a priori*, el interés se centrará en aquellos funcionales $f \in \mathbb{R}^{m*}$ que determinen una permutación de los jugadores compatible con la estructura de uniones *a priori*. Al igual que en el caso no coalicional, basta utilizar un funcional en cada dirección del espacio $\mathbb{R}^{m*}$. Considerando $\mathbb{K}'$, el conjunto de funcionales lineales pertenecientes a la esfera unitaria de $\mathbb{R}^{m*}$, que determinen una permutación compatible con el sistema de uniones *a priori*, se define para cada jugador i el conjunto B_i' de la siguiente forma

$$B_i' = \{f \in \mathbb{K}'/i \textit{ es pívot en la permutación inducida por } f\}.$$

En este caso, el índice de poder espacial viene dado por:

$$f_i\left(N, v, P, \{Q^i\}_{i\in N}\right) = \frac{\mu(B_i')}{\mu(\mathbb{K}')}.$$

Evidentemente, este índice sólo podrá calcularse cuando el conjunto $\mathbb{K}'$ sea tal que $\mu(\mathbb{K}') > 0$. Un ejemplo de situación en la que este índice se puede calcular es la que se puede ver en el gráfico que aparece a continuación. En este caso el funcional lineal perpendicular a esta familia de hiperplanos paralelos determina una permutación de los jugadores compatible con la estructura de uniones *a priori* (evidentemente, no basta con que haya uno solo, sino que es necesario que $\mu(\mathbb{K}') > 0$).



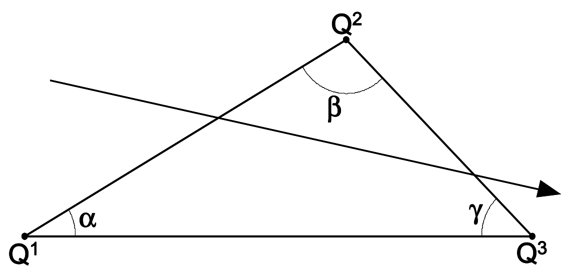
Dependiendo de la configuración espacial de los puntos ideales, puede resultar bastante laborioso el cálculo del índice anterior. Se ilustrará con un ejemplo sencillo.

Ejemplo 4.3.3 *Considérese el juego espacial bidimensional con uniones a priori dado por*

$$N = \{1,2,3\}, W^m = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\},$$

$$P = \{P_1, P_2\}, \text{ con } P_1 = \{1,3\} \text{ y } P_2 = \{2\}.$$

donde la situación de los puntos ideales de los jugadores se corresponde con el siguiente gráfico.



Teniendo en cuenta la estructura de uniones a priori, las únicas permutaciones de los jugadores que no son compatibles con dicha estructura son: $1,2,3$ *y* $3,2,1$ *(por ejemplo, la determinada por el funcional representado en el gráfico anterior). Por lo tanto, según lo visto anteriormente para el caso no coalicional, se tiene que:*

$$f\left(N, v, P, \{Q^i\}_{i\in N}\right) = (\alpha/(\alpha+\gamma), 0, \gamma/(\alpha+\gamma)).$$

Es interesante comentar que aunque el jugador 2 *no sea pívot en ninguna de las permutaciones compatibles con la estructura de uniones a priori y, por lo tanto, tiene un poder igual a* 0*, su presencia condiciona el poder espacial de los otros jugadores.*

Modificación basada en distancias

Las dos modificaciones comentadas anteriormente asignan distintas probabilidades a las permutaciones de los jugadores en situaciones en las que existe una partición del conjunto de jugadores que determina un sistema de uniones *a priori*. Estas modificaciones presentan (al igual que para el caso no coalicional) algún inconveniente, como la dificultad de cálculo y que ciertas permutaciones tienen probabilidad nula. A estos problemas, se añade el hecho de que para ciertas configuraciones geométricas no es posible calcular las modificaciones anteriores ya que siguiendo el proceso de cálculo de las probabilidades de estas permutaciones, el conjunto que determina permutaciones de los jugadores compatibles con el sistema de uniones tiene medida nula.

A continuación, vamos a extender al caso con uniones *a priori* la modificación basada en distancias. Esta modificación puede calcularse siempre y, además, proporciona probabilidad positiva a todas las posibles permutaciones de los jugadores compatibles con la estructura de uniones. Al igual que en el caso no coalicional, aquellas permutaciones que tienen mayor longitud, es decir, aquellas en las que para unir los puntos ideales de los jugadores correspondientes es preciso recorrer un camino de mayor longitud, tienen menor probabilidad que aquellas que tienen menor longitud.

Denotando por $\Pi(P,N)$ el conjunto de permutaciones de los jugadores de N compatibles con la estructura de uniones *a priori* P, la probabilidad asignada a una permutación será inversamente proporcional a su longitud. Para normalizar estas probabilidades, se asigna a una permutación $\sigma \in \Pi(P,N)$ la siguiente probabilidad

$$\mathbb{P}'(\sigma) = \frac{\frac{1}{l(\sigma)}}{\sum\limits_{\sigma \in \Pi(P,N)} \frac{1}{l(\sigma)}},$$

donde $l(\sigma)$ es la longitud de la permutación σ. Si C_i' es el conjunto de permutaciones compatibles con la estructura de uniones en las que el jugador i es pívot, se define un índice de poder espacial de un jugador $i \in N$ en el juego espacial con uniones *a priori* $\left(N, v, \{Q^i\}_{i\in N}, P\right)$ como la suma de las probabilidades de las permutaciones compatibles con la estructura de uniones *a priori* en las que i es pívot, es decir,

$$f_i\left(N, v, \{Q^i\}_{i\in N}, P\right) = \sum_{\sigma \in C_i'} \mathbb{P}'(\sigma).$$

A diferencia de las modificaciones consideradas anteriormente, ésta puede calcularse siempre (además, de un modo más sencillo). Para finalizar esta sección, se ilustrará este índice de poder espacial con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.3.4 *Con los datos del ejemplo* 4.2.4*, se considera la siguiente partición del conjunto de jugadores:* $P = \{P_1, P_2, P_3\}$ *, donde* $P_1 = \{1\}, P_2 = \{2\}$ *y* $P_3 = \{3, 4\}$ *. En primer lugar, habría que calcular las longitudes de las* 12 *permutaciones compatibles con la estructura de uniones a priori (realmente sólo hace falta calcular* 6 *porque una permutación y la inversa tienen la misma longitud). Al igual que en el caso no coalicional, se busca qué jugador es el pívot y se calcula el índice de poder espacial definido anteriormente, obteniendo*

$$f\left(N, v, P, \{Q^i\}_{i\in N}\right) = (0.4707, 0.1823, 0.1544, 0.1925).$$

4.4 Valores pseudo-probabilísticos

Algunos de los valores estudiados en esta memoria, como el valor de Banzhaf o el valor de Shapley, tienen en común que asignan a cada jugador una suma ponderada de sus contribuciones marginales. La diferencia entre estos valores reside en las ponderaciones otorgadas a estas contribuciones. Estos valores se denominan valores probabilísticos. En esta sección se introducirá una nueva familia de valores, que extiende a los valores probabilísticos, a la que se denominará familia de valores pseudo-probabilísticos.

Definición 4.4.1 *Dada una subfamilia* $T(N)$ *de* $TU(N)$*, una solución* $f : T(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$*, se dice que es un valor probabilístico, si para cada jugador* $i \in N$*, existe una distribución de probabilidad* $\{p_S^i : S \subseteq N\backslash i\}$ *sobre el conjunto de coaliciones que no contienen a* i*, de tal forma que, dado* $(N, v) \in T(N)$*,*

$$f_i(N, v) = \sum_{S\subseteq N\backslash i} p_S^i \left[v(S \cup i) - v(S)\right]. \tag{4.3}$$

Los valores de Shapley y Banzhaf son valores probabilísticos. Para el valor de Shapley se tiene que, en la expresión (4.3), para cualquier $S \subseteq N\backslash i$,

$$p_S^i = \frac{1}{n}\frac{1}{\binom{n-1}{s}} = \frac{s!\,(n-s-1)!}{n!},$$

mientras que para el valor de Banzhaf, en la expresión (4.3), para cualquier $S \subseteq N\backslash i$,

$$p_S^i = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Alguno de los valores coalicionales que se estudiaron en el capítulo 2 (valor de Owen, valor de Banzhaf-Owen y valor de Banzhaf coalicional simétrico) también son valores probabilísticos.

Weber (1988) obtuvo una caracterización de los valores probabilísticos, empleando las propiedades de linealidad, positividad y títeres. A continuación, se introducirán estas propiedades, para una subfamilia $T(N)$ de $TU(N)$.

Linealidad (LIN). Una solución $f : T(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es lineal si para todo par de juegos $(N, v) \in T(N)$ y $(N, w) \in T(N)$ y para todo número real $c > 0$, se tiene que

- $f(N, v + w) = f(N, v) + f(N, w)$,
- $f(N, cv) = cf(N, v)$.

Positividad (POS). Una solución $f : T(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es positiva si para todo juego monótono $(N, v) \in T(N)$, se tiene que

$$f(N, v) \geq 0.$$

Títere (TIT). Una solución $f : T(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad de títeres si para todo juego $(N, v) \in T(N)$ y para todo jugador $i \in N$, títere en (N, v), se tiene que

$$f_i(N, v) = v(i).$$

En Weber (1988) se obtiene una caracterización de los valores probabilísticos en la familia de los juegos TU y en la familia de los juegos simples.

Teorema 4.4.1 *Una solución $f : TU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un valor probabilístico si y sólo si f satisface las propiedades de linealidad, positividad y títeres.*
Un índice de poder $f : S(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un valor probabilístico si y sólo si f satisface las propiedades de transferencia, positividad y títeres.

