CONTRIBUCIONES A LA TEORÍA DEL VALOR EN JUEGOS EN FORMA ESTRATÉGICA Y EN PROBLEMAS DE BANCARROTA.

María Luisa Carpente Rodríguez

Noviembre, 2004

Realizado el acto público de Defensa y Mantenimiento de esta Tesis Doctoral el día 5 de noviembre de 2004 en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Santiago de Compostela, ante el tribunal formado por:

Presidente:	Dr. D. José Manuel Prada Sánchez
Vocales:	Dr. D. Francesc Carreras Escobar
	Dr. D. Peter Borm
	Dra. Dª. Ana Meca Martínez
Secretaria:	Dra. Dª. Gloria Fiestras Janeiro

Siendo los directores de la misma la Prof. Dra. Dª. Balbina Casas Méndez y el Prof. Dr. D. Ignacio García Jurado, obtuvo la máxima calificación de SOBRESALIENTE CUM LAUDE.

A mis padres.

A mi madrina, in memorian.

Índice general

Agradecimientos.

Deseo expresar mi agradecimiento, en primer lugar, a los directores de esta memoria, los Profesores Balbina Casas Méndez e Ignacio García Jurado, por su infinita paciencia, apoyo y comprensión.

Tengo que destacar la amable colaboración de Peter Borm, Ruud Hendrickx y Anne van den Nouweland que han hecho interesantes sugerencias en los trabajos de investigación que compartimos. También quiero mencionar en este apartado a todos los miembros del grupo gallego de teoría de juegos.

Deseo expresar mi gratitud al Departamento de Matemáticas y a la Facultad de Informática de la Universidad de La Coruña, por poner a mi alcance todos los medios necesarios para realizar mi labor investigadora, así como a todos aquellos compañeros que hacen que el entorno de trabajo resulte lo más agradable posible.

Ya en el plano personal, no puedo olvidarme de aquellos familiares y amigos que, por ser bastantes más de los que merezco, no voy a mencionar uno a uno. Ellos siempre han estado ahí ofreciéndome toda su amistad y su cariño, condiciones indispensables para desarrollar cualquier tipo de trabajo. Seguro que todos ellos recibirán con una sonrisa la conclusión de esta tesis.

Gracias especialmente a Toni por todo lo bueno que me transmite en el día a día.

Finalmente, quiero agradecer la financiación del Ministerio de Ciencia y Tecnología, del FEDER y de la Xunta de Galicia a través de los proyectos BEC2002-04102-C02-02 y PGIDIT03PXIC20701PN.

Introducción.

La teoría de juegos es una disciplina matemática que estudia situaciones conflictivas en las que están involucrados varios agentes que han de tomar decisiones, de modo que el resultado final depende de las decisiones de todos, y cada uno de ellos tiene sus propias preferencias sobe el conjunto de posibles resultados.

Aunque hay algún resultado previo, la teoría de juegos como tal se inicia con el trabajo de Von Neumann (1928), en el que se demuestra el teorema minimax, aunque empieza a ser conocida con ese nombre a partir de la publicación del libro "*Theory of games and economic behavior*" de Von Neumann y Morgenstern en 1944. A partir de ese momento se ha ido aplicando en distintos ámbitos (economía, política, biología, etc.) y el número de trabajos no ha cesado de crecer. En 1994 se concedió el premio Nobel de Economía a tres teóricos de juegos: John Nash, John Harsanyi y Reinhard Selten.

La teoría de juegos comprende, en realidad, dos teorías: la teoría de juegos no cooperativos y la teoría de juegos cooperativos. Clásicamente se dice que los juegos cooperativos son aquellos en los que los jugadores sí disponen de mecanismos que les permiten tomar acuerdos vinculantes (ver, por ejemplo, Harsanyi y Selten (1988)). Una interpretación más moderna de esta división (ver, por ejemplo, Van Damme y Furth (2002)) considera que los juegos no cooperativos son aquéllos en los que todas las posibilidades de cooperación de los jugadores están explícitamente incluidas en el modelo, al revés de lo que ocurre en los juegos cooperativos, en los que se suele quedar únicamente con ciertos elementos básicos de la situación porque las posibilidades de cooperación de los jugadores son tantas y tan complejas que resulta difícil modelarlas explícitamente. En esta memoria se tratan tanto juegos cooperativos como juegos no cooperativos.

La estructura del trabajo es la siguiente. Se consideran tres partes diferenciadas.

La primera parte se centrará exclusivamente en el ámbito no cooperativo y bipersonal. Esta parte consta de los capítulos 1 y 2.

> En el primer capítulo, se trata de describir propiedades deseables que verifiquen distintas formas de valoración para un jugador de un juego matricial (juego finito, bipersonal y de suma nula) y que lleven a la caracterización de tales valoraciones. El trabajo en el que se inspira este capítulo es fundamentalmente el de Vilkas (1963). En él se caracterizaba axiomáticamente el valor de la extensión mixta de un juego matricial. En este capítulo se aportan nuevas caracterizaciones para el valor de un juego y además se considera una valoración más pesimista: la que aporta el valor inferior. La principal motivación para considerar el valor inferior es que hay muchas situaciones en las que no se pueden emplear estrategias mixtas (loterías) o éstas no son razonables.
>
> En el segundo capítulo, se parte de un contexto en el que la utilidad de los jugadores no está definida explícitamente. Estos contextos son los denominados escenarios estrictamente competitivos, en los que dos jugadores tienen preferencias opuestas sobre un conjunto de posibles resultados. Se trata de caracterizar distintas formas de valoración de juegos llevados a cabo en dichos escenarios. Para ello, se deben añadir condiciones que garanticen la existencia de una función de utilidad para los jugadores. Se consideran desde los modelos más sencillos, en los que los jugadores no aleatorizan sobre sus conjuntos de estrategias hasta aquéllos en los que es posible aleatorizar. Al igual que en el capítulo 1, se aportan diferentes caracterizaciones para la función valor y la función valor inferior en este contexto.

La segunda parte de esta memoria se centra en el contexto no cooperativo n-personal. Consta de los capítulos 3 y 4.

> En el tercer capítulo, se parte de juegos en forma estratégica y se consideran distintos procedimientos para asignar juegos en forma característica a éstos. Von Neumann y Morgenstern (1944) describieron un procedimiento basado en la función valor de un juego matricial. En este

capítulo se caracteriza axiomáticamente este procedimiento. También se define un nuevo procedimiento, basado en la función valor inferior, y se caracteriza axiomáticamente. Los resultados de este capítulo son en parte consecuencia de los establecidos en el primero.

En el cuarto capítulo, se parte de la idea del capítulo anterior y se consideran funciones de valoración. Una función de valoración asocia a cada coalición no vacía de jugadores en un juego en forma estratégica un vector de pagos para los miembros de dicha coalición, que proporciona valoraciones para esos jugadores de su cooperación. Estas valoraciones se obtienen a partir de valores de Shapley aplicados a los juegos en forma característica asociados a juegos en forma estratégica, según los procedimientos descritos en el capítulo 3. Se aportarán caracterizaciones axiomáticas para dichas valoraciones.

La tercera parte de esta memoria está dedicada a problemas de bancarrota en los que se introduce una estructura de uniones a priori entre los agentes. Está estructurada en tres capítulos (del 5 al 7).

Una situación de bancarrota clásica se produce por la existencia de un recurso escaso sobre el que se tienen una serie de demandas provenientes de diferentes agentes. Estas demandas superan la cantidad total disponible de tal recurso. Estos problemas aparecen ya formulados en escritos antiguos como el Talmud y se han estudiado a lo largo de la historia exhaustivamente. Hay muchos trabajos de teoría de juegos que tratan de modelizar y estudiar estas situaciones. Una revisión de la literatura de bancarrota y de los principales resultados aparece en Thomson (2003). Las uniones a priori no son más que grupos de jugadores que ya vienen formados bien porque actúan conjuntamente, bien porque los reúne una característica común.

En el quinto capítulo, se aborda el problema de extender una regla de problemas de bancarrota clásicos al nuevo contexto en el que se introducen uniones a priori. La regla en la que se centra este capítulo es la regla igualitaria restringida, aunque se proponen varios mecanismos para la extensión de reglas clásicas al contexto de uniones. El más intuitivo es un procedimiento en dos etapas, en el que primero se produce un reparto entre las uniones, y luego cada unión realiza un reparto para sus agentes. Este procedimiento es caracterizado axiomáticamente de dos formas distintas, cuando se aplica a la regla igualitaria. Otros de los procedimientos propuestos surgen a través de la definición de una serie de juegos en forma característica asociados a estas situaciones. La definición de un juego en forma característica asociado a una situación de bancarrota clásica aparece en O´Neill (1982).

En el sexto capítulo, se continúa el estudio iniciado en el capítulo anterior, aunque se centra en la regla de bancarrota clásica denominada de llegadas aleatorias, introducida en O´Neill (1982). Esta regla se extiende a los problemas de bancarrota con uniones a priori y se caracteriza con una propiedad de consistencia, que resulta una generalización de la propiedad de consistencia definida en O´Neill (1982). Al igual que en aquel trabajo, se define un procedimiento de complección recursiva, que extiende reglas clásicas a este contexto más general. Sin embargo, y a diferencia de lo que ocurría en el trabajo que ha inspirado prácticamente todo este capítulo, la extensión basada en la regla de llegadas aleatorias y el procedimiento de complección recursiva dan resultados diferentes.

En el capítulo siete, se aplican los resultados teóricos obtenidos en los capítulos cinco y seis a una serie de datos reales. En una primera sección se analizan los datos provenientes de la reorganización de la empresa americana Pacific Gas & Electric Company. En la segunda sección de este capítulo se analizan los datos de las cuotas lácteas impuestas por la Unión Europea a los distintos países comunitarios.

Parte I

Juegos bipersonales.

Capítulo 1

Caracterizaciones de valores en juegos matriciales.

Un juego matricial es un juego bipersonal finito de suma nula. Es decir, es un juego en el que se enfrentan dos jugadores, que tienen conjuntos finitos de estrategias y cuyos pagos son opuestos.

Dado un juego matricial, es interesante conocer las posibilidades que tiene un jugador dentro de él. Una manera de reflejar esto es aportando una valoración para el jugador de tal juego. Un ejemplo de valoración es el valor del juego. En Von Neumann (1928) se demuestra que existe siempre en la extensión mixta del juego de partida. La extensión mixta de un juego matricial considera que los jugadores pueden utilizar loterías sobre sus conjuntos iniciales de estrategias. En muchos contextos, tal suposición no puede darse o no tiene sentido. En estas situaciones hay que buscar valoraciones alternativas. Una posibilidad consiste en la valoración pesimista dada por el valor inferior de un juego matricial que, como es bien sabido, existe siempre sin tener que considerar la extensión mixta del juego.

El objetivo principal de este capítulo es el de sentar las bases para el desarrollo de los siguientes capítulos de la Parte I y de la Parte II. Aquí se introducen caracterizaciones axiomáticas para el valor de un juego matricial y para el valor inferior de un juego matricial. El punto de partida para estas caracterizaciones son las que aparecen en Vilkas (1963) y Tijs (1981).[1]

[1]Un trabajo reciente e independiente del que se introduce en este capítulo es el de Norde y Voorneveld (2004), que contiene caracterizaciones axiomáticas del valor de juegos matriciales. Sus resultados son próximos a los aquí presentados pero con enfoques y

La estructura del capítulo es la siguiente. En una primera sección se describen e introducen los juegos matriciales y los conceptos básicos relacionados con ellos. En la segunda y tercera sección se aportan las caracterizaciones axiomáticas del valor y del valor inferior, respectivamente. Finalmente, se incluye un apartado de conclusiones en el que se resumen y comentan los principales resultados del capítulo y se enumeran futuras líneas de trabajo.

Parte de este capítulo aparece en Carpente y otros (2003).

1.1. Introducción a los juegos matriciales.

Un juego matricial es un juego bipersonal finito de suma nula (M, N, A) en el que $M = \{1, \ldots, m\}$ y $N = \{1, \ldots, n\}$ son los conjuntos de estrategias de los jugadores J_1 y J_2, respectivamente, y $A = [a_{ij}]_{i\in M,\ j\in N}$ es una matriz real de dimensión $m \times n$ que proporciona los pagos de los jugadores. Si el jugador J_1 escoge la estrategia $i \in M$ y el jugador J_2 escoge la estrategia $j \in N$, entonces J_1 recibe un pago de a_{ij} y J_2 obtiene un pago de $-a_{ij}$. Para simplificar la notación, se hará referencia al juego matricial (M, N, A) simplemente como A.

Dado un juego matricial A, la extensión mixta de A, que se denota por $E(A)$, es un juego bipersonal de suma nula en el que el conjunto de estrategias (denominadas mixtas) para el jugador J_1 es

$$S_M = \{x \in \mathbb{R}^M | x_i \geq 0 \text{ para todo } i \in M, \sum_{i\in M} x_i = 1\},$$

es decir, el jugador J_1 elige una distribución de probabilidad sobre sus estrategias, y, de forma similar, el conjunto de estrategias para el jugador J_2 es

$$S_N = \{y \in \mathbb{R}^N | y_j \geq 0 \text{ para todo } j \in N, \sum_{j\in N} y_j = 1\}.$$

Si el jugador J_1 elige $x \in S_M$ y el jugador J_2 elige $y \in S_N$, el pago (esperado) para el jugador J_1 es $x^T Ay$ (o $\sum_{i\in M}\sum_{j\in N} x_i\, y_j\, a_{ij}$) y para el jugador J_2 es $-x^T Ay$.[2]

propiedades diferentes.

[2] Por x^T se denota el vector fila obtenido del vector columna x.

El valor de la extensión mixta de un juego matricial se define haciendo uso del valor inferior y del valor superior. Los valores inferior y superior de $E(A)$, $\underline{V}(E(A))$ y $\overline{V}(E(A))$, respectivamente, se definen como sigue:

$$\underline{V}(E(A)) := \max_{x \in S_M} \min_{y \in S_N} x^T A y$$

$$\overline{V}(E(A)) := \min_{y \in S_N} \max_{x \in S_M} x^T A y.$$

Las bases de estas definiciones son que el jugador J_1 quiere maximizar $x^T A y$ mientras que el jugador J_2 quiere minimizarlo. Escogiendo una estrategia $x \in S_M$ apropiada, el jugador J_1 puede asegurarse conseguir al menos el valor inferior. De manera análoga, escogiendo una estrategia $y \in S_N$ apropiada, el jugador J_2 puede estar seguro de no tener que pagar más que el valor superior. Nótese que de las definiciones se sigue fácilmente que $\underline{V}(E(A)) \leq \overline{V}(E(A))$. El teorema minimax (Von Neumann (1928)) demuestra que $\underline{V}(E(A)) = \overline{V}(E(A))$ para cada juego matricial A, lo que quiere decir que el jugador J_1 espera conseguir exactamente la cantidad $\underline{V}(E(A))$. Esto conduce a la definición de valor del juego A, $V(A)$[3], que es

$$V(A) := \underline{V}(E(A)) = \overline{V}(E(A)).$$

Si los jugadores no pueden utilizar loterías sobre sus estrategias, se tiene el valor inferior

$$\underline{V}(A) := \max_{i \in M} \min_{j \in N} a_{ij}$$

del juego matricial A y su correspondiente valor superior

$$\overline{V}(A) := \min_{j \in N} \max_{i \in M} a_{ij}.$$

En general, $\underline{V}(A) < \overline{V}(A)$. Para todas las matrices A, se cumple que $\underline{V}(A) \leq \underline{V}(E(A)) = V(A) = \overline{V}(E(A)) \leq \overline{V}(A)$.

[3]Por comodidad se utiliza $V(A)$ para el valor de la extensión mixta del juego matricial y $\underline{V}(A)$ para el valor inferior del juego matricial, aunque tal notación puede no ser del todo diáfana.

1.2. Caracterizaciones del valor de la extensión mixta de un juego matricial.

Se denota por $\mathcal{A}$ al conjunto de matrices reales. La *función valor*,

$$V : \mathcal{A} \to \mathbb{R},$$

asocia a cada matriz $A \in \mathcal{A}$ su valor $V(A)$. La función valor es un ejemplo de *función de evaluación*.

Definición 1 *Una función de evaluación es una función real $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ que asigna a cada matriz $A \in \mathcal{A}$ un número real que refleja la valoración del juego matricial A desde el punto de vista del jugador J_1.*

La función valor fue caracterizada como una función de evaluación en Vilkas (1963), cuya caracterización fue extendida a una clase más amplia de juegos bipersonales de suma nula en Tijs (1981). La función valor sólo tiene sentido en situaciones en las que los jugadores pueden utilizar estrategias mixtas.

A continuación se recuerda la caracterización de la función valor realizada por Vilkas (1963). En ella se utilizaron las siguientes propiedades para una función de evaluación $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$.

A1 **Objetividad.** Para todo $a \in \mathbb{R}$, $f([a]) = a$. [4]

A2 **Monotonía.** Para todo par de matrices $A, B \in \mathcal{A}$, si $A \geq B$, entonces $f(A) \geq f(B)$.

A3 **Dominancia en filas**[5]**.** La fila $i-$ésima de la matriz A, denotada por

$$r_i = [a_{i1} \dots a_{in}],$$

está *dominada* si existe una combinación convexa, x, de las otras filas[6] de A tal que $x_j \geq a_{ij}$ para todo $j \in N$. Para toda matriz $A \in \mathcal{A}$, si la fila r está dominada, entonces se verifica que $f(A) = f(A \setminus r)$, donde $A \setminus r$ representa a la matriz obtenida de A al eliminar la fila r.

[4] Aquí, $[a]$ denota la matriz 1×1 cuyo único elemento es a.

[5] Nótese que esta definición de dominancia no es la estándar.

[6] x es una combinación convexa de las otras filas si existe $(\alpha_k)_{k\in M\setminus i}$ tal que $\alpha_k \geq 0$ para cada $k \in M \setminus i$, con $\sum_{k\in M\setminus i} \alpha_k = 1$, y $x = \sum_{k\in M\setminus i} \alpha_k r_k$.

A4 **Simetría.** Para toda matriz $A \in \mathcal{A}$, $f(-A^T) = -f(A)$.

La objetividad precisa la valoración que hace el jugador J_1 ante una situación trivial en la que los dos jugadores tienen únicamente una posible estrategia. La monotonía establece que la valoración que hace el jugador J_1 no debería decrecer cuando su pago permanece igual o bien se incrementa para cada posible elección de estrategias de los dos jugadores. La dominancia en filas establece que la valoración del jugador J_1 no debería cambiar si ya no puede escoger una estrategia que es igualada o mejorada por alguna combinación de sus otras estrategias. Cabe mencionar que esta propiedad sólo tiene sentido en un entorno en el que los jugadores pueden utilizar estrategias mixtas. La simetría significa que la suma de la valoración de los jugadores es cero (igual a la suma de lo que ganan en cualquier posible resultqado). La operación de transposición de la matriz intercambia los roles de los jugadores y el signo menos aparece ya que que el pago que recibe el jugador J_2 es el opuesto del que recibe el jugador J_1.

Teorema 2 ***(Vilkas (1963))*** *La función valor V es la única función de evaluación que satisface objetividad (A1), monotonía (A2), dominancia en filas (A3) y simetría (A4).*

El equivalente para el jugador J_2 a la dominancia en filas es lo que se denomina dominancia en columnas, que está referida a las estrategias dominadas del jugador J_2.

A5 **Dominancia en columnas.** La $j-$ésima columna de la matriz A, denotada por

$$c_j = [a_{1j} \dots a_{mj}]^T,$$

está *dominada* si existe una combinación convexa, y, de las otras columnas de A tal que $y_i \leq a_{ij}$ para todo $i \in M$. Para toda matriz $A \in \mathcal{A}$, si la columna c está dominada , entonces se tiene que $f(A) = f(A \setminus c)$, donde $A \setminus c$ representa a la matriz obtenida de A al eliminar la columna c.

La dominancia en columnas establece que la valoración que hace el jugador J_1 no debería cambiar si el jugador J_2 se ve privado de elegir una estrategia dominada para él por una combinación convexa de otras estrategias suyas. Obsérvese que el jugador J_2 quiere minimizar el pago del jugador J_1 (o, lo que es igual, maximizar su propio pago), por tanto, una estrategia del jugador J_2 está dominada si da siempre un pago mayor o igual al jugador J_1. La dominancia en columnas guarda cierta simetría con la propiedad de dominancia en filas y, de hecho, puede reemplazar a la propiedad de simetría en la caracterización de la función valor.

Teorema 3 *La función valor V es la única función de evaluación que satisface objetividad (A1), monotonía (A2), dominancia en filas (A3) y dominancia en columnas (A5).*

Demostración: *Existencia.* Del teorema anterior se deduce que V satisface *objetividad* (A1), *monotonía* (A2) y *dominancia en filas* (A3). Se verá que V satisface la *dominancia en columnas* (A5). Para ello hay que tener encuenta que si c es una columna dominada de A, entonces es una fila dominada en la matriz $-A^T$. Como Vilkas probó que V cumple la propiedad de simetría, es claro que $VA) = V(A \setminus c)$.

Unicidad. Para probar la unicidad, se supondrá que $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ es una función de evaluación que satisface las cuatro propiedades mencionadas en el teorema y se fijará una matriz $A = [a_{ij}]_{i \in M, j \in N} \in \mathcal{A}$. Como $V(A) = \underline{V}(E(A))$, y por tanto existe una estrategia mixta del jugador J_1 que garantiza a dicho jugador un pago de al menos $V(A)$. Así, utilizando que f cumple *la dominancia en filas*, se puede añadir a la matriz una fila dominada en la cual todos sus elementos son iguales a $V(A)$ sin que ello cambie la valoración que f asigna a la nueva matriz. De manera análoga, teniendo en cuenta que $V(A) = \overline{V}(E(A))$ y la *dominancia en columnas*, se puede añadir una columna en la cual todos los elementos sean iguales a $V(A)$ y esto no cambia la valoración asignada por f. Por tanto,

$$f(A) = f(\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \\ V(A) & \cdots & V(A) \end{bmatrix}) = f(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & V(A) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & V(A) \\ V(A) & \cdots & V(A) & V(A) \end{bmatrix}).$$

A continuación, se hace uso de la propiedad de *monotonía* para conseguir que todos los elementos de la matriz sean menores o iguales que $V(A)$. Esto hace que todas las filas excepto la última estén dominadas. De esta manera, se procede a utilizar la *dominancia en filas* (repetidamente) para, una por una, eliminar todas las filas excepto la última. Se obtiene así una matriz $1 \times (n+1)$ en la cual todos sus elementos son iguales a $V(A)$. De forma semejante, se puede utilizar la *dominancia en columnas* (repetidamente) y eliminar todas las columnas excepto una de la matriz resultante. Esto lleva a una matriz 1×1, a la cual se le aplica la propiedad de *objetividad*. Procediendo así, se obtiene

$$f(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & V(A) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & V(A) \\ V(A) & \cdots & V(A) & V(A) \end{bmatrix}) \geq$$

$$f(\begin{bmatrix} \text{mín}\{a_{11}, V(A)\} & \cdots & \text{mín}\{a_{1n}, V(A)\} & V(A) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \text{mín}\{a_{m1}, V(A)\} & \cdots & \text{mín}\{a_{mn}, V(A)\} & V(A) \\ V(A) & \cdots & V(A) & V(A) \end{bmatrix}) =$$

$$f([V(A) \ldots V(A)]) = f([V(A)]) = V(A).$$

Por otra parte, si se hacen todos los elementos de la matriz mayores o iguales a $V(A)$, y si se utiliza *monotonía, dominancia en columnas, dominancia en filas y objetividad*, respectivamente, se puede deducir, utilizando argumentos similares a los anteriores, que

$$f(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & V(A) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & V(A) \\ V(A) & \cdots & V(A) & V(A) \end{bmatrix}) \leq$$

$$f(\begin{bmatrix} \text{máx}\{a_{11}, V(A)\} & \cdots & \text{máx}\{a_{1n}, V(A)\} & V(A) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \text{máx}\{a_{m1}, V(A)\} & \cdots & \text{máx}\{a_{mn}, V(A)\} & V(A) \\ V(A) & \cdots & V(A) & V(A) \end{bmatrix}) =$$

$$f(\begin{bmatrix} V(A) \\ \vdots \\ V(A) \end{bmatrix}) = f([V(A)]) = V(A).$$

Finalmente, teniendo en cuenta las desigualdades e igualdades anteriores , se obtiene que $f(A) = V(A)$. Esto demuestra que la función valor V es la única función de evaluación que satisface *objetividad*, *monotonía*, *dominancia en filas y dominancia en columnas.* □

Los teoremas 2 y 3 demuestran que la simetría y la dominancia en columnas son equivalentes en presencia de objetividad, monotonía y dominancia en filas. De todas formas, esta equivalencia no se cumple en general. Por ejemplo, la función de evaluación definida como $f(A) = a_{11}$ para todo $A \in \mathcal{A}$, satisface simetría (y también objetividad y monotonía) pero no satisface la dominancia en columnas (ni la dominancia en filas).

Las propiedades de dominancia en filas y en columnas establecen que la eliminación de una estrategia dominada del jugador J_1 o del J_2 no repercute en la evaluación del jugador J_1. Al llegar a este punto surge la pregunta de manera natural de cúal sería el efecto de la eliminación de una estrategia arbitraria, dominada o no. Las siguientes propiedades que se introducen tratan de dar respuesta a este interrogante.

A6 **Eliminación de filas.** Para toda matriz $A \in \mathcal{A}$ y todas las filas r de A, se tiene que $f(A) \geq f(A \setminus r)$.

A7 **Eliminación de columnas.** Para toda matriz $A \in \mathcal{A}$ y todas las columnas c de A, se tiene que $f(A) \leq f(A \setminus c)$.

La propiedad de eliminación de filas establece que la valoración del jugador J_1 no debería incrementarse cuando se elimina una de sus estrategias. Básicamente, esto quiere decir que el jugador J_1 no puede mejorar si sus posibilidades están más restringidas. La propiedad de eliminación de columnas indica algo análogo para las estrategias del jugador J_2; ya que el pago del jugador J_2 es el opuesto al del jugador J_1, la valoración del jugador J_1 no debería disminuir cuando se elimina una estrategia del jugador J_2. Se puede ver fácilmente que la función valor satisface estas dos propiedades. Así, se puede decir que la función valor satisface una cierta monotonía con respecto a la eliminación de estrategias. Al hilo de estos razonamientos, la preguna natural que surge es saber si la eliminación de filas y de columnas puede reemplazar a la propiedad de monotonía en los resultados anteriores. La respuesta es afirmativa.[7]

Teorema 4 *La función valor V es la única función de evaluación que satisface objetividad (A1), dominancia en filas (A3), dominancia en columnas (A5), eliminación de filas (A6) y eliminación de columnas (A7).*

Demostración: *Existencia.* Ya se ha visto que V satisface las propiedades de *objetividad, dominancia en filas* y *dominancia en columnas*. Para probar que también satisface las propiedades de *eliminación de filas* y *eliminación de columnas*, es suficiente con tener en cuenta que calcular el máximo sobre un conjunto más pequeño conduce siempre a un valor menor o igual y que calcular el mínimo sobre un conjunto menor siempre lleva a un valor mayor o igual.

Unicidad. La demostración de la unicidad es similar a la del Teorema 3. Sea $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ una función de evaluación que satisface las cinco propiedades mencionadas en el teorema y sea $A = [a_{ij}]_{i \in M, j \in N}$. Entonces, aplicando *dominancia en filas* y *dominancia en columnas* se obtiene

$$f(A) = f(\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \\ V(A) & \cdots & V(A) \end{bmatrix}) = f(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & V(A) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & V(A) \\ V(A) & \cdots & V(A) & V(A) \end{bmatrix}).$$

Utilizando las propiedades de *eliminación de filas*, *dominancia en columnas* y *objetividad*, respectivamente, se tiene que

$$f(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & V(A) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & V(A) \\ V(A) & \cdots & V(A) & V(A) \end{bmatrix}) \geq f\left([V(A) \dots V(A)]\right) =$$

[7] En Norde y Voorneveld (2004) se aportan caracterizaciones axiomáticas de la función valor que son similares a la caracterización del Teorema 4. La propiedad que ellos denominan "de subjuego" es lo que aquí se denomina "eliminación de filas", y lo que definen como "propiedad de acciones estrictamente dominadas" es una suavización de lo que aquí se introduce como "dominancia en filas". Los Teoremas 2.3 y 2.4 de Norde y Voorneveld (2004), son los resultados que están más próximos al Teorema 4, de todos modos, ellos utilizan en ambos resultados las propiedades de simetría y de monotonía.

$$f([V(A)]) = V(A).$$

De una manera análoga, aplicando las propiedades de *eliminación de columnas*, *dominancia en filas* y *objetividad*, respectivamente, se verifica que

$$f(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & V(A) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & V(A) \\ V(A) & \cdots & V(A) & V(A) \end{bmatrix}) \leq f(\begin{bmatrix} V(A) \\ \vdots \\ V(A) \end{bmatrix}) = f([V(A)]) = V(A).$$

Por tanto, se puede concluir que $f(A) = V(A)$. □

La propiedad de monotonía es muy diferente de las propiedades de eliminación de filas y de columnas, aunque puede reemplazarse por estas dos propiedades en la caracterización de la función valor. La monotonía se aplica a matrices de la misma dimensión en las cuales se producen cambios en sus elementos, mientras que la eliminación de filas y de columnas se aplican a matrices que cambian de dimensión. En el mismo ejemplo que se utilizó anteriormente se pueden comprobar estas diferencias: la función de evaluación f definida como $f(A) = a_{11}$ para toda matriz $A \in \mathcal{A}$, satisface la propiedad de monotonía pero no satisface la propiedad de eliminación de filas ni la propiedad de eliminación de columnas.

1.3. Caracterizaciones del valor inferior de un juego matricial.

Este apartado se centrará principalmente en la *función valor inferior*

$$\underline{V} : \mathcal{A} \to \mathbb{R},$$

que asigna a cada matriz $A \in \mathcal{A}$ su valor inferior $\underline{V}(A)$. La principal ventaja de la función valor inferior es que no se tiene que asumir que los jugadores tengan preferencias sobre loterías; sólo se utilizan las estrategias puras en el juego matricial[8].

[8] Las estrategias de los jugadores en el juego matricial se llaman estrategias puras, en contraposición a las estrategias de la extensión mixta, que se llaman estrategias mixtas. Nótese que toda estrategia pura puede verse como una estrategia mixta. Obviamente, el recíproco no es cierto.

Con el fin de entender mejor el comportamiento de la función valor inferior, se verán cuáles de las propiedades de Vilkas (1963) cumple. Obviamente, la función valor inferior satisface las propiedades de objetividad y de monotonía. Sin embargo, los siguientes ejemplos muestran que incumple las propiedades de dominancia en filas y de simetría.

Ejemplo 5 *Considérense las dos matrices siguientes:*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad y \qquad A' = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se puede observar que la matriz A' se obtiene de la matriz A añadiendo una fila que es una combinación convexa de las otras filas (esta fila nueva se obtiene como $1/2$ de la primera fila más $1/2$ de la segunda). Para calcular el valor inferior de A, hay que tener en cuenta que el jugador J_1 consigue al menos un pago de 0 si elige la primera fila, mientras que consigue como mínimo 1 si elige la segunda fila. Por tanto, $\underline{V}(A) = 1$. Análogamente, se deduce que $\underline{V}(A') = 2$. Con este ejemplo se comprueba que al eliminar la tercera fila de la matriz A', que está dominada, cambia el valor inferior y, por tanto, que $\underline{V}$ incumple la propiedad de dominancia en filas.

Ejemplo 6 *Sean las matrices A y $-A^T$ que aparecen a continuación.*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad -A^T = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$\underline{V}(A) = 1$ y $\underline{V}(-A^T) = -2$, lo que muestra que $\underline{V}$ no satisface la propiedad de simetría.

Se introduce ahora una propiedad más débil que la dominancia en filas y que sí es cumplida por el valor inferior.

A8 **Dominancia en filas débil.** La fila i-ésima de la matriz A, que se denota por r_i, está *fuertemente dominada* si existe una fila r_k $(k \neq i)$ en la matriz que es mayor o igual que la fila r_i, es decir, $a_{kj} \geq a_{ij}$ para todo $j \in N$. Para toda matriz $A \in \mathcal{A}$, si la fila r está fuertemente dominada, entonces se tiene que $f(A) = f(A \setminus r)$.

Cabe destacar que cada fila que está fuertemente dominada está también dominada pero lo recíproco no es necesariamente cierto. Así, la propiedad de dominancia en filas débil es una propiedad menos fuerte que la propiedad de dominancia en filas.

Es inmediato comprobar que la función valor inferior satisface la dominancia en columnas. Así pues, cumple las propiedades de objetividad, monotonía y dominancia en filas débil. Sin embargo, teniendo en cuenta el Teorema 3, queda claro que estas cuatro propiedades no pueden caracterizar la función valor inferior. Se necesitará una nueva propiedad que diferencie la función de valor de la de valor inferior. Tal propiedad es la dominancia en columnas fuerte, que se introduce a continuación.

A9 **Dominancia en columnas fuerte.** La j-ésima columna de la matriz A, que se denota por c_j, está *débilmente dominada* si para todo $i \in M$ existe otra columna c_k $(k \neq j)$ tal que $a_{ik} \leq a_{ij}$. Para toda matriz $A \in \mathcal{A}$, si la columna c está débilmente dominada, entonces se tiene que $f(A) = f(A \setminus c)$.

Claramente, toda columna dominada está débilmente dominada. Por tanto esta propiedad es más fuerte que la dominancia en columnas. El siguiente ejemplo muestra que la función de valor incumple esta propiedad.

Ejemplo 7 *Considérense las dos matrices siguientes:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad y \qquad A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se puede observar que la matriz A' se obtiene de la matriz A añadiendo una columna débilmente dominada. Sin embargo, $V(A) = \frac{3}{2}$ mientras que $V(A') = 1$.

A continuación se prueba que el valor inferior sí cumple esta propiedad.

Teorema 8 *La función valor inferior $\underline{V}$ es la única función de evaluación que satisface objetividad (A1), monotonía (A2), dominancia en filas débil (A8) y dominancia en columnas fuerte (A9).*

Demostración: *Existencia.* Es inmediato que $\underline{V}$ satisface las propiedades de *objetividad*, *monotonía* y *dominancia en filas débil.* Para probar que $\underline{V}$ satisface la propiedad de *dominancia en columnas fuerte*, cabe destacar que si la columna c_j está débilmente dominada en la matriz A, entonces se tiene que $\text{mín}_{k\in N} a_{ik} = \text{mín}_{k\in N\setminus j} a_{ik}$ para cada $i \in M$. Por lo tanto, al eliminar esa columna no cambia el valor inferior.