Si de las condiciones que deben cumplir las constantes $\{p_S^i : S \subseteq N \backslash i\}$ para obtener un valor probabilístico se elimina la condición de ser positivas, resultan los valores pseudo-probabilísticos.

Definición 4.4.2 *Dada una subfamilia $T(N)$ de $TU(N)$, una solución f : $T(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$, se dice que es un valor pseudo-probabilístico si para cada jugador $i \in N$, existen unas constantes $\{q_S^i : S \subseteq N\backslash i\}$ de tal forma que*

$$\sum_{S \subseteq N\backslash i} q_S^i = 1 \ y$$

$$f_i(N,v) = \sum_{S \subseteq N\backslash i} q_S^i \left[v(S \cup i) - v(S)\right]. \tag{4.4}$$

De la definición anterior se deduce inmediatamente que todo valor probabilístico es un valor pseudo-probabilístico. Un valor pseudo-probabilístico otorga a un jugador una suma de sus contribuciones marginales multiplicadas por constantes, pero en este caso, la única condición que cumplen estas constantes es que sumen 1, es decir, no se exige que sean positivas. Este hecho que, en principio, parece extraño, es aplicable en ciertas situaciones en las que un jugador no está interesado en colaborar con alguna coalición. Por ejemplo, en un juego espacial es posible que a un jugador no le interese hacer ganadora a una coalición formada por jugadores cuyos puntos ideales se encuentren alejados de su punto ideal. Esto es debido a que sus intereses, determinados por su posición ideológica, no van a ser compartidos por el resto de los jugadores de esta coalición. Se volverá a incidir en esta idea en la siguiente sección.

De modo implícito, en Weber (1988) aparece la demostración de la caracterización de los valores pseudo-probabilísticos en la familia de los juegos TU y en la familia de los juegos simples. Esta caracterización se obtiene a partir de la caracterización de los valores probabilísticos, eliminando la propiedad de positividad. La citada caracterización de Weber se recoge en el siguiente resultado.

Teorema 4.4.2 *Una solución $f : TU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un valor pseudo-probabilístico si y sólo si f satisface las propiedades de linealidad y títeres. Un índice de poder $f : S(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un valor pseudo-probabilístico si y sólo si f satisface las propiedades de transferencia y títeres.*

A continuación, se proporciona un resultado que caracteriza el valor de las constantes $\{q_S^i : S \subseteq N\backslash i\}$ que aparecen en la expresión de un valor pseudo-probabilístico, a la vez que proporciona un método recursivo para su cálculo.

En este método se emplean las soluciones de los juegos de unanimidad y se empiezan calculando las constantes relativas a las coaliciones de tamaño mayor.

Teorema 4.4.3 *Dado un valor pseudo-probabilístico* $f : TU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *las constantes* $\{q_S^i : S \subseteq N \backslash i\}$ *son de la forma*

$$q_S^i = \begin{cases} f_i(N, u_{S\cup i}) - \sum\limits_{T/S\subset T\subseteq N\backslash i} q_T^i & si\ S \subset N\backslash i \\ f_i(N, u_N) & si\ S = N\backslash i \end{cases} \tag{4.5}$$

Demostración

En primer lugar se demostrará que las constantes $\{q_S^i : S \subseteq N\backslash i\}$ obtenidas de acuerdo a la expresión (4.5), determinan un valor pseudo-probabilístico, para lo que es suficiente demostrar que su suma es igual a 1. De la expresión (4.5) se tiene que

$$q_\emptyset^i = f_i(N, u_i) - \sum_{\substack{T\subseteq N\backslash i \\ T\neq\emptyset}} q_T^i.$$

De donde se deduce que $\sum\limits_{S\subseteq N\backslash i} q_S^i = f_i(N, u_i) = u_i(i) = 1$, ya que el jugador i es un títere para el juego (N, u_i).

Ahora, se va a demostrar el recíproco; es decir, dado un valor pseudo-probabilístico f, que puede escribirse de la forma

$$f_i(N, v) = \sum_{S\subseteq N\backslash i} q_S^i \left[v(S\cup i) - v(S)\right],$$

necesariamente la expresión de las constantes $\{q_S^i : S \subseteq N\backslash i\}$ que intervienen en su desarrollo, tiene que ser de la forma (4.5).

Si se considera el juego de unanimidad (N, u_N), es evidente que $u_N(S\cup i) - u_N(S) = 1$ si y sólo si $S \cup i = N$ siendo igual a 0 en cualquier otro caso. Teniendo en cuenta la expresión (4.4) es claro que $q_{N\backslash i}^i = f_i(N, u_N)$.

Dada una coalición $S \neq N$ y un jugador $i \notin S$, para el juego de unanimidad $(N, u_{S\cup i})$ es evidente que $u_{S\cup i}(T\cup i) - u_{S\cup i}(T) = 1$ si $S \subseteq T \subseteq N\backslash i$, con lo que se obtiene la siguiente igualdad:

$$f_i(N, u_{S\cup i}) = \sum_{T/S\subseteq T\subseteq N\backslash i} q_T^i = q_{S\cup i}^i + \sum_{T/S\subset T\subseteq N\backslash i} q_T^i,$$

con lo que la expresión (4.5) es cierta y se finaliza la demostración.□

Corolario 4.4.1 *Como casos particulares del teorema anterior se obtiene una forma recursiva para calcular las constantes que aparecen en las expresiones del valor de Shapley*

$$p_S^i = \begin{cases} \frac{1}{s+1} - \sum\limits_{T/S\subset T\subseteq N\backslash i} p_T^i & si\ S \subset N\backslash i \\ \frac{1}{n} & si\ S = N\backslash i \end{cases}$$

y del valor de Banzhaf

$$p_S^i = \begin{cases} \frac{1}{2^s} - \sum\limits_{T/S\subset T\subseteq N\backslash i} p_T^i & si\ S \subset N\backslash i \\ \frac{1}{2^{n-1}} & si\ S = N\backslash i \end{cases}$$

Más adelante, se presenta un resultado en el que se obtiene una reformulación de la propiedad de transferencia, en función de la solución para los juegos de unanimidad de las coaliciones minimales ganadoras. La expresión resultante es similar, en cierto modo, a la fórmula para el cálculo de la probabilidad de la unión de un conjunto de n sucesos. Para demostrar ese resultado se hace necesario el siguiente lema, en el que se prueba que la citada expresión está bien definida, en el sentido de que la inclusión de coaliciones ganadoras no minimales no afecta al resultado. Este hecho es similar al que cumple la fórmula de cálculo de la probabilidad de la unión de sucesos ya que, como es bien sabido, la adición de un suceso contenido en alguno de los originales no afecta al resultado final.

Lema 4.4.4 *Dado un índice de poder* $f : S(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$, *para todo juego simple* (N, v) *con*

$$W^m = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\} \text{ y } W = \{S_1, S_2, \ldots, S_m, S_{m+1}, \ldots, S_p\},$$

se cumple lo siguiente. Para cualquier jugador $i \in N$*, las siguientes* $p-m+1$ *expresiones son equivalentes*

$$\sum_{j_1 \in M'} f_i\left(N, u_{S_{j_1}}\right) - \sum_{j_1 \in M'} \sum_{\substack{j_2 \in M' \\ j_2 > j_1}} f_i\left(N, u_{S_{j_1} \cup S_{j_2}}\right) +$$

$$\sum_{j_1 \in M'} \sum_{\substack{j_2 \in M' \\ j_2 > j_1}} \sum_{\substack{j_3 \in M' \\ j_3 > j_2}} f_i\left(N, u_{S_{j_1} \cup S_{j_2} \cup S_{j_3}}\right) - \ldots +$$

$$(-1)^{m'+1} f_i\left(N, u_{S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{m'}}\right), \tag{4.6}$$

donde $M = \{1, 2, \ldots, m\}, P = \{1, 2, \ldots, p\}$ *y* M' *es cualquier subconjunto tal que* $M \subseteq M' \subseteq P$*.*

Demostración

En primer lugar, se probará que el resultado es cierto para M y M', donde $|M'| = m + 1$. Supongamos que $S_{m+1} = M' \backslash M$.

Como S_{m+1} no es una coalición minimal ganadora, existirá una coalición S_j con $j \leq m$, tal que $S_j \subset S_{m+1}$. Vamos a suponer que $j = 1$, entonces se tiene que probar que

$$\Big(\sum_{j_1 \in M'} f_i\left(N, u_{S_{j_1}}\right) - \sum_{j_1 \in M'} \sum_{\substack{j_2 \in M' \\ j_2 > j_1}} f_i\left(N, u_{S_{j_1} \cup S_{j_2}}\right) +$$

$$\sum_{j_1 \in M'} \sum_{\substack{j_2 \in M' \\ j_2 > j_1}} \sum_{\substack{j_3 \in M' \\ j_3 > j_2}} f_i\left(N, u_{S_{j_1} \cup S_{j_2} \cup S_{j_3}}\right) + \ldots + (-1)^{m'+1} f_i\left(N, u_{S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{m+1}}\right)\Big) -$$

$$\Big(\sum_{j_1 \in M} f_i\left(N, u_{S_{j_1}}\right) - \sum_{j_1 \in M} \sum_{\substack{j_2 \in M \\ j_2 > j_1}} f_i\left(N, u_{S_{j_1} \cup S_{j_2}}\right) +$$

$$\sum_{j_1 \in M} \sum_{\substack{j_2 \in M \\ j_2 > j_1}} \sum_{\substack{j_3 \in M \\ j_3 > j_2}} f_i \left(N, u_{S_{j_1} \cup S_{j_2} \cup S_{j_3}}\right) + \ldots + (-1)^{m+1} f_i \left(N, u_{S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_m}\right))$$

toma el valor cero.

La diferencia anterior es igual a

$$f_i \left(N, u_{S_{m+1}}\right) - \sum_{i=1}^{m} f_i \left(N, u_{S_i \cup S_{m+1}}\right) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=i+1}^{m} f_i \left(N, u_{S_i \cup S_j \cup S_{m+1}}\right) + \ldots +$$

$$(-1)^m f_i \left(N, u_{S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{m+1}}\right).$$

Esta última expresión tiene un total de 2^m términos, de los cuales la mitad 2^{m-1} incluyen a S_1, (conjunto A), y el resto de términos (conjunto B), con el mismo cardinal 2^{m-1} no incluyen a S_1.

Se puede establecer una biyección entre los términos del conjunto A y los del conjunto B, de forma que al término $f_i(N, u_S) \in B$ se le hace corresponder $f_i(N, u_{S \cup S_1}) \in A$, es decir

$$\begin{array}{ccc} B & \longleftrightarrow & A \\ f_i(N, u_S) & \longleftrightarrow & f_i(N, u_{S \cup S_1}) \end{array}$$

Como $S_{m+1} \subseteq S$ y $S_{m+1} \supseteq S_1$, se tiene que $S \cup S_1 = S$, por lo tanto,

$$f_i(N, u_S) = f_i(N, u_{S \cup S_1}),$$

como estos términos aparecen con distinto signo en la expresión anterior, ésta se hace igual a 0.

Trivialmente, por hipótesis de inducción, se cumple el resultado para cualquier valor de M' tal que $M \subseteq M' \subseteq P$.$\square$

A continuación, se obtiene el resultado anunciado anteriormente. En el siguiente teorema se demuestra que para un índice de poder es equivalente que cumpla la propiedad de transferencia o que coincida con la expresión (4.6). Con esto, se tiene que todos los valores probabilísticos y pseudo-probabilísticos definidos en la clase de juegos simples admiten dicha expresión.

Teorema 4.4.5 *Un valor* $f : S(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *cumple la propiedad de transferencia si y solo si dado un juego simple* (N, v) *tal que* $W^m = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$, *asigna a cada* $i \in N$ *la siguiente cantidad*

$$f_i(N, v) = \sum_{j_1 \in M} f_i\left(N, u_{S_{j_1}}\right) - \sum_{j_1 \in M} \sum_{\substack{j_2 \in M \\ j_2 > j_1}} f_i\left(N, u_{S_{j_1} \cup S_{j_2}}\right) +$$

$$\sum_{j_1 \in M} \sum_{\substack{j_2 \in M \\ j_2 > j_1}} \sum_{\substack{j_3 \in M \\ j_3 > j_2}} f_i\left(N, u_{S_{j_1} \cup S_{j_2} \cup S_{j_3}}\right) - \ldots + \tag{4.7}$$

$$(-1)^{m+1} f_i\left(N, u_{S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_m}\right),$$

donde $M = \{1, 2, \ldots, m\}$.

Demostración

Supóngase un valor $f : S(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que satisfaga la propiedad de transferencia.

Dado un juego simple (N, v), con conjunto de coaliciones minimales ganadoras $W^m = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$, puede escribirse de la siguiente forma

$$v = u_{S_1} \vee u_{S_2} \vee \ldots \vee u_{S_m}.$$

La demostración se hará por inducción en el cardinal del conjunto W^m.

Si $m = 1$ la expresión (4.7) es cierta trivialmente.

Supóngase que el resultado es cierto para cualquier valor desde 1 hasta $m-1$, se probará que es cierto para m.

En ese caso $v = u_{S_1} \vee u_{S_2} \vee \ldots \vee u_{S_m} = v' \vee u_{S_m}$ donde $v' = u_{S_1} \vee u_{S_2} \vee \ldots \vee u_{S_{m-1}}$, como f satisface la propiedad de transferencia, se tiene que:

$$f(N, v) = f(N, v' \vee u_{S_m}) = f(N, v') + f(N, u_{S_m}) - f(N, v' \wedge u_{S_m}). \tag{4.8}$$

Los tres términos que aparecen en la parte derecha de la expresión (4.8) se corresponden con juegos donde el número de coaliciones minimales ganadoras es menor o igual que $m-1$. Empleando la hipótesis de inducción y el lema 4.4.4 se obtiene la expresión enunciada en el teorema ya que el conjunto de coaliciones minimales ganadoras del juego $(N, v' \wedge u_{S_m})$ es un subconjunto de

$$\{S_1 \cup S_m, S_2 \cup S_m, \ldots, S_{m-1} \cup S_m\}.$$

Para probar el recíproco, supóngase que un valor $f : S(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ asigna a cada juego (N, v) la cantidad dada por la expresión (4.7). Para probar que f satisface la propiedad de transferencia, tendría que probarse que dados dos juegos simples $(N, v), (N, w)$ se cumple la siguiente igualdad

$$f(N, v) + f(N, w) = f(N, v \vee w) + f(N, v \wedge w).$$

Por ser v y w juegos simples pueden escribirse de la forma:

$$v = u_{S_1} \vee u_{S_2} \vee \ldots \vee u_{S_m} \ y \ w = u_{S_{m+1}} \vee u_{S_{m+2}} \vee \ldots \vee u_{S_{m+r}}$$

La demostración se hará por inducción en m y r.

Para $m = 1$ y $r = 1$, se tiene que $v = u_S$ y $w = u_T$. Como $u_S \wedge u_T = u_{S \cup T}$, la expresión (4.7) es equivalente a:

$$f(N, u_S \vee u_T) = f(N, u_S) + f(N, u_T) - f(N, u_S \wedge u_T).$$

Se supone entonces que f satisface la propiedad de transferencia para los valores $(1,1), (2,1), \ldots, (k-1,1)$ del par (m, r) y se va a probar que es cierto para $(k, 1)$. Se tiene entonces que:

$$v = u_{S_1} \vee u_{S_2} \vee \ldots \vee u_{S_{k-1}} \vee u_{S_k} y \ w = u_{S_{k+1}}.$$

Como f satisface (4.7),

$$f(N, v \vee w) = \sum_{j_1=1}^{k+1} f\left(N, u_{S_{j_1}}\right) - \sum_{j_1=1}^{k+1} \sum_{j_2=j_1+1}^{k+1} f\left(N, u_{S_{j_1} \cup S_{j_2}}\right) +$$

$$\sum_{j_1=1}^{k+1} \sum_{j_2=j_1+1}^{k+1} \sum_{j_3=j_2+1}^{k+1} f\left(N, u_{S_{j_1} \cup S_{j_2} \cup S_{j_3}}\right) - \ldots +$$

$$(-1)^k f\left(N, u_{S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{k+1}}\right).$$

Por otro lado:

$$f(v) + f(w) - f(v \wedge w) =$$

$$f(v) + f(w) - f((u_{S_1} \wedge u_{S_{k+1}}) \vee \left(u_{S_2} \wedge u_{S_{k+1}}\right) \vee \ldots \vee (u_{S_k} \wedge v_{S_{k+1}})) =$$

$$f(v) + f(w) - f(u_{S_1 \cup S_{k+1}} \vee u_{S_2 \cup S_{k+1}} \vee \ldots \vee u_{S_k \cup S_{k+1}}) =$$

$$\sum_{j_1=1}^{k} f\left(N, u_{S_{j_1}}\right) - \sum_{j_1=1}^{k} \sum_{j_2=j_1+1}^{k} f\left(N, u_{S_{j_1} \cup S_{j_2}}\right) +$$

$$\sum_{j_1=1}^{k} \sum_{j_2=j_1+1}^{k} \sum_{j_3=j_2+1}^{k} f\left(N, u_{S_{j_1} \cup S_{j_2} \cup S_{j_3}}\right) - \ldots +$$

$$(-1)^{k+1} f\left(N, u_{S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k}\right) + f\left(N, u_{S_{k+1}}\right) - \sum_{j_1=1}^{k} f(N, u_{S_{j_1} \cup S_{k+1}}) +$$

$$\sum_{j_1=1}^{k} \sum_{j_2=j_1+1}^{k} f(N, u_{S_{j_1} \cup S_{j_2} \cup S_{k+1}}) - \ldots + (-1)^k f\left(N, u_{S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{k+1}}\right).$$

que es igual a $f(N, v \vee w)$. Con lo que está demostrado que el resultado se cumple para cualquier par de la forma $(m, 1)$, para cualquier valor de m.