Unicidad. Sea $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ una función de evaluación de tal forma que satisface las cuatro propiedades del enunciado y sea una matriz $A = [a_{ij}]_{i\in M, j\in N} \in \mathcal{A}$. Supóngase, sin pérdida de generalidad, que $\underline{V}(A)$ es el elemento de la matriz que ocupa la i-ésima fila y la j-ésima columna. Primero, se utiliza la propiedad de *monotonía* para que todas las filas resulten fuertemente dominadas por la i-ésima fila. Luego, se aplica la propiedad de *dominancia en filas débil* (repetidamente) para eliminar todas la filas dominadas. La matriz resultante es una matriz $1 \times n$ formada por la i-ésima fila de A. Como $\underline{V}(A) = a_{ij}$, se verifica que $a_{ik} \geq a_{ij}$ para todo $k \in N$. Por tanto, en la matriz $1 \times n$ resultante, todas las columnas excepto la j-ésima están débilmente dominadas y se pueden eliminar aplicando la propiedad de *dominancia en columnas fuerte*. Finalmente, se puede aplicar la propiedad de *objetividad.* Así, resulta que

$$f(A) \geq f(\begin{bmatrix} \text{mín}\{a_{11}, a_{i1}\} & \cdots & \text{mín}\{a_{1n}, a_{in}\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{mín}\{a_{m1}, a_{i1}\} & \cdots & \text{mín}\{a_{mn}, a_{in}\} \end{bmatrix}) =$$

$$f([a_{i1} \dots a_{in}]) = f([a_{ij}]) = a_{ij} = \underline{V}(A).$$

Para demostrar que $f(A) \leq \underline{V}(A)$, se añade primero una columna a la matriz A en la cual todos los elementos son iguales a $\underline{V}(A)$. Nótese que tal columna está débilmente dominada y, por tanto, esta modificación, por la propiedad de *dominancia en columnas fuerte*, no altera la valoración dada por f. Luego se aplica la propiedad de *monotonía* para hacer que todas las columnas queden débilmente dominadas por esta nueva columna, después de lo cual se utiliza de nuevo la propiedad de *dominancia en columnas fuerte* (repetidamente) para eliminar todas esas columnas. La matriz resultante es una matriz $m \times 1$ en la cual todos sus elementos son iguales a $\underline{V}(A)$, y, es evidente, que así todas las filas resultan estar fuertemente dominadas y se puede prescindir de todas excepto de una por la propiedad de *dominancia en filas débil.* Si se aplica la propiedad de *objetividad* queda finalizada esta secuencia obteniendo el resultado deseado.

$$f(A) = f(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & \underline{V}(A) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & \underline{V}(A) \end{bmatrix}) \leq$$

$$f(\begin{bmatrix} \text{máx}\{a_{11}, \underline{V}(A)\} & \cdots & \text{máx}\{a_{1n}, \underline{V}(A)\} & \underline{V}(A) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \text{máx}\{a_{m1}, \underline{V}(A)\} & \cdots & \text{máx}\{a_{mn}, \underline{V}(A)\} & \underline{V}(A) \end{bmatrix}) =$$

$$f(\begin{bmatrix} \underline{V}(A) \\ \vdots \\ \underline{V}(A) \end{bmatrix}) = f([\underline{V}(A)]) = \underline{V}(A).$$

Queda demostrado que $f(A) = \underline{V}(A)$, lo que asegura que la función del valor inferior $\underline{V}$ es la unica función de evaluación que satisface *objetividad*, *monotonía*, *dominancia en filas débil* y *dominancia en columnas fuerte*. □

Al igual que en la caracterización de la función valor en el Teorema 8, la propiedad de monotonía puede sustituirse por las propiedades de eliminación de filas y de eliminación de columnas.

Teorema 9 *La función valor inferior $\underline{V}$ es la única función de evaluación que satisface objetividad (A1), eliminación de filas (A6), eliminación de columnas (A7), dominancia en filas débil (A8) y dominancia en columnas fuerte (A9).*

Demostración: *Existencia*. Ya se ha comprobado que $\underline{V}$ satisface las propiedades de *objetividad*, *dominancia en filas débil* y *dominancia en columnas fuerte*. Para probar que satisface también las propiedades de *eliminación de filas* y de *eliminación de columnas*, basta con darse cuenta que calcular el máximo en un conjunto más pequeño lleva a un valor menor o igual y que (simétricamente) calcular el mínimo sobre un conjunto más pequeño lleva a un valor mayor o igual.

Unicidad. La demostración de la unicidad es análoga a la que se aporta en el correspondiente apartado del Teorema 8. Sea $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ una función de evaluación que verifica las cinco propiedades enumeradas en el teorema y sea una matriz $A = [a_{ij}]_{i \in M, j \in N} \in \mathcal{A}$. Supóngase, sin pérdida de generalidad, que el elemento $\underline{V}(A)$ está situado en la i-ésima fila y la j-ésima columna. Entonces, si se aplican las propiedades de *eliminación de filas*, *dominancia en columnas fuerte* y *objetividad*, respectivamente, se obtiene que

$$f(A) \geq f([a_{i1} \ldots a_{in}]) = f([a_{ij}]) = a_{ij} = \underline{V}(A).$$

Utilizando ahora las propiedades de *dominancia en columnas fuerte*, *eliminación de columnas*, *dominancia en filas débil* y *objetividad,* respectivamente, se verifica que

$$f(A) = f(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & \underline{V}(A) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & \underline{V}(A) \end{bmatrix}) \leq f(\begin{bmatrix} \underline{V}(A) \\ \vdots \\ \underline{V}(A) \end{bmatrix}) =$$

$$f([\underline{V}(A)]) = \underline{V}(A).$$

Lo que demuestra que $f(A) = \underline{V}(A)$. □

1.4. Conclusiones.

Se resumen a continuación en una tabla los cuatro resultados aportados en estas secciones.

V	$\underline{V}$
Objetividad Monotonía Dominancia en filas Dominancia en columnas	Objetividad Monotonía Dominancia en filas débil Dominancia en columnas fuerte
Objetividad Eliminación de filas Eliminación de columnas Dominancia en filas Dominancia en columnas	Objetividad Eliminación de filas Eliminación de columnas Dominancia en filas débil Dominancia en columnas fuerte

En la siguiente tabla se enumeran las propiedades mencionadas en las secciones anteriores y se indica en las correspondientes columnas si son verificadas o no por las funciones de evaluación del valor y del valor inferior. Se puede ver que únicamente son tres propiedades de todas las mencionadas las que marcan las diferencias entre tales funciones.

	V	$\underline{V}$
A1.- Objetividad	Sí	Sí
A2.- Monotonía	Sí	Sí
A3.- Dominancia en filas	Sí	No
A4.- Simetría	Sí	No
A5.- Dominancia en columnas	Sí	Sí
A6.- Eliminación de filas	Sí	Sí
A7.- Eliminación de columnas	Sí	Sí
A8.- Dominancia en filas débil	Sí	Sí
A9.- Dominancia en columnas fuerte	No	Sí

A la vista de esta tabla y de las definiciones de las propiedades definidas en las secciones anteriores, cabe preguntarse por qué no se definió una propiedad de dominancia en filas fuerte y una dominancia en columnas débil y en ese caso qué aportarían a este estudio. La definición de tales propiedades es la que figura a continuación:

A10 **Dominancia en filas fuerte**. La i-ésima fila de la matriz A, denotada por $r_i = [a_{i1} \dots a_{in}]$, está *débilmente dominada* si para todo $j \in N$ existe otra fila r_k $(k \neq i)$ tal que $a_{ij} \leq a_{ik}$. Para toda matriz $A \in \mathcal{A}$, si la fila r está débilmente dominada, entonces se tiene que $f(A) = f(A \setminus r)$.

A11 **Dominancia en columnas débil**. La j-ésima columna de la matriz A, denotada por $c_j = [a_{1j} \dots a_{mj}]^T$, está *fuertemente dominada* si existe una columna c_k $(k \neq j)$ tal que $a_{ik} \leq a_{ij}$ para todo $i \in M$. Para cualquier matriz $A \in \mathcal{A}$, si la columna c está fuertemente dominada, entonces se tiene que $f(A) = f(A \setminus c)$.

La dominancia en columnas implica la dominancia en columnas débil y la dominancia en filas fuerte implica la dominancia en filas. Como tanto la función valor como la función valor inferior satisfacen la propiedad de dominancia en columnas, también satisfacen la propiedad de dominancia en columnas débil. La función valor inferior no satisface la propiedad de dominancia en filas y, por tanto, tampoco satisface la propiedad de dominancia en filas fuerte. La función valor no satisface la propiedad de dominancia en filas fuerte como se observa en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10 *Considérense las siguientes matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad y \qquad A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Se puede observar que la matriz A' se obtiene a partir de la matriz A eliminando la tercera fila que está débilmente dominada. Sin embargo, $V(A) = 2$ mientras que $V(A') = 3/2$.

Por tanto, estas propiedades no aportan nada, pues no discriminan entre la función de evaluación del valor o la del valor inferior.

Como futuras líneas de trabajo en este contexto se pueden mencionar:

- Obtener caracterizaciones similares a las de este capítulo para el valor superior y para otras funciones de evaluación de juegos matriciales.
- Adaptar los resultados de Norde y Voorneveld (2004) al contexto del valor inferior. Ellos se centran en el valor de un juego matricial.
- Extender los resultados de este capítulo a juegos de suma nula infinitos.

Capítulo 2

Caracterizaciones de valores en juegos estrictamente competitivos.

En este capítulo se consideran situaciones conflictivas para dos jugadores con intereses totalmente contrapuestos, cuyas utilidades no están explícitamente definidas, como en el caso de los juegos matriciales.

En el modelo que se considera en este capítulo, los jugadores parten de unas preferencias (opuestas) sobre un conjunto de posibles resultados. Esto es lo que se denomina un escenario de interacción estrictamente competitiva. Cada jugador dispone, además, de un conjunto finito de estrategias. Cada combinación de estrategias da lugar a un resultado. El principal objetivo del capítulo es proporcionar y caracterizar procedimientos de evaluación para la clase de juegos que surge de este modo, una vez que se ha fijado un escenario estrictamente competitivo.

En la literatura se encuentran algunos trabajos que abordan cuestiones semejantes desde otro punto de vista. Es el caso de la axiomatización conjunta de utilidad y del valor para juegos matriciales que se presenta en Hart, Modica y Schmeidler (1994). Ellos parten de un entorno que garantiza la existencia de una utilidad de Anscombe-Aumann (Anscombe y Aumann (1963)).

En este capítulo, también se aportan caracterizaciones conjuntas de utilidad y valor pero no en el contexto de la teoría de la utilidad de Anscombe-Aumann.

La distribución del capítulo es la que sigue. En un primer apartado, se introducen los escenarios de interacción estrictamente competitivos. En ellos se definen los correspondientes juegos bipersonales, tanto para el caso más simple (en el que los jugadores no utilizan estrategias mixtas), como para el más complejo, relacionado con los escenarios mixtos (en los que los jugadores pueden elegir loterías sobre sus conjuntos de estrategias). En el segundo apartado, se caracteriza un procedimiento de evaluación basado en el valor inferior. En el tercero, se caracteriza un procedimiento de evaluación basado en el valor. Finalmente, se aporta una pequeña sección de conclusiones en la que se resaltan los principales resultados del capítulo y se enumeran posibles líneas futuras de trabajo.

2.1. Introducción a los juegos estrictamente competitivos.

En esta sección, el principal interés se centrará en analizar situaciones en las que se enfrentan dos jugadores a los que se denomina J_1 y J_2, respectivamente, que tienen unas preferencias opuestas sobre un conjunto de posibles resultados. Esto es lo que se denomina un escenario de interacción estrictamente competitiva, y que se introduce a continuación.

Definición 11 *Se dice que* $(R, \succeq)$ *es un escenario de interacción estrictamente competitiva (por simplicidad se hará referencia a él simplemente como un escenario) si y sólo si:*

- R *es un conjunto finito de posibles resultados.*
- $\succeq$ *es una relación binaria sobre* R *que cumple las siguientes propiedades:*
  1. ***Comparabilidad****. Se dice que* $\succeq$ *es una relación binaria comparable sobre* R *si dados* $r_1, r_2 \in R$*, si* $r_1 \nsucceq r_2$ *entonces* $r_2 \succeq r_1$*.*
  2. ***Transitividad****. Se dice que* $\succeq$ *es una relación binaria transitiva sobre* R *si dados* $r_1, r_2, r_3 \in R$*, si* $r_1 \succeq r_2$ *y* $r_2 \succeq r_3$ *entonces* $r_1 \succeq r_3$*.*
- $\succeq$ *representa las preferencias débiles de los jugadores* J_1 *y* J_2 *de la manera siguiente. Para cada* $r_1, r_2 \in R$

- *J_1 prefiere débilmente r_1 a r_2 si y sólo si $r_1 \succeq r_2$,*
- *J_2 prefiere débilmente r_1 a r_2 si y sólo si $r_2 \succeq r_1$.*

Las propiedades de comparabilidad y de transitividad son las que determinan que la relación binaria $\succeq$ sea una *preferencia débil*. Que $\succeq$ represente las preferencias de un jugador y las opuestas a las preferencias del otro jugador es lo que nos sitúa en un marco de competitividad estricta. Dada la preferencia débil $\succeq$ se define la *preferencia estricta* $\succ$ ($r_1 \succ r_2 \Leftrightarrow r_1 \succeq r_2$ y $r_2 \not\succeq r_1$) y la *indiferencia* $\sim$ ($r_1 \sim r_2 \Leftrightarrow r_1 \succeq r_2$ y $r_2 \succeq r_1$).

Una función de utilidad u que representa la preferencia $\succeq$ es una aplicación $u : R \to \mathbb{R}$ tal que, para cualesquiera $r_1, r_2 \in R$

$$r_1 \succeq r_2 \Leftrightarrow u(r_1) \geq u(r_2).$$

El siguiente es un resultado bien conocido de teoría de decisión, cuya demostración puede consultarse, por ejemplo, en Kreps (1988).

Teorema 12 *Sea R un conjunto finito de resultados. Si $\succeq$ es una relación binaria sobre R que es comparable y transitiva entonces existe una función de utilidad $u : R \to \mathbb{R}$ que la representa. Además u es única salvo transformaciones estrictamente crecientes, es decir, si $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función estrictamente creciente, entonces $T \circ u$ es también una función de utilidad que representa a $\succeq$ y, recíprocamente, si v es una función de utilidad que representa a $\succeq$ entonces existe una función estrictamente creciente $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $v = T \circ u$.*

Hasta este momento sólo se ha hablado de relaciones de preferencia de los jugadores sobre un conjunto de posibles resultados sin ser importante cuál es el mecanismo que conduce a dichos resultados. Se considerará ahora que los jugadores pueden realizar decisiones y que, en función de las decisiones de todos, se produce un resultado. Esto es lo que nos lleva de un entorno de teoría de decisión a un entorno de teoría de juegos. En la siguiente definición se introduce lo que se entiende por juego (bipersonal) en este contexto.

Definición 13 *Un juego para el escenario $(R, \succeq)$ viene dado por*

$$((A, B, f), (R, \succeq)),$$

donde A y B son los conjuntos finitos de estrategias de los jugadores uno y dos, respectivamente, y $f : A \times B \to R$, es una aplicación que asocia un resultado a cada par de estrategias. Denotaremos al conjunto de juegos para el escenario $(R, \succeq)$ por $\mathcal{G}(R, \succeq)$.

A continuación se va a plantear un modelo parecido aunque ligeramente distinto. Se considera ahora que los jugadores pueden utilizar loterías sobre sus conjuntos de estrategias. En tal caso interesará que sus preferencias estén definidas sobre el conjunto de las loterías sobre R.

Definición 14 *Se dice que $(\Delta(R), \succsim)$ es un escenario mixto de interacción estrictamente competitiva (por simplicidad se hará referencia a él simplemente como un escenario mixto) si y sólo si:*

- *R es el conjunto finito de posibles resultados.*
- *$\succsim$ es una relación binaria sobre $\Delta(R)$, el conjunto de loterías sobre R, que cumple las siguientes propiedades:*
    1. ***Comparabilidad.***
    2. ***Transitividad.***
    3. ***Intercambiabilidad.** Se dice que $\succsim$ es una relación binaria intercambiable sobre $\Delta(R)$ si para cualesquiera p_1, p_2, $p_3 \in \Delta(R)$ y cualquier $\alpha \in (0,1]$, se tiene que $\alpha p_1 + (1-\alpha)p_3 \succsim \alpha p_2 + (1-\alpha)p_3$ si y sólo si $p_1 \succsim p_2$.*
    4. ***Continuidad.** Se dice que $\succsim$ es una relación binaria continua sobre $\Delta(R)$ si para cualesquiera p_1, p_2, $p_3 \in \Delta(R)$, si $p_1 \succsim p_2 \succsim p_3$ entoces existe $\alpha, \beta \in [0,1]$ tal que $\alpha p_1 + (1-\alpha)p_3 \succsim p_2 \succsim \beta p_1 + (1-\beta)p_3$.*
- *$\succeq$ representa las preferencias débiles de los jugadores J_1 y J_2 de la manera siguiente. Para cada p_1, $p_2 \in \Delta(R)$*
    - *J_1 prefiere débilmente p_1 a p_2 si y sólo si $p_1 \succsim p_2$,*
    - *J_2 prefiere débilmente p_1 a p_2 si y sólo si $p_2 \succsim p_1$.*

Una función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern u que representa la preferencia $\succsim$ es una aplicación $u : R \to \mathbb{R}$ tal que, para cualesquiera p_1, $p_2 \in \Delta(R)$

$$p_1 \succsim p_2 \Leftrightarrow \sum_{r \in R} p_1(r)u(r) \geq \sum_{r \in R} p_2(r)u(r).$$

Claramente u da lugar a una función de utilidad $U : \Delta(R) \to \mathbb{R}$ que representa la preferencia $\succsim$. Tal U viene definida por:

$$U(p) = \sum_{r \in R} p(r)u(r),$$

para toda $p \in \Delta(R)$.

El siguiente es un resultado bien conocido de teoría de decisión, cuya demostración puede consultarse, por ejemplo, en Kreps (1988).

Teorema 15 *Si $\succsim$ es una relación binaria sobre $\Delta(R)$ comparable, transitiva, intercambiable y continua, entonces existe una función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern $u : R \to \mathbb{R}$ que la representa. Además u es única salvo transformaciones afines positivas. Es decir, si $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una transformación afín positiva ($T(x) = ax + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$), entonces $T \circ u$ también es una función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern que representa a $\succsim$ y, recíprocamente, si v es una función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern que representa a $\succsim$ entonces existe una transformación afín positiva T tal que $v = T \circ u$.*

Nótese que, en vista del teorema anterior, en un escenario mixto existe una función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern representando las preferencias, y que es única salvo transformaciones afines positivas.

Definición 16 *Un juego para el escenario mixto $(\Delta(R), \succeq)$ se define como*

$$((A, B, f), (\Delta(R), \succeq)),$$

donde A y B son conjuntos finitos de estrategias para los jugadores uno y dos, respectivamente, y $f : A \times B \to \Delta(R)$ es una aplicación que asocia una lotería sobre el conjunto R, para cada par de estrategias. Se denota al conjunto de juegos para un escenario mixto $(\Delta(R), \succeq)$ por $\mathcal{G}^{\mathcal{L}}(\Delta(R), \succeq)$.

A continuación se va a introducir una notación que será de utilidad y que se usará en algunas ocasiones, a pesar de que constituye un cierto abuso notacional. Supóngase que en el juego de la definición anterior J_1 utiliza una lotería p_1 de $\Delta(A)$ y que J_2 utiliza una lotería p_2 de $\Delta(B)$. En tal caso, en vista de f y teniendo en cuenta que las elecciones de J_1 y J_2 son independientes, (p_1, p_2) da lugar a una lotería sobre R. Se denotará por $f(p_1, p_2)$ a tal lotería.

2.2. Caracterizaciones del valor inferior en juegos estrictamente competitivos.

En esta sección, a menos que se indique lo contrario, se considera que el escenario $(R, \succeq)$ permanece fijado. Por tanto, por simplicidad, se hará referencia a un juego para este escenario como una terna (A, B, f) y se denota al conjunto de juegos para $(R, \succeq)$ por $\mathcal{G}$. El objetivo es definir una función de valoración desde el punto de vista de J_1, que compare los juegos del escenario $(R, \succeq)$ a los que se puede enfrentar tal jugador.

Definición 17 *Una función de evaluación es una aplicación $F : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ tal que, para todo juego $G \in \mathcal{G}$, $F(G)$ aporta una valoración del juego G para el jugador uno.*

A continuación, se introducen algunas propiedades deseables para una función de evaluación F. Estas propiedades están muy ligadas a las introducidas en el capítulo anterior para juegos matriciales.

B1 **Monotonía.** Sean $G = (A, B, f)$ y $G' = (A, B, f')$ de $\mathcal{G}$ tales que, para toda $a_i \in A$ y toda $b_j \in B$, se tiene que

$$f'(a_i, b_j) \succeq f(a_i, b_j).$$

Entonces $F(G') \geq F(G)$.

B2 **Eliminación de estrategias fuertemente dominadas del jugador uno.** Sea $G = (A, B, f) \in \mathcal{G}$. Se dice que $a_i \in A$ es una *estrategia fuertemente dominada* del jugador uno si existe $a_k \in A$ $(k \neq i)$ tal que

$$f(a_k, b_j) \succeq f(a_i, b_j)$$

para todo $b_j \in B$. Para cualquier $G = (A, B, f) \in \mathcal{G}$, si $a_i \in A$ es una estrategia fuertemente dominada del jugador uno y si $G' = (A', B, f') \in \mathcal{G}$ es tal que $A' = A \setminus \{a_i\}$ y $f' = f|_{A' \times B}$, entonces se tiene que $F(G) = F(G')$.

B3 **Eliminación de amenazas débilmente dominadas del jugador dos.** Sea $G = (A, B, f) \in \mathcal{G}$. Se dice que $b_j \in B$ es una *amenaza débilmente dominada del jugador dos* si para cada $a_i \in A$ existe $b_k \in B$ $(k \neq i)$ tal que

$$f(a_i, b_j) \succeq f(a_i, b_k).$$

Para cualquier $G = (A, B, f) \in \mathcal{G}$, si $b_j \in B$ es una amenaza débilmente dominada del jugador dos y si se considera $G' = (A, B', f') \in \mathcal{G}$, donde $B' = B \setminus \{b_j\}$ y $f' = f|_{A \times B'}$, entonces se tiene que $F(G) = F(G')$.

La familia de funciones de evaluación que se proponen para este contexto, se caracterizará con estas tres propiedades. Primero se introduce alguna notación adicional. Sea $G = (A, B, f) \in \mathcal{G}$ y sea u una función de utilidad que representa a $\succeq$. Se denota por $u \circ f$ al juego matricial que viene dado por la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} u(f(a_1, b_1)) & \cdots & u(f(a_1, b_n)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u(f(a_m, b_1)) & \cdots & u(f(a_m, b_n)) \end{bmatrix}.$$

Se denota por $\underline{V}(u \circ f)$ el valor inferior del juego matricial $u \circ f$, es decir,

$$\underline{V}(u \circ f) = \max_{a_i \in A} \min_{b_j \in B} u(f(a_i, b_j)).$$

Teorema 18 *Sea F una función de evaluación que verifica monotonía (B1), eliminación de estrategias fuertemente dominadas del jugador uno (B2) y eliminación de amenazas débilmente dominadas para el jugador dos (B3). Entonces existe una función de utilidad u que representa a $\succeq$ tal que, para cada $G \in \mathcal{G}$, se tiene que $F(G) = \underline{V}(u \circ f)$.*

Demostración: Para cada $r \in R$, sea $G_r = (\{1\}, \{2\}, f)$ con $f(1,2) = r$. Se define

$$u(r) := F(G_r).$$

Nótese primero que u es una función de utilidad que representa a $\succeq$ (esto es trivial sin más que tener en cuenta que F verifica *monotonía* (B1)). Sea ahora $G \in \mathcal{G}$. Se demostrará que $F(G) = \underline{V}(u \circ f)$. Se puede suponer que

$$\underline{V}(u \circ f) = u(f(a_k, b_l)),$$

para un cierto $k \in \{1, ..., m\}$ y un cierto $l \in \{1, ..., n\}$.

- *Se demostrará primero que* $F(G) \geq \underline{V}(u \circ f)$.

  Considérese el juego $G_1 = (A, B, f_1) \in \mathcal{G}$ definido, para cada $a_i \in A$ y cada $b_j \in B$ por:

  $$f_1(a_i, b_j) = \begin{cases} f(a_i, b_j) & \text{si } f(a_k, b_j) \succeq f(a_i, b_j) \\ f(a_k, b_j) & \text{si } f(a_i, b_j) \succeq f(a_k, b_j) \end{cases}.$$

  Como F verifica *monotonía*, entonces $F(G) \geq F(G_1)$. En el juego G_1 todas las estrategias del jugador uno diferentes de a_k están fuertemente dominadas. Por tanto, si se considera el juego $G_2 = (\{a_k\}, B, f_1|_{\{a_k\} \times B})$, por el hecho de que F verifica la propiedad de *eliminación de estrategias fuertemente dominadas del jugador uno,* se tiene que $F(G_1) = F(G_2)$. Ahora bien, como $\underline{V}(u \circ f) = u(f(a_k, b_l))$, está claro que $f(a_k, b_j) \succeq f(a_k, b_l)$ para todo $b_j \in B$. Entonces, teniendo en cuenta que F cumple la propiedad de *eliminación de amenazas débilmente dominadas del jugador dos*, $F(G_2) = F(G_3)$, donde $G_3 = (\{a_k\}, \{b_l\}, f_1|_{\{a_k\} \times \{b_l\}})$. Nótese que, del hecho de que F verifica *monotonía* y de la definición de la utilidad u,

  $$F(G_3) = F(G_{f(a_k, b_l)}) = u(f(a_k, b_l)).$$

  Por tanto,

  $$F(G) \geq u(f(a_k, b_l)) = \underline{V}(u \circ f).$$

- *Se demuestra ahora que* $\underline{V}(u \circ f) \geq F(G)$.

  Se define el juego $G_4 = (A, B \cup \{b\}, f_4)$ de la siguiente manera:

  $$f_4(a_i, b_j) = f(a_i, b_j)$$

para todo $a_i \in A$ y todo $b_j \in B$, y

$$f_4(a_i, b) = f(a_k, b_l)$$

para todo $a_i \in A$.

En el juego G_4 la amenaza b del jugador dos está débilmente dominada (hay que tener en cuenta que $\underline{V}(u \circ f) = u(f(a_k, b_l)))$. Por tanto, aplicando la propiedad de *eliminación de amenazas débilmente dominadas del jugador dos*, se tiene que $F(G) = F(G_4)$.

Sea ahora el juego $G_5 = (A, B \cup \{b\}, f_5)$ definido como sigue:

$$f_5(a_i, b) = f_4(a_i, b)$$

para todo $a_i \in A$.

$$f_5(a_i, b_j) = \begin{cases} f_4(a_i, b_j) & \text{si } f_4(a_i, b_j) \succeq f(a_k, b_l) \\ f(a_k, b_l) & \text{si } f(a_k, b_l) \succeq f_4(a_i, b_j) \end{cases}.$$

Si se tiene en cuenta la *monotonía*, se tiene que $F(G_4) \leq F(G_5)$. En G_5 todas las amenazas del jugador dos diferentes de b están débilmente dominadas (por construcción). Por tanto, si se define el juego $G_6 = (A, \{b\}, f|_{A \times \{b\}}) \in \mathcal{G}$ y se aplica la propiedad de *eliminación de amenazas débilmente dominadas del jugador dos*, se verifica la igualdad $F(G_5) = F(G_6)$. De la propiedad de *eliminación de estrategias fuertemente dominadas del jugador uno*, se deduce que $F(G_6) = F(G_7)$, donde $G_7 = (\{a_k\}, \{b\}, f|_{\{a_k\} \times \{b\}})$. Cabe destacar que, del hecho de que F verifique *monotonía* y de la definición de la utilidad u, se obtiene

$$F(G_7) = F(G_{f(a_k, b_l)}) = u(f(a_k, b_l)).$$

Por tanto,

$$F(G) \leq u(f(a_k, b_l)) = \underline{V}(u \circ f).$$

Esto finaliza la demostración del teorema. □

Corolario 19 *Existe una función de evaluación F verificando monotonía (B1), eliminación de estrategias fuertemente dominadas del jugador uno (B2) y eliminación de amenazas débilmente dominadas para el jugador dos (B3).*

Además, para todo $G \in \mathcal{G}$, se tiene que $F(G) = \underline{V}(u \circ f)$ donde u es una función de utilidad que representa a $\succeq$. Finalmente, se tiene que F es única salvo transformaciones estrictamente crecientes (de modo que, si $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función estrictamente creciente, entonces $T \circ F$ también es una función de evaluación que satisface B1, B2 y B3; y, recíprocamente, si $\bar{F}$ es una función de evaluación que verifica B1, B2 y B3, entonces existe una función estrictamente creciente $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\bar{F} = T \circ F$).

Demostración: Para probar la existencia, sea u una función de utilidad que representa a $\succeq$. En vista de los resultados del capítulo anterior, se comprueba fácilmente que si se define F como $F(G) := \underline{V}(u \circ f)$, para todo $G \in \mathcal{G}$, F verifica las propiedades de *monotonía* (B1), e*liminación de estrategias fuertemente dominadas del jugador uno* (B2) y *eliminación de amenazas débilmente dominadas para el jugador dos* (B3). El resto del corolario se sigue del Teorema 18 anterior y del hecho de que

$$\underline{V}(T(A)) = T(\underline{V}(A)),$$

para cada función estrictamente creciente $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y cada matriz real $A = [a_{ij}]_{i \in M, j \in N}$, ($T(A)$ denota a la matriz $[T(a_{ij})]_{i \in M, j \in N}$). $\square$

2.3. Caracterizaciones del valor en juegos estrictamente competitivos.

En esta sección, a menos que se indique lo contrario, se considera que el escenario mixto $(\Delta(R), \succeq)$ permanece fijado. Por tanto, por cuestiones de simplicidad, se hará referencia a un juego para este escenario mixto como la terna (A, B, f) y se denota al conjunto de juegos para $(\Delta(R), \succeq)$ por $\mathcal{G}^{\mathcal{L}}$. El objetivo es definir una función de evaluación para el jugador J_1 en este nuevo contexto, que compare los juegos del escenario mixto $(\Delta(R), \succeq)$ a los que se puede enfrentar dicho jugador.

Definición 20 *Una función de evaluación es una aplicación $F : \mathcal{G}^{\mathcal{L}} \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $G \in \mathcal{G}^{\mathcal{L}}$, $F(G)$ aporta una valoración del juego G para el jugador uno.*

A continuación, se introducen algunas propiedades naturales para una función de evaluación F referida a un escenario mixto. Estas propiedades están claramente inspiradas y relacionadas con aquéllas introducidas en el capítulo anterior para la caracterización de la función valor para juegos matriciales.

B4 **Monotonía.** Sean $G = (A, B, f)$ y $G' = (A, B, f')$ de $\mathcal{G}^{\mathcal{L}}$ tales que, para toda $a_i \in A$ y toda $b_j \in B$, se verifica que

$$f'(a_i, b_j) \succeq f(a_i, b_j).$$

Entonces $F(G') \geq F(G)$.

B5 **Eliminación de estrategias dominadas del jugador uno.** Sea $G = (A, B, f) \in \mathcal{G}^{\mathcal{L}}$. Se dice que $a_i \in A$ es una *estrategia dominada* del jugador uno si existe p, una lotería sobre $A \backslash \{a_i\}$, tal que

$$f(p, b_j) \succeq f(a_i, b_j)$$

para todo $b_j \in B$. Para cualquier $G = (A, B, f) \in \mathcal{G}^{\mathcal{L}}$, si $a_i \in A$ es una estrategia dominada del jugador uno y si se considera $G' = (A', B, f') \in \mathcal{G}^{\mathcal{L}}$, donde $A' = A \setminus \{a_i\}$ y $f' = f|_{A' \times B}$, entonces se tiene que $F(G) = F(G')$.

B6 **Eliminación de amenazas dominadas del jugador dos.** Sea $G = (A, B, f) \in \mathcal{G}^{\mathcal{L}}$. Se dice que $b_j \in B$ es una *amenaza dominada* del jugador dos si existe p, una lotería sobre $B \backslash \{b_j\}$ tal que

$$f(a_i, b_j) \succeq f(a_i, p)$$

para todo $a_i \in A$. Para cualquier $G = (A, B, f) \in \mathcal{G}^{\mathcal{L}}$, si $b_j \in B$ es una amenaza dominada del jugador dos y si se considera $G' = (A, B', f') \in \mathcal{G}^{\mathcal{L}}$, donde $B' = B \setminus \{b_j\}$ y $f' = f|_{A \times B'}$, entonces se tiene que $F(G) = F(G')$.

B7 **Linealidad.** Supóngase que, para todo $i \in \{1, \cdots, k\}$, $G_i = (\{a\}, \{b\}, f_i) \in \mathcal{G}^{\mathcal{L}}$, con $f_i(a, b) = p_i \in \Delta(R)$, y $\alpha_i \in [0, 1]$, con $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$. Si $G =$

$(\{a\},\{b\},f)\in\mathcal{G}^{\mathcal{L}}$ es tal que $f(a,b)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i p_i$[1], entonces se tiene que

$$F(G)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i F(G_i).$$

A continuación se caracterizará la familia de funciones de evaluación en este contexto con estas cuatro propiedades. Antes se introduce alguna notación adicional. Sea $G=(A,B,f)\in\mathcal{G}^{\mathcal{L}}$ y u una función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern que representa a $\succeq$. Se denota por $U\circ f$ el juego matricial que viene dado por la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} U(f(a_1,b_1)) & \cdots & U(f(a_1,b_n)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U(f(a_m,b_1)) & \cdots & U(f(a_m,b_n)) \end{bmatrix},$$

donde U es la función de utilidad sobre $\Delta(R)$ asociada a u. Se denota por $V(U\circ f)$ al valor de la extensión mixta del juego matricial $U\circ f$, es decir,

$$V(U\circ f)=\max_{x\in S_M}\min_{y\in S_N} x^T[U\circ f]y.$$

Teorema 21 *Supóngase que F es una función de evaluación que verifica monotonía (B4), eliminación de estrategias dominadas del jugador uno (B5), eliminación de amenazas dominadas del jugador dos (B6) y linealidad (B7). Entonces existe una función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern u que representa a $\succeq$ tal que, para cada $G\in\mathcal{G}^{\mathcal{L}}$, se tiene que $F(G)=V(U\circ f)$.*

Demostración: Para cada $r\in R$, sea $G_r=(\{a\},\{b\},f)$ con $f(a,b)=r$. Se define

$$u(r):=F(G_r).$$

Nótese que u e es una función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern que representa a $\succeq$ (esto es inmediato si se tiene en cuenta que F verifica *monotonía* y *linealidad*). Además es inmediato que, para toda $p\in\Delta(R)$, $U(p)=F(G_p)$, donde $G_p=(\{a\},\{b\},f)$ con $f(a,b)=p$.