Para finalizar, supóngase que es cierto para un par (m, r), habría que demostrar que es cierto para $(m, r+1)$. Tomemos entonces

$$v = u_{S_1} \vee u_{S_2} \vee \ldots \vee u_{S_m} \ y \ w = u_{S_{m+1}} \vee u_{S_{m+2}} \vee \ldots \vee u_{S_{m+r}} \vee u_{S_{m+r+1}}.$$

El juego w puede escribirse de la siguiente forma

$$w = w_1 \vee w_2 \ con$$

$$w_1 = u_{S_{m+1}} \vee u_{S_{m+2}} \vee \ldots \vee u_{S_{m+r}} \ y \ w_2 = u_{S_{m+r+1}}.$$

Por lo demostrado anteriormente, se tiene que

$$f(N,v) + f(N,w) = f(N,v) + f(N,w_1 \vee w_2) =$$

$$f\ (N,v) + f(N,w_1) + f\ (N,w_2) - f(N,w_1 \wedge w_2).$$

Con lo que sería suficiente demostrar que es cierta la igualdad

$$f(N,v \vee w) + f(N,v \wedge w) =$$

$$f\ (N,v) + f(N,w_1) + f\ (N,w_2) - f(N,w_1 \wedge w_2). \tag{4.9}$$

En primer lugar, desarrollando $f(N,v \vee w)$

$$f(N,v \vee w) = f\ (N,v \vee w_1 \vee w_2) =$$

$$f(N,v \vee w_1) + f\ (N,w_2) - f(N,(v \vee w_1) \wedge w_2) =$$

$$f(N,v) + f(N,w_1) - f(N,v \wedge w_1) + f(N,w_2) - f(N,(v \wedge w_2) \vee (w_1 \wedge w_2)) =$$

$$f(N,v) + f(N,w_1) - f(N,v \wedge w_1) + f(N,w_2) -$$

$$f(N,v \wedge w_2) - f(N,w_1 \wedge w_2) + f(N,v \wedge w_1 \wedge w_2).$$

Desarrollando ahora $f(N,v \wedge w)$

$$f(N,v \wedge w) = f(N,v \wedge (w_1 \vee w_2)) = f(N,(v \wedge w_1) \vee (v \wedge w_2)) =$$

$$f(N,v \wedge w_1) + f(N,v \wedge w_2) - f(N,v \wedge w_1 \wedge w_2).$$

Sumando estos dos últimas ecuaciones se cumple la igualdad (4.9) que se quería demostrar.□

Corolario 4.4.2 *Los índices de Shapley-Shubik y de Banzhaf-Coleman de un jugador $i \in N$, en el juego simple (N, v) donde $W^m = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ vienen dados por:*

$$\sum_{j_1 \in M} S_{j_1}^{-1}(i) - \sum_{j_1 \in M} \sum_{\substack{j_2 \in M \\ j_2 > j_1}} \left(S_{j_1} \cup S_{j_2}\right)^{-1}(i) +$$

$$\sum_{j_1 \in M} \sum_{\substack{j_2 \in M \\ j_2 > j_1}} \sum_{\substack{j_3 \in M \\ j_3 > j_2}} \left(S_{j_1} \cup S_{j_2} \cup S_{j_3}\right)^{-1}(i) - \ldots +$$

$$(-1)^{m+1} \left(S_{j_1} \cup S_{j_2} \cup \ldots \cup S_{j_m}\right)^{-1}(i),$$

donde $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ y,

$$S^{-1}(i) = \begin{cases} \frac{1}{|S|} & si\ i \in S \\ 0 & si\ i \notin S \end{cases}$$

para el índice de poder de Shapley-Shubik y,

$$S^{-1}(i) = \begin{cases} \frac{1}{2^{|S|-1}} & si\ i \in S \\ 0 & si\ i \notin S \end{cases}$$

para el índice de poder de Banzhaf-Coleman.

4.5 La propiedad de simetría espacial

A continuación se van a caracterizar diversos índices de poder espaciales empleando propiedades comunes con otros índices de poder y una modificación de la propiedad de simetría, a la que se denominará propiedad de simetría espacial.

En la segunda sección de este capítulo, se estudiaron modificaciones del índice de poder de Shapley-Shubik que daban lugar a varios índices de poder espaciales. En esas modificaciones se definía una forma de elegir las distintas probabilidades de las permutaciones de los jugadores. En esta sección, se va a seguir con una línea más similar a la empleada en el resto de esta memoria.

Se propondrán diversas propiedades que se consideran adecuadas en el contexto de los juegos espaciales, para demostrar a continuación, que sólo hay un índice de poder espacial que las satisface.

En el primer capítulo se estudiaron diversos índices de poder para la familia de juegos simples, en particular, los índices de poder de Shapley-Shubik, Banzhaf-Coleman y Deegan-Packel. De entre las propiedades que caracterizaban estos índices de poder, las de eficiencia, poder total, transferencia, fusión y jugador nulo, en principio, parece que siguen siendo adecuadas en el contexto de los juegos espaciales. Esto es debido a que la introducción de los puntos ideales no afecta a la naturaleza de estas propiedades. No puede decirse lo mismo de la propiedad de simetría, porque dentro del modelo de los juegos espaciales, el poder que tienen los jugadores simétricos para el juego simple no tiene por qué coincidir. En un juego espacial, el poder de un jugador estará condicionado por la situación de su punto ideal.

En un juego de unanimidad u_S, parece lógico suponer que el poder de un jugador $i \in S$ será mayor si su punto ideal se encuentra en una posición cercana al resto de las posiciones de los jugadores de S. Por tanto, el poder que tienen dos jugadores de S en el juego de unanimidad u_S es inversamente proporcional a la suma de las distancias de sus puntos ideales a los puntos ideales del resto de los jugadores de S. Según esto, en un juego de unanimidad, los jugadores del soporte con objetivos situados en posiciones más "centrales" tendrán mayor poder. Con esta idea, se define la propiedad de simetría espacial.

Definición 4.5.1 *Un índice espacial de poder* $f : E\left(N, \{Q^i\}_{i\in N}\right) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *satisface la propiedad de simetría espacial si para cualquier juego de unanimidad* u_S, *y para cualquier par de jugadores,* $l \in S, m \in S$, *se tiene que:*

$$f_l\left(N, u_S, \{Q^i\}_{i\in N}\right) \sum_{k\in S} d(Q^l, Q^k) = f_m\left(N, u_S, \{Q^i\}_{i\in N}\right) \sum_{k\in S} d(Q^m, Q^k).$$

Propiedades similares a la anterior, que pueden entenderse como propiedades de "simetría ponderada para jugadores del soporte en juegos de unanimidad", se emplean en Bilbao (1998) y Bilbao *et al.* (1998) para obtener caracterizaciones de los valores de Shapley y de Banzhaf en geometrías convexas. Queremos hacer notar que la propiedad anterior no determina que si dos jugadores son simétricos entonces siempre tendrá mayor poder aquel jugador cuyo punto ideal se encuentre en una posición central. Esto ocurrirá en los juegos de unanimidad, pero no necesariamente para todos los juegos simples.

Empleando la propiedad de simetría espacial, en lugar de la propiedad de simetría, se van a obtener tres índices de poder espaciales: los índices de poder simétricos espaciales de Shapley-Shubik, Banzhaf-Coleman y Deegan-Packel. La diferencia que presentan estos índices de poder espaciales respecto a los índices de poder originales es la forma de repartir el poder entre los jugadores de un soporte en los juegos de unanimidad.

Para simplificar la escritura de los distintos resultados que se van a enunciar, se empleará la siguiente notación. Dado un juego (N, v) y una coalición $S \subseteq N$, la función $d_S^{-1} : N \longrightarrow \mathbb{R}$ asigna a cada jugador $j \in N$ la siguiente cantidad:

$$d_S^{-1}(j) = \begin{cases} \dfrac{\dfrac{1}{\sum\limits_{k \in S} d(Q^k, Q^j)}}{\sum\limits_{i \in S} \dfrac{1}{\sum\limits_{k \in S} d(Q^k, Q^i)}} & si\ j \in S, S \neq \{j\} \\ 0 & si\ j \notin S \\ 1 & si\ S = \{j\} \end{cases}$$

A la vista de la expresión anterior, se ve que la función $d_S^{-1} : N \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función normalizada que asigna a cada jugador de S una cantidad inversamente proporcional a la distancia de su punto ideal al resto de los puntos de los jugadores de S, mientras que asigna 0 a los jugadores que no están en S. Puede interpretarse como una medida de la cercanía de cada jugador $j \in N$ a la coalición S. Esta función está directamente relacionada con la propiedad de simetría espacial.

En el siguiente resultado se caracteriza un índice de poder espacial, sustituyendo la propiedad de simetría por la propiedad de simetría espacial en la caracterización del índice de poder de Shapley-Shubik (φ).

Teorema 4.5.1 *Existe un único índice de poder* $f : E\left(N, \{Q^i\}_{i \in N}\right) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *que verifica las propiedades de eficiencia, jugador nulo, simetría espacial y* *transferencia. Dado un juego espacial* $(N, v, \{Q^i\}_{i\in N})$, *esta solución asigna a cada jugador* $l \in N$ *el número real:*

$$f_l^1\left(N, v, \left\{Q^i\right\}_{i\in N}\right) = \sum_{i=1}^{m} d_{S_i}^{-1}(l) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i+1}^{m} d_{S_i\cup S_j}^{-1}(l)$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i+1}^{m}\sum_{k=j+1}^{m} d_{S_i\cup S_j\cup S_k}^{-1}(l) + \ldots + (-1)^{m+1} d^{-1}_{\bigcup\limits_{i=1}^{m} S_i}(l),$$

Demostración

Unicidad:

Dado un juego espacial $(N, v, \{Q^i\}_{i\in N})$, existe un número finito m de coaliciones minimales ganadoras $S_1, S_2, \ldots, S_m$, por lo que el juego v puede escribirse de la siguiente forma:

$$v = u_{S_1} \vee u_{S_2} \vee \ldots \vee u_{S_m}.$$

Se definen dos índices $n_1(v)$ y $n_2(v)$ del siguiente modo:

$n_1(v) = \min\{p \in \mathbb{N}/\text{existe una coalición minimal ganadora } T \text{ con } |T| = p\}$, tamaño de la coalición minimal ganadora más pequeña,

$n_2(v) =$número de coaliciones minimales ganadoras T tales que $|T| = n_1(v)$.

La demostración de este resultado se hace por inducción en $n_1(v)$ y $n_2(v)$.

Para $n_1(v) = n, v = u_N$ y $n_2(v) = 1$, en cuyo caso una solución f que satisfaga las propiedades de eficiencia, jugador nulo y simetría espacial, necesariamente asigna a un jugador $j \in N$, la cantidad

$$f_j(N, u_N, \left\{Q^i\right\}_{i\in N}) = d_N^{-1}(j).$$

Supóngase que se ha probado que la solución es única cuando $n_1(v) = k+1, k+2, \ldots, n$ y $n_2(v) = 1$, habría que probar que la solución es única cuando $n_1(v) = k$ y $n_2(v) = 1$.