Sea ahora $G=(A,B,f)\in\mathcal{G}^{\mathcal{L}}$. Se va a demostrar que $F(G)=V(U\circ f)$. Supóngase que $V(U\circ f)=U(p)$ para alguna lotería $p\in\Delta(R)$.

[1] $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i p_i$ denota la lotería que resulta de elegir cada una de las loterías p_i con probabilidad α_i.

- *Primero se demuestra que* $F(G) \geq V(U \circ f)$.

  Considérese el juego $G_1 = (A', B, f_1) \in \mathcal{G}^{\mathcal{L}}$ definido por $A' = A \cup \{a\}$, para cada $a_i \in A$ y cada $b_j \in B$, $f_1(a_i, b_j) = f(a_i, b_j)$ y para cada $b_j \in B$, $f_1(a, b_j) = p$. Como F verifica la propiedad de *eliminación de estrategias dominadas del jugador uno*, entonces se tiene que $F(G) = F(G_1)$. Si se considera el juego $G_2 = (A', B', f_2) \in \mathcal{G}^{\mathcal{L}}$ definido como $B' = B \cup \{b\}$, para cada $a_i \in A'$ y cada $b_j \in B$, $f_2(a_i, b_j) = f_1(a_i, b_j)$ y para cada $a_i \in A'$, $f_2(a_i, b) = p$, como F verifica la propiedad de *eliminación de amenazas dominadas del jugador dos*, entonces $F(G_1) = F(G_2)$. Se considera ahora el juego $G_3 = (A', B', f_3) \in \mathcal{G}^{\mathcal{L}}$ definido, para cada $a_i \in A'$ y cada $b_j \in B'$ como:

  $$f_3(a_i, b_j) = \begin{cases} f_2(a_i, b_j) & \text{si } p \succeq f_2(a_i, b_j) \\ p & \text{si } f_2(a_i, b_j) \succeq p \end{cases}.$$

  Como F verifica *monotonía*, entonces $F(G_2) \geq F(G_3)$. Nótese que en el juego G_3 todas las estrategias del jugador uno diferentes de $\{a\}$ están dominadas (por construcción del juego). Por tanto, si se define el juego $G_4 = (\{a\}, B', f_3 \mid_{\{a\} \times B'})$, por el hecho de que F verifica la propiedad de *eliminación de estrategias dominadas del jugador uno* se tiene que $F(G_3) = F(G_4)$. Ahora bien, en el juego G_4 todas las amenazas del jugador dos llevan a la misma lotería sobre el conjunto de resultados. Entonces, teniendo en cuenta que F verifica la propiedad de *eliminación de amenazas dominadas del jugador dos*, se tiene que $F(G_4) = F(G_5)$, donde $G_5 = (\{a\}, \{b\}, f_3 \mid_{\{a\} \times \{b\}})$. Finalmente, como F verifica *monotonía,*

  $$F(G_5) = F(G_p) = U(p).$$

  Por tanto,
  $$F(G) \geq U(p) = V(U \circ f).$$

- *A continuación se demuestra que* $V(U \circ f) \geq F(G)$.

  Considérense los juegos G_1 y G_2 como en el apartado anterior. Ya se sabe que $F(G) = F(G_1) = F(G_2)$. Sea ahora el juego $G_6 = (A', B', f_6) \in \mathcal{G}^{\mathcal{L}}$ definido, para cada $a_i \in A'$ y cada $b_j \in B'$ como:

  $$f_6(a_i, b_j) = \begin{cases} f_2(a_i, b_j) & \text{si } f_2(a_i, b_j) \succeq p \\ p & \text{si } p \succeq f_2(a_i, b_j) \end{cases}.$$

Teniendo en cuenta la propiedad de *monotonía*, se tiene que $F(G_2) \leq F(G_6)$. En el juego G_6 todas las amenazas del jugador dos menos la $\{b\}$ están dominadas (por construcción del juego). Por tanto, si se considera el juego $G_7 = (A', \{b\}, f_6 \mid_{A' \times \{b\}}) \in \mathcal{G}^{\mathcal{L}}$ y se aplica la propiedad de *eliminación de amenazas dominadas del jugador dos*, se verifica la igualdad $F(G_6) = F(G_7)$. De la propiedad de *eliminación de estrategias dominadas del jugador uno*, se deduce que $F(G_7) = F(G_8)$, donde $G_8 = (\{a\}, \{b\}, f_6 \mid_{\{a\} \times \{b\}})$. Entonces, como F cumple *monotonía*,

$$F(G_8) = F(G_p) = U(p).$$

Luego,

$$F(G) \leq U(p) = V(U \circ f).$$

Esto concluye la demostración. □

Corolario 22 *Existe una función de evaluación F verificando monotonía (B4), eliminación de estrategias dominadas del jugador uno (B5), eliminación de amenazas dominadas del jugador dos (B6) y linealidad (B7). Además, para todo $G \in \mathcal{G}^{\mathcal{L}}$, se tiene que $F(G) = V(U \circ f)$ donde u es una función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern que representa a $\succeq$. Finalmente, se verifica que F es única salvo transformaciones afines positivas (en el siguiente sentido: si $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una transformación afín positiva, entonces $T \circ F$ es también una función de evaluación que satisface B4, B5, B6 y B7; y, recíprocamente, si $\bar{F}$ es una función de evaluación que verifica B4, B5, B6 y B7, entonces existe una transformación afín positiva $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\bar{F} = T \circ F$).*

Demostración: Con el fin de probar la existencia, se toma una función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern u que representa a $\succeq$. En vista de los resultados del capítulo anterior, se comprueba fácilmente que, si se define F como $F(G) := V(U \circ f)$, para todo $G \in \mathcal{G}^{\mathcal{L}}$, entonces verifica *monotonía* (B4), *eliminación de estrategias dominadas del jugador uno* (B5), *eliminación de amenazas dominadas del jugador dos* (B6) y *linealidad* (B7). El resto del corolario se sigue del teorema anterior y del hecho de que

$$V(T(A)) = T(V(A)),$$

para cada transformación afín positiva $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y cada matriz real $A = [a_{ij}]_{i \in M, j \in N} \in \mathcal{A}$, ($T(A)$ denota a la matriz $[T(a_{ij})]_{i \in M, j \in N}$). □

2.4. Conclusiones.

En este capítulo se aportaron dos caracterizaciones conjuntas de la utilidad y del valor inferior y el valor en juegos asociados a escenarios estrictamente competitivos. Tales resultados se resumen en las tablas siguientes:

Caracterización de la utilidad y el valor inferior.
B1.- Monotonía
B2.- Eliminación de estrategias fuertemente dominadas del jugador uno
B3.- Eliminación de amenazas débilmente dominadas del jugador dos

Caracterización de la utilidad y el valor.
B4.- Monotonía
B5.- Eliminación de estrategias dominadas del jugador uno
B6.- Eliminación de amenazas dominadas del jugador dos
B7.- Linealidad

Como línea de trabajo futura, aparte de considerar todas las análogas a las mencionadas en el Capítulo 1, quizás lo más interesante sería hacer uso de los resultados de este capítulo para desarrollar una teoría de juegos de n personas en preferencias análoga a la que se desarrolla en los Capítulos 3 y 4 haciendo uso del Capítulo 1.

Parte II

Juegos en forma estratégica de n personas.

Capítulo 3

Juegos en forma estratégica en los que los jugadores cooperan.

La teoría de juegos clásica hace una distinción rotunda entre dos clases de juegos: los juegos no cooperativos y los juegos cooperativos. Normalmente, los juegos no cooperativos se definen como aquéllos en los que los jugadores no disponen de mecanismos que les permitan tomar acuerdos vinculantes. Por el contrario, los juegos cooperativos se suelen definir como aquéllos en los que los jugadores sí disponen de mecanismos que les permiten tomar acuerdos vinculantes. Sin embargo, el punto de vista adoptado en Van Damme y Furth (2002) refleja la diferencia entre juegos no cooperativos y juegos cooperativos de un modo, quizá, más adecuado. Ellos escriben lo siguiente:

> *"The terminology that is used sometimes gives rise to confusion; it is not the case that in non-cooperative games players do not wish to cooperate and that in cooperative games players automatically do so. The difference instead is in the level of detail of the model; non-cooperative models assume that all the possibilities for cooperation have been included as formal moves in the game, while cooperative models are "incomplete" and allow players to act outside of the detailed rules that have been specified."*

Esta descripción está, de hecho, más de acuerdo con el enfoque que adoptaron Von Neumann y Morgenstern (1944). Ellos consideraron, como se hará en este capítulo, situaciones descritas por juegos en forma estratégica en las que los jugadores cooperan a través de mecanismos no descritos explícitamente. Por ello, es necesario analizar la forma coalicional del juego estratégico. Para ello, Von Neumman y Morgenstern, dado un juego no cooperativo, construyen un juego cooperativo que describe, para cada coalición, el beneficio que se pueden asegurar los miembros de esa coalición, independientemente de las actuaciones llevadas a cabo por los jugadores de fuera de la coalición. De algún modo, pues, trataron de resumir toda la información dada por el juego no cooperativo en una lista de números: uno para cada coalición. Para que una coalición de jugadores asegure el beneficio (o valor de la coalición) para sus miembros, éstos deberán coordinar sus actuaciones, lo cual requiere intrínsecamente que actúen fuera de las reglas detalladas del juego no cooperativo. Para reflejar de manera más clara las anteriores interpretaciones, se utilizará la terminología de juego en forma estratégica (en vez de juego no cooperativo) y de juego en forma característica (en vez de juego cooperativo).

El principal objetivo de este capítulo es el de resaltar la conexión entre juegos en forma estratégica y juegos en forma característica. Para ello aportamos una fundamentación axiomática para dos procedimientos distintos que permiten asociar un juego en forma característica a cada juego en forma estratégica. El primer procedimiento que se estudia se introduce en Von Neumann y Morgenstern (1944). En él se define el valor de una coalición de jugadores S como el valor de la extensión mixta del juego matricial que confronta, por un lado, a la coalición S y, por el otro, a la coalición $N \setminus S$ constituida por el resto de los jugadores. En este juego de suma nula, la coalición $N \setminus S$ intenta mantener el pago a la coalición S tan bajo como sea posible, mientras que la coalición S intenta maximizar su pago. También se introduce un segundo procedimiento nuevo, en el cual se define el valor de una coalición S como el valor inferior del juego matricial de la coalición S frente a la coalición $N \setminus S$. La principal ventaja de considerar el valor inferior del juego en vez del valor de su extensión mixta es que para el primero no se necesita considerar el uso de estrategias mixtas, mientras que sí son requeridas para el segundo. Por tanto, en situaciones donde no tenga sentido el uso de estrategias mixtas, el procedimiento que emplea el valor inferior proporciona un procedimiento más adecuado para determinar los beneficios que cada coalición puede asegurar a sus miembros.

Cabe resaltar que en la literatura hay trabajos que proponen diferentes procedimientos para asociar juegos en forma característica a juegos en forma estratégica. Los procedimientos que se describen en dichos trabajos son muy diferentes de los que se consideran en este capítulo. Harsanyi (1963), Myerson (1991) y Bergantiños y García-Jurado (1995) son ejemplos de alguno de estos trabajos. Todos ellos se basan en conceptos de equilibrio en vez de tratar con los conceptos de valor o valor inferior. El trabajo de Myerson (1978) es un precursor no muy directo de lo que se estudia en este capítulo. En ese trabajo se estudia el papel de los acuerdos y amenazas en juegos en forma estratégica en los que los jugadores se supone que cooperan. Finalmente, se desea subrayar que en este capítulo únicamente se consideran situaciones con utilidad transferible. Hay procedimientos cuyo objetivo es asociar juegos sin utilidad transferible (juegos NTU) a juegos en forma estratégica, como los que se proponen en Aumann (1961, 1967). Borm y Tijs (1992), de algún modo, continúan los trabajos de Aumann.

La estructura del capítulo es la siguiente. En el primer apartado se introducen las nociones básicas de juego en forma estratégica y juego en forma característica. En una segunda sección se describe el procedimiento de Von Neumann y Morgenstern (1944) y se introduce el nuevo procedimiento basado en el valor inferior. En el tercer apartado se definen propiedades que conducen a caracterizaciones axiomáticas de ambos procedimientos. Finalmente, se incluye una sección de conclusiones que resume los aspectos más relevantes del capítulo y enumera futuras líneas de trabajo. Parte de este capítulo aparece en Carpente y otros (2003).

3.1. Introducción a los juegos en forma estratégica y a los juegos en forma característica.

Un *juego en forma estratégica* $g = (N, \{X_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N})$ viene caracterizado por un conjunto de jugadores $N = \{1, \ldots, n\}$ y, para cada jugador $i \in N$, un conjunto de estrategias X_i y una función de pago $u_i : \prod_{j\in N} X_j \to \mathbb{R}$, de manera que $u_i(x)$ representa el pago que recibe el jugador i si se juega la combinación de estrategias x. En este capítulo sólo se consideran juegos en forma estratégica finitos[1], que son aquellos juegos en los cuales los conjuntos de estrategias $\{X_i\}_{i\in N}$ son todos finitos. A la clase de juegos en

[1] De todas formas, algunos resultados que se obtienen se pueden extender fácilmente a una clase más amplia de juegos en forma estratégica.

forma estratégica finitos con conjunto de jugadores N se la denota por G^N. Se denota por G a la clase de todos los juegos en forma estratégica finitos.

Un *juego en forma característica* es un par (N, v) donde $N = \{1, \ldots, n\}$ es el conjunto de jugadores y $v : 2^N \to \mathbb{R}$ es la función característica del juego, que asigna a cada coalición $S \subset N$ su valor $v(S)$. El valor $v(S)$ de una coalición S representa el beneficio que esta coalición puede garantizar a sus miembros, independientemente de lo que hagan los otros jugadores (aquéllos en $N \setminus S$). Se adopta, por convención, $v(\emptyset) = 0$. De aquí en adelante, se identificará un juego en forma característica (N, v) con su función característica v. A la clase de juegos en forma característica con conjunto de jugadores N se la denota por TU^N y se usa la notación TU para identificar a la clase de todos los juegos en forma característica (se recuerda que son juegos con utilidad transferible).

Un juego en forma característica $v \in TU^N$ se dice que es *superaditivo* si $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ para todas las coaliciones $S, T \subset N$ con $S \cap T = \emptyset$.

Un ejemplo de solución es el *núcleo* o *core* de un juego $v \in TU^N$ que viene definido por la siguiente expresión:

$$C(v) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i \in N} x_i = v(N) \text{ y } \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \text{ para todo } S \subset N\}.$$

3.2. Procedimientos para asociar un juego en forma característica a un juego en forma estratégica.

En esta sección, se consideran procedimientos para asociar una función característica a cada juego en forma estratégica. Primero se considera el procedimiento definido en Von Neumann y Morgenstern (1944), el cual está basado en la función valor, y luego se introduce un procedimiento nuevo basado en la función valor inferior. Se recuerda que la principal motivación para considerar procedimientos que asocien una función característica a un juego en forma estratégica es tratar aquellas situaciones en las cuales los jugadores pueden actuar fuera de las reglas del juego en forma estratégica, que sólo describen las estrategias disponibles para cada uno de los jugadores y sus correspondientes funciones de pago.

Von Neumann y Morgenstern (1944) propusieron el siguiente procedimiento para asociar un juego en forma característica a cada juego en forma estratégica. Sea $g \in G^N$ un juego en forma estratégica y sea $S \subset N$, $S \neq N$, una coalición no vacía. El juego bipersonal de suma nula g_S se define como

$$g_S = (\{S, N \setminus S\}, \{X_S, X_{N \setminus S}\}, \{u_S, -u_S\}),$$

donde, para todo $T \subset N$, $X_T = \prod_{i \in T} X_i$ y $u_T = \sum_{i \in T} u_i$. En este juego, hay dos jugadores, la coalición S y la coalición $N \setminus S$. Las estrategias disponibles para estas dos coaliciones son todas las combinaciones de estrategias disponibles para los miembros de dichas coaliciones en el juego g. El pago de la coalición S es la suma de los pagos de los jugadores que la forman para cada posible combinación de estrategias y el pago para la coalición $N \setminus S$ es el opuesto a éste. Cabe destacar que el juego g_S es un juego matricial. Se denota por A_S a la matriz de este juego. Si los jugadores pueden aleatorizar sobre las estrategias del juego en forma estratégica, entonces es más apropiado considerar la extensión mixta del juego g_S, es decir, el juego $E(A_S)$. Así, en el juego en forma característica $v_g \in TU^N$ asociado al juego en forma estratégica g, el valor de la coalición S es el valor de la extensión mixta de este juego matricial

$$v_g(S) = V(A_S)$$

(recuérdese que $V(A_S)$ denota el valor de la extensión mixta del juego matricial A_S).

$V(A_S)$ es el beneficio que la coalición S se puede garantizar por sí misma incluso en el caso de que los jugadores de $N \setminus S$ cooperen para mantener el valor de la coalición S tan bajo como sea posible. El beneficio de la coalición total N se define simplemente como

$$v_g(N) = \max_{x \in X_N} u_N(x).$$

La interpretación de v_g es que los jugadores de la coalición S se ponen en el peor de los casos y asumen que todos los demás van a coordinar la elección de sus estrategias para tratar de mantener el pago a S tan pequeño como sea posible. Nótese que al calcular el valor de $E(A_S)$ se asume implícitamente que los jugadores de una coalición no sólo pueden coordinar sus estrategias puras, sino que también pueden elegir distribuciones de probabilidad sobre sus estrategias coordinadas. Esta suposición es muy fuerte.

La filosofía subyacente en el procedimiento de Von Neumann y Morgenstern está íntimamente conectada con el concepto de función característica. Como la función característica proporciona los beneficios que cada coalición puede garantizar a sus miembros, independientemente de lo que los otros jugadores hagan, el procedimiento de Von Neumann y Morgenstern parece ser el modo correcto de asociar funciones características a juegos en forma estratégica, al menos en aquellas situaciones en las que las coaliciones de jugadores tienen preferencias sobre loterías y en las cuales sus funciones de utilidad son de Von Neumann y Morgenstern.

De todas formas, en contextos en los cuales aleatorizar sobre las estrategias coordinadas no es posible o no es razonable, es más apropiado considerar únicamente estrategias puras y el valor inferior del juego matricial. Esto lleva a asociar a un juego en forma estratégica $g \in G^N$ el juego en forma característica $\underline{v}_g \in TU^N$ definido como

$$\underline{v}_g(S) = \begin{cases} \underline{V}(A_S) & \text{para todo } S \subset N,\ S \neq N,\ S \neq \varnothing \\ \max_{x \in X_N} u_N(x) & \text{si } S = N. \end{cases}$$

Nótese que este juego en forma característica es más pesimista que el obtenido por el procedimiento de Von Neumann y Morgenstern, de manera que $\underline{v}_g(S) \leq v_g(S)$ para todo $g \in G^N$ y todo $S \subset N$. A continuación se ilustran ambos juegos con un ejemplo.

Ejemplo 23 *Considérese el siguiente juego en forma estratégica de tres jugadores, g.*[2]

α_3	α_2	β_2
α_1	$(1,1,1)$	$(0,0,0)$
β_1	$(0,0,0)$	$(1,1,1)$

β_3	α_2	β_2
α_1	$(0,0,0)$	$(1,1,1)$
β_1	$(1,1,1)$	$(0,0,0)$

Se puede considerar, por ejemplo, la coalición $S = \{1, 2\}$. La matriz del juego bipersonal de suma nula asociado a esta coalición es

[2] Como es habitual, el jugador 1 es el jugador fila, el jugador 2 es el jugador columna, y el jugador 3 escoge la matriz de la izquierda o la de la derecha.

$$A_S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

donde las columnas se corresponden con las estrategias α_3 y β_3 (de izquierda a derecha) del jugador 3 ($N \setminus S = \{3\}$) y las filas están ordenadas del siguiente modo. La primera fila se corresponde con las estrategias (α_1, α_2) de los jugadores de la coalición S, la segunda se refiere a (β_1, α_2), la tercera a (α_1, β_2) y la cuarta a (β_1, β_2).

El valor de la extensión mixta de este juego matricial es $V(A_S) = 1$ y el valor inferior del juego matricial A_S es $\underline{V}(A_S) = 0$. Por tanto, se tiene que $v_g(1,2) = 1$ y que $\underline{v}_g(1,2) = 0$.[3]

Los valores $v_g(S)$ y $\underline{v}_g(S)$ de las otras coaliciones S se calculan de manera análoga. A continuación se listan en la siguiente tabla.

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	N
$v_g(S)$	1/2	1/2	1/2	1	1	1	3
$\underline{v}_g(S)$	0	0	0	0	0	0	3

Este ejemplo ilustra que en general los dos juegos en forma característica v_g y $\underline{v}_g$ son diferentes y también que $\underline{v}_g(S) \leq v_g(S)$ para toda coalición $S \subset N$.

Los juegos v_g y $\underline{v}_g$ del ejemplo anterior son los dos superaditivos. Esto no es una coincidencia, ya que se verifica para todos los juegos en forma característica derivados de juegos en forma estratégica según los dos procedimientos descritos del valor y del valor inferior. Para los juegos v_g esta propiedad se demostró en Von Neumann y Morgenstern (1944) y para los juegos $\underline{v}_g$ se demuestra en la siguiente proposición.

Proposición 24 *Para todo juego en forma estratégica $g \in G^N$, el juego en forma característica asociado $\underline{v}_g$ es superaditivo.*

Demostración: Sea $g = (N, \{X_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N}) \in G^N$ un juego en forma estratégica y sean dos coaliciones no vacías $S, T \subset N$, tales que $S \cap T = \emptyset$. Entonces

$$\underline{v}_g(S \cup T) = \max_{x_{ST} \in X_{S\cup T}} \ \min_{x_{-ST} \in X_{N\setminus(S\cup T)}} u_{S\cup T}(x_{ST}, x_{-ST})$$

[3] Siguiendo una práctica común, se simplifica la notación eliminando las llaves que delimitan a los elementos de una coalición.

$$= \max_{x_S \in X_S} \max_{x_T \in X_T} \min_{x_{-ST} \in X_{N \setminus (S \cup T)}} u_{S \cup T}(x_S, x_T, x_{-ST}).$$

Ahora, sea $y_S \in X_S$ e $y_T \in X_T$. Está claro que

$$\underline{v}_g(S \cup T) \geq \min_{x_{-ST} \in X_{N \setminus (S \cup T)}} u_{S \cup T}(y_S, y_T, x_{-ST})$$

$$\geq \min_{x_{-ST} \in X_{N \setminus (S \cup T)}} u_S(y_S, y_T, x_{-ST}) + \min_{x_{-ST} \in X_{N \setminus (S \cup T)}} u_T(y_S, y_T, x_{-ST})$$

$$\geq \min_{x_T \in X_T} \min_{x_{-ST} \in X_{N \setminus (S \cup T)}} u_S(y_S, x_T, x_{-ST})$$

$$+ \min_{x_S \in X_S} \min_{x_{-ST} \in X_{N \setminus (S \cup T)}} u_T(x_S, y_T, x_{-ST})$$

$$= \min_{x_{-S} \in N \setminus S} u_S(y_S, x_{-S}) + \min_{x_{-T} \in N \setminus T} u_T(y_T, x_{-T}).$$

Como esto se verifica para todo $y_S \in X_S$ e $y_T \in X_T$, se puede afirmar que

$$\underline{v}_g(S \cup T) \geq \max_{x_S \in X_S} \min_{x_{-S} \in N \setminus S} u_S(x_S, x_{-S}) + \max_{x_T \in X_T} \min_{x_{-T} \in N \setminus T} u_T(x_T, x_{-T})$$

$$= \underline{v}_g(S) + \underline{v}_g(T).$$

Esto demuestra que el juego $\underline{v}_g$ es superaditivo. □

Los dos juegos v_g y $\underline{v}_g$ del Ejemplo 23 no son sólo superaditivos, sino que también tienen núcleos no vacíos. El *núcleo* de un juego en forma característica (N, v) está formado por los vectores de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ que dividen el pago $v(N)$ de la coalición total de manera que cada coalición $S \subset N$ de jugadores consigue al menos su beneficio $v(S)$. En el Ejemplo 23 se tiene que $v_g(N) = \underline{v}_g(N) = 3$. Si se divide esta cantidad de forma igualitaria entre los tres jugadores, dando 1 a cada uno de ellos, entonces cada jugador individual consigue al menos su beneficio (que es 1/2 en el juego v_g y 0 en el juego $\underline{v}_g$) y cada coalición de dos jugadores consigue 2, mientras que su beneficio en v_g es igual a 1 y en $\underline{v}_g$ es igual a 0. Por tanto, esta división igualitaria está en el núcleo de ambos juegos. Esto no se verifica siempre, es decir, los juegos v_g y $\underline{v}_g$ pueden tener núcleos vacíos. Esto es lo que se refleja a continuación con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 25 *Considérense el siguiente juego en forma estratégica de tres jugadores, denominado g.*

α_3	α_2	β_2
α_1	$(1,1,0)$	$(0,0,0)$
β_1	$(1,0,1)$	$(1,0,1)$

β_3	α_2	β_2
α_1	$(1,1,0)$	$(0,1,1)$
β_1	$(0,0,0)$	$(0,1,1)$

Siguiendo el procedimiento que se explicó en el Ejemplo 23, se deduce que

$$v_g(i) = \underline{v}_g(i) = 0 \text{ para cada } i \in N,$$

$$v_g(i,j) = \underline{v}_g(i,j) = 2 \text{ para cada par } i, j \in N,$$

$$\text{y } v_g(N) = \underline{v}_g(N) = 2.$$

Nótese que en cualquier división del valor $v_g(N) = \underline{v}_g(N) = 2$, cada jugador individual tendría que conseguir no menos que 0 y cualesquiera dos jugadores deberían conseguir al menos 2 conjuntamente. Es claramente imposible que estas condiciones se den simultáneamente. Por tanto, los núcleos de los juegos (N, v_g) y $(N, \underline{v}_g)$ son vacíos.

3.3. Caracterizaciones del procedimiento de Von Neumann y Morgenstern y de su modificación.

En este apartado se analizan detalladamente y se caracterizan axiomáticamente los dos procedimientos basados en el valor y en el valor inferior que se describieron en el apartado anterior para asociar un juego en forma característica a un juego en forma estratégica.

Se define un procedimiento en general como una aplicación $\phi : G \to \Gamma$ que asocia un juego en forma característica $\phi(g) \in TU^N$ a cada juego en forma estratégica $g \in G^N$. Se denota el procedimiento de Von Neumann y Morgenstern (1944) por Ψ_V y el nuevo procedimiento por $\Psi_{\underline{V}}$. Por tanto, $\Psi_V(g) = v_g$ y $\Psi_{\underline{V}}(g) = \underline{v}_g$ para todo $g \in G^N$. Para caracterizar estos dos procedimientos, se usan propiedades que se derivan del capítulo 1 de esta memoria, en el que se caracterizan la función valor y la función valor inferior para juegos matriciales.

La objetividad individual establece que si el jugador i consigue el mismo pago para cualquier combinación posible de estrategias, entonces en el juego en forma característica asociado el valor de la coalición formada por este único jugador i es igual a esta cantidad.

C1 Objetividad individual. Para todo $g \in G^N$ y todo jugador $i \in N$, si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $u_i(x) = c$ para toda combinación de estrategias $x \in X_N$, entonces se tiene que $\phi(g)(i) = c$.

La propiedad de monotonía establece que el valor del jugador i en el juego en forma característica asociado no decrece si su pago en el juego en forma estratégica se incrementa o permanece igual para todas las posibles combinaciones estratégicas.

C2 Monotonía. Si $g = (N, \{X_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N}) \in G^N$ y

$$g' = (N, \{X_i\}_{i\in N}, \{u'_i\}_{i\in N}) \in G^N$$

son dos juegos en forma estratégica y el jugador $i \in N$ es tal que $u_i \geq u'_i$, entonces $\phi(g)(i) \geq \phi(g')(i)$.

Las propiedades de irrelevancia de estrategias dominadas y de irrelevancia de estrategias fuertemente dominadas significan que la situación de un jugador en el juego en forma característica no cambia si en el juego en forma estratégica pierde la posibilidad de usar una estrategia dominada o fuertemente dominada, respectivamente. Las propiedades de irrelevancia de estrategias dominadas y de irrelevancia de estrategias fuertemente dominadas se derivan de las propiedades de dominancia en filas y dominancia débil en filas, respectivamente. Consecuentemente, la irrelevancia de estrategias dominadas implica la irrelevancia de estrategias fuertemente dominadas, pero no se verifica el recíproco.

C3 Irrelevancia de estrategias dominadas. En el juego $g \in G^N$, una estrategia $x_i \in X_i$ del jugador i está *dominada* si existe una combinación convexa y de otras estrategias del jugador i, con la propiedad de que

$$u_i(y, x_{N\setminus i}) \geq u_i(x_i, x_{N\setminus i})$$

para todo $x_{N\backslash i} \in X_{N\backslash i}$.[4] Para todos $g \in G^N$ e $i \in N$, si la estrategia $x_i \in X_i$ está dominada, entonces $\phi(g)(i) = \phi(g')(i)$, donde $g' \in G^N$ es el juego que resulta al eliminar la estrategia x_i en el juego g.

C4 Irrelevancia de estrategias fuertemente dominadas. En el juego $g \in G^N$, una estrategia $x_i \in X_i$ del jugador i está *fuertemente dominada* si existe una estrategia $x_i' \in X_i$, $x_i' \neq x_i$, tal que

$$u_i(x_i', x_{N\backslash i}) \geq u_i(x_i, x_{N\backslash i})$$

para todo $x_{N\backslash i} \in X_{N\backslash i}$. Para todos $g \in G^N$ e $i \in N$, si la estrategia $x_i \in X_i$ está fuertemente dominada, entonces $\phi(g)(i) = \phi(g')(i)$, donde $g' \in G^N$ es el juego que se obtiene del juego g al eliminar la estrategia x_i.

Las propiedades de irrelevancia de amenazas dominadas y la de irrelevancia de amenazas débilmente dominadas se derivan de las propiedades de dominancia en columnas y dominancia fuerte en columnas (vistas en el Capítulo 1), pero están adaptadas para ser utilizadas en juegos en los que intervienen más de dos jugadores. Estas propiedades establecen que el beneficio de un jugador i en el juego en forma característica asociado no se ve afectado si otro jugador j se ve privado de utilizar una estrategia cuya eliminación no cambia el peor escenario posible del jugador i. La irrelevancia de amenazas débilmente dominadas es la propiedad más fuerte de las dos, ya que toda amenaza que está dominada está también débilmente dominada.

C5 Irrelevancia de amenazas dominadas. En el juego $g \in G^N$, una estrategia $x_j \in X_j$ del jugador j es un *amenaza dominada* para el jugador $i \neq j$ si existe una combinación convexa y de otras estrategias del jugador j, con la propiedad

$$u_i(y, x_{N\backslash j}) \leq u_i(x_j, x_{N\backslash j})$$

para todo $x_{N\backslash j} \in X_{N\backslash j}$. Para todo $g \in G^N$ y para cualquier par de jugadores $i, j \in N$, $i \neq j$, si la estrategia $x_j \in X_j$ es una amenaza dominada para el jugador i, entonces se tiene que $\phi(g)(i) = \phi(g')(i)$, donde $g' \in G^N$ es el juego que se obtiene del juego g al eliminar la estrategia x_j.

[4] $u_i(y, x_{N\backslash i}) := \sum_{\hat{x}_i \in X_i} y(\hat{x}_i) u_i(\hat{x}_i, x_{N\backslash i})$, donde $y = \sum_{\hat{x}_i \in X_i} y(\hat{x}_i)\hat{x}_i$. Nótese que $y(x_i) = 0$, $y(\hat{x}_i) \geq 0$, para todo $\hat{x}_i \in X_i$ y $\sum_{\hat{x}_i \in X_i} y(\hat{x}_i) = 1$. Obsérvese que y es simplemente una estrategia mixta del jugador i.

C6 Irrelevancia de amenazas débilmente dominadas. En el juego $g \in G^N$, una estrategia $x_j \in X_j$ del jugador j es una *amenaza débilmente dominada* para el jugador $i \neq j$ si para cada $x_{N\setminus j} \in X_{N\setminus j}$ existe una estrategia $x'_j \in X_j$, $x'_j \neq x_j$, tal que

$$u_i(x'_j, x_{N\setminus\, j}) \leq u_i(x_j, x_{N\setminus\, j}).$$

Para todo $g \in G^N$ y para cualquier par de jugadores $i, j \in N$, $i \neq j$, si la estrategia $x_j \in X_j$ es una amenaza débilmente dominada para el jugador i, entonces se tiene que $\phi(g)(i) = \phi(g')(i)$, donde $g' \in G^N$ es el juego que se obtiene del juego g al eliminar la estrategia x_j.

Las propiedades irrelevancia de amenazas dominadas e irrelevancia de estrategias dominadas, sólo tienen sentido en un contexto en el que es razonable asumir que los jugadores pueden utilizar estrategias mixtas, mientras que las propiedades de irrelevancia de amenazas débilmente dominadas y de irrelevancia de estrategias fuertemente dominadas son más adecuadas en situaciones en las cuales los jugadores sólo utilizan estrategias puras.

Para caracterizar los procedimientos en los que se centra este capítulo se necesita otra propiedad adicional que no tiene ninguna equivalencia en el contexto axiomático que describe a las funciones valor y valor inferior. Para empezar, se añadirá alguna notación adicional para describir tal propiedad. Sea el juego

$$g = (N, \{X_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N}) \in G^N$$

y sea la coalición $S \subset N$, $S \neq \emptyset$. Con el fin de estudiar las oportunidades de los miembros de la coalición S como un grupo, se introduce un nuevo jugador, denominado $p(S)$, cuyo conjunto de estrategias es

$$X_{p(S)} := X_S$$

y su función de pago viene dada por $u_{p(S)} : \prod_{j\in(N\setminus S)\cup\{p(S)\}} X_j \to \mathbb{R}$ definida como

$$u_{p(S)}(x_{N\setminus S}, x_{p(S)}) = u_S(x_{N\setminus S}, x_S)$$

para todo $x_{N\setminus S} \in X_{N\setminus S}$ y todo $x_{p(S)} = x_S \in X_{p(S)} = X_S$. Se denota $N(S) := (N \setminus S) \cup \{p(S)\}$. El juego[5] $g(S) \in G^{N(S)}$ se define como

$$g(S) = (N(S), \{X_i\}_{i\in N(S)}, \{u_i\}_{i\in N(S)}).$$

[5]Nótese la diferencia de este juego con el juego

$$g_S = (\{S, N \setminus S\}, \{X_S, X_{N\setminus S}\}, \{u_S, -u_S\}),$$

La propiedad de invarianza ante fusiones establece que el beneficio de una coalición S en el juego en forma estratégica original g es el mismo que el del jugador $p(S)$ en el juego $g(S)$. La interpretación de esta propiedad es que una coalición de jugadores no puede mejorar su beneficio al unirse y actuar como un único jugador. Su validez es clara si se reflexiona un poco en el sentido de los juegos en forma característica.

C7 Invarianza ante fusiones. Sea el juego en forma estratégica $g = (N, \{X_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N}) \in G^N$ y sea la coalición $S \subset N$, $S \neq \emptyset$. Entonces

$$\phi(g)(S) = \phi(g(S))(p(S)),$$

donde $g(S)$ es el juego en forma estratégica que se obtiene del juego g al considerar que la coalición S actúa como un único jugador.

Las propiedades introducidas anteriormente pueden utilizarse para caracterizar axiomáticamente los dos procedimientos Ψ_V y $\Psi_{\underline{V}}$. Para no alargar demasiado el capítulo, se incluye sólamente la desmostración del Teorema 27. La del Teorema 26 es análoga (para reconstruirla a partir del Teorema 27 conviene tener presente la demostración del Teorema 3).

Teorema 26 Ψ_V *es el único procedimiento que verifica las propiedades de objetividad individual (C1), monotonía (C2), irrelevancia de estrategias dominadas (C3), irrelevancia de amenazas dominadas (C5) e invarianza ante fusiones (C7).*

Teorema 27 $\Psi_{\underline{V}}$ *es el único procedimiento que verifica las propiedades de objetividad individual (C1), monotonía (C2), irrelevancia de estrategias fuertemente dominadas (C4), irrelevancia de amenazas débilmente dominadas (C6) e invarianza ante fusiones (C7).*

Demostración: *Existencia.* Primero, se verá que $\Psi_{\underline{V}}$ verifica las cinco propiedades. Sea $g \in G^N$, $i \in N$ y $c \in \mathbb{R}$ tal que $u_i(x) = c$, para todo

en el cual no sólo la coalición S se veía como un jugador, sino también la coalición $N \setminus S$. También, en el juego g_S, el objetivo de los jugadores de la coalición $N \setminus S$ es mantener el pago a S tan bajo como sea posible, más que maximizar el suyo propio, como era el caso de $g(S)$.

$x \in X_N$. Entonces, en la matriz A_i del juego g_i, todos sus elementos son iguales a c. El valor inferior de esta matriz es igual a c. Por tanto,

$$\Psi_{\underline{V}}(g)(i) = \underline{v}_g(i) = c,$$

lo que demuestra que $\Psi_{\underline{V}}$ verifica la *objetividad individual (C1)*.

Sean ahora $g = (N, \{X_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N}) \in G^N$ y $g' = (N, \{X_i\}_{i\in N}, \{u'_i\}_{i\in N}) \in G^N$ dos juegos en forma estratégica tales que $u_i \geq u'_i$ para el jugador $i \in N$. Entonces, $A_i \geq A'_i$, donde A_i denota a la matriz del juego g_i y A'_i denota a la matriz del juego g'_i. De la propiedad de monotonía que satisface la función valor inferior se sigue que

$$\Psi_{\underline{V}}(g)(i) = \underline{v}_g(i) \geq \underline{v}_{g'}(i) = \Psi_{\underline{V}}(g')(i).$$

Esto demuestra que $\Psi_{\underline{V}}$ verifica *monotonía (C2)*.

Para ver que $\Psi_{\underline{V}}$ verifica la propiedad de *irrelevancia de estrategias fuertemente dominadas (C4)*, nótese que si la estrategia x_i del jugador i está fuertemente dominada en el juego $g \in G^N$, entonces se corresponde con una fila fuertemente dominada de la matriz A_i del juego g_i. Por tanto, por la propiedad de dominancia débil en filas que verifica la función valor inferior, se tiene que

$$\Psi_{\underline{V}}(g)(i) = \underline{v}_g(i) = \underline{v}_{g'}(i) = \Psi_{\underline{V}}(g')(i),$$

donde $g' \in G^N$ es el juego que se obtiene de g al eliminar la estrategia x_i.

Para demostrar que $\Psi_{\underline{V}}$ verifica la propiedad de *irrelevancia de amenazas débilmente dominadas (C6)*, nótese que si la estrategia $x_j \in X_j$ del jugador j es una amenaza débilmente dominada para el jugador $i \neq j$ en el juego $g \in G^N$, entonces para todo $x_{N\setminus i,j} \in X_{N\setminus i,j}$, la combinación estratégica $(x_j, x_{N\setminus i,j})$ se corresponde con una columna débilmente dominada en la matriz A_i del juego g_i. Por tanto, teniendo en cuenta que la función valor inferior verifica la propiedad de dominancia fuerte en columnas y aplicando tal propiedad repetidamente, se puede eliminar la estrategia (columna) $(x_j, x_{N\setminus i,j})$ para cada $x_{N\setminus i,j} \in X_{N\setminus i,j}$, sin cambiar el valor inferior. La matriz que queda es la que se corresponde con el juego $g' \in G^N$ obtenido a partir del juego g al eliminar la estrategia x_j. Para este juego, se tiene que

$$\Psi_{\underline{V}}(g)(i) = \underline{v}_g(i) = \underline{v}_{g'}(i) = \Psi_{\underline{V}}(g')(i).$$

Se deduce fácilmente que $\Psi_{\underline{V}}$ verifica la propiedad de *invarianza ante fusiones (C7)* teniendo en cuenta que la matriz A_S del juego en forma estratégica g_S que se deriva de g y la matriz $A_{p(S)}$ del juego en forma estratégica $g(S)_{p(S)}$ que deriva de $g(S)$ son, de hecho, la misma.

Unicidad. Se procede a continuación a demostrar que cualquier procedimiento que verifique las cinco propiedades mencionadas debe coincidir con $\Psi_{\underline{V}}$. Sea $\phi : G \to TU$ un procedimiento que verifica *objetividad individual (C1), monotonía (C2), irrelevancia de estrategias fuertemente dominadas (C4), irrelevancia de amenazas débilmente dominadas (C6)* e *invarianza ante fusiones (C7)*. Sea $g = (N, \{X_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N}) \in G^N$ un juego en forma estratégica finito y $S \subset N$ una coalición no vacía. Si $S = N$, entonces las propiedades de *objetividad individual (C1), irrelevancia de estrategias fuertemente dominadas (C4)* e *invarianza ante fusiones (C7)* implican claramente que

$$\phi(g)(N) = \underline{v}_g(N) = \Psi_{\underline{V}}(g)(N).$$

Supóngase ahora que $S \neq N$. Se demostrará que

$$\phi(g)(S) = \underline{v}_g(S) = \Psi_{\underline{V}}(g)(S).$$

La demostración se divide en dos partes.

$\boxed{\textbf{Parte I.}\ \text{Primero, se demuestra que } \phi(g)(S) \geq \Psi_{\underline{V}}(g)(S).}$

Considérese el juego $g(S) = (N(S), \{X_i\}_{i\in N(S)}, \{u_i\}_{i\in N(S)})$, el cual se obtiene del juego g al considerar que la coalición S actúa como un único jugador $p(S)$. Como ϕ verifica *invarianza ante fusiones (C7)*, se tiene que

$$\phi(g)(S) = \phi(g(S))(p(S)). \tag{3.1}$$

De la definición de $g(S)$ se sabe que la matriz A_S del juego en forma estratégica g_S que deriva de g y la matriz $A_{p(S)}$ del juego en forma estratégica $g(S)_{p(S)}$ que deriva de $g(S)$ son la misma. De esto, se puede concluir que

$$\underline{v}_g(S) = \underline{V}(A_S) = \underline{V}(A_{p(S)}) = \underline{v}_{g(S)}(p(S)).$$

Sea $\bar{x} = (\bar{x}_i)_{i\in N} \in \prod_{i\in N} X_i$ una estrategia tal que el valor inferior de A_S se obtiene de la fila correspondiente a la estrategia $\bar{x}_S$ de la coalición S y de la columna correspondiente a la estrategia $\bar{x}_{N\setminus S}$ de la coalición $N \setminus S$. Entonces el valor inferior de $A_{p(S)}$ se obtiene de la fila correspondiente a la estrategia $\bar{x}_{p(S)} = \bar{x}_S \in X_{p(S)}$ del jugador $p(S)$ y de la columna que corresponde a la estrategia $\bar{x}_{N\setminus S}$ de la coalición $N \setminus S$.

Sea g_1 el juego que se obtiene del juego $g(S)$ al acotar superiormente la utilidad del jugador $p(S)$ por la cantidad $\underline{v}_g(S)$, es decir,

$$g_1 = (N(S), \{X_i\}_{i\in N(S)}, \{u_i\}_{i\in N\setminus S}, u'_{p(S)}),$$

donde
$$u'_{p(S)}(x_{N\setminus S}, x_{p(S)}) = \text{mín}\{u_S(x_{N\setminus S}, x_S), \underline{v}_g(S)\}$$
para todo $x_{N\setminus S} \in X_{N\setminus S}$ y todo $x_{p(S)} = x_S \in X_S = X_{p(S)}$. Como ϕ verifica la propiedad de *monotonía (C2)*, se tiene que

$$\phi(g(S))(p(S)) \geq \phi(g_1)(p(S)). \tag{3.2}$$

Nótese que

$$\underline{v}_g(S) = \underline{v}_{g(S)}(p(S)) = \max_{x_{p(S)}\in X_{p(S)}} \min_{x_{N\setminus S}\in X_{N\setminus S}} u_{p(S)}(x_{p(S)}, x_{N\setminus S})$$

se obtiene en $(\bar{x}_{p(S)}, \bar{x}_{N\setminus S})$. Por tanto, $\text{mín}_{x_{N\setminus S}\in X_{N\setminus S}} u_{p(S)}(\bar{x}_{p(S)}, x_{N\setminus S}) = \underline{v}_g(S)$ y $u_{p(S)}(\bar{x}_{p(S)}, x_{N\setminus S}) \geq \underline{v}_g(S)$ para todo $x_{N\setminus S} \in X_{N\setminus S}$. Así,

$$u'_{p(S)}(\bar{x}_{p(S)}, x_{N\setminus S}) = \underline{v}_g(S) \tag{3.3}$$

para todo $x_{N\setminus S} \in X_{N\setminus S}$. Además, se tiene $u'_{p(S)}(x_{p(S)}, x_{N\setminus S}) \leq \underline{v}_g(S)$ para todo $x_{N\setminus S} \in X_{N\setminus S}$ y todo $x_{p(S)} \in X_{p(S)}$. Por tanto, cada estrategia $x_{p(S)} \in X_{p(S)}$, $x_{p(S)} \neq \bar{x}_{p(S)}$, está dominada fuertemente por la estrategia $\bar{x}_{p(S)}$. Como ϕ verifica la propiedad de *irrelevancia de estrategias fuertemente dominadas (C4)*, se pueden eliminar todas las estrategias fuertemente dominadas del jugador $p(S)$ sin alterar el beneficio de $p(S)$ en la imagen del juego bajo ϕ. Por tanto,
$$\phi(g_1)(p(S)) = \phi(g_2)(p(S)), \tag{3.4}$$
donde g_2 es el juego que se obtiene de g_1 al eliminar todas las estrategias del jugador $p(S)$ excepto la estrategia $\bar{x}_{p(S)}$.

En el juego g_2, para cada jugador $j \neq p(S)$ cada estrategia $x_j \in X_j \setminus \bar{x}_j$ es una amenaza débilmente dominada para el jugador $p(S)$, ya que

$$u'_{p(S)}(\bar{x}_{p(S)}, \bar{x}_{N\setminus S}) = \min_{x_{N\setminus S}\in X_{N\setminus S}} u'_{p(S)}(\bar{x}_{p(S)}, x_{N\setminus S}).$$ [6]

Como ϕ verifica la propiedad de *irrelevancia de amenazas débilmente dominadas (C6)*, se pueden eliminar todos las amenazas débilmente dominadas para el jugador $p(S)$ sin alterar el beneficio de $p(S)$ en la imagen del juego bajo ϕ. Por tanto,
$$\phi(g_2)(p(S)) = \phi(g_3)(p(S)), \tag{3.5}$$

[6] De hecho, $u'_{p(S)}(\bar{x}_{p(S)}, \bar{x}_{N\setminus S}) = u'_{p(S)}(\bar{x}_{p(S)}, x_{N\setminus S}) = \underline{v}_g(S)$ para todo $x_{N\setminus S} \in X_{N\setminus S}$.

donde g_3 es el juego que se obtiene de g_2 al eliminar todas las estrategias $x_j \in X_j \setminus \bar{x}_j$ para cada jugador $j \in N \setminus S$.

En el juego g_3 cada jugador j posee exactamente una estrategia, $\bar{x}_j$. Así, se puede utilizar para este juego la propiedad de *objetividad individual (C1)* de ϕ para concluir que

$$\phi(g_3)(p(S)) = u'_{p(S)}(\bar{x}). \tag{3.6}$$

Reuniendo las igualdades (3.1), (3.2), (3.4), (3.5), (3.6) y (3.3), se ha demostrado que

$$\begin{aligned} \phi(g)(S) &= \phi(g(S))(p(S)) \geq \phi(g_1)(p(S)) = \phi(g_2)(p(S)) \\ &= \phi(g_3)(p(S)) = u'_{p(S)}(\bar{x}) = \underline{v}_g(S) = \Psi_{\underline{V}}(g)(S). \end{aligned}$$

Parte II. A continuación, se demuestra que $\phi(g)(S) \leq \Psi_{\underline{V}}(g)(S)$.

Considérese de nuevo el juego $g(S) = (N(S), \{X_i\}_{i\in N(S)}, \{u_i\}_{i\in N(S)})$ que se obtiene de g al considerar que la coalición S es un único jugador $p(S)$. Ya se ha comentado que $\phi(g(S))(p(S)) = \phi(g)(S)$ y que $\underline{v}_{g(S)}(p(S)) = \underline{v}_g(S)$.

Se definirá un nuevo juego g_4 añadiendo una estrategia $x_i^* \notin X_i$ para cada jugador $i \in N \setminus S$. Las estrategias x_i^* son introducidas como amenazas adicionales para el jugador $p(S)$. Se añaden esas estrategias una a una. Se supone, sin pérdida de generalidad, que $N \setminus S = \{1, 2, \ldots, k\}$, donde k denota el número de jugadores en $N \setminus S$.

Primero se define el juego g_1^*, al añadir la estrategia x_1^* para el jugador 1. El pago para el jugador $p(S)$ en el juego g_1^* es igual que en el juego $g(S)$ cuando el jugador 1 juega cualquier estrategia $x_1 \in X_1$. Cuando el jugador 1 juega la estrategia x_1^*, entonces el pago para el jugador $p(S)$ se define de la siguiente forma:

$$u^1_{p(S)}(x_{p(S)}, x_1^*, (x_i)_{i\in\{2,3,\ldots,k\}}) = \min_{x_1\in X_1} \{u_{p(S)}(x_{p(S)}, x_1, (x_i)_{i\in\{2,3,\ldots,k\}})\},$$

donde $x_i \in X_i$, para todo $i \in \{2, 3, \ldots, k$, y $x_{p(S)} \in X_{p(S)}$. En el juego g_1^*, la estrategia x_1^* es una amenaza débilmente dominada para el jugador $p(S)$. Como ϕ verifica la propiedad de *irrelevancia de amenazas débilmente dominadas (C6)*, se puede eliminar esta amenaza débilmente dominada para el jugador $p(S)$ en g_1^* sin que cambie el beneficio del jugador $p(S)$ en la imagen del juego bajo ϕ. Esto demuestra que

$$\phi(g_1^*)(p(S)) = \phi(g(S))(p(S)).$$

Sea ahora $2 \leq j \leq k$ y supóngase que se ha añadido una estrategia x_i^* para cada jugador $i = 1, 2, \ldots j-1$ y se han definido los correspondientes juegos g_i^* con funciones de pago $u_{p(S)}^i$ para el jugador $p(S)$ de forma que en cada juego g_i^* la estrategia x_i^* es una amenaza débilmente dominada para el jugador $p(S)$ y $\phi(g_i^*)(p(S)) = \phi(g(S))(p(S))$. Para obtener el juego g_j^*, se añade una estrategia x_j^* para el jugador j y se define la función de pago para el jugador $p(S)$ como en el juego g_{j-1}^* cuando el jugador j juega una estrategia $x_j \in X_j$, y cuando el jugador j juega la estrategia x_j^* el pago es

$$u_{p(S)}^j(x_{p(S)}, (y_i)_{i\in\{1,\ldots,j-1\}}, x_j^*, (x_i)_{i\in\{j+1,\ldots,k\}}) =$$

$$\min_{x_j \in X_j}\{u_{p(S)}^{j-1}(x_{p(S)}, (y_i)_{i\in\{1,\ldots,j-1\}}, x_j, (x_i)_{i\in\{j+1,\ldots,k\}})\},$$

donde $y_i \in X_i \cup \{x_i^*\}$ para todo $i \in \{1, \ldots, j-1\}$, $x_i \in X_i$ para todo $i \in \{j+1, \ldots, k\}$ y $x_{p(S)} \in X_{p(S)}$. En el juego g_j^*, la estrategia x_j^* es una amenaza débilmente dominada para el jugador $p(S)$. Como ϕ verifica la propiedad de *irrelevancia de amenazas débilmente dominadas (C6)*, se puede eliminar esta amenaza débilmente dominada para el jugador $p(S)$ en g_j^* sin que cambie el beneficio del jugador $p(S)$ en la imagen del juego bajo ϕ. Esto demuestra que

$$\phi(g_j^*)(p(S)) = \phi(g_{j-1}^*)(p(S)) = \phi(g(S))(p(S)).$$

El juego g_4 es el juego g_k^* que emerge del procedimiento que se acaba de describir, después de que la estrategia x_i^* haya sido añadida para cada jugador $i \in N \setminus S$. La función de pago para el jugador $p(S)$ en el juego g_4 se denota por $u'_{p(S)} := u_{p(S)}^k$. Se tiene que

$$\phi(g_4)(p(S)) = \phi(g(S))(p(S)). \tag{3.7}$$

Nótese que

$$u'_{p(S)}(x_{p(S)}, (x_i^*)_{i\in N\setminus S}) =$$

$$u_{p(S)}^k(x_{p(S)}, (x_i^*)_{i\in N\setminus S}) = \min_{x_k\in X_k}\{u_{p(S)}^{k-1}(x_{p(S)}, (x_i^*)_{i\in\{1,\ldots,k-1\}}, x_k)\} =$$

$$\min_{x_k\in X_k}\ \min_{x_{k-1}\in X_{k-1}}\{u_{p(S)}^{k-2}(x_{p(S)}, (x_i^*)_{i\in\{1,\ldots,k-2\}}, x_{k-1}, x_k)\} =$$

$$\ldots = \min_{x_{N\setminus S}\in X_{N\setminus S}} u_{p(S)}(x_{p(S)}, x_{N\setminus S}) \leq \underline{v}_{g(S)}(p(S)) \tag{3.8}$$

para todo $x_{p(S)} \in X_{p(S)}$. Se utilizará esto después.

Sea g_5 el juego que se obtiene del juego g_4 al acotar inferiormente la utilidad del jugador $p(S)$ por la cantidad $\underline{v}_g(S)$. Es decir, la función de pago del jugador $p(S)$ es

$$u''_{p(S)}(x_{p(S)}, y_{N\backslash S}) = \max\{u'_{p(S)}(x_{p(S)}, y_{N\backslash S}), \underline{v}_g(S)\}$$

para todo $x_{p(S)} \in X_{p(S)}$ y todo $y_{N\backslash S} \in \prod_{i\in N\backslash S} X_i \cup \{x_i^*\}$. Como ϕ verifica la propiedad de *monotonía (C2)*, se tiene que

$$\phi(g_5)(p(S)) \geq \phi(g_4)(p(S)). \tag{3.9}$$

Véase que el juego g_5 ha sido construido de manera que

$$u''_{p(S)}(x_{p(S)}, x_i^*, y_{N\backslash(S\cup i)}) = \min_{x_i\in X_i} u''_{p(S)}(x_{p(S)}, x_i, y_{N\backslash(S\cup i)})$$

para todo $i \in N\backslash S$, todo $x_{p(S)} \in X_{p(S)}$ y todo $y_{N\backslash(S\cup i)} \in \prod_{j\in N\backslash(S\cup i)} X_j \cup \{x_j^*\}$. Por tanto, cada estrategia $x_i \in X_i$ es una amenaza débilmente dominada para el jugador $p(S)$ para cada jugador $i \neq p(S)$. Como ϕ verifica la propiedad de *irrelevancia de amenazas débilmente dominadas (C6)*, se pueden eliminar todas las amenazas débilmente dominadas para el jugador $p(S)$ sin que cambie el beneficio del jugador $p(S)$ en la imagen del juego bajo ϕ. Por tanto,

$$\phi(g_5)(p(S)) = \phi(g_6)(p(S)), \tag{3.10}$$

donde g_6 es el juego que se obtiene de g_5 al eliminar todas las estrategias $x_i \in X_i$ para cada jugador $i \in N \setminus S$.

En el juego g_6 todos los jugadores $i \neq p(S)$ tienen una única estrategia, la estrategia x_i^*, y como en (3.8) se vio que

$$u'_{p(S)}(x_{p(S)}, (x_i^*)_{i\in N\backslash S}) \leq \underline{v}_{g(S)}(p(S)) = \underline{v}_g(S),$$

entonces

$$u''_{p(S)}(x_{p(S)}, (x_i^*)_{i\in N\backslash S}) = \max\{u'_{p(S)}(x_{p(S)}, (x_i^*)_{i\in N\backslash S}), \underline{v}_g(S)\} = \underline{v}_g(S)$$

para cada $x_{p(S)} \in X_{p(S)}$. Así, se satisfacen las condiciones que requiere la propiedad de *objetividad individual (C1)* y se puede concluir que

$$\phi(g_6)(p(S)) = \underline{v}_g(S). \tag{3.11}$$

Reuniendo las igualdades (3.1), (3.7), (3.9), (3.10) y (3.11), se puede ver que

$$\begin{aligned} \phi(g)(S) &= \phi(g(S))(p(S)) = \phi(g_4)(p(S)) \\ &\leq \phi(g_5)(p(S)) = \phi(g_6)(p(S)) = \underline{v}_g(S) = \Psi_{\underline{V}}(g)(S). \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración del teorema. □

Ya se ha resaltado que la propiedad de irrelevancia de estrategias dominadas implica la irrelevancia de estrategias fuertemente dominadas y que la irrelevancia de amenazas débilmente dominadas implica la irrelevancia de amenazas dominadas. Por tanto, los Teoremas 26 y 27 permiten concluir que Ψ_V no verifica la propiedad de irrelevancia de amenazas débilmente dominadas y que $\Psi_{\underline{V}}$ no verifica la propiedad de irrelevancia de estrategias dominadas.

En el Capítulo 1 se vio que la monotonía se podía reemplazar por las propiedades de eliminación de filas y de eliminación de columnas en las caracterizaciones de la función valor y de la función valor inferior (véanse los Teoremas 4 y 9). De manera análoga, se puede reemplazar la propiedad de monotonía en los Teoremas 26 y 27 por las propiedades siguientes, que están inspiradas en la eliminación de filas y la eliminación de columnas, respectivamente.

C8 Eliminación de estrategias propias. Para todo juego en forma estratégica $g \in G^N$, todo jugador $i \in N$ y toda estrategia $x_i \in X_i$, se tiene que

$$\phi(g)(i) \geq \phi(g')(i),$$

donde $g' \in G^N$ es el juego que se obtiene de g al eliminar la estrategia x_i.

C9 Eliminación de estrategias ajenas. Para todo juego en forma estratégica $g \in G^N$, cualquier par de jugadores $i, j \in N$, $i \neq j$, y toda estrategia $x_j \in X_j$, se tiene que

$$\phi(g)(i) \leq \phi(g')(i),$$

donde $g' \in G^N$ es el juego que se obtiene de g al eliminar la estrategia x_j.

Teorema 28 Ψ_V *es el único procedimiento que verifica las propiedades de objetividad individual (C1), irrelevancia de estrategias dominadas (C3), irrelevancia de amenazas dominadas (C5), invarianza ante fusiones (C7), eliminación de estrategias propias (C8) y eliminación de estrategias ajenas (C9).*

Teorema 29 $\Psi_{\underline{V}}$ *es el único procedimiento que verifica las propiedades de objetividad individual (C1), irrelevancia de estrategias fuertemente dominadas (C4), irrelevancia de amenazas débilmente dominadas (C6), invarianza ante fusiones (C7), eliminación de estrategias propias (C8) y eliminación de estrategias ajenas (C9).*

3.4. Conclusiones.

Se resumen a continuación en unas tablas los cuatro resultados que se deducen de este capítulo para el procedimiento de Von Neumann y Morgenstern (1944) basado en el valor(Ψ_V) y para el nuevo procedimiento basado en el valor inferior ($\Psi_{\underline{V}}$).

Ψ_V
C1.- Objetividad individual
C2.- Monotonía
C3.- Irrelevancia de estrategias dominadas
C5.- Irrelevancia de amenazas dominadas
C7.- Invarianza ante fusiones
C1.- Objetividad individual
C8.- Eliminación de estrategias propias
C9.- Eliminación de estrategias ajenas
C3.- Irrelevancia de estrategias dominadas
C5.- Irrelevancia de amenazas dominadas
C7.- Invarianza ante fusiones

$\Psi_{\underline{V}}$
C1.- Objetividad individual C2.- Monotonía C4.- Irrelevancia de estrategias fuertemente dominadas C6.- Irrelevancia de amenazas débilmente dominadas C7.- Invarianza ante fusiones
C1.- Objetividad individual C8.- Eliminación de estrategias propias C9.- Eliminación de estrategias ajenas C4.- Irrelevancia de estrategias fuertemente dominadas C6.- Irrelevancia de amenazas débilmente dominadas C7.- Invarianza ante fusiones

Como líneas de trabajo futuras se pueden enumerar las siguientes:

- Buscar una caracterización del procedimiento de Von Neumann y Morgenstern basada en el trabajo de Norde y Voorneveld (2004) en el que aportan caracterizaciones axiomáticas del valor para juegos matriciales.
- Tratar de caracterizar otros procedimientos distintos (por ejemplo, los propuestos en Bergantiños y García-Jurado (1995)).
- Caracterizar procedimientos que asocien juegos sin utilidad transferible (NTU) a juegos en forma estratégica.

Capítulo 4

El valor de Shapley en juegos en forma estratégica en los que los jugadores cooperan.

En este capítulo se consideran funciones de valoración. Una función de valoración asocia a cada coalición no vacía de jugadores en un juego en forma estratégica un vector de pagos para los miembros de la coalición. Tal vector de pagos da la valoración para cada uno de tales jugadores de cooperar en esa coalición. El objetivo de este capítulo es proponer y caracterizar algunas funciones de valoración.

Para ello, se aplicará el valor de Shapley (Shapley (1953)) a juegos en forma característica que se obtienen haciendo uso de los procedimientos basados en el valor y en el valor inferior descritos en el capítulo anterior. Parte de este capítulo está incluido en Carpente y otros (2004).

La estructura de este capítulo es la siguiente. En la primera sección, se recuerda la definición de valor de Shapley para un juego en forma característica. En la segunda, se introducen las propiedades y se obtienen las caracterizaciones axiomáticas correspondientes. Finalmente, se añade un pequeño apartado de conclusiones en el que se resume lo más relevante del capítulo y se enumeran posibles líneas para trabajos futuros.

4.1. Introducción al valor de Shapley de un juego en forma característica.

El valor de Shapley ϕ es una aplicación que asigna a cada juego $v \in TU^N$ el vector $\phi(N,v) \in \mathbb{R}^N$ dado por:

$$\phi_i(N,v) = \sum_{T \subset N, i \in T} \frac{(|T|-1)!\,(|N|-|T|)!}{|N|!} \left(v(T) - v(T \backslash \{i\})\right)$$

para todo $i \in N$.

El valor de Shapley, introducido en Shapley (1953), es probablemente el concepto de solución más importante de la teoría de juegos cooperativos y ha generado una amplia literatura. Pueden encontrarse panorámicas recientes del valor de Shapley en Winter (2002).

Existen numerosas caracterizaciones del valor de Shapley. Una de ellas está basada en la propiedad de contribuciones equilibradas y fue introducida en Myerson (1980), en donde se propone el siguiente resultado:

Teorema 30 (Myerson (1980)) *El valor de Shapley es la única aplicación ϕ que asigna a cada $v \in TU^N$ (con N finito) un vector $\phi(N,v) \in \mathbb{R}^N$ que cumple las propiedades de:*

1. ***Eficiencia.*** $\sum_{i \in N} \phi_i(N,v) = v(N)$ *para todo* $v \in TU^N$.
2. ***Contribuciones equilibradas****. Para cada dos jugadores $i, j \in N$, $i \neq j$, se tiene que*

$$\phi_i(N,v) - \phi_i(N \backslash \{j\}, v_{-j}) = \phi_j(N,v) - \phi_j(N \backslash \{i\}, v_{-i}),$$

donde v_{-k} es la restricción de v al conjunto $N \backslash \{k\}$ (para todo $k \in N$).

4.2. Caracterizaciones del valor de Shapley en juegos en forma estratégica en los que los jugadores cooperan.

En este capítulo se va a tratar con funciones de valoración. Antes de nada se van a introducir formalmente. Como se verá, una función de valoración es, de algún modo, una generalización de la función de evaluación que se introdujo en el Capítulo 1.

Definición 31 *Una función de valoración es una aplicación φ que asocia a cada juego $g \in G^N$ y a cada coalición no vacía $S \subset N$ un vector de pagos $\varphi(S,g) \in \mathbb{R}^S$. Para todo $g \in G^N$, $S \subset N$ e $i \in S$, la i-ésima componente de $\varphi(S,g)$, $\varphi_i(S,g)$, refleja la valoración que hace el jugador i de la cooperación en la coalición S en el juego g.*

Se consideran las siguientes propiedades para una función de valoración. La mayor parte de estas propiedades están inspiradas en propiedades análogas introducidas en capítulos anteriores.

D1 Objetividad individual. Para todo juego $g \in G^N$ y todo jugador $i \in N$, si se tiene que $u_i(x) = c$ ($c \in \mathbb{R}$) para toda combinación de estrategias $x \in X_N$, entonces

$$\varphi_i(\{i\},g) = c.$$

La propiedad de objetividad individual establece que si un jugador obtiene el mismo pago para cualquier posible combinación de estrategias en el juego, entonces la valoración para ese jugador al formar él mismo una coalición debe ser igual a esa cantidad.

D2 Monotonía. Dados dos juegos en forma estratégica g y $g' \in G^N$, con $g = (N, \{X_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N})$ y $g' = (N, \{X_i\}_{i\in N}, \{u'_i\}_{i\in N})$, y un jugador $i \in N$ tales que $u_i(x) \geq u'_i(x)$ para todo $x \in X_N$, entonces se tiene que

$$\varphi_i(\{i\},g) \geq \varphi_i(\{i\},g').$$

La propiedad de monotonía indica que la valoración de un jugador al formar él mismo una coalición no decrece si su pago en el correspondiente juego en forma estratégica permanece igual o aumenta para cualquier combinación posible de estrategias.

D3 Irrelevancia de estrategias fuertemente dominadas. Dado el juego $g \in G^N$, una estrategia $x_i \in X_i$ del jugador $i \in N$ está *fuertemente dominada* si existe una estrategia $x_i' \in X_i$, $x_i' \neq x_i$, tal que

$$u_i(x_i', x_{N\setminus i}) \geq u_i(x_i, x_{N\setminus i})$$

para todo $x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}$. Para todo juego $g \in G^N$ y todo jugador $i \in N$, si la estrategia $x_i \in X_i$ está fuertemente dominada, entonces se tiene que $\varphi_i(\{i\}, g) = \varphi_i(\{i\}, g')$, donde $g' \in G^N$ es el juego que se obtiene de g al eliminar la estrategia x_i.

La propiedad de irrelevancia de estrategias fuertemente dominadas establece que la valoración de un jugador que forma por sí mismo una coalición no cambia si en el juego en forma estratégica pierde la posibilidad de utilizar una estrategia que es peor o igual para él que otra de sus estrategias, sin tener en cuenta las estrategias que escojan los otros jugadores. Para comprender la relevancia de esta propiedad (al igual que la de la siguiente propiedad) cabe resaltar que la valoración para un jugador que forma él mismo una coalición se interpreta como el pago que ese jugador puede garantizarse por sí mismo independientemente de las estrategias que utilicen los otros jugadores.

D4 Irrelevancia de amenazas débilmente dominadas. Dado el juego $g \in G^N$, una estrategia $x_j \in X_j$ del jugador $j \in N$ es una *amenaza débilmente dominada* para el jugador $i \in N$, $i \neq j$ si para cada $x_{N\setminus j} \in X_{N\setminus j}$ existe una estrategia $x_j' \in X_j$, $x_j' \neq x_j$, tal que

$$u_i(x_j', x_{N\setminus j}) \leq u_i(x_j, x_{N\setminus j}).$$

Para todo juego $g \in G^N$ y cualquier par de jugadores $i, j \in N$, $i \neq j$, si la estrategia $x_j \in X_j$ es una amenaza débilmente dominada para el jugador i, entonces se tiene que $\varphi_i(\{i\}, g) = \varphi_i(\{i\}, g')$, donde $g' \in G^N$ es el juego que se obtiene de g al eliminar la estrategia x_j.

La propiedad de irrelevancia de amenazas débilmente dominadas indica que la valoración que hace un jugador i al formar él mismo una coalición no se ve afectada si a otro jugador j se le prohibe utilizar una estrategia cuya eliminación no cambia el peor escenario posible para el jugador i.