Sea S la única coalición minimal ganadora con k jugadores. Si S es la única coalición minimal ganadora, entonces $v = u_S$ y por la propiedades de simetría espacial, eficiencia y jugador nulo, necesariamente la solución para un jugador $j \in N$, tiene que venir dada por

$$f_j(N, u_S, \left\{Q^i\right\}_{i\in N}) = d_S^{-1}\left(j\right).$$

Para demostrar la unicidad en el caso de que $n_2\left(v\right) > 1$, se procede como en la demostración de la unicidad del índice de poder de Shapley-Shubik en la familia de los juegos simples, que aparece en Dubey (1975), ya que en este momento sólo se necesita la propiedad de transferencia.

Existencia:

Dado un juego espacial $(N, v, \{Q^i\}_{i\in N})$ existe un número finito m de coaliciones minimales ganadoras $S_1, S_2, \ldots, S_m$ de tal forma que el juego v se puede escribir de la siguiente forma

$$v = u_{S_1} \vee u_{S_2} \vee \ldots \vee u_{S_m}.$$

Se considera la función $f^1 : E\left(N, \{Q^i\}_{i\in N}\right) \longrightarrow \mathbb{R}^n$, que asigna a un jugador $l \in N$, la siguiente cantidad

$$f_l^1\left(N, v, \left\{Q^i\right\}_{i\in N}\right) = \sum_{i=1}^{m} d_{S_i}^{-1}\left(l\right) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i+1}^{m} d_{S_i\cup S_j}^{-1}\left(l\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i+1}^{m}\sum_{k=j+1}^{m} d_{S_i\cup S_j\cup S_k}^{-1}\left(l\right) + \ldots + \left(-1\right)^{m+1} d^{-1}_{\bigcup\limits_{i=1}^{m} S_i}\left(l\right).$$

A continuación, se comprobará que este índice de poder verifica las propiedades de jugador nulo, eficiencia y simetría espacial, ya que por el teorema 4.4.5 satisface la propiedad de transferencia.

Jugador nulo:

Sea $i \in N$, jugador nulo. Entonces $i \notin S_j$, para todo $j = 1, 2, \ldots, m$ y para cualquier $R \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}, i \notin \bigcup\limits_{j\in R} S_j$. Por tanto, $d^{-1}_{\bigcup\limits_{j\in R} S_j}\left(i\right) = 0$, con lo que $f_i^1\left(N, v, \{Q^i\}_{i\in N}\right) = 0$.

Eficiencia:

Dado un juego espacial $(N, v, \{Q^i\}_{i\in N})$ con $W^m = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$.

Si $m = 1$ el resultado es trivial.

Sea $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots S_m$, con $m > 1$. Cualquier $i \notin S$ es un jugador nulo. Por tanto,

$$\sum_{l\in N} f_l^1 \left(N, v, \left\{Q^i\right\}_{i\in N}\right) = \sum_{l\in S} f_l^1 \left(N, v, \left\{Q^i\right\}_{i\in N}\right) =$$

$$\sum_{l\in S}\sum_{i=1}^{m} d_{S_i}^{-1}(l) - \sum_{l\in S}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i+1}^{m} d_{S_i\cup S_j}^{-1}(l) +$$

$$\sum_{l\in S}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i+1}^{m}\sum_{k=j+1}^{m} d_{S_i\cup S_j\cup S_k}^{-1}(l) + \ldots + (-1)^{m+1}\sum_{l\in S} d^{-1}_{\bigcup\limits_{i=1}^{m} S_i}(l) =$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{l\in S} d_{S_i}^{-1}(l) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i+1}^{m}\sum_{l\in S} d_{S_i\cup S_j}^{-1}(l) +$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i+1}^{m}\sum_{k=j+1}^{m}\sum_{l\in S} d_{S_i\cup S_j\cup S_k}^{-1}(l) + \ldots + (-1)^{m+1}\sum_{l\in S} d^{-1}_{\bigcup\limits_{i=1}^{m} S_i}(l) =$$

$$\sum_{i=1}^{m} 1 - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1+1}^{m} 1 + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1+1}^{m}\sum_{k=j+1}^{m} 1 - \ldots + (-1)^{m+1} =$$

$$\binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} - \binom{m}{4} + \ldots \pm \binom{m}{m}.$$

Aplicando repetidamente la fórmula de Stiegel: $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n}$, la expresión anterior puede escribirse de la forma:

$$\binom{m-1}{0} + \binom{m-1}{1} - \binom{m-1}{1} - \binom{m-1}{2} +$$

$$\binom{m-1}{2} + \binom{m-1}{3} - \binom{m-1}{3} - \binom{m-1}{4} + \ldots \pm \binom{m-1}{m-1} \pm \binom{m-1}{m} =$$

$$\binom{m-1}{0} \pm \binom{m-1}{m} = 1.$$

Propiedad de simetría espacial:

Dado un juego espacial $(N, u_S, \{Q^i\}_{i\in N})$, dados dos jugadores $l \in S,\ m \in S$ se tiene que

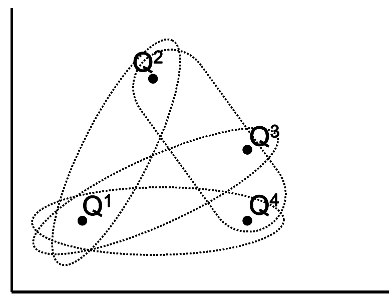
$$f_l^1\left(N, u_S, \left\{Q^i\right\}_{i\in N}\right) = d_S^{-1}\left(l\right)$$

$$f_m^1\left(N, u_S, \left\{Q^i\right\}_{i\in N}\right) = d_S^{-1}\left(m\right).$$

Por lo que

$$f_l^1\left(N, u_S, \left\{Q^i\right\}_{i\in N}\right) \sum_{k\in S} d\left(Q^l, Q^k\right) = f_m^1\left(N, u_S, \left\{Q^i\right\}_{i\in N}\right) \sum_{k\in S} d\left(Q^m, Q^k\right).\square$$

Ejemplo 4.5.1 *Dado el juego espacial bidimensional del ejemplo* 4.1.1 *con puntos ideales y coaliciones minimales ganadoras representados en el siguiente gráfico*



Se tiene que el índice de poder espacial caracterizado en el teorema anterior es igual a:

$$f^1\left(N, v, \left\{Q^i\right\}_{i\in N}\right) = (0.602, 0.098, 0.2085, 0.0915)\,.$$

De acuerdo con este índice, el jugador con mayor poder espacial es el 1*, debido a su papel "dominante" en la función característica. Después del jugador* 1*, el jugador con mayor poder espacial es el* 3*, que ocupa una posición central dentro de la coalición minimal ganadora* $\{2,3,4\}$*.*

En el siguiente ejemplo se demuestra que el índice anterior puede asignar un valor negativo a alguno de los jugadores que intervienen en un juego espacial.

Ejemplo 4.5.2 *Supóngase un juego espacial bidimensional* $\left(N, v, \{Q^i\}_{i\in N}\right)$*, dado por*

$$N = \{1,2,3,4\}\,, W^m = \{\{1,2,3\}\,,\{1,2,4\}\}\,,$$

y donde la configuración espacial de los puntos ideales $\{Q^i\}_{i\in N}$ *es la siguiente*

(es decir, las distancias $d\,(Q^1,Q^2)$ *y* $d\,(Q^3,Q^4)$ *son muy pequeñas si las comparamos con las distancias* $d\,(Q^1,Q^3)$*,* $d\,(Q^1,Q^4)$*,* $d\,(Q^2,Q^3)$ *y* $d\,(Q^2,Q^4)$*). El índice de poder espacial definido anteriormente es igual a:*

$$f^1\left(N, v, \left\{Q^i\right\}_{i\in N}\right) = (11/20, 11/20, -1/20, -1/20)\,.$$

Los jugadores 3 *y* 4 *tienen poder negativo. En este caso, el conjunto de coaliciones minimales ganadoras no es coherente con la configuración geométrica de los puntos ideales. Como los puntos ideales de los jugadores* 1 *y* 2 *están próximos, tienen mayor poder espacial en los juegos de unanimidad de las coaliciones* $\{1,2,3\}$ *y* $\{1,2,4\}$ *que los jugadores* 3 *y* 4*. Si los jugadores* 3 *y* 4 *no hiciesen ganadora a la coalición formada por los jugadores* 1 *y* 2*, de modo individual, los cuatro jugadores tendrían el mismo poder espacial. Los jugadores* 3 *y* 4 *no se están comportando de forma adecuada a sus intereses al convertir en ganadora a la coalición* $\{1,2\}$*.*

En el siguiente resultado se caracteriza un índice de poder espacial, sustituyendo la propiedad de simetría por la de simetría espacial en la caracterización del índice de poder de Banzhaf-Coleman. Se omite la demostración de este resultado por emplear argumentos similares a los empleados en el teorema 4.5.1.

Teorema 4.5.2 *Existe un único índice de poder* $f : E\left(N, \{Q^i\}_{i\in N}\right) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *que verifica las propiedades de poder total, jugador nulo, simetría espacial y transferencia. Dado un juego espacial* $\left(N, v, \{Q^i\}_{i\in N}\right)$, *esta solución asigna a cada jugador* $l \in N$ *el número real:*

$$f_l^2\left(N, v, \left\{Q^i\right\}_{i\in N}\right) = \sum_{i=1}^{m} \frac{|S_i|\, d_{S_i}^{-1}(l)}{2^{|S_i|-1}} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i+1}^{m} \frac{|S_i \cup S_j|\, d_{S_i\cup S_j}^{-1}(l)}{2^{|S_i\cup S_j|-1}}$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i+1}^{m}\sum_{k=j+1}^{m} \frac{|S_i \cup S_j \cup S_k|\, d_{S_i\cup S_j\cup S_k}^{-1}(l)}{2^{|S_i\cup S_j\cup S_k|-1}} + \ldots + (-1)^{m+1} \frac{\left|\bigcup\limits_{i=1}^{m} S_i\right| d_{\bigcup\limits_{i=1}^{m} S_i}^{-1}(l)}{2^{\left|\bigcup\limits_{i=1}^{m} S_i\right|-1}},$$

donde $M(v) = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$.