Para formular la siguiente propiedad se recuerda alguna notación empleada en el anterior capítulo. Sean $g = (N, \{X_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N}) \in G^N$ y $S \subset N$, $S \neq \emptyset$. Supongamos que los miembros de una coalición S deciden unirse y actuar como un único jugador. Con el fin de estudiar las oportunidades de S, se introduce un nuevo jugador $i(S)$ con conjunto de estrategias $X_{i(S)} := X_S$ y función de utilidad $u_{i(S)} : \Pi_{j\in(N\backslash S)\cup\{i(S)\}} X_j \to \mathbb{R}$ definida de la siguiente forma:

$$u_{i(S)}(x_{N\backslash S}, x_{i(S)}) = u_S(x_{N\backslash S}, x_S)$$

para todo $x_{N\backslash S} \in X_{N\backslash S}$ y todo $x_{i(S)} = x_S \in X_S = X_{i(S)}$. Denotamos por $N(S) := (N\backslash S) \cup \{i(S)\}$. El juego en forma estratégica $g(S) \in G^{N(S)}$ se define como

$$g(S) = (N(S), \{X_i\}_{i\in N(S)}, \{u_i\}_{i\in N(S)}).$$

D5 Invarianza ante fusiones. Para todo juego $g \in G^N$ y toda coalición no vacía $S \subset N$, se tiene que

$$\sum_{i\in S} \varphi_i(S, g) = \varphi_{i(S)}(\{i(S)\}, g(S)).$$

La propiedad de invarianza ante fusiones establece que la suma de las valoraciones de los jugadores de S si se forma tal coalición en el juego g es la misma que la valoración del jugador $i(S)$ formando una coalición por sí mismo en el juego $g(S)$[1]. La interpretación de esta propiedad es que una coalición de jugadores no cambia su valoración conjunta fusionándose y actuando como un único jugador. Tal requerimiento parece completamente natural en el contexto en el que se está.

El principio de reciprocidad entre jugadores se utiliza frecuentemente en la literatura sobre el valor de Shapley y otros conceptos de solución para juegos en forma característica. Aquí se utilizan las contribuciones equilibradas, introducidas por Myerson (1980). El principio de contribuciones equilibradas establece que para cualesquiera dos jugadores las ganancias o pérdidas que uno inflige al otro al abandonar el juego son iguales. Myerson utilizó este principio para extender el valor de Shapley a un contexto de juegos en forma coalicional sin utilidad transferible con estructuras de conferencias.

[1] La definición del juego $g(S)$ fue introducida en la sección 3.3.

Se tiene la intención de aplicar el principio de contribuciones equilibradas a funciones de valoración. En este contexto, en vez de considerar que los jugadores abandonan el juego, se considera que dejan la coalición de jugadores cooperadores. El principio, teniendo en cuenta los matices comentados, se formularía así.

D6 Contribuciones equilibradas. Para todo juego $g \in G^N$ y toda coalición no vacía $S \subset N$, y cualquier par de jugadores $i, j \in S$, se tiene que

$$\varphi_i(S, g) - \varphi_i(S \backslash \{j\}, g) = \varphi_j(S, g) - \varphi_j(S \backslash \{i\}, g).$$

Como ya se comentó, en los juegos en forma característica la propiedad de contribuciones equilibradas está profundamente conectada con el valor de Shapley. Esto sigue siendo cierto en el contexto de las funciones de valoración tal como se verá en los principales resultados de este capítulo.

A continuación se introducen dos funciones de valoración basadas en el valor de Shapley: $\phi_{\underline{V}}$ y ϕ_V:

- La *función de valoración* $\phi_{\underline{V}}$ asigna a cada juego en forma estratégica $g \in G^N$ y a cada coalición no vacía $S \subset N$ el valor de Shapley del juego en forma característica $(S, \underline{v}_g)$, que es la restricción de $(N, \underline{v}_g)$ al subconjunto $S \subset N$. Por lo tanto:

$$(\phi_{\underline{V}})_i(S, g) = \sum_{T \subset S, i \in T} \frac{(|T|-1)!\,(|S|-|T|)!}{|S|!} \left(\underline{v}_g(T) - \underline{v}_g(T \backslash \{i\})\right)$$

  para todo $i \in S$.

- Análogamene, la *función de valoración* ϕ_V asigna a cada juego en forma estratégica $g \in G^N$ y a cada coalición no vacía $S \subset N$ el valor de Shapley del juego en forma característica (S, v_g), que es la restricción de (N, v_g) al subconjunto $S \subset N$. Por lo tanto:

$$(\phi_V)_i(S, g) = \sum_{T \subset S, i \in T} \frac{(|T|-1)!\,(|S|-|T|)!}{|S|!} \left(v_g(T) - v_g(T \backslash \{i\})\right)$$

  para todo $i \in S$.

A la vista de los capítulos anteriores, el lector habrá podido imaginar que las propiedades introducidas hasta el momento (D1, D2, D3, D4, D5 y D6) servirán para caracterizar $\phi_{\underline{V}}$. Para caracterizar ϕ_V se deberán introducir dos propiedades nuevas en sustitución de D3 y D4. Se empezará por la caracterización de $\phi_{\underline{V}}$.

Teorema 32 $\phi_{\underline{V}}$ *es la única función de valoración que cumple objetividad individual (D1), monotonía (D2), irrelevancia de estrategias fuertemente dominadas (D3), irrelevancia de amenazas débilmente dominadas (D4), invarianza ante fusiones (D5) y contribuciones equilibradas (D6).*

Demostración: *Existencia.*

Para comprobar que $\phi_{\underline{V}}$ verifica *objetividad individual (D1)*, sean $g \in G^N$, $i \in N$ y $c \in \mathbb{R}$ tales que $u_i(x) = c$ para todo $x \in X_N$. Entonces

$$(\phi_{\underline{V}})_i(\{i\}, g) = \phi_i(\{i\}, \underline{v}_g) = \underline{v}_g(\{i\}) = c,$$

donde la primera igualdad simplemente utiliza la definición de función de valoración de Shapley, la segunda se sigue de la eficiencia del valor de Shapley y la tercera se deduce de la objetividad individual del procedimiento del valor inferior.

Para demostrar que $\phi_{\underline{V}}$ verifica *monotonía (D2)*, sean

$$g = (N, \{X_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N}) \in G^N,$$

$$g' = (N, \{X_i\}_{i \in N}, \{u'_i\}_{i \in N}) \in G^N$$

e $i \in N$ tales que $u_i(x) \geq u'_i(x)$ para todo $x \in X_N$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}(\phi_{\underline{V}})_i(\{i\}, g) &= \phi_i(\{i\}, \underline{v}_g) = \underline{v}_g(\{i\}) \geq \underline{v}_{g'}(\{i\}) \\ &= \phi_i(\{i\}, \underline{v}_{g'}) = (\phi_{\underline{V}})_i(\{i\}, g'),\end{aligned}$$

donde la desigualdad se deduce de la propiedad de monotonía que verifica el procedimiento del valor inferior.

Para comprobar que $\phi_{\underline{V}}$ verifica *irrelevancia de estrategias fuertemente dominadas (D3)* se usa que la equivalente a esta propiedad para el procedimiento del valor inferior implica que

$$\underline{v}_g(\{i\}) = \underline{v}_{g'}(\{i\})$$

para cualesquiera juegos en forma estratégica $g, g' \in G^N$ donde el juego g' se obtiene a partir del juego g al eliminar una estrategia fuertemente dominada $x_i \in X_i$ del jugador $i \in N$. La propiedad de *irrelevancia de amenazas débilmente dominadas (D4)* de $\phi_{\underline{V}}$ se demuestra de una manera similar teniendo en cuenta la propiedad equivalente del procedimiento del valor inferior.

Para comprobar que $\phi_{\underline{V}}$ verifica *invarianza ante fusiones (D5)*, sea $g \in G^N$ y $S \subset N$, $S \neq \emptyset$. Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{i\in S}(\phi_{\underline{V}})_i(S,g) &= \sum_{i\in S}\phi_i(S,\underline{v}_g) = \underline{v}_g(S)\\ &= \underline{v}_{g(S)}(i(S)) = (\phi_{\underline{V}})_{i(S)}(\{i(S)\},g(S)),\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad utiliza la eficiencia del valor de Shapley y la tercera se sigue de la propiedad de invarianza ante fusiones que verifica el procedimiento del valor inferior.

Se comprobará a continuación la propiedad de *contribuciones equilibradas (D6)*. Sean $g \in G^N$, $S \subset N$, $S \neq \varnothing$, e $i, j \in S$. Entonces

$$\begin{aligned}(\phi_{\underline{V}})_i(S,g) - (\phi_{\underline{V}})_i(S\backslash\{j\},g) &= \phi_i(S,\underline{v}_g) - \phi_i(S\backslash\{j\},\underline{v}_g)\\ &= \phi_j(S,\underline{v}_g) - \phi_j(S\backslash\{i\},\underline{v}_g)\\ &= (\phi_{\underline{V}})_j(S,g) - (\phi_{\underline{V}})_j(S\backslash\{i\},g).\end{aligned}$$

La segunda igualdad es consecuencia de que el valor de Shapley cumple la propiedad de contribuciones equilibradas.

Unicidad. Como primer paso para la demostración de la unicidad, se demostrará que si una función de valoración φ satisface las seis propiedades que están en el enunciado del teorema, si $g \in G^N$ y $S \subset N$, entonces

$$\sum_{i\in S}\varphi_i(S,g) = \underline{v}_g(S),$$

donde $\underline{v}_g$ es el juego en forma característica asociado al juego en forma estratégica g tal y como se definió en el capítulo anterior. Para hacer eso, se define una función $\Psi : G \to TU$ de tal forma que si $g \in G^N$ y $S \subset N$,

$$\Psi(g)(S) = \sum_{i\in S}\varphi_i(S,g).$$

Nótese que Ψ puede interpretarse como un procedimiento que asocia un juego en forma característica a cada juego en forma estratégica finito.

Se puede comprobar fácilmente que Ψ verifica las cinco propiedades que caracterizan el procedimiento del valor inferior $\Psi_{\underline{V}}$, debido a que φ verifica objetividad individual (D1), monotonía (D2), irrelevancia de estrategias fuertemente dominadas (D3), irrelevancia de amenazas débilmente dominadas (D4) e invarianza ante fusiones (D5) y, por tanto, el procedimiento Ψ es exactamente $\Psi_{\underline{V}}$ y entonces

$$\sum_{i \in S} \varphi_i(S, g) = \Psi(g)(S) = \Psi_{\underline{V}}(g)(S) = \underline{v}_g(S)$$

para todo $g \in G^N$ y para toda coalición $S \subset N$ y, por tanto, el primer paso de esta demostración queda probado.

Como segundo paso, para concluir la unicidad, supóngase que φ^1 y φ^2 son dos funciones de valoración que satisfacen las seis propiedades del enunciado del teorema; se demostrará que $\varphi^1 = \varphi^2$. Sea $g \in G^N$ y considérese $S \subset N$; para demostrar que $\varphi^1(S, g) = \varphi^2(S, g)$ se utilizará la inducción en el tamaño de la coalición S.

Si $|S| = 1$, entonces $\varphi^1(S, g) = \underline{v}_g(S) = \varphi^2(S, g)$ por la primera parte de la demostración de la unicidad. Supóngase que la unicidad se verifica para toda coalición $S \subset N$ con $|S| = t$, $1 \leq t < n$ y sea $S \subset N$ con $|S| = t + 1$. Sean también $i, j \in S$, $i \neq j$. Por la propiedad de contribuciones equilibradas de φ^l, $l \in \{1, 2\}$, se tiene

$$\varphi_j^l(S, g) - \varphi_i^l(S, g) = \varphi_j^l(S \backslash \{i\}, g) - \varphi_i^l(S \backslash \{j\}, g)$$

Entonces, haciendo uso de la hipótesis de inducción

$$\varphi_j^1(S, g) - \varphi_j^2(S, g) = \varphi_i^1(S, g) - \varphi_i^2(S, g),$$

y esta igualdad se cumple para todos $i, j \in S$, $i \neq j$. Teniendo en cuenta que

$$\underline{v}_g(S) = \sum_{i \in S} \varphi_i^1(S, g) = \sum_{i \in S} \varphi_i^2(S, g)$$

por la primera parte de la demostración de la unicidad, entonces $\varphi_i^1(S, g) = \varphi_i^2(S, g)$ para todo $i \in S$ y, por tanto, $\varphi^1 = \varphi^2$. $\square$

$\phi_{\underline{V}}$ es la función de valoración basada en el valor de Shapley más adecuada cuando las estrategias mixtas no pueden ser usadas por los jugadores. Pero, en el caso contrario, ϕ_V deber ser también considerada. A continuación se va a proponer una caracterización de ϕ_V, para lo que se van a introducir nuevas propiedades.

La irrelevancia de estrategias dominadas establece que, cuando se forma la coalición formada únicamente por el jugador $i \in N$, su valoración de la situación no cambia aunque pierda la posibilidad de usar una estrategia dominada en el juego en forma estratégica de partida. Nótese que la irrelevancia de estrategias dominadas implica la irrelevancia de estrategias fuertemente dominadas pero el recíproco no es cierto.

D7 **Irrelevancia de estrategias dominadas.** Para todo juego $g \in G^N$ y todo jugador $i \in N$, si la estrategia $x_i \in X_i$ está dominada, entonces se tiene que $\varphi(\{i\}, g) = \varphi(\{i\}, g')$, donde $g' \in G^N$ es el juego que se obtiene a partir del juego g al eliminar la estrategia x_i.

La propiedad de irrelevancia de amenazas dominadas tiene una interpretación similar a la de irrelevancia de amenazas débilmente dominadas. La irrelevancia de amenazas débilmente dominadas es la propiedad más fuerte de las dos, ya que toda amenaza dominada está también débilmente dominada.

D8 **Irrelevancia de amenazas dominadas.** Para todo juego $g \in G^N$ y cualquier par de jugadores $i, j \in N$, $i \neq j$, si la estrategia $x_j \in X_j$ es una amenaza dominada para el jugador i, entonces $\varphi(\{i\}, g) = \varphi(\{i\}, g')$, donde $g' \in G^N$ es el juego que se obtiene a partir del juego g al eliminar la estrategia x_j.

Teorema 33 ϕ_V *es la única función de valoración que cumple objetividad individual (D1), monotonía (D2), irrelevancia de estrategias dominadas (D7), irrelevancia de amenazas dominadas (D8), invarianza ante fusiones (D5) y contribuciones equilibradas (D6).*

La demostración de este teorema sigue una línea similar a la demostración del teorema anterior, teniendo en cuenta que el procedimiento de Von Neumann y Morgenstern para asociar un juego TU a un juego en forma estratégica satisface las propiedades de objetividad individual, monotonía, irrelevancia de estrategias dominadas, irrelevancia de amenazas dominadas e invarianza ante fusiones. Por ello, para evitar alargar innecesariamente este texto, no se incluirá aquí.

Para estudiar las conexiones entre las propiedades mencionadas, de los teoremas enunciados se puede concluir que ϕ_V no verifica la propiedad de irrelevancia de amenazas débilmente dominadas y que $\phi_{\underline{V}}$ no verifica la propiedad de irrelevancia de estrategias dominadas.

Finalmente, para concluir este apartado, y siendo consecuentes con los capítulos anteriores, se pueden obtener caracterizaciones axiómaticas alternativas para estos valores. Para hacer esto, se argumenta que la irrelevancia de estrategias fuertemente dominadas (o la irrelevancia de estrategias dominadas) y la irrelevancia de amenazas débilmente dominadas (o la irrelevancia de amenazas dominadas) establecen que la eliminación, en cierto sentido, de estrategias dominadas para el jugador $i \in N$, o , en cierto sentido, las amenazas dominadas del jugador $j \in N$, $j \neq i$, no tiene efecto sobre el valor del jugador i, cuando se forma la coalición que tiene a i como único jugador. Es razonable formular la pregunta de qué pasaría si se elimina cualquier estrategia, o cualquier amenaza, dominadas o no. Las siguientes propiedades que se introducen tratan de responder a esta cuestión.

La propiedad de eliminación de estrategias propias establece que el valor de un jugador $i \in N$, cuando se forma la coalición que consiste en él como único jugador, no debe incrementarse cuando se elimina una de sus estrategias, y, consecuentemente, sus posibilidades quedan más restringidas.

D9 **Eliminación de estrategias propias.** Para todo juego en forma estratégica $g \in G^N$, todo jugador $i \in N$ y toda estrategia $x_i \in X_i$, se tiene que
$$\varphi(\{i\}, g) \geq \varphi(\{i\}, g'),$$
donde $g' \in G^N$ es el juego que se obtiene a partir del juego g al eliminar la estrategia x_i.

La propiedad de eliminación de estrategias ajenas establece que el valor de un jugador $i \in N$, cuando se considera que él mismo forma una coalición, no debe decrecer cuando se elimina una estrategia del jugador $j \in N$, con $j \neq i$.

D10 **Eliminación de estrategias ajenas.** Para todo juego en forma estratégica $g \in G^N$, cualquier par de jugadores $i, j \in N$, $i \neq j$ y todo estrategia $x_j \in X_j$, se tiene que
$$\varphi(\{i\}, g) \leq \varphi(\{i\}, g'),$$

donde $g' \in G^N$ es el juego que se obtiene a partir del juego g al eliminar la estrategia x_j.

Es fácil comprobar que $\phi_{\underline{V}}$ y ϕ_V cumplen estas dos propiedades y que, más aún, pueden obtenerse dos nuevas caracterizaciones sustituyendo D2 (monotonía) por D9 y D10.

Teorema 34 $\phi_{\underline{V}}$ *es la única función de valoración que cumple objetividad individual (D1), irrelevancia de estrategias fuertemente dominadas (D3), irrelevancia de amenazas débilmente dominadas (D4), invarianza ante fusiones (D5), contribuciones equilibradas (D6), eliminación de estrategias propias (D9) y eliminación de estrategias ajenas (D10).*

Teorema 35 ϕ_V *es la única función de valoración que cumple objetividad individual (D1), irrelevancia de estrategias dominadas (D7), irrelevancia de amenazas dominadas (D8), invarianza ante fusiones (D5), contribuciones equilibradas (D6), eliminación de estrategias propias (D9) y eliminación de estrategias ajenas (D10).*

4.3. Conclusiones.

Se resumen a continuación en unas tablas los cuatro resultados de caracterización de $\phi_{\underline{V}}$ y ϕ_V.

ϕ_V
D1.- Objetividad individual D2.- Monotonía D7.- Irrelevancia de estrategias dominadas D8.- Irrelevancia de amenazas dominadas D5.- Invarianza ante fusiones D6.- Contribuciones equilibradas
D1.- Objetividad individual D9.- Eliminación de estrategias propias D10.- Eliminación de estrategias ajenas D7.- Irrelevancia de estrategias dominadas D8.- Irrelevancia de amenazas dominadas D5.- Invarianza ante fusiones D6.- Contribuciones equilibradas

$\phi_{\underline{V}}$
D1.- Objetividad individual D2.- Monotonía D3.- Irrelevancia de estrategias fuertemente dominadas D4.- Irrelevancia de amenazas débilmente dominadas D5.- Invarianza ante fusiones D6.- Contribuciones equilibradas
D1.- Objetividad individual D9.- Eliminación de estrategias propias D10.- Eliminación de estrategias ajenas D3.- Irrelevancia de estrategias fuertemente dominadas D4.- Irrelevancia de amenazas débilmente dominadas D5.- Invarianza ante fusiones D6.- Contribuciones equilibradas

Como líneas de trabajo futuras se pueden mencionar:

- Las análogas a las mencionadas en el Capítulo 3.
- Tratar de utilizar otras caracterizaciones existentes del valor de Shapley para obtener nuevas caracterizaciones de estas funciones de valor.
- Estudiar y caracterizar nuevas funciones de valor basadas en otras soluciones de juegos en forma característica, por ejemplo, el nucleolo.

Parte III

Extensiones de los problemas de bancarrota y sus aplicaciones.

Capítulo 5

La regla igualitaria restringida en problemas de bancarrota con uniones a priori.

En muchas situaciones en las que los agentes interactúan, lo hacen dentro de grupos. La teoría de juegos cooperativos estudia tales situaciones teniendo en cuenta que cada coalición de jugadores puede lograr ganancias por sí misma. Estos valores de las coaliciones son consecuentemente tenidos en cuenta a la hora de determinar una división justa del valor de la coalición total entre todos los jugadores.

A menudo, sin embargo, algunas coaliciones juegan un papel especial, ya que surgen de forma natural de la situación subyacente. Si estos grupos emergentes forman una partición de la coalición total, se denominan usualmente *uniones a priori.*

Una clase interesante de problemas en los cuales el papel de las uniones a priori ha sido escasamente estudiado es la clase de los problemas de bancarrota. En un problema de bancarrota, hay un capital al que se denominará estado que debe ser dividido entre un número de demandantes, cuyas demandas totales exceden el estado disponible. Es frecuente que suceda que estos demandantes estén divididos en uniones a priori, basadas en la naturaleza de sus demandas. Por ejemplo, cuando una empresa sufre un proceso de bancarrota, los acreedores están normalmente agrupados de forma natural para distinguir las demandas en base a intereses pendientes, capital o distintas operaciones comerciales.

El principal objetivo que se muestra a lo largo de la literatura referida a bancarrota es encontrar reglas que asignen a cada situación de bancarrota un reparto del estado, satisfaciendo una serie de propiedades prefijadas. Esta rama de la teoría de juegos fue iniciada por O´Neill (1982) y ha ganado en popularidad durante los últimos años. Una recopilación reciente de este tema puede encontrarse en Thomson (2003).

Una forma natural de analizar la clase de situaciones de bancarrota con uniones a priori es extender algunas de las reglas conocidas para problemas de bancarrota estándar a este nuevo contexto. Por ejemplo, en Casas-Méndez y otros (2003) se extiende la regla proporcional ajustada considerando un procedimiento en dos etapas en el cual se divide primero el estado existente entre las uniones y después se reparte de manera consecuente lo que cada unión recibe entre sus miembros.

En este capítulo, se presenta una extensión de la regla igualitaria restringida (CEA). Esta extensión involucra un procedimiento en dos etapas similar al presentado en Casas-Méndez y otros (2003). Esta extensión de la regla CEA se relaciona con la solución de un juego cooperativo con utilidad transferible descrito basándonos en el que aparece en Owen (1977). Además se proporcionan dos caracterizaciones de esta extensión en dos etapas inspiradas en resultados previos de Dagan (1996) y Herrero y Villar (2002), respectivamente.

La estructura del capítulo es la siguiente. En la primera sección, se introducen las situaciones de bancarrota con uniones a priori, así como la notación básica en este contexto. En un segundo apartado, se describe un procedimiento en dos etapas que extiende la regla igualitaria restringida a problemas de bancarrota con uniones a priori. En la tercera sección, se dan dos caracterizaciones axiomáticas de dicho procedimiento. En la cuarta sección, se definen nuevos juegos en forma característica asociados a problemas de bancarrota con uniones a priori, de manera que al considerar distintas soluciones de estos juegos se extienden reglas de bancarrota clásicas. Una de estas extensiones usa el concepto de situación de reparto para muchos asuntos, introducida en Calleja, Borm y Hendrickx (2004). Finalmente, se añade un pequeño apartado de conclusiones que resalta lo más relevante de este capítulo y enumera alguna posible línea futura de trabajo. Este capítulo se basa en Casas-Méndez, Borm, Carpente y Hendrickx (2002).

5.1. Introducción a los problemas de bancarrota con uniones a priori.

Un problema de bancarrota surge cuando hay un cierto recurso escaso que debe ser dividido entre unos agentes que demandan una cierta cantidad de éste y el total disponible no es suficiente para satisfacer dichas demandas. En esta clase de problemas la pregunta que cabe hacerse es cómo dividir la cantidad existente del recurso entre los demandantes.

Se hará referencia a una *situación de bancarrota* con una terna (N, E, c), donde $N = \{1, \ldots, n\}$ es el conjunto de jugadores (acreedores o demandantes), $E \in \mathbb{R}$ es no negativo y representa el estado (la cantidad de recurso disponible del deudor) y $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^N_+$ es el vector de las demandas de los acreedores. Supondremos que se cumple $\sum_{i \in N} c_i \geq E$, es decir, el estado es insuficiente para cubrir todas las demandas[1].

Se denota por B^N al conjunto de todos los problemas de bancarrota con conjunto de acreedores N. Una *regla de bancarrota* es una función $f : B^N \to \mathbb{R}^N$ que le asigna a cada problema de bancarrota (N, E, c) un vector $f(N, E, c) \in \mathbb{R}^N$ que satisface las siguientes propiedades:

1. Ningún agente obtiene más de la cantidad que demanda, lo que se resume diciendo que f es *razonable*. Es decir, para todo $i \in N$, $0 \leq f_i(N, E, c) \leq c_i$.

2. La suma de las cantidades obtenidas por los acreedores es la totalidad del estado, es decir, f es *eficiente* y, por tanto, $\sum_{i \in N} f_i(N, E, c) = E$.

En este capítulo, el principal interés se centra en la denominada *regla igualitaria restringida* (CEA), la cual, para un problema $(N, E, c) \in B^N$, se define de la siguiente manera:

$$CEA_i(N, E, c) = \text{mín}\{\lambda, c_i\}$$

para todo $i \in N$, donde λ es tal que $\sum_{i \in N} \text{mín}\{\lambda, c_i\} = E$.

[1] Nótese que en el caso $\sum_{i \in N} c_i = E$ no tendríamos propiamente una situación de bancarrota; sin embargo, se incluye esta situación trivial por razones técnicas.

Esta regla otorga la misma cantidad a todos los demandantes con la restricción de que ninguno consiga más de lo que en realidad demanda. Varios autores hacen referencia a la regla restringida igualitaria, Dagan (1996) y Herrero y Villar (2002) entre otros, quienes proporcionan diferentes caracterizaciones axiomáticas de esta regla en sus trabajos.

Ejemplo 36 *Considérese la siguiente situación de bancarrota* $(N, E, c) \in B^N$ *con cuatro acreedores, con* $E = 10$ *y* $c = (6, 2, 8, 5)$. *La regla igualitaria restringida otorga al segundo agente toda su demanda y, a los demás, cantidades iguales, resultando* $CEA(N, E, c) = (8/3, 2, 8/3, 8/3)$.

Un *problema de bancarrota con uniones a priori* se representa por la tupla $(N, E, c, \mathcal{P})$ donde (N, E, c) es un problema de bancarrota estándar y $\mathcal{P} = \{P_k\}_{k \in R}$ es una partición del conjunto de jugadores. Denotamos por BU^N al conjunto de todos los problemas de bancarrota con uniones a priori y conjunto de jugadores N.

Uno de los principales objetivos de este capítulo va a ser definir *reglas de bancarrota con uniones a priori*, esto es, funciones $\varphi : BU^N \to \mathbb{R}^N$ que asignan a cada problema de bancarrota con uniones a priori $(N, E, c, \mathcal{P})$ un vector $\varphi(N, E, c, \mathcal{P}) \in \mathbb{R}^N$ tal que:

1. $0 \leq \varphi_i(N, E, c, \mathcal{P}) \leq c_i$ para todo $i \in N$.
2. $\sum_{i \in N} \varphi_i(N, E, c, \mathcal{P}) = E$.

Si $(N, E, c, \mathcal{P}) \in BU^N$ es un problema de bancarrota con uniones a priori, se puede definir el correspondiente problema de bancarrota en el que intervienen las uniones como agentes $(R, E, c^{\mathcal{P}})$, el denominado *problema cociente*, donde $c^{\mathcal{P}} = (c_k^{\mathcal{P}})_{k \in R}$ es el vector de las demandas totales de las uniones, es decir, $c_k^{\mathcal{P}} = \sum_{i \in P_k} c_i$ para cada unión P_k de acreedores. Nótese que el problema de bancarrota $(R, E, c^{\mathcal{P}})$ está bien definido.

Las situaciones de reparto para varios asuntos se introdujeron en Calleja, Borm y Hendrickx (2004). La idea básica que motiva esta clase de problemas es que los agentes no tienen una única demanda sobre el estado, como en el modelo de bancarrota estándar, sino varias demandas, cada una de las cuales se refiere a un *asunto* particular. La hipótesis básica que se hace en este modelo es que estos asuntos se tratan por orden: tan pronto como el dinero se distribuye según lo previsto en un asunto en concreto, este asunto debe completarse antes de que el siguiente se considere.

Una *situación de reparto para varios asuntos* se representa por la terna (N, E, C), donde $N = \{1, \ldots, n\}$ es el conjunto de jugadores, $E \in \mathbb{R}_+$ es el estado y $C \in \mathbb{R}_+^{R \times N}$ es la matriz de demandas. Cada fila de la matriz C hace referencia a un asunto y el conjunto de todos los asuntos se denota por $R = \{1, \ldots, r\}$. Cada elemento $c_{ki} \geq 0$ representa la cantidad que el jugador $i \in N$ demanda del asunto $k \in R$. Si un jugador no está interesado en un asunto en particular, su demanda para tal asunto es igual a cero.

Cada situación de bancarrota con uniones a priori $(N, E, c, \mathcal{P})$ da lugar a una situación de reparto para varios asuntos disjuntos $(N, E, C^{c,\mathcal{P}})$, en la que los asuntos son las uniones y la matriz $C^{c,\mathcal{P}} = [C_{kj}^{c,\mathcal{P}}]_{k \in R, j \in N}$ se define de la siguiente manera

$$C_{kj}^{c,\mathcal{P}} = \begin{cases} c_j & \text{si } j \in P_k \\ 0 & \text{si } j \notin P_k \end{cases}$$

para todos $k \in R$, $j \in N$.

Ejemplo 37 *Si en la siguiente situación de bancarrota*

$$(N, E, c) = (\{1, 2, 3, 4\}, 10, (6, 2, 8, 5))$$

se considera la partición del conjunto de agentes $\mathcal{P} = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$*, la situación de bancarrota con uniones a priori resultante* $(N, E, c, \mathcal{P})$ *da lugar a la siguiente situación de reparto para varios asuntos disjuntos:*

$$(N, E, C^{c,\mathcal{P}}) = (\{1, 2, 3, 4\}, 10, \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 5 \end{bmatrix}).$$

5.2. La regla igualitaria restringida en problemas de bancarrota con uniones a priori.

En esta sección se describe una manera de extender una regla de bancarrota clásica a una regla para situaciones de bancarrota con uniones a priori. Se utiliza la regla CEA para ilustrar el procedimiento.

Si se quiere dividir el estado total entre los acreedores, una posibilidad es dividir primero ese estado entre las uniones y luego dividir lo que obtiene cada unión entre sus agentes.

Definición 38 *Sea $f : B^N \to \mathbb{R}^N$ una regla de bancarrota. Se define la extensión de f en dos etapas $\bar{f} : BU^N \to \mathbb{R}^N$ como sigue. Sea $(N, E, c, \mathcal{P}) \in BU^N$ un problema de bancarrota con uniones a priori. Primero, se define $E_k^f = f_k(R, E, c^{\mathcal{P}})$ para todo $k \in R$ y, a continuación, para $i \in P_k$,*

$$\bar{f}_i(N, E, c, \mathcal{P}) = f_i(P_k, E_k^f, (c_j)_{j \in P_k}).$$

La regla $\overline{CEA}$ para situaciones de bancarrota con uniones a priori generaliza a la regla CEA estándar para situaciones de bancarrota, de modo que $\overline{CEA}(N, E, c, \mathcal{P}^N)$ y $\overline{CEA}(N, E, c, \mathcal{P}^n)$ coinciden con $CEA(N, E, c)$, donde $\mathcal{P}^n$ es la partición discreta $\mathcal{P}^n = \{\{1\}, \ldots, \{n\}\}$ y $\mathcal{P}^N$ es la partición trivial $\mathcal{P}^N = \{N\}$. Además, por construcción, se tiene que $\overline{CEA}_k(R, E, c^{\mathcal{P}}, \mathcal{P}^R) = E_k$ para todo $k \in R$.

Ejemplo 39 *Considérese la situación de bancarrota con uniones a priori $(N, E, c, \mathcal{P}) = (\{1, 2, 3, 4\}, 10, (6, 2, 8, 5), \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\})$. Para obtener la regla igualitaria restringida para el problema con uniones a priori, primero se considera el problema cociente $(R, E, c^{\mathcal{P}}) = (\{1, 2\}, 10, (8, 13))$. Si aplicamos la regla igualitaria restringida a este problema, cada unión obtiene la mitad del estado, es decir, $E_1 = E_2 = 5$. Si ahora se divide, de acuerdo a la regla CEA, lo obtenido por cada unión entre sus acreedores, resulta*

$$\overline{CEA}(N, E, c, \mathcal{P}) = (3, 2, 5/2, 5/2).$$

5.3. Caracterizaciones de la regla igualitaria restringida en problemas de bancarrota con uniones a priori.

En esta sección se presenta un procedimiento axiomático para describir el procedimiento en dos etapas introducido en la anterior sección. Se proporcionan dos combinaciones diferentes de axiomas para caracterizar la regla igualitaria restringida para problemas de bancarrota con uniones a priori, $\overline{CEA}$, extendiendo con ellas dos caracterizaciones previas de la regla CEA para problemas de bancarrota clásicos.

Considérense las siguientes propiedades para una regla de bancarrota para problemas con uniones a priori $\varphi : BU^N \to \mathbb{R}^N$.

E1 **Composición.** Para cada problema de bancarrota con uniones a priori $(N, E, c, \mathcal{P})$, se verifica que

$$\varphi(N, E, c, \mathcal{P}) = \varphi(N, E', c, \mathcal{P}) + \varphi(N, E - E', c - \varphi(N, E', c, \mathcal{P}), \mathcal{P})$$

para todo $0 \leq E' \leq E$.

Esta propiedad considera la situación en la cual después de que el estado (E') haya sido dividido entre los agentes, este estado se reevalúa y resulta ser una cantidad mayor (E). En estos casos hay dos opciones; se puede cancelar la división inicial y aplicar la correspondiente regla al nuevo problema o se puede conservar el reparto inicial y aplicar la correspondiente regla para dividir el incremento experimentado en el estado de acuerdo con unas demandas modificadas en las que se tiene en cuenta las cantidades ya recibidas. Pues bien, la propiedad de composición establece que las dos opciones llevan al mismo resultado.

E2 **Independencia del camino.** Para cada problema de bancarrota con uniones $(N, E, c, \mathcal{P})$,

$$\varphi(N, E, c, \mathcal{P}) = \varphi(N, E, \varphi(N, E', c, \mathcal{P}), \mathcal{P})$$

para todo $E' \geq E$.

Aquí, se considera una situación opuesta a la anterior en la que el estado (E) es realmente menor que el inicialmente considerado (E'). Entonces, se puede aplicar la regla correspondiente al nuevo problema o dividir el nuevo valor tomando los repartos iniciales como el vector de demandas. La propiedad de independencia del camino establece que estos dos procedimientos llevan al mismo vector de repartos final.

E3 **Igual tratamiento dentro de las uniones.** Para cada problema de bancarrota con uniones $(N, E, c, \mathcal{P})$ y para cada dos agentes i, j de una unión $P_k \in \mathcal{P}$ tales que $c_i = c_j$, se tiene que

$$\varphi_i(N, E, c, \mathcal{P}) = \varphi_j(N, E, c, \mathcal{P}).$$

Esta propiedad nos indica que los agentes de una misma unión que tienen las mismas demandas deben obtener los mismos repartos.

E4 **Propiedad de problema cociente.** Para cada problema de bancarrota con uniones $(N, E, c, \mathcal{P})$ y para cada unión $P_k \in \mathcal{P}$, se tiene que

$$\sum_{i \in P_k} \varphi_i(N, E, c, \mathcal{P}) = \varphi_k(R, E, c^{\mathcal{P}}, \mathcal{P}^R).$$

En un problema de bancarrota con uniones se puede considerar el problema cociente asociado en el cual las uniones negocian acerca de la división del estado. A continuación de este proceso, tiene lugar la negociación dentro de cada unión. La propiedad de problema cociente establece que el total de ganancias de los agentes de una unión en el problema inicial es igual a las ganancias que obtiene dicha unión en el problema cociente. Nótese que si φ es la extensión en dos etapas, $\bar{f}$, de una regla de bancarrota f, entonces $\varphi_k(R, E, c^{\mathcal{P}}, \mathcal{P}^R) = E_k^f$, (recuérdese que $E_k^f = f_k(R, E, c^{\mathcal{P}})$ es la cantidad que consigue la unión $k \in R$ en el problema cociente de acuerdo con la regla f).

E5 **Invarianza al truncar demandas dentro de las uniones:** Para cada problema de bancarrota con uniones $(N, E, c, \mathcal{P})$ y para cada jugador i de una unión $P_k \in \mathcal{P}$ tal que $c_i > \sum_{j \in P_k} \varphi_j(N, E, c, \mathcal{P})$, se tiene que

$$\varphi(N, E, c, \mathcal{P}) = \varphi(N, E, c', \mathcal{P}),$$

donde $c'_j = c_j$ para todo $j \in N \setminus \{i\}$ y $c'_i = \sum_{j \in P_k} \varphi_j(N, E, c, \mathcal{P})$.

Supóngase que la demanda de un agente es mayor que la cantidad total que consigue la unión en la que está. Entonces la propiedad de invarianza al truncar demandas dentro de las uniones establece que los beneficios de ese agente no se ven afectados si se reemplaza su demanda por el pago total que recibe su unión.

E6 **Sostenibilidad de los acreedores dentro de las uniones:** Para cada problema de bancarrota con uniones $(N, E, c, \mathcal{P})$ y para cada jugador i que es *sostenible* dentro de su unión $P_k \in \mathcal{P}$, es decir, $\sum_{j \in P_k} \text{mín}\{c_i, c_j\} \leq \varphi_k(R, E, c^{\mathcal{P}}, \mathcal{P}^R)$, se tiene que

$$\varphi_i(N, E, c, \mathcal{P}) = c_i.$$

Esta propiedad establece un criterio de protección dentro de las uniones en el sentido de que las demandas más pequeñas deben satisfacerse por completo. La demanda del agente i se considera sostenible dentro de su unión si el valor de esta unión en el problema cociente es suficiente para darle a cada agente de esta unión su demanda truncada por la del agente i.

Las propiedades de composición (E1) y la de independencia del camino (E2) son, en esencia, idénticas a las propiedades correspondientes para reglas de bancarrota clásicas. La propiedad de igual tratamiento dentro de las uniones (E3) es una versión más débil de la propiedad de igual tratamiento para reglas de bancarrota estándares. Las propiedades de invarianza al truncar demandas dentro de las uniones (E5) y sostenibilidad de los acreedores dentro de las uniones (E6) son extensiones naturales de otras propiedades para reglas de bancarrota a este contexto de uniones a priori. Nótese que la propiedad de problema cociente (E4) implica que la regla involucra alguna clase de procedimiento en dos etapas para obtener la solución.

En el teorema siguiente se presenta la primera caracterización de la regla $\overline{CEA}$. Este teorema está inspirado en un resultado similar, para la regla CEA de problemas de bancarrota clásicos, que aparece en Dagan (1996).

Teorema 40 *La regla $\overline{CEA}$ es la única regla para problemas de bancarrota con uniones a priori que satisface composición (E1), igual tratamiento dentro de las uniones (E3), la propiedad del problema cociente (E4) e invarianza al truncar demandas dentro de las uniones (E5).*

Demostración: *Existencia.* Las propiedades de *igual tratamiento dentro de las uniones* y de *problema cociente* se siguen de manera directa. Sólo se probará la propiedad de *composición*, ya que la *invarianza al truncar demandas dentro de las uniones* sigue una línea similar.

Sea $P_k \in \mathcal{P}$ y sea $i \in P_k$. Por definición de la regla $\overline{CEA}$ se tiene que

$$\overline{CEA}_i(N, E, c, \mathcal{P}) = CEA_i(P_k, E_k^{CEA}, (c_j)_{j \in P_k}).$$

Considérese ahora que $0 \leq E' \leq E$. Entonces

$$\overline{CEA}_i(N, E', c, \mathcal{P}) = CEA_i(P_k, E_k'^{CEA}, (c_j)_{j \in P_k}),$$

con $E_k'^{CEA} = CEA_k(R, E', c^{\mathcal{P}})$. Se define $c' = c - \overline{CEA}(N, E', c, \mathcal{P})$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}&\overline{CEA}_i(N, E - E', c', \mathcal{P}) \\ &= CEA_i(P_k, CEA_k(R, E - E', (c')^{\mathcal{P}}), (c'_j)_{j \in P_k}).\end{aligned}$$

Como la regla igualitaria restringida para problemas de bancarrota verifica la propiedad de composición (Dagan (1996)), se tiene que

$$\begin{aligned} E_k^{CEA} - E_k'^{CEA} &= CEA_k(R, E, c^{\mathcal{P}}) - CEA_k(R, E', c^{\mathcal{P}}) \\ &= CEA_k(R, E - E', c^{\mathcal{P}} - CEA(R, E', c^{\mathcal{P}})) \\ &= CEA_k(R, E - E', (c')^{\mathcal{P}}). \end{aligned}$$

De lo anterior, se sigue que

$$\begin{aligned}&\overline{CEA}_i(N,E,c,\mathcal{P}) = CEA_i(P_k, E_k^{CEA}, (c_j)_{j\in P_k})\\&= CEA_i(P_k, E_k'^{CEA}, (c_j)_{j\in P_k}) + CEA_i(P_k, E_k^{CEA} - E_k'^{CEA}, (c_j')_{j\in P_k})\\&= \overline{CEA}_i(N,E',c,\mathcal{P}) + CEA_i(P_k, CEA_k(R, E-E', (c')^{\mathcal{P}}), (c_j')_{j\in P_k})\\&= \overline{CEA}_i(N,E',c,\mathcal{P}) + \overline{CEA}_i(N, E-E', c', \mathcal{P}).\end{aligned}$$

Por tanto, la regla $\overline{CEA}$ satisface la propiedad de *composición*.

Unicidad. Sea φ una regla para BU^N cumpliendo *composición (E1)*, *igual tratamiento dentro de las uniones (E3), la propiedad del problema cociente (E4)* e *invarianza al truncar demandas dentro de las uniones (E5).* Sea $(N,E,c,\mathcal{P})$ un problema de bancarrota con uniones y considérese el problema cociente $(R,E,c^{\mathcal{P}},\mathcal{P}^R)$. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $0 \leq c_1^{\mathcal{P}} \leq \cdots \leq c_r^{\mathcal{P}}$. En la Proposición 1 de Dagan (1996) se establece que la regla igualitaria restringida es la única regla para problemas de bancarrota que satisface las propiedades equivalentes en bancarrota clásica a *E1, E3* y *E5*. Como el problema cociente con la partición $\mathcal{P}^R$ es básicamente un problema de bancarrota estándar, se sigue que $\varphi_k(R,E,c^{\mathcal{P}},\mathcal{P}^R) = E_k^{CEA}$ para todo $k \in R$.

Ahora, si se considera la primera unión $P_1 \in \mathcal{P}$. Se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que $P_1 = \{1,\ldots,n_1\}$ y que $c_{11} \leq \cdots \leq c_{1n_1}$.

Paso 1.

Si $0 \leq E \leq rc_{11}$, entonces $E_1^{CEA} \leq c_{11}$ y aplicando *igual tratamiento dentro de las uniones (E3), la propiedad del problema cociente (E4) e invarianza al truncar demandas dentro de las uniones (E5),*

$$\varphi_i(N,E,c,\mathcal{P}) = \overline{CEA}_i(N,E,c,\mathcal{P})$$

para todo $i \in P_1$. Si $rc_{11} < E \leq rc_{11} + rc_{11}(1-1/n_1)$, entonces se establece la igualdad al aplicar composición (E1). Si se repite la misma construcción, se obtiene que

$$\varphi_i(N,E,c,\mathcal{P}) = \overline{CEA}_i(N,E,c,\mathcal{P})$$

para todo $i \in P_1$ con $0 \leq E \leq rn_1c_{11}$.

Paso 2.

Si $rn_1c_{11} < E \leq rn_1c_{11} + r(c_{12} - c_{11})$, por *composición (E1)* y por el Paso 1 se tiene

$$\varphi(N,E,c,\mathcal{P}) = x + \varphi(N, E - rn_1c_{11}, c - x, \mathcal{P}),$$

donde $x_i = \varphi_i(N, rn_1c_{11}, c, \mathcal{P}) = \overline{CEA}_i(N, rn_1c_{11}, c, \mathcal{P}) = c_{11}$ para todo $i \in P_1$. Además, $E - rn_1c_{11} \leq r(c_{12} - c_{11})$. Por tanto, como consecuencia de las propiedades de *igual tratamiento dentro de las uniones (E3)* e *invarianza al truncar demandas dentro de las uniones (E5)* se obtiene

$$\varphi_i(N, E - rn_1c_{11}, c - x, \mathcal{P}) = \overline{CEA}_i(N, E - rn_1c_{11},\ c - x, \mathcal{P})$$

para todo $i \in P_1$ y, por tanto,

$$\varphi_i(N, E, c, \mathcal{P}) = \overline{CEA}_i(N, E, c, \mathcal{P})$$

para todo $i \in P_1$.

Repitiendo el mismo argumento se puede probar que

$$\varphi_i(N, E, c, \mathcal{P}) = \overline{CEA}_i(N, E, c, \mathcal{P})$$

para todo $i \in P_1$ con $0 \leq E \leq rn_1c_{11} + r(n_1 - 1)(c_{12} - c_{11})$.

Con los mismos razonamientos se puede obtener que

$$\varphi_i(N, E, c, \mathcal{P}) = \overline{CEA}_i(N, E, c, \mathcal{P})$$

para todo $i \in P_1$ con $0 \leq E \leq rn_1c_{11} + r(n_1 - 1)(c_{12} - c_{11}) + \cdots + r(c_{1n_1} - c_{1,n_1-1}) = r(c_{11} + c_{12} + \cdots + c_{1n_1}) = rc_1^{\mathcal{P}}$.

Ahora, se considera la segunda unión. Se distinguen dos casos. Si $E \leq rc_1^{\mathcal{P}}$, se puede usar el mismo argumento que en la primera unión para obtener $\varphi_i(N, E, c, \mathcal{P}) = \overline{CEA}_i(N, E, c, \mathcal{P})$ para todo $i \in P_2$.

Por tanto, supóngase que $E > rc_1^{\mathcal{P}}$. Como φ satisface la propiedad de *composición (E1)*, se tiene que

$$\varphi(N, E, c, \mathcal{P}) = \varphi(N, rc_1^{\mathcal{P}}, c, \mathcal{P}) + \varphi(N, E - rc_1^{\mathcal{P}}, c - x, \mathcal{P})$$

donde $x = \varphi(N, rc_1^{\mathcal{P}}, c, \mathcal{P})$.

Como en el anterior caso, se tiene que

$$\varphi_i(N, rc_1^{\mathcal{P}}, c, \mathcal{P}) = \overline{CEA}_i(N, rc_1^{\mathcal{P}}, c, \mathcal{P})$$

para todo $i \in P_2$. Con el término $\varphi(N, E - rc_1^{\mathcal{P}}, c - x, \mathcal{P})$, se procede como en la primera unión con estado $E - rc_1^{\mathcal{P}}$ y demandas $c - x$ y se obtiene

$$\varphi_i(N, E - rc_1^{\mathcal{P}}, c - x, \mathcal{P}) = \overline{CEA}_i(N, E - rc_1^{\mathcal{P}}, c - x, \mathcal{P})$$

para todo $i \in P_2$. Nótese que en el problema $(N, E - rc_1^{\mathcal{P}}, c - x, \mathcal{P})$ todos los miembros de P_1 obtienen cero. Como $\overline{CEA}$ verifica la propiedad de *composición (E1)*, se tiene que

$$\varphi_i(N, E, c, \mathcal{P}) = \overline{CEA}_i(N, E, c, \mathcal{P})$$

para todo $i \in P_2$.

Si se repite el mismo procedimiento para todas las uniones, se concluye el resultado. □

La segunda caracterización que se presenta en esta sección está basada en las ideas de Herrero y Villar (2002). Antes de presentar este resultado, se introducen una serie de lemas.

Lema 41 *Si φ es una regla para problemas de bancarrota con uniones a priori que satisface independencia del camino (E2) y sostenibilidad de los acreedores dentro de las uniones (E6) entonces para cada problema de bancarrota con uniones $(N, E, c, \mathcal{P})$ se tiene que $\varphi_k(R, E, c^{\mathcal{P}}, \mathcal{P}^R) = E_k^{CEA}$ para todo $k \in R$.*

Demostración: Sea $\varphi : BU^N \to \mathbb{R}^N$ una regla que satisface *independencia del camino (E2)* y *sostenibilidad de los acreedores dentro de las uniones (E6)* y sea $(N, E, c, \mathcal{P}) \in BU^N$. Considérese el problema cociente asociado $(R, E, c^{\mathcal{P}}, \mathcal{P}^R)$. El Teorema 1 de Herrero y Villar (2002) establece que la regla igualitaria restringida es la única regla para problemas de bancarrota que satisface las propiedades equivalentes a *E2* y *E6*. De esto se sigue directamente la afirmación que se hace en el enunciado del lema. □

El Lema 1 de Herrero y Villar (2002) establece que si una regla de bancarrota verifica las propiedades de independencia del camino y sostenibilidad entonces también verifica la propiedad de igual tratamiento de iguales. De una manera análoga, se puede demostrar el siguiente resultado para problemas de bancarrota con uniones a priori.

Lema 42 *Si una regla para problemas de bancarrota con uniones a priori verifica independencia del camino (E2), la propiedad de problema cociente (E4) y sostenibilidad de los acreedores dentro de las uniones (E6), entonces también verifica la propiedad de igual tratamiento dentro de las uniones (E3).*

A continuación se enuncia la segunda caracterización axiomática de la regla $\overline{CEA}$.

Teorema 43 *La regla $\overline{CEA}$ es la única regla para problemas de bancarrota con uniones que verifica independencia del camino (E2), la propiedad de problema cociente (E4) y sostenibilidad de los acreedores dentro de las uniones (E6).*

Demostración: *Existencia.* Las propiedades de *problema cociente (E4)* y *sostenibilidad de los acreedores dentro de las uniones (E6)* se comprueban directamente. La demostración de la propiedad de *independencia del camino (E2)* sigue un procedimiento análogo al utilizado para demostrar la propiedad de *composición (E1)* y, por tanto, se omite.

Unicidad. Sea φ una regla para BU^N verificando *independencia del camino (E2)*, la *propiedad de problema cociente (E4)* y *sostenibilidad de los acreedores dentro de las uniones (E6)* y sea $(N, E, c, \mathcal{P}) \in BU^N$. Sea también $P_k \in \mathcal{P}$. Se tiene que probar que $\varphi_i(N, E, c, \mathcal{P}) = \overline{CEA}_i(N, E, c, \mathcal{P})$ para todo $i \in P_k$. Se utilizará la siguiente notación: $n_1^k = \max_{i \in P_k} c_i$, $N_1^k = \{i \in P_k \,|\, c_i = n_1^k\}$, $n_2^k = \max_{i \in P_k \setminus N_1^k} c_i$, $N_2^k = \{i \in P_k \,|\, c_i = n_2^k\}$.

$\boxed{\textit{Paso 1.}}$

Supóngase que, en la unión P_k, las demandas de los agentes de $P_k \setminus N_1^k$ son sostenibles. Entonces $\varphi_i(N, E, c, \mathcal{P}) = c_i$ para todo $i \in P_k \setminus N_1^k$ ya que φ verifica *E6*. También se tiene que

$$\varphi_i(N, E, c, \mathcal{P}) = \overline{CEA}_i(N, E, c, \mathcal{P})$$

para todo $i \in P_k$, ya que φ verifica *igual tratamiento dentro de las uniones (E3)* (por el Lema 42) y, además, por E4 y el Lema 41, se tiene

$$\sum_{i \in P_k} \varphi_i(N, E, c, \mathcal{P}) = E_k^{CEA}.$$

$\boxed{\textit{Paso 2.}}$

Supóngase ahora que, en la unión P_k, las demandas de los agentes de $P_k \setminus (N_1^k \cup N_2^k)$ son sostenibles. Sea $E' > E$ tal que $\varphi_k(R, E', c^{\mathcal{P}}, \mathcal{P}^R)$ es la cantidad mínima que sostiene las demandas de $P_k \setminus N_1^k$ dentro de la unión P_k, lo cual es posible por el Lema 41 y las propiedades básicas de la regla CEA. Sea $c' = \varphi(N, E', c, \mathcal{P})$. Por el paso 1, $c'_i = c_i$ para todo $i \in P_k \setminus N_1^k$ y

$c'_i = c'_j$ para todos $i, j \in N_1^k \cup N_2^k$. Como φ y $\overline{CEA}$ verifican *independencia del camino (E2)*, se tiene que

$$\varphi_i(N, E, c, \mathcal{P}) = \varphi_i(N, E, c', \mathcal{P})$$

y que

$$\overline{CEA}_i(N, E, c, \mathcal{P}) = \overline{CEA}_i(N, E, c', \mathcal{P})$$

para todo $i \in N$. Aplicando de nuevo el paso 1,

$$\varphi_i(N, E, c', \mathcal{P}) = \overline{CEA}_i(N, E, c', \mathcal{P})$$

para todo $i \in P_k$ y, por tanto, $\varphi_i(N, E, c, \mathcal{P}) = \overline{CEA}_i(N, E, c, \mathcal{P})$ para todo $i \in P_k$.

Si se repite este mismo procedimiento, se obtiene que

$$\varphi_i(N, E, c, \mathcal{P}) = \overline{CEA}_i(N, E, c, \mathcal{P})$$

para todo $i \in P_k$, lo que concluye esta demostración. □

5.4. Juegos en forma característica asociados a problemas de bancarrota con uniones a priori.

En esta sección se estudian los problemas de bancarrota con uniones a priori a través de juegos en forma característica asociados a tales situaciones.

O´Neill (1982) definió para cada problema de bancarrota clásico un juego en forma característica asociado. Aquí se introduce el concepto de juego de bancarrota con uniones a priori asociado a cada problema de bancarrota con uniones a priori. También se define un juego en forma característica relativo a una regla de bancarrota asociado al problema de bancarrota con uniones a priori considerado como un problema de reparto de varios asuntos disjuntos. Las soluciones de estos juegos proporcionan soluciones del problema de bancarrota con uniones a priori original.

Se define una nueva solución para juegos en forma característica con uniones a priori: la solución igualitaria restringida. Esta solución aplicada al juego en forma característica relativo a una regla de bancarrota, mencionado en el párrafo anterior, coincide con la regla igualitaria restringida para problemas de bancarrota con uniones a priori. Esta igualdad no se verifica si aplicamos esta nueva solución al juego de bancarrota con uniones a priori.

Al final de la sección se introduce un nuevo procedimiento para obtener nuevas soluciones de bancarrota. Dado un juego en forma característica, se le asocia un nuevo juego denominado la cobertura de bancarrota del juego de partida. Si esta asociación se hace con el juego en forma característica relativo a una regla de bancarrota, que se definirá en esta sección, se pueden obtener extensiones de reglas de bancarrota clásicas a este entorno de bancarrota con uniones a priori. Sin embargo, se verá en un resultado que para la regla igualitaria restringida no se obtiene nada distinto.

A continuación se introducen algunos conceptos de juegos en forma característica que se necesitarán en esta sección (se recuerda que en la Sección 3.1 de este texto se introducen los juegos en forma característica).

Un juego $v \in TU^N$ se dice que es *exacto* (véase Driessen y Tijs (1985)) si para cada $S \subset N, S \neq \emptyset$, existe un $x^S \in C(v)$ tal que $\sum_{i \in S} x_i^S = v(S)$.

Un juego $v \in TU^N$ se dice que es *aditivo si para cada* $i \in N$, existe un $x_i \in \mathbb{R}$ tal que $\sum_{i \in S} x_i = v(S)$ para todo $S \subset N$.

Un juego $v \in TU^N$ se dice que es *convexo* si $v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T)$ para todo par de coaliciones $S, T \subset N$.

O´Neill (1982) definió para cada problema de bancarrota (N, E, c), un *juego de bancarrota* asociado $(N, v_{E,c})$. En este juego, el valor de una coalición S es la parte del estado que queda después de darle a todos los acreedores de $N \backslash S$ todas sus demandas, es decir,

$$v_{E,c}(S) = \text{máx}\{E - \sum_{i \in N \backslash S} c_i, 0\}$$

para todo $S \subset N$.

Este es un juego bastante "pesimista", como muestra el ejemplo que se presenta a continuación.

Ejemplo 44 *Considérese el siguiente problema de bancarrota*

$$(N, E, c) = (\{1, 2, 3, 4\}, 10, (6, 2, 8, 5)).$$

La siguiente tabla muestra el valor para cada una de las posibles coaliciones del juego de bancarrota asociado $(N, v_{E,c})$.

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{12\}$	$\{13\}$	$\{14\}$	$\{23\}$
$v_{E,c}(S)$	0	0	0	0	0	3	0	0
S	$\{24\}$	$\{34\}$	$\{123\}$	$\{124\}$	$\{134\}$	$\{234\}$	$\{1234\}$	
$v_{E,c}(S)$	0	2	5	2	8	4	10	

A continuación se va a definir el juego de bancarrota con uniones a priori y para ello se recuerda antes lo que se entiende por un juego en forma característica con uniones a priori.

Un *juego en forma característica con uniones a priori* viene dado por $(N, v, \mathcal{P})$ donde (N, v) es un juego en forma característica estándar y $\mathcal{P} = \{P_k\}_{k \in R}$ es una partición del conjunto de jugadores, siendo R el conjunto de grupos o uniones. Para $(N, v, \mathcal{P})$, se define el juego en forma característica entre las uniones $(R, v^{\mathcal{P}})$, denominado *juego cociente*, en el que $v^{\mathcal{P}}(L) = v(\cup_{k \in L} P_k)$ para todo $L \subset R$.

Teniendo en cuenta esto último, se tiene la siguiente definición:

Definición 45 *Sea* $(N, E, c, \mathcal{P})$ *una situación de bancarrota con uniones a priori. Se denomina juego de bancarrota con uniones a priori al juego en forma característica con uniones a priori* $(N, v_{E,c}, \mathcal{P})$.

Es decir, que se considera el juego de bancarrota de O´Neill junto con la estructura de uniones a priori.

Si se enfoca una situación de bancarrota con uniones a priori como una situación de reparto para varios asuntos disjuntos, se puede definir un nuevo juego en forma característica relativo a una regla de bancarrota. Se recuerda que uno de los rasgos esenciales de las situaciones de reparto para varios asuntos es que tales asuntos se van tratando, por orden, uno a uno. Dada la naturaleza de tal problema, está claro que, si se fija un orden en los asuntos, llegará un momento en el que no quede estado para completar la demanda total de un cierto asunto. Así, se plantea un problema de bancarrota clásico dentro de tal asunto y a este problema se le puede aplicar una regla de bancarrota. Una vez que queda especificada la política de reparto dentro de los asuntos, se puede considerar un juego en forma característica en el que cada coalición de jugadores se garantiza la cantidad que le reporta el orden en los asuntos más desfavorable para dicha coalición. Todas estas apreciaciones se formalizan en la siguiente definición:

Definición 46 *Sea f una regla de bancarrota. Entonces el f-juego, v^f, que corresponde a la situación de reparto para varios asuntos (N, E, C) se define como sigue. Sea $\sigma \in \Pi(R)^2$ un orden en los asuntos. Los jugadores de la coalición S resuelven los primeros t asuntos completamente, donde $t = \max\{t' \mid \sum_{s=1}^{t'} c_{\sigma(s)} \leq E\}$. La parte del estado que resta, $E' = E - \sum_{s=1}^{t} c_{\sigma(s)}$, se divide aplicando f a las demandas del asunto $\sigma(t+1)$. Así, en total, los jugadores de S reciben*

$$g_S^f(\sigma) = \sum_{s=1}^{t} c_{\sigma(s),S} + \sum_{j \in S} f_j(N, E', \{c_{\sigma(t+1),i}\}_{i \in N}).$$

El valor de una coalición $S \subset N$ es la cantidad que los jugadores de la coalición consiguen cuando se elige el peor orden posible en los asuntos:

$$v^f(S) = \min_{\sigma \in \Pi(R)} g_S^f(\sigma).$$

Proposición 47 *Sea (N, E, C) una situación de reparto para varios asuntos y sea f una regla de bancarrota. Entonces el juego (N, v^f) es exacto.*

Demostración: Sea $S \subset N$ y sea $\sigma^0 \in \Pi(R)$ tal que $g_S^f(\sigma^0)$ es minimal. Se define $x = (g_i^f(\sigma^0))_{i \in N}$. Entonces $\sum_{i \in N} x_i = E = v^f(N)$ y $\sum_{i \in T} x_i = g_T^f(\sigma^0) \geq \min_{\sigma \in \Pi(R)} g_T^f(\sigma) = v^f(T)$ para toda coalición $T \subset N$. Así, se tiene que $x \in C(v^f)$. Además, $\sum_{i \in S} x_i = g_S^f(\sigma^0) = v^f(S)$. Por tanto, (N, v^f) es exacto. $\square$

De la demostración del Teorema 3.3 en Calleja, Borm y Hendrickx (2004) se sigue inmediatamente que, dada una regla f y para cada juego exacto no negativo v, se puede encontrar una situación de reparto para varios asuntos tal que el juego v^f, relativo a tal situación, coincide con v. Sin embargo, la clase de juegos que corresponden a situaciones de varios asuntos disjuntos es una subclase estricta.

[2] Se recuerda que con $\Pi(R)$ se denota el conjunto de todas las permutaciones posibles de los asuntos de R. Por tanto, $\sigma \in \Pi(R)$ es un determinado orden de los asuntos y $\sigma(s)$ ($s \in R$) denota qué asunto de R se encuentra en la posición s.

Si $\mathcal{P}$ es la partición discreta $\mathcal{P}^n = \{\{1\}, \ldots, \{n\}\}$, entonces el juego v^f coincide con el juego de bancarrota $v_{E,c}$ para toda regla f. Si $\mathcal{P}$ es la partición trivial $\mathcal{P}^N = \{N\}$, entonces para toda regla f el juego v^f es aditivo con $v^f(\{i\}) = f_i(N, E, c)$ para todo $i \in N$.

Ejemplo 48 *Sea la situación de bancarrota con uniones a priori que da lugar a la siguiente situación de reparto para varios asuntos disjuntos:*

$$(N, E, C^{c,\mathcal{P}}) = (\{1, 2, 3, 4\}, 10, \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 5 \end{bmatrix}).$$

En las siguientes tablas se muestran todos los pasos para el cálculo del juego v^{CEA}.

$\sigma \in \Pi(R)$	$g_S^{CEA}(\sigma)(1)$	$g_S^{CEA}(\sigma)(2)$	$g_S^{CEA}(\sigma)(3)$	$g_S^{CEA}(\sigma)(4)$
1,2	6	2	1	1
2,1	0	0	5	5
$v^{CEA}(S)$	0	0	1	1

$\sigma \in \Pi(R)$	$g_S^{CEA}(\sigma)(12)$	$g_S^{CEA}(\sigma)(13)$	$g_S^{CEA}(\sigma)(14)$	$g_S^{CEA}(\sigma)(23)$
1,2	8	7	7	3
2,1	0	5	5	5
$v^{CEA}(S)$	0	5	5	3

$\sigma \in \Pi(R)$	$g_S^{CEA}(\sigma)(24)$	$g_S^{CEA}(\sigma)(34)$	$g_S^{CEA}(\sigma)(123)$	$g_S^{CEA}(\sigma)(124)$
1,2	3	2	9	9
2,1	5	10	5	5
$v^{CEA}(S)$	3	2	5	5

$\sigma \in \Pi(R)$	$g_S^{CEA}(\sigma)(134)$	$g_S^{CEA}(\sigma)(234)$	$g_S^{CEA}(\sigma)(1234)$
1,2	8	4	10
2,1	10	10	10
$v^{CEA}(S)$	8	4	10

Si se consideran las coaliciones $S = \{1, 3\}$ y $T = \{1, 4\}$, se puede observar que $v^{CEA}(S) + v^{CEA}(T) > v^{CEA}(S \cup T) + v^{CEA}(S \cap T)$. Así, aunque el juego v^{CEA} es exacto (Proposición 47), no es convexo.

Curiel, Maschler y Tijs (1987) estudiaron juegos asociados a situaciones de bancarrota. En su trabajo dicen que una regla de bancarrota es *de teoría* *de juegos* si la solución que propone para cada problema sólo depende del juego correspondiente. Por tanto, dada una regla de bancarrota *de teoría de juegos* $f : B^N \to \mathbb{R}^N$, se puede encontrar una función $F : TU^N \to \mathbb{R}^N$ tal que $f(N, E, c) = F(N, v_{E,c})$ para todo problema de bancarrota $(N, E, c) \in B^N$.

Para construir una de tales F, se puede hacer uso del vector de utopía. Se define el *vector de utopía* de un juego (N, v) y lo denotamos por $M(v)$, como

$$M_i(v) = v(N) - v(N \backslash \{i\})$$

para todo $i \in N$. Para un juego de bancarrota $(N, v_{E,c})$, el punto de utopía $M_i(v_{E,c})$ es igual a $c_i^E = \text{mín}\{c_i, E\}$.

De aquí se sigue que si $f(N, E, c) = f(N, E, c^E)$ para todo $(N, E, c) \in B^N$, es decir, si la solución no cambia al truncar las demandas que son más grandes que el estado existente, entonces se tiene que

$$F(N, v_{E,c}) = f(N, v_{E,c}(N), M(v_{E,c}))$$

y la regla f es *de teoría de juegos*.

De hecho Curiel, Maschler y Tijs (1987) demostraron que esta propiedad de truncamiento en las demandas no sólo es suficiente sino también necesaria para que una regla de bancarrota f sea *de teoría de juegos*. En este capítulo, sólo se consideran reglas de bancarrota *de teoría de juegos*. La regla igualitaria restringida, CEA, se puede comprobar fácilmente que es *de teoría de juegos* (Dutta y Ray (1989)).

A continuación, se va a definir para un juego TU con uniones a priori la solución igualitaria restringida.

Sea $(N, v, \mathcal{P})$ un juego TU con uniones a priori. La solución igualitaria restringida para este juego, $CEA(N, v, \mathcal{P})$, se define en dos etapas.[3] Primero, el pago de cada unión $P_k \in \mathcal{P}$ es igual a $CEA(R, v^{\mathcal{P}})$, es decir, la solución igualitaria restringida del juego cociente.

En la segunda etapa, el pago que recibe cada unión se divide entre sus agentes. Para hacer esto, se considera para cada jugador $i \in N$ sus posibilidades de cooperar con los jugadores fuera de su unión. Se debe resaltar que

[3] La regla CEA para juegos TU con uniones a priori está sólo bien definida en una subclase de tales juegos. Si el juego es exacto, entonces la regla CEA está bien definida.

ésta es una idea similar a la utilizada por Owen (1977) cuando definió una modificación del valor de Shapley para juegos TU con uniones a priori.

Sea $P_k \in \mathcal{P}$ y sea $i \in P_k$. La "demanda" del jugador i se define como su contribución a la coalición $\bigcup_{\ell \in R\setminus\{k\}} P_\ell \cup \{i\}$, es decir,

$$M_i(v,\mathcal{P}) = v(\bigcup_{\ell \in R\setminus\{k\}} P_\ell \cup \{i\}) - v(\bigcup_{\ell \in R\setminus\{k\}} P_\ell).$$

Con todas estas consideraciones se tiene la siguiente definición

Definición 49 *La solución igualitaria restringida para el juego $(N,v,\mathcal{P})$ para el jugador $i \in P_k$ se define como*

$$CEA_i(N,v,\mathcal{P}) = CEA_i(P_k, CEA_k(R,v^{\mathcal{P}}), \{M_j(v,\mathcal{P})\}_{j\in P_k}).$$

En general, se tiene que $\overline{CEA}(N,E,c,\mathcal{P}) \neq CEA(N,v_{E,c},\mathcal{P})$. Lo que sí se verifica es que la regla $\overline{CEA}$ coincide con la solución CEA del juego $(N,v^{CEA},\mathcal{P})$, como se demuestra en la proposición siguiente.

Proposición 50 *Para cada problema de bancarrota con uniones a priori $(N,E,c,\mathcal{P})$ se verifica que $\overline{CEA}(N,E,c,\mathcal{P}) = CEA(N,v^{CEA},\mathcal{P})$.*

Demostración: Sea $(N,E,c,\mathcal{P})$ un problema de bancarrota con uniones a priori. Primero, es fácil ver que se tiene

$$v^{CEA}(\cup_{k\in L} P_k) = max\{E - \sum_{i\in N\setminus \cup_{k\in L} P_k} c_i, 0\}$$

para todo $L \subset R$ y, por tanto, los juegos $(R,(v^{CEA})^{\mathcal{P}})$ y $(R, v_{E,c^{\mathcal{P}}})$ coinciden. Así,

$$CEA_k(R,(v^{CEA})^{\mathcal{P}}) = CEA_k(R, v_{E,c^{\mathcal{P}}}) = E_k^{CEA}$$

para todo $k \in R$.