Al igual que el índice espacial de poder caracterizado en el teorema 4.5.1, este índice satisface la propiedad de transferencia, por lo que queda determinado conociendo la solución para los juegos de unanimidad. Para un juego de unanimidad u_S, es inmediato probar que la única solución que satisface la propiedad de poder total, jugador nulo y simetría espacial es:

$$f_l^2\left(N, u_S, \left\{Q^i\right\}_{i\in N}\right) = \frac{|S|\, d_S^{-1}(l)}{2^{|S|-1}}.$$

Corolario 4.5.1 *Los índices de poder espaciales definidos en los teoremas* 4.5.1 *y* 4.5.2 *son valores pseudo-probabilísticos.*

La expresión de las constantes para los dos valores anteriores vienen dadas por las siguientes expresiones. Para el definido en el teorema 4.5.1,

$$q_S^l = \begin{cases} d_{S\cup l}^{-1}(l) - \sum\limits_{T/S\subset T\subseteq N\setminus l} q_T^l & si\ S \subset N\setminus l \\ d_N^{-1}(l) & si\ S = N\setminus l \end{cases}$$

mientras que para el definido en el teorema 4.5.2, las constantes vienen dadas por la expresión

$$q_S^l = \begin{cases} \frac{(|S|+1)d_{S\cup l}^{-1}(l)}{2^{|S|}} - \sum\limits_{T/S\subset T\subseteq N\backslash l} q_T^l & si\ S \subset N\backslash l \\ \frac{nd_N^{-1}(l)}{2^{n-1}} & si\ S = N\backslash l \end{cases}$$

En el ejemplo 4.5.2, en el que los jugadores 3 y 4 tenían poder espacial negativo, puede comprobarse que la constante referente a la coalición $\{1,2\}$ para el jugador 3 $\left(q_{\{1,2\}}^3\right)$ es igual a $-1/5$; por lo que este jugador no estaría interesado en hacer ganadora a esta coalición.

Sustituyendo la propiedad de simetría por la de simetría espacial en la caracterización del índice de poder de Deegan-Packel se obtiene un nuevo índice de poder espacial. Al igual que para el anterior, se omite la demostración de este resultado por ser análoga a las vistas anteriormente.

Teorema 4.5.3 *Existe un único índice de poder $f : E\left(N, \{Q^i\}_{i\in N}\right) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que verifica las propiedades de eficiencia, jugador nulo, simetría espacial y fusión.*

En este caso, el índice de poder no es un valor pseudo-probabilístico porque no satisface la propiedad de transferencia. Es fácil comprobar que dado un juego espacial $\left(N, v, \{Q^i\}_{i\in N}\right)$ este índice de poder asigna a cada jugador $l \in N$, la cantidad

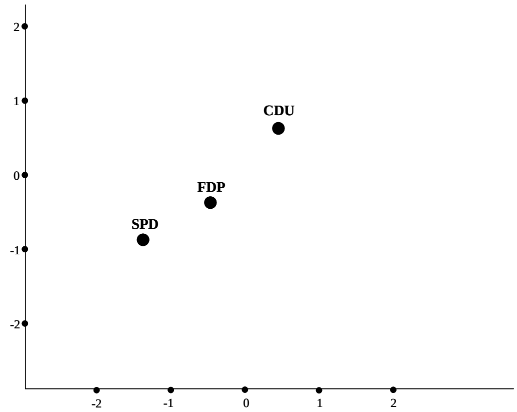
$$f_l^3\left(N, v, \left\{Q^i\right\}_{i\in N}\right) = \frac{1}{|M(v)|} \sum_{S\in M_l(v)} d_S^{-1}(l),$$

es decir, en este caso los jugadores que forman parte de una coalición minimal ganadora S, en lugar de repartir $\frac{1}{|M(v)|}$ en partes iguales, lo hacen en base a las distancias entre sus puntos ideales, de acuerdo con la propiedad de simetría espacial.

Para finalizar, en el siguiente ejemplo calculamos los tres índices de poder espacial que satisfacen la propiedad de simetría espacial definidos en esta sección.

Ejemplo 4.5.3 *En Schofield et al. (1998) se hace una revisión de los resultados de algunas elecciones que tuvieron lugar en Alemania y Holanda en las últimas tres décadas, presentando en algunos casos, las posiciones ideológicas de los partidos que se presentaron a estas elecciones. Vamos a emplear los resultados electorales de las elecciones alemanas de 1980, en las que obtuvieron representación los partidos CDU (Jugador 1: Demócratas cristianos) con 226 escaños, FDP (Jugador 2: Liberales) con 53 escaños y SPD (Jugador 3: Social Demócratas) con 218 escaños. Las posiciones ideológicas, que determinan el punto ideal de cada partido en un espacio bidimensional, fueron obtenidas por Martin and Quinn (1997). El eje X se corresponde con la dimensión económica y el eje Y con la dimensión social.*

Las coordenadas de los partidos en estas dimensiones son las siguientes: las de CDU son: $(0.55, 0.40)$, *las de FPD son* $(-0.35, -0.30)$ *y las de SPD* $(-1.23, -0.90)$. *Sus puntos ideales están representados en el siguiente gráfico:*



Aunque la diferencia de escaños es grande, los tres partidos son simétricos tanto si consideramos el juego de unanimidad (son necesarios todos los votos para ganar una votación) o el juego de mayoría (para ganar una votación es necesario obtener el voto favorable de por lo menos la mitad más uno de los miembros del Parlamento).

Si calculamos el poder de los jugadores utilizando el índice caracterizado en el teorema 4.5.1, obtenemos

$$f^1\left(N, v, \{Q^i\}_{i\in N}\right) = (0.281, 0.410, 0.309)\,, \tag{4.10}$$

en el caso de unanimidad y

$$f^1\left(N, v, \{Q^i\}_{i\in N}\right) = (0.438, 0.180, 0.382)\,, \tag{4.11}$$

en el caso de mayoría simple.

Empleando el índice caracterizado en el teorema 4.5.2, obtenemos

$$f^2\left(N, v, \{Q^i\}_{i\in N}\right) = (0.2108, 0.3075, 0.2318)\,, \tag{4.12}$$

en el caso de unanimidad y

$$f^2\left(N, v, \{Q^i\}_{i\in N}\right) = (0.5784, 0.3850, 0.5364)\,, \tag{4.13}$$

en el caso de mayoría simple.

Finalmente, con el índice caracterizado en el teorema 4.5.3, obtenemos

$$f^3\left(N, v, \{Q^i\}_{i\in N}\right) = (0.281, 0.410, 0.309)\,, \tag{4.14}$$

en el caso de unanimidad y

$$f^3\left(N, v, \{Q^i\}_{i\in N}\right) = (0.333, 0.333, 0.333)\,, \tag{4.15}$$

en el caso de mayoría simple.

En primer lugar vamos a analizar las diferencias entre (4.10) y (4.11). El jugador más poderoso en el caso de unanimidad es el jugador con punto ideal más central. La idea intuitiva de este hecho reside en que por ser necesario que todos los jugadores se pongan de acuerdo, un punto ideal situado en una situación intermedia otorga mayor poder al jugador correspondiente. Sin embargo, en el caso de mayoría, este jugador pasa a ser el menos poderoso, a pesar de que los tres jugadores (al igual que en el caso de unanimidad) son jugadores simétricos. Una interpretación coherente con estos resultados aparece en Binmore (1994). Su idea trasladada a este ejemplo es la siguiente: teniendo en cuenta que los tres jugadores son simétricos, el CDU atraería tanto a los votantes situados a la derecha de su punto ideal como a la mitad de los situados entre su punto ideal y el del FDP (algo similar pasaría con el SPD pero hacia la izquierda). Según esto, el FDP sería el *jugador con menos poder. Evidentemente, ésta es sola una de las posibles interpretaciones y podrían buscarse otras en diferente sentido. Entre la literatura sobre interpretaciones de índices de poder destacamos los libros de Enelow y Hinich (1984) y Taylor (1995) y la colección de trabajos editados por Holler (1981).*

Un comentario similar valdría para analizar las diferencias entre (4.12) y (4.13), sólo que en este caso la solución no es eficiente y el poder total es mayor en el caso de mayoría. En cuanto al índice de poder espacial f^3, *este coincide con* f^1 *en el caso de unanimidad ((4.10) y (4.14)), ya que las propiedades que determinan estas soluciones en estos juegos son las mismas. En el juego de mayoría (4.15), los tres jugadores tienen el mismo poder. Esto es debido a que en esta solución sólo intervienen las coaliciones minimales ganadoras (en este caso, constituidas por dos jugadores) y que la propiedad de simetría espacial coincide con la propiedad de simetría cuando intervienen coaliciones de* 2 *jugadores.*

Conclusiones

En este trabajo se estudian diversas soluciones en el contexto de los juegos cooperativos con utilidad transferible. Algunas de estas soluciones ya habían sido estudiadas en otros trabajos y lo que se propone son nuevas propiedades o nuevas herramientas de cálculo en diversas situaciones. En otras ocasiones, se definen nuevas soluciones que se caracterizan empleando propiedades ya utilizadas en otros trabajos y algunas que se presentan en esta memoria.