Segundo, para $i \in P_k$, se tiene que

$$M_i(v^{CEA},\mathcal{P}) = \begin{cases} CEA_i(P_k, E, \{c_j\}_{j\in P_k}) & \text{si } E \leq c_k^{\mathcal{P}}, \\ c_i & \text{si } E > c_k^{\mathcal{P}}. \end{cases}$$

De lo anterior, se deduce que

$$CEA_i(P_k, E_k^{CEA}, \{c_j\}_{j\in P_k}) = CEA_i(P_k, CEA_k(R, v^{\mathcal{P}}), \{M_j(v, \mathcal{P})\}_{j\in P_k})$$

para todo $i \in P_k$. $\square$

En lugar de definir un procedimiento en dos etapas, se pueden extender las reglas de bancarrota a través de juegos asociados mediante lo que se denomina la *cobertura de bancarrota*.

Se define la clase de juegos TU_+^N como aquélla en los que el vector de utopía es no negativo y suma al menos el valor de la coalición total, es decir,

$$TU_+^N = \{v \in TU^N \mid M(v) \geq 0, \sum_{i\in N} M_i(v) \geq v(N) \geq 0\}.$$

Definición 51 *Para todo juego $v \in TU_+^N$, se define el correspondiente juego cobertura de bancarrota $(N, \hat{v})$ como*

$$\hat{v}(S) = \max\{v(N) - \sum_{i\in N\setminus S} M_i(v), 0\}$$

para todo $S \subset N$.

La denominación de *cobertura* resulta del siguiente lema.

Lema 52 *Para todo $v \in TU_+^N$, se tiene que $\hat{\hat{v}} = \hat{v}$.*

El juego cobertura de bancarrota $\hat{v}$ es el juego de bancarrota con estado $v(N)$ y vector de demandas $M(v)$. De hecho, $\hat{v}$ es igual a v si, y sólo si, v es ya un juego de bancarrota.

Lema 53 *Sea $v \in TU_+^N$. Entonces, $\hat{v} = v$ si, y sólo si, v es un juego de bancarrota.*

Se puede extender una regla de bancarrota f a una solución $\hat{f}$ en la clase de juegos TU_+^N definiendo

$$\hat{f}(v) = F(\hat{v}).$$

Nótese que en la subclase de juegos de bancarrota, $\hat{f}$ coincide con F por definición.

Si se utiliza un enfoque de situaciones de reparto para varios asuntos disjuntos, se extiende f a una regla $\tilde{f}$ para la clase de problemas de bancarrota con uniones a priori de la manera siguiente:

$$\tilde{f}(N, E, c, \mathcal{P}) = \hat{f}(v^f(N, E, C^{\mathcal{P}}))^4$$

para todo $(N, E, c, \mathcal{P}) \in BU^N$. El término de la derecha está bien definido ya que el juego $v^f(N, E, C^{\mathcal{P}})$ pertenece a TU_+^N.

En el siguiente ejemplo se reflejan todos estos conceptos.

Ejemplo 54 *Considérese de nuevo la situación de bancarrota con uniones*

$$(N, E, c, \mathcal{P}) = (\{1, 2, 3, 4\}, 10, (6, 2, 8, 5), \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}).$$

Para calcular $\widetilde{CEA}$, recordemos los valores que aparecen en la siguiente tabla:

S	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,4\}$	$\{1,3,4\}$	$\{2,3,4\}$	N
$v^{CEA}(S)$	5	5	8	4	10

Por tanto, $M(v^{CEA}) = (6, 2, 5, 5)$ y $\widetilde{CEA}(N, E, c, \mathcal{P}) = (8/3, 2, 8/3, 8/3)$.

Nótese que el ejemplo anterior, $\widetilde{CEA}(N, E, c, \mathcal{P})$ coincide con $CEA(N, E, c)$. Esto se verifica para toda situación de bancarrota con uniones a priori, como se demuestra en el siguiente resultado.

Proposición 55 *Sea $(N, E, c, \mathcal{P})$ una situación de bancarrota con uniones a priori. Entonces se tiene que $\widetilde{CEA}(N, E, c, \mathcal{P}) = CEA(N, E, c)$.*

Demostración: Sea $k \in R$ y sea $i \in P_k$. Entonces

$$v^{CEA}(N\backslash\{i\}) = \begin{cases} E - c_i & \text{si } c_k \leq E, \\ E - CEA_i(P_k, E, (c_j)_{j \in P_k}) & \text{si } c_k > E. \end{cases}$$

Como $v^{CEA}(N) = E$, se verifica que

$$M_i(v^{CEA}) = \begin{cases} c_i & \text{si } c_k \leq E, \\ CEA_i(P_k, E, (c_j)_{j \in P_k}) & \text{si } c_k > E. \end{cases}$$

[4] Se debe destacar que la matriz $C^{\mathcal{P}}$ de demandas viene definida de manera consecuente a partir del vector de demandas c en el que se tiene en cuenta la particin $\mathcal{P}$.

Luego,

$$\begin{aligned}&\widetilde{CEA}(N,E,c,\mathcal{P}) = \widehat{CEA}(v^{CEA})\\&= CEA(N, v^{CEA}(N), M(v^{CEA})) = CEA(N,E,M(v^{CEA})),\end{aligned}$$

y como el truncar no tiene ningún efecto sobre el resultado, se obtiene $\widetilde{CEA}(N,E,c,\mathcal{P}) = CEA(N,E,c)$. $\square$

Nótese que para una regla de bancarrota arbitraria f, la igualdad

$$\tilde{f}(N,E,c,\mathcal{P}) = f(N,E,c)$$

generalmente no se verifica.

5.5. Conclusiones.

En este capítulo se introdujeron procedimientos para extender reglas clásicas de bancarrota a problemas de bancarrota con uniones a priori. El primer procedimiento introducido es muy intuitivo y consiste en un reparto en dos etapas: en la primera, se considera el problema de bancarrota en el que los agentes son las uniones y se resuelve y, en la segunda, cada unión reparte lo obtenido en la primera etapa entre sus agentes. Se han obtenido caracterizaciones de este procedimiento aplicado a la regla igualitaria restringida, por el cual se obtiene la regla igualitaria restringida para problemas de bancarrota con uniones a priori ($\overline{CEA}$). Las propiedades utilizadas en tales resultados se resumen en las tablas siguientes:

La regla $\overline{CEA}$ se caracteriza con:
E1.- Composición
E3.- Igual tratamiento dentro de las uniones
E4.- Propiedad del problema cociente
E5.- Invarianza al truncar demandas dentro de las uniones

La regla $\overline{CEA}$ se caracteriza con:
E2.- Independencia del camino
E4.- Propiedad del problema cociente
E6.- Sostenibilidad de los acreedores dentro de las uniones

Los otros procedimientos que se han estudiado extienden las reglas clásicas a partir de soluciones de juegos en forma característica asociados a cada problema de bancarrota con uniones a priori.

Todos estos procedimientos se aplicaron a la regla igualitaria restringida. Es por lo que, como posible línea futura de trabajo se puede considerar el estudio de los procedimientos obtenidos en este capítulo aplicados a otras reglas clásicas.

Capítulo 6

La regla de llegadas aleatorias en problemas de bancarrota con uniones a priori.

Este capítulo está fuertemente inspirado en el trabajo de O´Neill (1982). En dicho trabajo se describían varios procedimientos de solución para un problema de bancarrota y se veía que todos ellos coincidían. Dichos procedimientos son la llamada regla de llegadas aleatorias para problemas de bancarrota, un procedimiento de compleción recursiva y el valor de Shapley del juego de bancarrota asociado. También se caracteriza la solución obtenida con una propiedad de consistencia.

Pues bien, aquí se trata de extender estos tres elementos al contexto de los problemas de bancarrota con uniones a priori, introducidos en el capítulo anterior. Se define un procedimiento, basado en la regla de llegadas aleatorias, para extender cualquier regla de bancarrota clásica al contexto de problemas de bancarrota con uniones a priori. Se introduce también un procedimiento de compleción recursiva, que resulta válido para extender cualquier regla clásica. Finalmente, se considera el juego de bancarrota asociado con uniones a priori. La solución de Shapley para el juego, en este contexto, es el conocido valor de Owen (Owen (1977)). Se verá que el procedimiento basado en llegadas aleatorias para la regla de llegadas aleatorias clásica y el valor de Owen del correspondiente juego coinciden. Sin embargo, el procedimiento de compleción recursiva, que se define en este contexto, aplicado a la regla de llegadas aleatorias clásica, da un reparto diferente. Finalmente, se extiende la propiedad de consistencia de O´Neill y se obtiene una caracterización para los procedimientos coincidentes.

La estructura del capítulo es la que sigue. En una primera sección, se introducen los dos procedimientos: el basado en llegadas aleatorias y el de compleción recursiva. En el segundo apartado, se introduce la nueva consistencia y se da una caracterización. Finalmente, se añade un pequeño apartado de conclusiones en el que se enumeran posibles líneas de trabajo futuras. Este capítulo se basa en Casas-Méndez, Borm, Carpente y Hendrickx (2002).

6.1. Extensiones de la regla de llegadas aleatorias en problemas de bancarrota con uniones a priori.

En esta sección se van a definir dos nuevas familias de reglas que son extensiones de reglas de bancarrota estándar a reglas de bancarrota para situaciones de bancarrota con uniones a priori. Se debe mencionar que los procedimientos que se van a describir están claramente inspirados en el trabajo de O´Neill (1982). Estos conceptos son el procedimiento de compleción recursiva y el procedimiento basado en la regla de llegadas aleatorias.

Se recuerda a continuación la definición de la regla de llegadas aleatorias clásica (O´Neill (1982)):

Definición 56 *Dado el problema de bancarrota (N, E, c) se define la regla de llegada aleatorias y se denota por RA como*

$$RA_i(N,E,c) = 1/n! \left[\sum_{\pi \in \Pi(N)} \text{mín} \left\{ c_i, \text{máx}\{E - \sum_{j \in N, \pi(j) < \pi(i)} c_j, 0\} \right\} \right]$$

para todo $i \in N$[1]*.*

Si se considera un orden fijo en el conjunto de agentes, de tal forma, que cada agente, en su turno, va obteniendo su demanda hasta que se agote el

[1]En este caso, con $\Pi(N)$ se denota el conjunto de todas las permutaciones posibles de los jugadores de N. Por tanto, $\sigma \in \Pi(R)$ es un determinado orden de los jugadores y $\sigma(i)$ ($i \in N$) denota el lugar que ocupa el jugador i de acuerdo con el orden σ.

estado, entonces la regla de llegadas aleatorias da a cada acreedor la media aritmética de las cantidades obtenidas cuando se consideran todos los posibles órdenes en el conjunto de agentes.

Ejemplo 57 *Dado* $(N, E, c) = (\{1, 2, 3\}, 10, (6, 2, 5))$ *se tiene que*

N	*1*	*2*	*3*
123	6	2	2
132	6	0	4
213	6	2	2
231	3	2	5
312	5	0	5
321	3	2	5
	29/6	8/6	23/6

y, por tanto, $RA(N, E, c) = (29/6, 8/6, 23/6)$.

La primera extensión que se aborda es el procedimiento de compleción recursiva tal y como se define a continuación.

Definición 58 *Sea f una regla de bancarrota y sea $(N, E, c, \mathcal{P})$ una situación de bancarrota con uniones a priori. Entonces se define la compleción recursiva de f, RC^f, de la siguiente manera:*

$$RC_i^f(N, E, c, \mathcal{P}) = \frac{1}{r}\left[f_i(P_k, E', \{c_j\}_{j\in P_k}) + \sum_{\ell\in R, \ell\neq k} f_i(P_k, E_k^{f,\ell}, \{c_j\}_{j\in P_k})\right]$$

para todo $i \in P_k$, donde $E' = \text{mín}\{E, c_k^{\mathcal{P}}\}$, $E_k^{f,\ell} = f_k(R\backslash\{\ell\}, \text{máx}\{E - c_\ell^{\mathcal{P}}, 0\}, c_{-\ell}^{\mathcal{P}})$ *y* $c_{-\ell}^{\mathcal{P}} = \{c_t^{\mathcal{P}}\}_{t\in R\backslash\{\ell\}}$.

El primer término de la suma, en la definición de RC_i^f, es la cantidad que el agente $i \in P_k$ obtiene de acuerdo con la regla f cuando la unión P_k recibe su máximo. El segundo término es la cantidad que el agente $i \in P_k$ obtiene de acuerdo con la regla f, cuando la unión $\ell \neq k$ consigue su máximo y el estado que resta se divide entre las otras uniones en el problema cociente utilizando la misma regla f. Por tanto, realmente se está calculando la cantidad media que el agente i obtiene si se utiliza la regla f en las r situaciones en las que cada una de las uniones va obteniendo su máximo.

Si se considera la partición trivial en el conjunto de jugadores, $\mathcal{P} = \mathcal{P}^N$, entonces RC^f coincide con la regla f, es decir, $RC^f(N, E, c, \mathcal{P}^N) = f(N, E, c)$ para cada problema de bancarrota (N, E, c). Si se considera la partición discreta, $\mathcal{P} = \mathcal{P}^n$, la fórmula del procedimiento RC^f se corresponde con la definición de O´Neill de consistencia para reglas de bancarrota. Como la regla de llegadas aleatorias para problemas de bancarrota es la única consistente (*a la O´Neill*) se tiene que $RC^{RA}(N, E, c, \mathcal{P}^n) = RA(N, E, c)$ para cada problema de bancarrota (N, E, c). Si se parte de una regla f arbitraria, esta igualdad $RC^f(N, E, c, \mathcal{P}^n) = f(N, E, c)$ no se verifica en general.

Ejemplo 59 *Sea la situación de bancarrota con uniones a priori* $(N, E, c, \mathcal{P})$ *que da lugar a la siguiente situación de reparto para varios asuntos disjuntos:*

$$(N, E, C^{c,\mathcal{P}}) = (\{1, 2, 3, 4\}, 10, \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 5 \end{bmatrix}).$$

Se va a calcular RC^{CEA}*. Para ello, primero se completa y modifica la matriz de demandas considerando las dos situaciones en las que cada una de las uniones obtiene lo máximo y cuando el estado es insuficiente se aplica la regla* CEA*, obteniéndose la matriz*

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Si se promedia la suma de cada columna por el número de uniones se obtiene el resultado final. Por tanto, $RC^{CEA} = (3, 1, 3, 3)$*. Nótese que esto refleja que* $RC^{CEA}(N, E, c, \mathcal{P})$ *es distinto de* $\widetilde{CEA}(N, E, c, \mathcal{P})$ *y de* $\overline{CEA}(N, E, c, \mathcal{P})$.

Teniendo en cuenta los anteriores comentarios, la regla RC^{RA} es especialmente interesante para situaciones de bancarrota con uniones a priori. Sin embargo, RC^{RA}, y, en general, las reglas RC^f no se pueden extender fácilmente a reglas para situaciones de reparto para varios asuntos que no son disjuntos. Esto no sucede con el siguiente procedimiento que se describe a continuación.

Definición 60 *Sea f una regla de bancarrota y sea $(N, E, c, \mathcal{P})$ un problema de bancarrota con uniones a priori. Entonces se define la regla f basada en llegadas aleatorias de la manera siguiente:*

$$RA_i^f(N, E, c, \mathcal{P}) = \frac{1}{r!}\left[\sum_{\sigma \in \Pi(R)} f_i(P_k, E_\sigma, (c_j)_{j \in P_k})\right]$$

para todo $i \in P_k$, donde $E_\sigma = \text{máx}\{0, E - \sum_{\ell \in R, \sigma(\ell) < \sigma(k)} c_\ell^{\mathcal{P}}\}$.

La interpretación de esta regla es similar a otras soluciones basadas en llegadas aleatorias. Aquí, se supone que las demandas de las diferentes uniones se van satisfaciendo siguiendo un orden prefijado. Si, en el momento de repartir el recurso en una unión concreta, el estado restante no es suficiente para satisfacer toda la demanda, se utiliza la regla f para hacer la distribución dentro de esa unión. Por tanto, la regla f basada en llegadas aleatorias reparte a un agente la media de las cantidades que éste obtiene utilizando este procedimiento para todos los posibles órdenes de llegada de las uniones.

Nótese que si se considera la partición discreta en el conjunto de jugadores, $\mathcal{P} = \mathcal{P}^n$, se tiene que $RA^f(N, E, c, \mathcal{P}^n) = RA(N, E, c)$, es decir, en este caso, RA^f coincide con la regla de llegadas aleatorias para problemas de bancarrota y para cualquier regla f. Si se considera la partición trivial, $\mathcal{P} = \mathcal{P}^N$, la regla f basada en llegadas aleatorias coincide con la regla f. En el caso en el que se tengan únicamente dos uniones RA^f y RC^f coinciden.

6.2. Consistencia de una regla de llegadas aleatorias en problemas de bancarrota con uniones a priori.

En este apartado se introduce una noción de consistencia que extiende a la consistencia considerada por O´Neill (1982).

Definición 61 *Una regla de bancarrota con uniones a priori, φ, es consistente si para cada $(N, E, c, \mathcal{P})$, para cada unión $P_k \in \mathcal{P}$ y para cada agente $i \in P_k$ se tiene que*

$$\varphi_i(N, E, c, \mathcal{P}) =$$
$$\tfrac{1}{r}\left[\varphi_i(P_k, E', (c_j)_{j \in P_k}, \mathcal{P}^{P_k}) + \textstyle\sum_{\ell \in R, \ell \neq k} \varphi_i(N \backslash P_\ell, E_{-\ell}, c_{-\ell}, \mathcal{P}_{-\ell})\right],$$

donde $E' = \text{mín}\{E, c_k^{\mathcal{P}}\}$*,* $c_{-\ell} = (c_j)_{j \in N \setminus P_\ell}$*,* $E_{-\ell} = \text{máx}\{E - c_\ell^{\mathcal{P}}, 0\}$ *y* $\mathcal{P}_{-\ell}$ *es la partición del conjunto* $N \setminus P_\ell$ *inducida por* $\mathcal{P}$*.*

Por tanto, una regla es consistente si en un problema de bancarrota con uniones a priori reparte a cada agente la media de lo que éste consigue cuando se aplica la regla al problema restringido a su propia unión y las soluciones de las $r-1$ situaciones de bancarrota en las cuales el estado es la cantidad que queda cuando cada una de las otras uniones obtiene su máximo.

Nótese que si se considera la partición del conjunto de agentes discreta, $\mathcal{P} = \mathcal{P}^n$, esta definición de consistencia coincide con la hecha por O´Neill. Hay que resaltar que esta propiedad de consistencia que se ha introducido aquí es diferente de la noción de consistencia que aparece en la literatura tradicional, en la que se involucran diferentes conjuntos de agentes. Esta definición de consistencia que se aporta se hace involucrando diferentes conjuntos de uniones a priori.

Definición 62 *Sea* f *una regla de bancarrota. Se dice que una regla para problemas de bancarrota con uniones a priori,* φ*, es* f*-consistente si para cada problema de bancarrota* (N, E, c) *se tiene que* $\varphi(N, E, c, \mathcal{P}^N) = f(N, E, c)$*. Es decir,* φ *es* f*-consistente si* φ *es consistente y si coincide con* f *cuando la estructura de uniones a priori* $\mathcal{P}$ *es la partición trivial* $\mathcal{P}^N$*.*

El siguiente teorema establece que, para una regla de bancarrota f concreta, existe una única regla f-consistente. Este resultado extiende el resultado de O´Neill en el que la regla de llegadas aleatorias resultaba ser la única regla de bancarrota consistente.

Teorema 63 *La regla* f *basada en llegadas aleatorias,* RA^f*, es la única regla* f*-consistente para problemas de bancarrota con uniones a priori.*

Demostración: Sea f una regla de bancarrota.
Existencia.

Primero se verá que la regla f basada en llegadas aleatorias, RA^f, es f-consistente. Se sabe que para cada problema de bancarrota (N, E, c), $RA^f(N, E, c, \mathcal{P}^N) = f(N, E, c)$. Por tanto, queda ver que RA^f es consistente. Sea $(N, E, c, \mathcal{P})$ una situación de bancarrota con uniones a priori. Sea $i \in P_k$. Se define E_σ, E' y $E_{-\ell}$ como se han definido previamente y sea

$$E_{-\ell,\sigma} = \text{máx}\{E_{-\ell} - \sum_{t \in R \setminus \{\ell\} | \sigma(t) < \sigma(k)} c_t^{\mathcal{P}}, 0\}$$

para todos $\sigma \in \Pi(R)$, $\ell \in R$. Entonces,

$$\begin{aligned}
RA_i^f(N,E,c,\mathcal{P}) &= 1/r!\left[\sum_{\sigma\in\Pi(R)} f_i(P_k,E_\sigma,(c_j)_{j\in P_k})\right] \\
&= 1/r!\,[(r-1)!f_i(P_k,E',(c_j)_{j\in P_k})+ \\
&\left.\sum_{\ell\in R,\ell\neq k}\ \sum_{\sigma\in\Pi(R\backslash\{\ell\})} f_i(P_k,E_{-\ell,\sigma},(c_j)_{j\in P_k})\right] \\
&= 1/r\,[f_i(P_k,E',(c_j)_{j\in P_k})+ \\
&\left.\sum_{\ell\in R,\ell\neq k}\frac{1}{(r-1)!}\sum_{\sigma\in\Pi(R\backslash\{\ell\})} f_i(P_k,E_{-\ell,\sigma},(c_j)_{j\in P_k})\right] \\
&= 1/r\left[RA_i^f(P_k,E',(c_j)_{j\in P_k},\mathcal{P}^{P_k})+\right. \\
&\left.\textstyle\sum_{\ell\in R,\,\ell\neq k} RA_i^f(N\backslash P_\ell,\text{máx}\{E-c_\ell^{\mathcal{P}},0\},c_{-\ell},\mathcal{P}_{-\ell})\right].
\end{aligned}$$

Por tanto, al ser RA^f consistente es también f-consistente.

Unicidad.

Ahora se verá que si φ es una regla f-consistente para problemas de bancarrota con uniones a priori entonces φ coincide con la regla f basada en llegadas aleatorias RA^f. Esto se demuestra por inducción en el número de uniones. Si $r=1$ entonces

$$\varphi(N,E,c,\mathcal{P}^N)=f(N,E,c)=RA^f(N,E,c)$$

por la definición de f-consistencia. Supóngase que esto se verifica para $r=m-1$. Si $r=m$, la propiedad de f-consistencia implica que

$$\varphi(N\backslash P_\ell,\text{máx}\{E-c_\ell^{\mathcal{P}},0\},c_{-\ell},\mathcal{P}_{-\ell})$$

está totalmente determinado y que, por tanto, se puede concluir que hay una única regla f-consistente y que es la regla f basada en llegadas aleatorias. □

Calleja, Borm y Hendrickx (2004) caracterizaron dos reglas de llegadas aleatorias para situaciones de reparto para varios asuntos usando propiedades de consistencia que también extienden a la propiedad de consistencia de O´Neill. Sin embargo, estas propiedades de consistencia en Calleja, Borm y Hendrickx (2004) consideran una media en el número de agentes, mientras que esta propiedad de consistencia que se introduce en este capítulo considera una media en el número de uniones. Es posible extender esta nueva propiedad de consistencia a situaciones de reparto para varios asuntos considerando una media en el número de asuntos.

O´Neill (1982) también demostró que la regla de llegadas aleatorias coincide con el valor de Shapley del juego de bancarrota asociado. Owen (1977) extendió el valor de Shapley al contexto de juegos cooperativos con uniones a priori a través del denominado valor de Owen (que se denota por Ow). El siguiente resultado extiende el resultado de O´Neill. Se omite la demostración pues sigue una línea análoga a la del anterior teorema.

Teorema 64 *Si* $(N, E, c, \mathcal{P})$ *es una situación de bancarrota con uniones a priori, entonces la regla* RA *basada en llegadas aleatorias coincide con el valor de Owen del juego de bancarrota asociado con uniones a priori, es decir,*

$$RA^{RA}(N, E, c, \mathcal{P}) = Ow(N, v_{E,c}, \mathcal{P}).$$

De los dos teoremas anteriores se obtiene inmediatamente el siguiente resultado.

Teorema 65 *La única regla para problemas de bancarrota con uniones a priori que satisface la* RA*-consistencia es el valor de Owen del juego de bancarrota con uniones a priori asociado.*

Nota: En Winter (1992) y en Hamiache (1999) el valor de Owen se caracterizó axiomáticamente en la clase de juegos cooperativos con uniones a priori usando dos propiedades diferentes de consistencia. Nótese que en este capítulo, se ha caracterizado el valor de Owen en la clase de situaciones de bancarrota con uniones a priori, usando una tercera propiedad de consistencia que extiende, como se mencionó previamente, a la consistencia de O´Neill para problemas de bancarrota.

6.3. Conclusiones.

En este capítulo se describieron varios procedimientos basados en la regla de llegadas aleatorias para problemas de bancarrota clásicos. Se definió una propiedad de consistencia que caracteriza a uno de esos procedimientos y, también, aporta una nueva caracterización del valor de Owen para una clase especial de juegos.

La línea natural en la que se puede continuar este trabajo en investigaciones futuras es la de tratar de encontrar propiedades que caractericen el procedimiento de compleción recursiva, más eficiente a la hora de aplicarlo en la práctica por requerir un menor número de operaciones.

Capítulo 7

Aplicaciones de los problemas de bancarrota con uniones a priori.

7.1. Aplicación 1: El caso de la *Pacific Gas and Electric Company.*

En este capítulo se aplican las extensiones de la regla igualitaria restringida que surgen de los Capítulos 5 y 6 a una situación de bancarrota particular. El caso que se presenta es el de un procedimiento de bancarrota en una compañía americana denominada *Pacific Gas and Electric Company.* Dicha empresa es una de las más grandes del sector y combina el aporte de gas natural y el de electricidad. Debido a los resultados negativos, tal empresa se sometió a un proceso de reorganización bajo lo que se conoce como Capítulo 11 de la ley de bancarrota americana. Los datos que se utilizan provienen de la Corte de Bancarrota de San Francisco en el año 2001.

La ley de bancarrota americana trata de hacer los repartos entre los acreedores siguiendo un procedimiento en el que se utilizan prioridades. En un principio se puede pensar que esto no se ajusta a nuestra situaciones de bancarrota con uniones a priori. Sin embargo, a lo largo del proceso de bancarrota, en alguna de sus etapas se pueden dar tales situaciones. Este es el caso que se describe, donde en un momento dado del desarrollo del Capítulo 11, aparece la situación en la que hay que considerar aquellos acreedores que están sin asegurar y, en ocasiones, se plantea una negociación que tiene en cuenta los diferentes tipos de demandas. La ley obliga a dar listados de tales agentes (por lo menos, aquéllos de demandas más grandes).

Así, la siguiente tabla y la Figura 7.1 presentan a los 20 acreedores con demandas más grandes sin asegurar. Los datos se obtuvieron de la página *web* *www.bankruptcydata.com*. En esta página están accesibles algunos expedientes de bancarrota de los diferentes tribunales de bancarrota de Estados Unidos.

#	Naturaleza de la demanda	Demanda ($)
1	Bonos bancarios	2,207,250,000
2	Adquisición de electricidad	1,966,000,000
3	Bonos bancarios	1,302,100,000
4	Adquisición de electricidad	1,228,800,000
5	Bonos bancarios	938,461,000
6	Bonos bancarios	310,000,000
7	Adquisición de electricidad	57,928,385
8	Adquisición de electricidad	49,452,611
9	Adquisición de electricidad	48,400,572
10	Adquisición de electricidad	45,706,378
11	Adquisición de electricidad	40,147,245
12	Adquisición de electricidad	40,122,073
13	Adquisición de electricidad	32,867,878
14	Adquisición de gas	29,523,530
15	Adquisición de gas	28,210,551
16	Adquisición de gas	24,718,334
17	Adquisición de gas	23,849,455
18	Adquisición de electricidad	22,576,506
19	Adquisición de electricidad	21,506,087
20	Adquisición de electricidad	19,800,248

Se observa que una de las cualidades que aparece en estos listados es la naturaleza de las demandas. Parece natural que ésta se tenga en cuenta a la hora de efectuar los repartos. Aquí se considera que los agentes están agrupados por la naturaleza de sus demandas. Esto sí responde a una situación de bancarrota con uniones a priori.

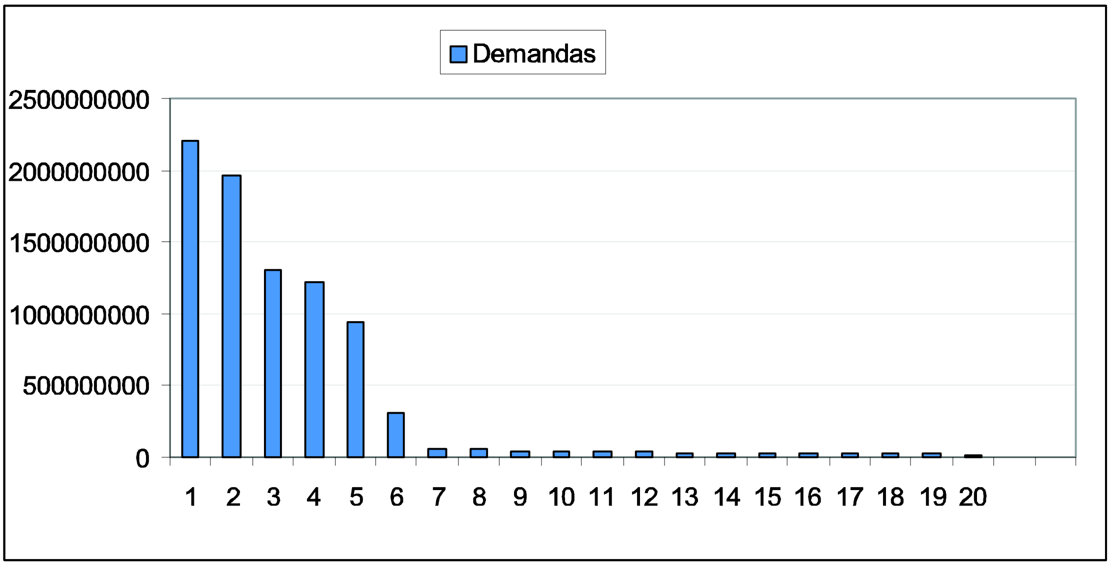


Figura 7.1: Gráfico de las demandas de los 20 acreedores no asegurados.

Teniendo en cuenta la tabla anterior, se analiza la situación considerando tres uniones: $P_1 = \{1, 3, 5, 6\}$ relacionada con las peticiones en bonos bancarios, $P_2 = \{2, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 18, 19, 20\}$ relacionada con las adquisiciones de electricidad y $P_3 = \{14, 15, 16, 17\}$ relacionada con las adquisiciones de gas natural. El estado total (E) del que se dispone para el reparto es de \$1,060,000,000. Tal estado aparece destinado durante el procedimiento para cubrir en una primera aproximación las demandas no aseguradas.

7.1.1. Resultados.

En la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos de aplicar primero la regla igualitaria restringida sin considerar la estructura de uniones a priori, CEA. Luego se calculan sus extensiones: $\overline{CEA}$, RC^{CEA} y RA^{CEA} utilizando las definiciones de los Capítulos 5 y 6 y un programa de ordenador denominado BANKARROTA[1]. Algunas de las cantidades que se presentan

[1]La aplicación informática BANKARROTA es el resultado del proyecto fin de carrera *Una herramienta para problemas de bancarrota: algunas aplicaciones de la teoría de juegos*

en la tabla han sido redondeadas con el fin de facilitar la comparación de resultados.

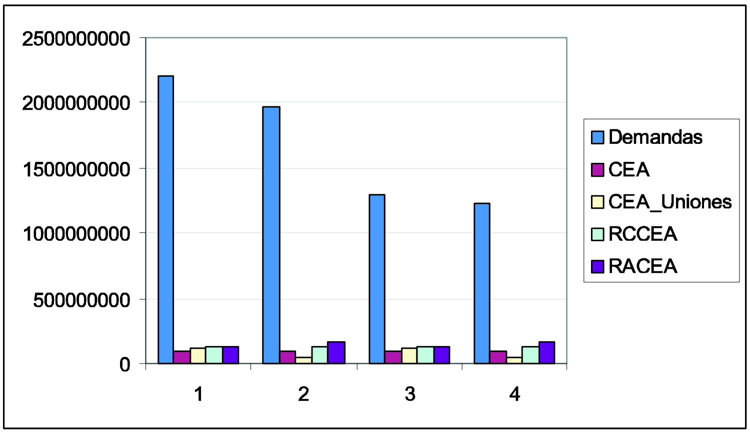
	CEA	$\overline{CEA}$	RC^{CEA}	RA^{CEA}	
1	$95,865,024$	$119,212,266$	$128,070,755$	$128,070,755$	P_1
2	$95,865,024$	$52,089,822$	$130,945,276$	$161,514,515$	P_2
3	$95,865,024$	$119,212,266$	$128,070,755$	$128,070,755$	P_1
4	$95,865,024$	$52,089,822$	$130,945,276$	$161,514,515$	P_2
5	$95,865,024$	$119,212,266$	$128,070,755$	$128,070,755$	P_1
6	$95,865,024$	$119,212,266$	$128,070,755$	$128,070,755$	P_1
7	$57,928,385$	$52,089,822$	$36,672,735$	$28,964,192$	P_2
8	$49,452,611$	$49,452,611$	$32,968,407$	$24,726,305$	P_2
9	$48,400,572$	$48,400,572$	$32,267,048$	$24,200,286$	P_2
10	$45,706,378$	$45,706,378$	$30,470,918$	$22,853,189$	P_2
11	$40,147,245$	$40,147,245$	$26,764,830$	$20,073,622$	P_2
12	$40,122,073$	$40,122,073$	$26,748,048$	$20,061,036$	P_2
13	$32,867,878$	$32,867,878$	$21,911,918$	$16,433,939$	P_2
14	$29,523,530$	$29,523,530$	$9,841,176$	$9,841,176$	P_3
15	$28,210,551$	$28,210,551$	$9,403,517$	$9,403,517$	P_3
16	$24,718,334$	$24,718,334$	$8,239,444$	$8,239,444$	P_3
17	$23,849,455$	$23,849,455$	$7,949,818$	$7,949,818$	P_3
18	$22,576,506$	$22,576,506$	$15,051,004$	$11,288,253$	P_2
19	$21,506,087$	$21,506,087$	$14,337,391$	$10,753,043$	P_2
20	$19,800,248$	$19,800,248$	$13,200,165$	$9,900,124$	P_2

Repartos que otorgan las diferentes reglas a los 20 agentes.

En la siguiente tabla se reflejan los totales percibidos por cada unión.

	Demandas	CEA	$\overline{CEA}$	RC^{CEA}	RA^{CEA}
P_1	4,757,811,000	383,460,098	476,849,065	512,283,021.7	512,283,021.7
P_2	3,573,307,983	570,238,032	476,849,065	512,283,021.7	512,283,021.7
P_3	106,301,870	106,301,870	106,301,870	35,433,956.65	35,433,956.65

(2002), realizado por Manuel A. García Paz y dirigido por M^a Luisa Carpente. (Facultad de Informática-Universidad de La Coruña).