La mayoría de las soluciones estudiadas se aplican en situaciones en las que la cooperación entre los jugadores se encuentra condicionada. Por lo tanto, se trabaja en contextos en los que existe cierta información adicional a la proporcionada por la función característica del juego. Estos condicionamientos vienen dados por la existencia de una estructura de cooperación *a priori* dada por una partición del conjunto de jugadores, por restricciones en la comunicación entre los jugadores determinadas por un grafo o por la información adicional que proporciona la asociación a cada jugador de un punto en un espacio euclídeo. Estos tres condicionamientos se abordan en los capítulos 2, 3 y 4 de esta memoria.

En el capítulo 1 se hace una revisión de los conceptos básicos relativos a la teoría de los juegos con utilidad transferible y, en particular, de los juegos simples, considerando los valores de Shapley y Banzhaf y el índice de poder de Deegan-Packel. La aportación original a este capítulo reside en una nueva caracterización del índice de poder de Deegan-Packel, así como su cálculo empleando la extensión multilineal y la función generatriz.

El capítulo 2 está dedicado al estudio de juegos con uniones *a priori*. Para empezar se hace una revisión de los principales resultados referentes al valor de Owen. A continuación, se presenta una nueva caracterización del valor de Banzhaf-Owen y se definen y caracterizan un nuevo valor coalicional de

Banzhaf y dos índices de poder coalicionales de Deegan-Packel. Además, se describen los procedimientos de cálculo a partir de la extensión multilineal del juego para el valor de Banzhaf coalicional simétrico y para los dos índices de poder coalicionales de Deegan-Packel. Como aportación final en este capítulo, para todos los valores considerados, se presenta un procedimiento de cálculo para juegos de mayoría ponderada basado en la utilización de funciones generatrices. A lo largo del capítulo se proporcionan numerosos ejemplos para ilustrar los valores estudiados, así como para hacer comparaciones entre ellos.

En el capítulo 3 se estudian situaciones en las que la cooperación entre los jugadores está limitada por la presencia de un grafo de comunicación. El valor de Myerson es la extensión del valor de Shapley en este contexto. En este capítulo se caracterizan extensiones del valor de Banzhaf y del índice de poder de Deegan-Packel para situaciones con comunicación restringida.

Finalmente, el capítulo 4 está dedicado al estudio de los juegos espaciales, que son juegos simples en los que cada jugador tiene asociada una posición en un espacio ideológico. En primer lugar, se hace una revisión de los resultados obtenidos por Shapley y Owen en este contexto. A continuación se propone una nueva modificación para el índice de poder de Shapley-Shubik, así como las extensiones de varios índices al caso con uniones *a priori*. Más adelante, se introduce una familia de valores, para la que se obtienen diversos resultados, que extiende a la familia de valores probabilísticos y a los que se denomina valores pseudo-probabilísticos. Para finalizar, se propone una nueva propiedad, denominada propiedad de simetría espacial. A partir de ella, se definen y caracterizan nuevos índices de poder espaciales, alguno de los cuales pertenece a la familia de valores pseudo-probabilístico.

Evidentemente, el estudio de los puntos anteriores puede ampliarse o incluso determinar nuevas líneas de investigación. Así, el trabajo futuro podría encaminarse hacia:

- La modificación de los valores anteriores para aquellos juegos en los que existan jugadores incompatibles.

- El análisis de los juegos espaciales con comunicación restringida.

- La obtención de los valores que extiendan el valor de Banzhaf-Owen o el valor de Banzhaf coalicional simétrico para situaciones con comunicación restringida.

- El estudio de los valores pseudo-probabilísticos en situaciones con uniones *a priori*.

Para finalizar, en las siguientes tablas se resumen las caracterizaciones obtenidas para los distintos valores estudiados en esta memoria, comparándolas con otras existentes en la literatura (si procede).

Valor de Shapley	*Valor de Banzhaf*
Eficiencia	Poder total
Simetría	Simetría
Monotonía fuerte	Monotonía fuerte

Índice de poder de Shapley – Shubik	*Índice de poder de Banzhaf – Coleman*
Eficiencia	Poder total
Jugador nulo	Jugador nulo
Simetría	Simetría
Transferencia	Transferencia

Índice de poder de Deegan – Packel	*Índice de poder de Deegan – Packel*
Eficiencia	Eficiencia
Simetría	Simetría
Jugador nulo	Jugador nulo
Fusión	Monotonía minimal

Valor de Banzhaf – Owen
Valor coalicional de Banzhaf
Indiferencia en las uniones
Juego cociente para coaliciones de un jugador

Valor de Owen	*Valor de Banzhaf coalicional simétrico*
Eficiencia	Poder total coalicional
Jugador nulo	Jugador nulo
Simetría en cada unión	Simetría en cada unión
Simetría en el cociente	Simetría en el cociente
Aditividad	Aditividad

Valor de Owen	*Valor de Banzhaf coalicional simétrico*
Valor coalicional de Shapley	Valor coalicional de Banzhaf
Contribuciones equilibradas en las uniones	Contribuciones equilibradas en las uniones
Juego cociente	Juego cociente

Valor de Owen	*Valor de Banzhaf coalicional simétrico*
Eficiencia	Poder total coalicional
Jugador nulo	Jugador nulo
Contribuciones equilibradas en las uniones	Contribuciones equilibradas en las uniones
Simetría en el cociente	Simetría en el cociente
Aditividad	Aditividad

Valor de Owen	*Valor de Banzhaf coalicional simétrico*
Eficiencia	Poder total coalicional
Simetría en cada unión	Simetría en cada unión
Simetría en el cociente	Simetría en el cociente
Monotonía fuerte	Monotonía fuerte

Índice de poder de Deegan − Packel coalicional	*Índice de poder de Deegan Packel coalicional simétrico*
Eficiencia	Eficiencia
Jugador nulo	Jugador nulo
Simetría en cada unión	Simetría en cada unión
Simetría fuerte	Simetría en el cociente
Fusión	Independencia de coaliciones no minimales en el cociente
	Fusión en uniones *a priori*
	Fusión en el cociente

Índice de poder de Deegan − Packel coalicional	*Índice de poder de Deegan Packel coalicional simétrico*
Valor coalicional de Deegan-Packel	Valor coalicional de Deegan-Packel
Contribuciones equilibradas en las uniones	Contribuciones ponderadas en las uniones
Familia de los juegos cociente asociada	Juego cociente

Valor de Myerson	*Valor de Banzhaf con comunicación restringida*	*Índice de poder de Deegan − Packel con comunicación restringida*
Eficiencia en componentes	Poder total con comunicación restringida	Eficiencia en componentes
Justicia	Justicia	Justicia minimal

Valor de Myerson	*Valor de Banzhaf con comunicación restringida*	*Índice de poder de Deegan − Packel con comunicación restringida*
Eficiencia en componentes	Poder total con comunicación restringida	Eficiencia en componentes
Contribuciones equilibradas en el grafo	Contribuciones equilibradas en el grafo	Contribuciones equilibradas minimales en el grafo

Índice de poder de Shapley − Shubik simétrico espacial	*Índice de poder de Banzhaf − Coleman simétrico espacial*	*Índice de poder de Deegan − Packel simétrico espacial*
Eficiencia	Poder total	Eficiencia
Simetría espacial	Simetría espacial	Simetría espacial
Jugador nulo	Jugador nulo	Jugador nulo
Transferencia	Transferencia	Fusión

Símbolos y notación básica

Dado un conjunto N :
$|N|$ denota el cardinal del conjunto N.
$\Pi(N)$ denota el conjunto de las permutaciones de N.
2^N denota el conjunto de partes de N.
Dado un número natural $n, n!$ denota el factorial de n.
$\subseteq$: inclusión
$\subset$: inclusión estricta
$\mathbb{R}$: conjunto de números reales
$\mathbb{R}^+$: conjunto de números reales positivos
$\mathbb{R}^n$: espacio euclídeo n-dimensional
Dado un número real x, $ent(x)$ denota la parte entera de x
(N, v): un juego cooperativo con utilidad transferible (un juego TU)
$TU(N)$: conjunto de juegos TU con conjunto de jugadores N
$SI(N)$: conjunto de juegos simples con conjunto de jugadores N
u_S: función característica del juego de unanimidad de la coalición S
(N, v, P): un juego TU con sistema de uniones
$U(N)$: conjunto de juegos TU con sistema de uniones
$SU(N)$: conjunto de juegos simples con sistema de uniones
$\left(M, v^P\right)$: juego cociente asociado a un juego TU con sistema de uniones
(N, v, g): un juego TU con comunicación
$C(N)$: conjunto de juegos TU con comunicación
$CS(N)$: conjunto de juegos simples propios con comunicación
$(N, v/g)$: juego de comunicación asociado a (N, v, g)
$[q; w_1, w_2, \ldots, w_n]$: juego de mayoría ponderada
$I(N, v)$: conjunto de imputaciones del juego (N, v)
$Nu(N, v)$: núcleo del juego (N, v)
f: cualquier concepto de solución
h: extensión multilineal

E: esperanza matemática
W: conjunto de coaliciones ganadoras del juego simple (N, v)
W^m o $M(v)$: conjunto de coaliciones minimales ganadoras de (N, v)

Conceptos de solución:

φ: valor de Shapley
β: valor de Banzhaf
ρ: índice de poder de Deegan-Packel
Φ: valor de Owen
Ψ: valor de Banzhaf-Owen
Π: valor de Banzhaf coalicional simétrico
ζ: índice de poder de Deegan-Packel coalicional
Λ: índice de poder de Deegan-Packel coalicional simétrico

Propiedades:

EFI : Eficiencia (páginas 10 y 45)
PT : Poder total (página 11)
SIM : Simetría (página 11)
JN : Jugador nulo (páginas 11 y 45)
SOP : Soporte (páginas 11 y 45)
ADI : Aditividad (páginas 11 y 45)
MF : Monotonía fuerte (página 11)
TR : Transferencia (página 20)
FUS : Fusión (página 31 y 70)
MM : Monotonía minimal (página 32)
SU : Simetría en cada unión (página 45)
SC : Simetría en el cociente (página 45)
JC : Juego cociente (página 46)
MF : Monotonía fuerte (página 46)
CEU : Contribuciones equilibradas en las uniones (página 47)
IU : Indiferencia en las uniones (página 50)
JCU : Juego cociente para coaliciones formadas por un jugador (página 51)
PTC : Poder total coalicional (página 54)
SF : Simetría fuerte (página 71)
JCA : Familia de los juegos cociente asociada (página 76)

$FUSC$: Fusión en el cociente (página 82)
$FUSU$: Fusión en uniones *a priori* (página 82)
IMC : Independencia de coaliciones no minimales en el cociente (página 83)
CPU : Contribuciones ponderadas en las uniones (página 88)
$EFIC$: Eficiencia en componentes (páginas 125 y 138)
EST : Estabilidad (página 126)
JUS : Justicia (página 126)
$PTCR$: Poder total con comunicación restringida (página 128)
CEG : Contribuciones equilibradas en el grafo (página 133)
$JUSM$: Justicia minimal (página 138)
JUN : Juego nulo (página 138)
$ESTM$: Estabilidad minimal (página 142)
$CEMG$: Contribuciones equilibradas minimales en el grafo (página 142)
LIN : Linealidad (página 168)
POS : Positividad (página 168)
TIT : Títeres (página 168)
Simetría espacial (página 179)

Bibliografía

Albizuri M. J. (2001): An axiomatization of the modified Banzhaf-Coleman index, aparecerá próximamente en *International Journal of Game Theory.*

Alonso J. M. (1999): A new value for games with a coalition structure. Game Practice II. Valencia.

Alonso J. M., Colmenero J. M. y Fiestras G. (2001): Cálculo del valor de Banzhaf-Owen en juegos de mayoría ponderada mediante funciones generatrices. V Congreso Galego de Estatística e Investigación de Operacións. Ferrol.

Alonso J. M. y Fiestras G. (2002): Cálculo de valores coalicionales en juegos de mayoría ponderada mediante funciones generatrices. XXV Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa. Úbeda.

Alonso-Meijide J. M. and Fiestras-Janeiro G. (2001): Modification of the Banzhaf value for games with a coalition structure, aparecerá próximamente en *The Annals of Operations Research.*

Amer R., Carreras F. and Giménez J. M. (2001): The modified Banzhaf value for games with coalition structure: an axiomatic characterization, aparecerá próximamente en *Mathematical Social Sciences.*

Aumann R. J. and Dreze J. H. (1974): Cooperative games with coalition structure, *International Journal of Game Theory*, 3, 217-237.

Banzhaf III J. F. (1965): Weighted voting does not work: A mathematical analysis, *Rutgers Law Review*, 19, 317-343.

Bilbao J. M. (1998): Axioms for the Shapley value on convex geometries, *European Journal of Operational Research*, 110, 368-376.

Bilbao J. M. Jiménez A. and López J. J. (1998): The Banzhaf power index on convex geometries, *Mathematical Social Sciences*, 36, 157-173.

Bilbao J. M. y Fernández F. R. (1999): *Avances en teoría de juegos con aplicaciones económicas y sociales. Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Sevilla.*

Bilbao J. M. (2000): *Cooperative games on combinatorial structures. Kluwer Academic Publishers.*

Binmore K. (1994): *Teoría de juegos. McGraw-Hill.*

Brams S. F. and Affuso P. J. (1976): Power and size: A new paradox, *Theory and Decision*, 7, 29-56.

Calvo E., Lasaga J. and Winter E. (1996): The principle of balanced contributions and hierarchies of cooperation, *Mathematical Social Sciences*, 31, 171-182.

Carreras F. and Magaña A. (1994): The multilinear extension and the modified Banzhaf-Coleman index, *Mathematical Social Sciences*, 28, 215-222.

Coleman J. (1971): Control of collectivities and the power of a collectivity to act, *Social Choice, B. Lieberman (Ed.),* Gordon and Breach, 269-300.

Deegan J. and Packel E. W. (1979): A new index of power for simple n-person games, *International Journal of Game Theory*, 7, 113-123.

Dubey P. (1975): On the uniqueness of the Shapley value, *International Journal of Game Theory*, 4, 131-139.

Dubey P. and Shapley L. S. (1979): Mathematical properties of the Banzhaf power index, *Mathematics of Operations Research*, 4, 99-131.

Enelow J. M. and Hinich M. J. (1984): *The spatial theory of voting. An introduction. Cambridge University Press.*

Feltkamp V. (1995): Alternative axiomatic characterization of the Shapley and Banzhaf values, *International Journal of Game Theory*, 24, 179-186.

Fernández García J. R. (1998): *Complejidad y algoritmos en juegos cooperativos*, *Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla.*

Gillies D. B. (1953): *Some theorems on n-person games*, *Ph. D. Dissertation. University of Princeton.*

Hart S. and Mas-Colell A. (1989): Potential, value and consistency, *Econometrica*, 57, 589-614.

Holler, M. J. (1981): *Power, voting and voting power. Physica Verlag.*

Laruelle A. (1999): On the choice of a power index. *Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas.* WP-AD 99-10.

Laruelle A. and Valenciano F. (1999): Why power indices should be efficient? *Department of Applied Economics IV. Basque Country University,* n^{o}1.

Lehrer E. (1988): An axiomatization of the Banzhaf value, *International Journal of Game Theory*, 17, 89-99.

Lucas W. F. (1983): Measuring power in weighted voting system, en: *S. Brams (ed.) Political and Related Models. Springer-Verlag.*

Martin A. D. and Quinn K. M. (1997): Evaluating theories of West German voting behavior. Typescript *Washington University.*

Myerson R. B. (1977): Graphs and cooperation in games, *Mathematics of Operations Research*, 2, 225-229.

Myerson R. B. (1980): Conference structure and fair allocation rules, *International Journal of Game Theory*, 9, 169-182.

Myerson R. B. (1991): *Game theory. Analysis of conflict. Harvard University Press.*

Nowak A. S. (1997): On an axiomatization of the Banzhaf value without the additivity axiom, *International Journal of Game Theory*, 26, 137-141.

Owen G. (1972a): Political games, *Naval Research Logistic Quarterly*, 345-355.

Owen G. (1972b): Multilinear extensions of games, *Management Science*, 18, 64-79.

Owen G. (1975): Multilinear extensions and the Banzhaf value, *Naval Research Logistic Quarterly*, 22, 741-750.

Owen G. (1977): Values of games with *a priori* unions, in: *R. Henn, O. Moeschlin (Eds.), Mathematical Economics and Game Theory.* Springer Verlag, pp. 76–88.

Owen G. (1978): Characterization of the Banzhaf-Coleman index, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 35, 315-327.

Owen G. (1981): Modification of the Banzhaf-Coleman index for games with *a priori* unions, in: *M.J. Holler (Ed.), Power, Voting and Voting Power. Physica-Verlag*, pp. 232–238.

Owen G. and Shapley L. S. (1989): Optimal location of candidates in ideological space, *International Journal of Game Theory*, 18, 339-356.

Owen G. (1990): Stable outcomes in spatial voting games, *Mathematical Social Sciences*, 19, 269-279.

Owen G. and Winter E. (1992): The multilinear extension and the coalition structure value, *Games and Economic Behavior*, 4, 582-587.

Owen G. (1995): *Game Theory. Academic Press.*

Ríbnikov K. (1988): *Análisis combinatorio. Editorial Mir.*

Schofield N., Martin A. D., Quinn K. M. and Whitford A. B. (1998): Multiparty electoral competition in the Netherlands and Germany: A model based on multinomial probit. *Public Choice*, 97, 257-293.

Shapley L. S. (1953): A value for n-person games, in: *A.W. Tucker and H. Kuhn (Eds.), Annals of Mathematics Studies, Vol. 28. Princeton University Press*, pp. 307–317.

Shapley L. S. (1977): A comparison of power indices and a non-symmetric generalization. *RAND Corporation, Santa Mónica, CA, Paper P-5872.*

Shapley L. S. and Shubik M. (1954): A method for evaluating the distribution of power in a committee system. *American political Science Review*, 48, 787-792.

Taylor A. D. (1995): *Mathematics and politics. Strategy, voting, power and proof. Springer-Verlag.*

Vázquez Brage M., García-Jurado I. and Carreras F. (1996): The Owen value applied to games with graph-restricted communication, *Games and Economic Behavior*, 12, 45-53.

Vázquez Brage M., Nouweland A. van den and García-Jurado I. (1997): Owen's coalitional value and aircraft landing fees, *Mathematical Social Sciences*, 34, 273-286.

Vázquez Brage M. (1998): *Contribuciones a la Teoría del Valor en Juegos con Utilidad Transferible*, *Tesis Doctoral. Universidad de Santiago de Compostela.*

von Neumann J. (1928): Zür Theorie der Gesellschaftsspiele, *Math. Analen*, 100, 295-320.

von Neumann J. and Morgenstern O. (1944): *The Theory of Games and Economic Behavior. Princeton University Press.*

Weber R. J. (1988): Probabilistic values, in: *A. Roth (Ed.), The Shapley Value. Cambridge University Press.*

Winter E. (1992): The consistency and potential for values of games with coalition structure, *Games and Economic Behavior*, 4, 132-144.

Young J. M. (1985): Monotonic solutions of cooperative games, *International Journal of Game Theory*, 14, 65-72.