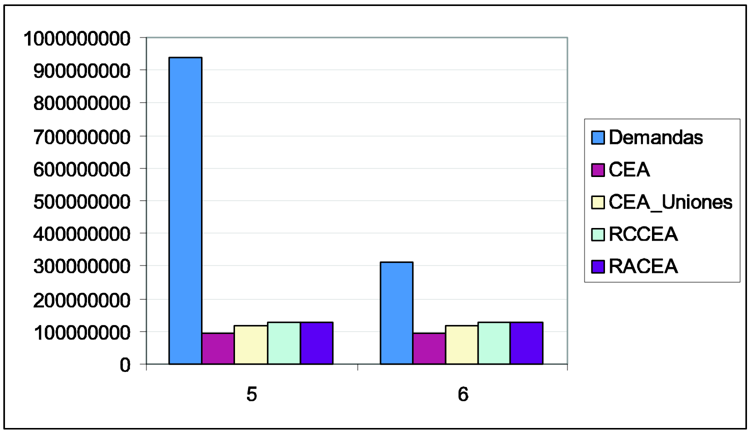
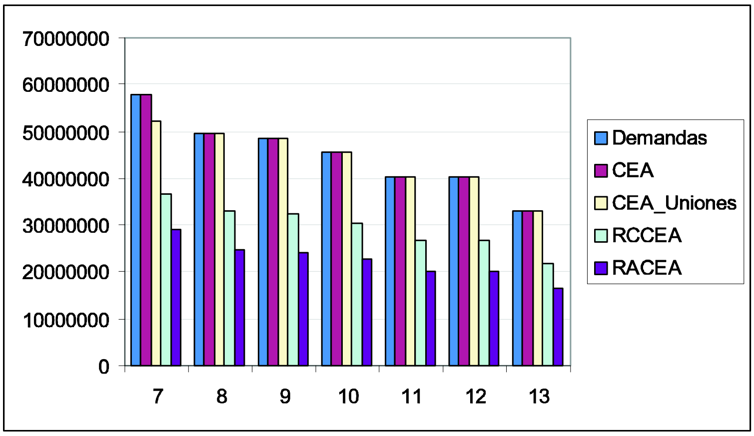


Figura 7.2: Repartos otorgados por las distintas reglas a los agentes de demandas mayores.



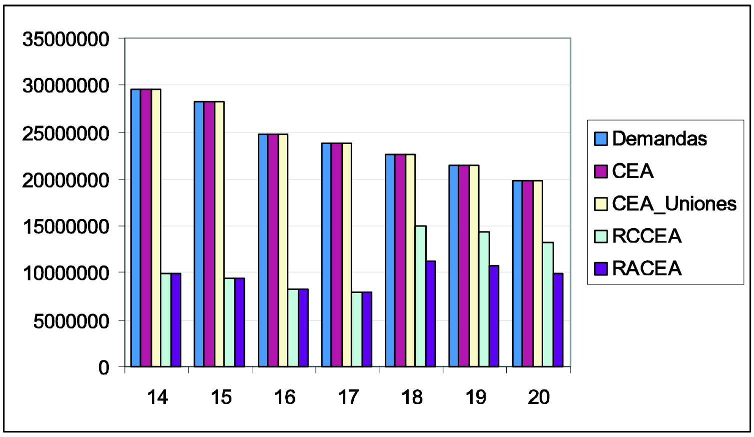


Figura 7.3: Repartos otorgados por las distintas reglas a los agentes de menores demandas.

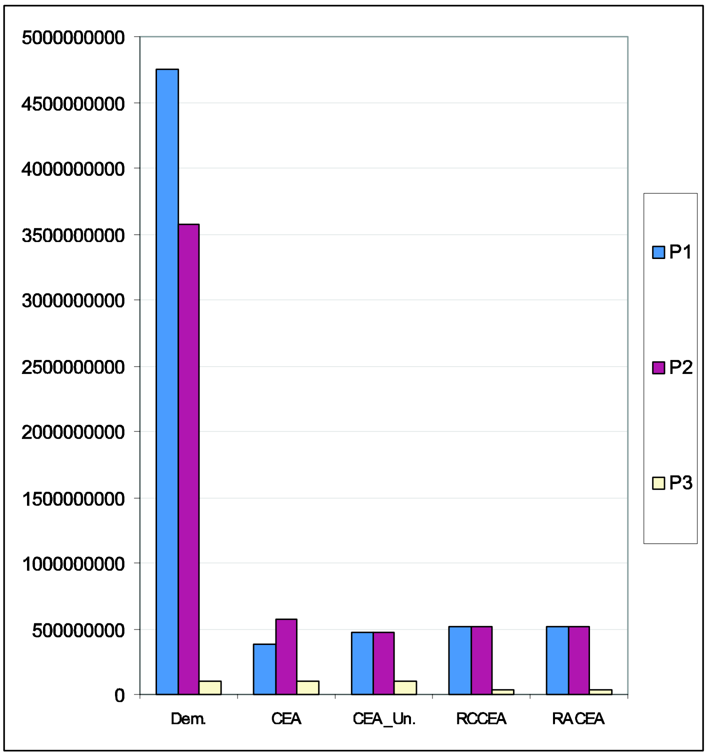


Figura 7.4: Cantidades totales demandades y percibidas por las uniones de acreedores según las distintas reglas de reparto.

7.1.2. Comentarios finales.

Con el fin de resumir la información que aparece en la tabla, se pueden resaltar las siguientes conclusiones:

- Las tres reglas que tienen en cuenta las uniones son más favorables para P_1 y menos favorables para P_2 que la regla CEA sin uniones. Esto se debe a que la idea subyacente al reparto igualitario restringido es que los pequeños acreedores estén protegidos. Así, es mejor para los pequeños demandantes en P_2 ser considerados como acreedores individuales que formar parte de un grupo. Sin embargo, es mejor para los grandes demandantes de P_1 ser considerados como un grupo y no como acreedores que actúan por separado.

- La solución que aporta la regla $\overline{CEA}$ incrementa la cantidad que obtienen los acreedores relacionados con bonos bancarios mientras que penaliza a los relacionados con adquisiciones de electricidad con peticiciones más elevadas. El resto de los acreedores permanece igual (si se compara con la solución sin tener en cuenta la estructura de uniones).

Teniendo en cuenta, además la Figuras 7.2 y 7.3 , se ve que:

- La regla RC^{CEA} incrementa la cantidad destinada a los acreedores relacionados con bonos bancarios y a los acreedores relacionados con adquisiciones de electricidad con peticiciones más elevadas, mientras que penaliza al resto de los agentes.

- La regla RA^{CEA} aporta lo mismo que la regla RC^{CEA} a los acreedores relacionados con bonos bancarios, incrementa los beneficios para los acreedores relacionados con adquisiciones de electricidad con peticiciones más elevadas y penaliza más al resto de los acreedores.

- La RA^{CEA} resulta peor para la unión P_3, ya que contiene sólo acreedores con demandas bajas. La cualidad de protección a las demandas más bajas que tiene la regla igualitaria restringida se ve neutralizada al tomar medias sobre un conjunto de repartos extremos. Por tanto, con esta regla los acreedores de menor demanda quedan menos protegidos, mientras que los de mayor demanda resultan menos perjudicados.

Finalmente, a la vista de las Figuras 7.2, 7.3 y 7.4 se concluye que:

- Las reglas RA^{CEA} y RC^{CEA} obtienen el mismo resultado total para las uniones, sin embargo, no son iguales para los miembros de éstas.

7.2. Aplicación 2: El reparto de las cuotas lácteas en la Unión Europea.

La producción láctea es una de las actividades económicas de más importancia dentro de las actividades agrarias de la Unión Europea. La producción de leche no es uniforme entre los países miembros, ni mucho menos dentro de las regiones que los componen. Con el fin de estabilizar el mercado a nivel de consumo y los precios, la U.E. utiliza desde 1984 el denominado sistema de "cuotas lácteas", para mantener la producción. Este sistema fija la cantidad máxima de leche que se debe producir en la U.E. y, basándose en esa cantidad de referencia, limita la cantidad que puede producir cada estado.

La posición de los países intentando mantener su producción frente al sistema de cuotas, produce una situación en la que se pueden aplicar los modelos de bancarrota. Tanto estos modelos como su conexión con la teoría de juegos, admiten una amplia interpretación que abarca cuestiones relacionadas con la biología y las ciencias de la salud. Éste es el caso de los problemas de asignación en política sanitaria (Cuadrás-Morató y otros (2001)), o el problema de la regulación en materia de pesca dentro de la U.E. (Gallástegui y otros (2002)).

Algunos modelos clásicos de bancarrota y los modelos con uniones a priori descritos en lo Capítulos 5 y 6 se han aplicado para el estudio de los repartos de cuotas lácteas efectuados en la U.E.

En este caso el problema con uniones a priori surge de considerar cada país como unión de sus regiones productoras de leche. Los datos con uniones sólo se aplican para el caso de España, del que disponemos los datos para sus autonomías.

7.2.1. Resultados.

En la siguiente tabla se estudia el reparto efectuado en 1999-2000, en miles de toneladas. De forma similar a como la U.E. hizo en 1984 se ha considerado como referencia la media de producción de los tres años anteriores 1996, 1997 y1998. Los cálculos se han realizado con un programa de ordenador denominado BANKARROTA. Se han calculado las siguientes reglas de bancarrota clásicas:

- Reparto proporcional ($PROP$). Es la regla de bancarrota que reparte el estado total proporcionalmente a las demandas. Dado un problema (N, E, c)
$$PROP_i = \frac{c_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j} E$$
para todo $i \in N$.

- Reparto proporcional ajustado ($APROP$). Esta regla hace un reparto proporcional a las demandas, otorgando unos derechos mínimos a cada uno de los agentes (véase, por ejemplo, Curiel y otros (1987) y Casas-Méndez y otros (2003) para una descripción detallada). Dado un problema (N, E, c)
$$\begin{aligned} APROP_i &= m_i(N,E,c) + PROP_i(N, E - \sum_{j=1}^{n} m_j(N,E,c), \\ &\quad \min\{E - \sum_{j=1}^{n} m_j(N,E,c), c - m(N,E,c)\}) \end{aligned}$$
para todo $i \in N$, donde $m_i(N,E,c) = \max\{E - \sum\limits_{j \in N \setminus \{i\}} c_j, 0\}$ es el mínimo derecho del agente $i \in N$ y $m(N,E,c) = (m_i(N,E,c))_{i \in N}$.

- Reparto igualitario restringido (CEA). Es la regla clásica definida en el Capítulo 5.

Para el estudio clásico se suponen que el estado disponible es el total de la cuota láctea impuesta por la U.E. y las demandas son las producciones medias. Se han redondeado las cantidades a un único decimal para facilitar las comparaciones.

Países	Pr. media	$PROP$	$APROP$	CEA	Cuotas 99/00
Luxemburgo	265.3	254.2	241	265.3	268
Grecia	768.7	717	679.7	748.7	629.8
Portugal	1810	1733.4	1643.2	1810	1835.5
Finlandia	2448	2344.4	2222.4	2448	2394.5
Austria	3126.7	2994.3	2838.5	3126.7	2544
Suecia	3327	3186.1	3020.4	3327	3300
Bélgica	3368	3225.4	3057.6	3368	3140.7
Dinamarca	4622	4426.3	4196	4622	4454.6
Irlanda	5289	5065	4817	5289	5236.6
España	6013.7	5759	5541.7	6013.7	5457.6
Italia	10678	10225.9	10206	10678	9698.4
Holanda	10976.4	10508.7	10501.6	10976.4	10992
Reino Unido	14719.7	14096.4	14247.7	14719.7	14374
Francia	24898	23843.7	24426	24218.5	23794
Alemania	28660.4	27446.8	28188.4	28304	27767

En la siguiente tabla se obtienen los correspondientes repartos para las autonomías españolas utilizando el modelo de uniones a priori en el que todos los países europeos son ellos mismos una unión y España representa a la unión de sus diecisiete autonomías. El modelo completo con uniones a priori debería contar con los datos de las regiones productoras de leche de cada país europeo, sin embargo no se obtuvieron los datos correspondientes a los años de estudio para todos los países. Las producciones autonómicas que se han tomado como referencia son las del año 1998, ya que no se disponía de los datos de los años 1996 y 1997 para calcular la producción media. Se ha utilizado el procedimiento en dos etapas del Capítulo 5 aplicado a las diferentes reglas de bancarrota clásicas consideradas en esta sección: el reparto proporcional, el reparto proporcional ajustado y el reparto igualitario restringido. A las reglas en dos etapas resultantes se las denota por RP, RPA y RI como extensiones de las reglas PROP, APROP y CEA, respectivamente[2].

[2]El dato de la cuota asignada a Canarias es desconocido.

Autonomías	Producción	RP	RPA	RI	Cuotas 99/00
Andalucía	506	484.6	448.7	506	421.485
Aragón	65.9	63.1	57.9	65.9	81.796
Asturias	652.5	624.8	595.2	652.5	598.661
Baleares	111.7	107	98.2	111.7	105.184
Canarias	50.5	48.3	44.4	50.5	
Cantabria	539.1	516.2	481.8	539.1	468.524
Castilla-León	779.2	746.1	721.9	779.2	775.537
Castilla-La Mancha	186.4	178.6	163.9	186.4	171.142
Cataluña	648.5	621	591.2	648.5	556.927
Com.Valenciana	44	42.1	38.7	44	41.102
Extremadura	50	47.9	44	50	41.658
Galicia	1823.2	1745.8	1765.9	1823.2	1670.257
Madrid	82.3	78.8	72.3	82.3	93.139
Murcia	32.9	31.5	28.9	32.9	19.686
Navarra	161.1	154.3	141.6	161.1	158.147
Pais Vasco	257.3	255.9	235	257.3	236.047
La Rioja	23.1	22.1	20.3	23.1	17.595

Reparto por autonomías utilizando un procedimiento en dos etapas.

En la tabla que figura a continuación se ha utilizado el procedimiento de compleción recursiva del Capítulo 5 aplicado a las diferentes reglas de bancarrota clásicas consideradas en esta sección. A las reglas para problemas con uniones a priori resultantes se las vuelve a denotar por RP, RPA y RI como extensiones de las reglas PROP, APROP y CEA, respectivamente. Cabe destacar que el reparto igualitario restringido obtenido para el problema con uniones a priori es el mismo para el procedimiento en dos etapas y para el procedimiento de compleción recursiva. Esto se debe a que las demandas de las autonomías españolas son muy pequeñas en comparación con las demandas de los demás países europeos y el reparto igualitario restringido conserva todas las demandas autonómicas. Esta situación debería variar si se conociesen los datos de las regiones de los distintos países de la U.E.

Nótese que no se han calculado los repartos que proporciona el procedimiento de llegadas aleatorias para problemas de bancarrota con uniones a priori descrito en el Capítulo 6 por problemas computacionales, pues se tiene una unión con 17 agentes y la aplicación utilizada para el cálculo de cuotas soporta un máximo de 10 agentes por unión.

Autonomías	Producción	RP	RPA	RI	Cuotas 99/00
Andalucía	506	484.4	448.5	506	421.485
Aragón	65.9	63	58.3	65.9	81.796
Asturias	652.5	624.5	594	652.5	598.661
Baleares	111.7	107	98.8	111.7	105.184
Canarias	50.5	48.3	44.7	50.5	
Cantabria	539.1	516	480.7	539.1	468.524
Castilla-León	779.2	745.8	720.7	779.2	775.537
Castilla-La Mancha	186.4	178.5	165	186.4	171.142
Cataluña	648.5	620.7	590	648.5	556.927
Com.Valenciana	44	42.1	38.9	44	41.102
Extremadura	50	47.9	44.2	50	41.658
Galicia	1823.2	1745.1	1764.7	1823.2	1670.257
Madrid	82.3	78.8	72.8	82.3	93.139
Murcia	32.9	31.5	29.1	32.9	19.686
Navarra	161.1	154.2	142.6	161.1	158.147
Pais Vasco	257.3	255.9	236.5	257.3	236.047
La Rioja	23.1	22.1	20.5	23.1	17.595

Reparto por autonomías utilizando el procedimiento de compleción recursiva.

En la siguiente tabla aparecen los totales obtenidos por España en los distintos repartos anteriormente considerados. Nótese que en el reparto sin uniones la demanda total de producción de España es de 6013.7 miles de toneladas, mientras que en el reparto con uniones la demanda total de España es de 6024 miles de toneladas. Esta diferencia es debido a que en el problema sin uniones se considera la producción media en 1996, 1997 y 1998 mientras que para el problema con uniones sólo se considera la producción de 1998.

	PROP	APROP	CEA
Repartos sin uniones	5759	5541.7	6013.7
Repartos por el procedimiento en dos etapas	5768	5549.8	6024
Repartos por el procedimiento de compleción recursiva	5766	5550.3	6024

7.2.2. Comentarios finales.

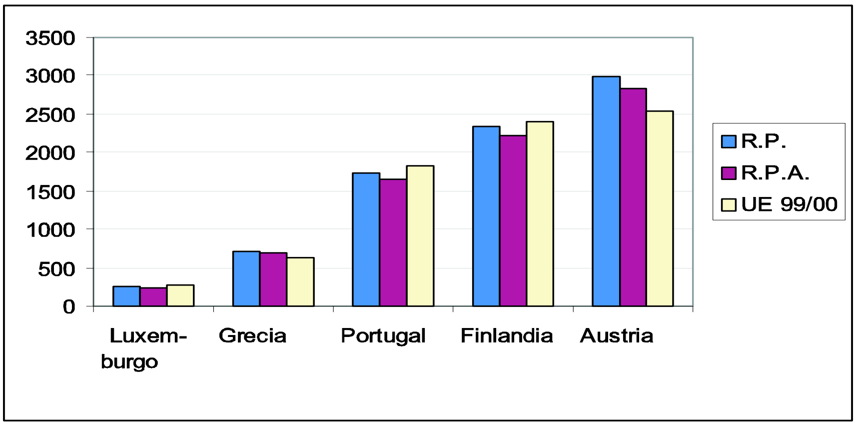
Se pueden citar las siguientes conclusiones:

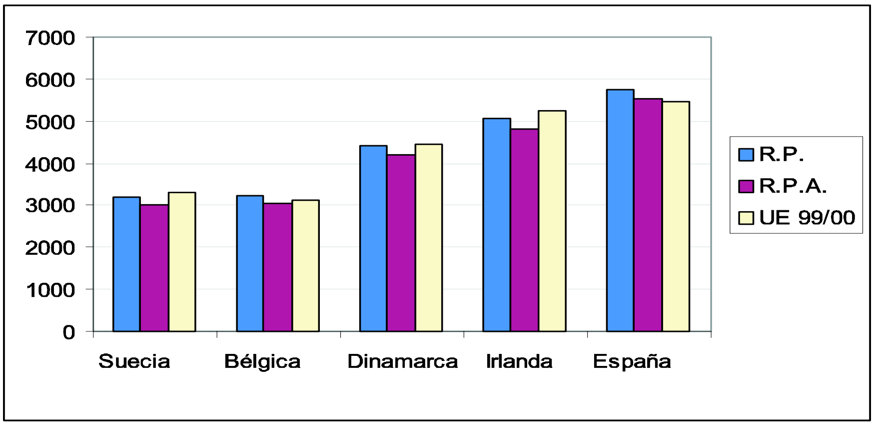
- En la tabla se observa, por ejemplo, que las cuatro reglas consideradas otorgan a Austria, España, Italia y Francia una cuota superior a la proporcionada por la U.E. La regla proporcional, la proporcional ajustada y la igualitaria también le otorgan una cuota superior a Grecia. En parcial concordancia, se sabe que el objetivo de la U.E. es mantener fijas las cuotas hasta el 31 de marzo de 2006, excepto para cuatro países que la van a incrementar. Estos países son precisamente España, Italia, Grecia e Irlanda. Se puede observar que Bélgica tiene una producción mayor que Suecia y todas las reglas le dan una cuota mayor que a ésta, sin embargo la U.E. le da a Suecia una cuota mayor.

  La regla que más se aproxima al reparto de la U.E., de las que se consideran, es la proporcional ajustada, esto es, la que garantiza a los países sus derechos mínimos de producción. Véase también la Figura 7.5.

- En cuanto a las autonomías, se observa un comportamiento parecido de las reglas, en el sentido de que, en general, la que más se aproxima al sistema de cuotas fijado es la regla proporcional ajustada (extendida por compleción recursiva). Sin embargo, para algunas autonomías en concreto se obtienen mejores aproximaciones con los otros repartos. Este comportamiento se puede observar también en las Figuras 7.6 y 7.7.

Como nota final, se debe resaltar que los problemas de repartos de cuotas pueden dar lugar a modelos propios de bancarrota temporales en los que se tenga en cuenta la evolución histórica de los agentes en el sistema de cuotas. Esto puede constituir una línea de trabajo futura.





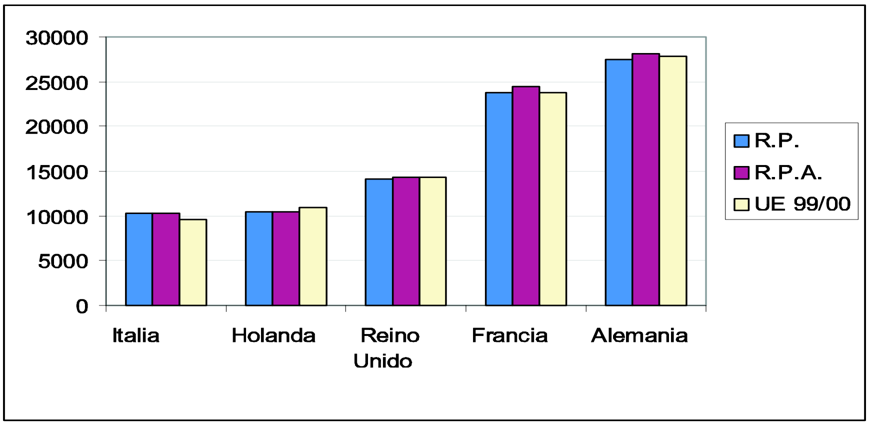


Figura 7.5: Reparto de cuotas por países utilizando la regla proporcional y la proporcional ajustada.

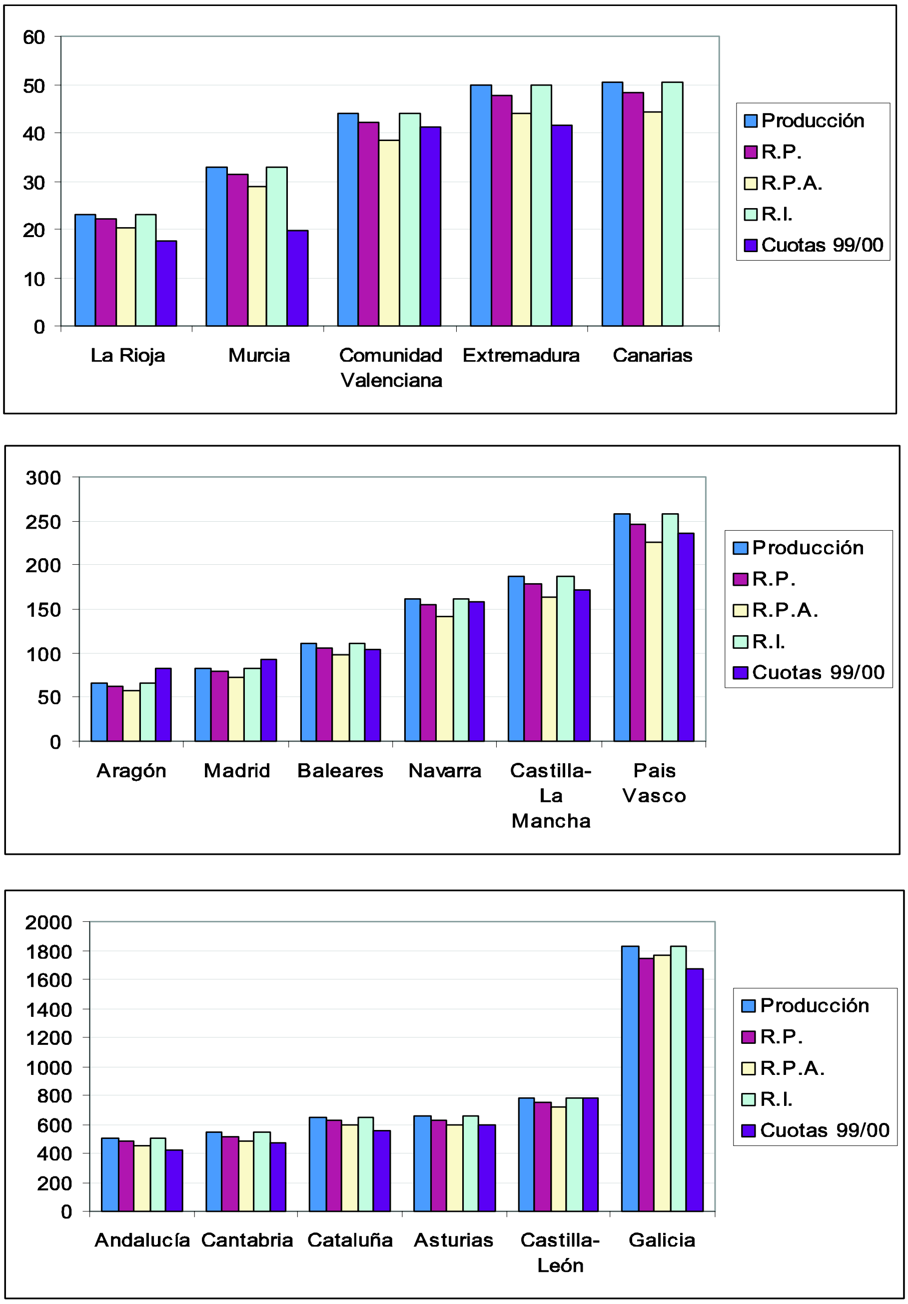
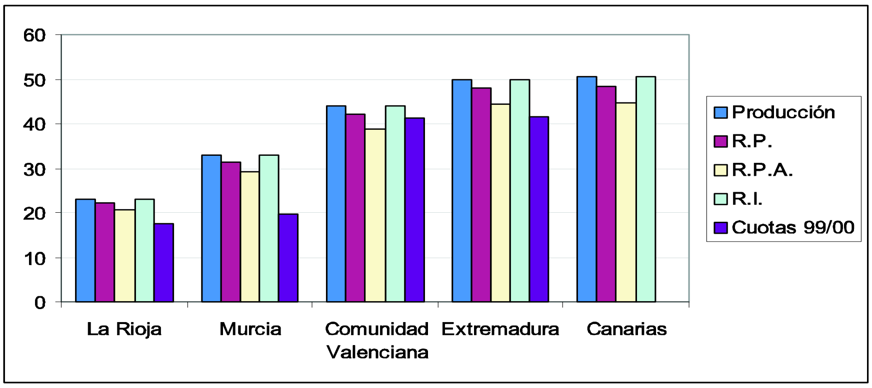
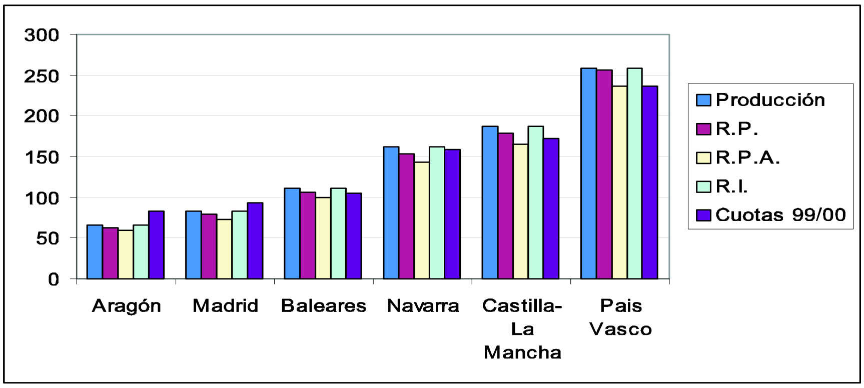


Figura 7.6: Reparto de cuotas por autonomías utilizando el procedimiento en dos etapas para extender los repartos clásicos: el proporcional, el proporcional ajustado y el igualitario restringido.





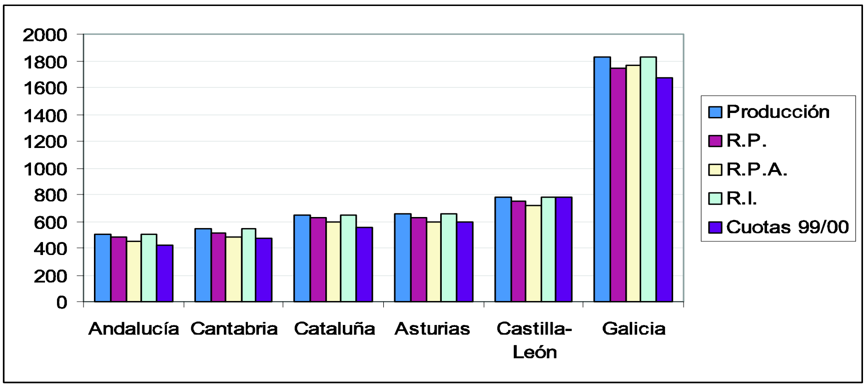


Figura 7.7: Reparto de cuotas por autonomías utilizando el procedimiento de compleción recursiva para extender los repartos clásicos: el proporcional, el proporcional ajustado y el igualitario restringido.

Bibliografía

[1] Anscombe, F.J.y Aumann, R.J. (1963) A definition of subjective probability. Annals of Mathematical Statistics 34, 199-205.

[2] Aumann, R.J. (1961) The core of a cooperative game without side payments. In: Tucker AW, Luce RD (eds.) Contributions to the Theory of Games IV. Princeton University Press, pp. 287-324.

[3] Aumann, R.J. (1967) A survey of cooperative games without side payments. In: Shubik M (ed.) Essays in Mathematical Economics. Princeton University Press, pp. 3-27.

[4] Aumann, R.J. y Maschler, M. (1985) Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud. Journal of Economic Theory 36, 195-213.

[5] Bergantiños, G. y García-Jurado, I. (1995) Estudio comparativo de diversas funciones características asociadas a un juego en forma normal. Investigaciones Económicas 19, 127-138.

[6] Borm, P. y Tijs, S.H. (1992) Strategic claim games corresponding to an NTU-game. Games and Economic Behavior 4, 58-71

[7] Calleja, P., P. Borm y R. Hendrickx (2004). Multi-issue allocation games. Aceptado para su publicación en European Journal of Operational Research.

[8] Carpente, L., Casas-Méndez, B., García-Jurado, I. y Van den Nouweland, A. (2003) Values for strategic games in which players cooperate. Aceptado para su publicación en International Journal of Game Theory.

[9] Carpente, L., Casas-Méndez, B., García-Jurado, I. y Van den Nouweland, A. (2004) The Shapley valuation function for strategic games in which players cooperate. University of Oregon Working Paper 2004-3.

[10] Casas-Méndez, B., Borm, P., Carpente, L. y Hendrickx, R. (2002) The constrained equal award rule for bankruptcy problems with a priori unions. Aceptado para su publicación en Annals of Operations Research.

[11] Casas-Méndez, B., I. García-Jurado, A. Van den Nouweland y M. Vázquez-Brage (2003). An extension of the τ-value to games with coalition structures. European Journal of Operational Research 148, 494-513.

[12] Cuadras-Morató, X., Pinto-Prades, J. y Abellán-Perpiñán, J. M. (2001). Equity considerations in health care: the relevance of claims. Health Economics 10, 187-205.

[13] Curiel, I., M. Maschler y S. Tijs (1987). Bankruptcy games. Zeitschrift fur Operations Research (Now: Mathematical Methods of Operations Research) 31, 143-159.

[14] Dagan, N. (1996). New characterizations of old bankruptcy rules. Social Choice and Welfare 13, 51-59.

[15] Driessen, T. y S. Tijs (1985). The τ-value, the core and semiconvex games. International Journal of Game Theory 14, 229-247.

[16] Gallástegui, M. C. Iñarra, E. and Prellezo, R. (2002). Bankruptcy of fishing resources. Aceptado para su publicación en Marine Resource Economics.

[17] Hamiache, G. (1999). A new axiomatization of the Owen value for games with coalition structures. Mathematical Social Sciences 37, 281-305

[18] Harsanyi, J.C. (1963) A simplified bargaining model for the n-person cooperative game. International Economic Review 4, 194-220.

[19] Harsanyi, J.C. y Selten, R. (1988) A General Theory of Equilibrium Selection in Games. MIT Press, Cambridge, MA.

[20] Hart, S., Modica, S. y Schmeidler, D. (1994) A Neo Bayesian Foundation of the Maxmin Value for Two-Person Zero-Sum Games. International Journal of Game Theory 23, 347-358.

[21] Herrero, C. y A. Villar (2002). Sustainability in bankruptcy problems. TOP 10, 261-273.

[22] Kreps, D. M. (1988) Notes on the theory of choice. West view Press.

[23] Myerson, R.B. (1978) Threat equilibria and fair settlements cooperative games. Mathematics of Operations Research 3, 265-274.

[24] Myerson, R.B. (1980) Conference structures and fair allocation rules. International Journal of Game Theory 9, 169-182.

[25] Myerson, R.B. (1991) Game theory, analysis of conflict. Harvard University Press.

[26] Norde, H. y Voorneveld, M. (2004) Axiomatizations of the value of matrix games. Mathematical Social Sciences 48, 193-206.

[27] O´Neill, B. (1982). A problem of rights arbitration from the Talmud. Mathematical Social Sciences 2, 345-371.

[28] Owen, G. (1977). Values of games with a priori unions. In: R. Henn and O. Moeschlin (Eds.), Mathematical economics and game theory, 76-88. Heidelberg: Springer-Verlag.

[29] Pinto-Prades, J. L. y Abellán-Perpiñán, J. M. (2001). Equity considerations in health care: the relevance of claims. Health Economics 10, 187-205.

[30] Shapley, L.S. (1953) A value for n-person games. Annals of Mathematics Studies 28, 307-318.

[31] Thomson, W. (2003). Axiomatic and game theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: a survey. Mathematical Social Sciences 45, 249-297.

[32] Tijs, S.H. (1981) A characterization of the value of zero-sum two-person games. Naval Research Logistics Quarterly 28, 153-156.

[33] Van Damme, E. y Furth, D. (2002) Game theory and the market. In: Borm P, Peters H (eds.) Chapters in Game Theory. Kluwer Academic Publishers, 51-81.

[34] Vilkas, E.I. (1963) Axiomatic definition of the value of a matrix game. Theory of Probability and its Applications 8, 304-307.

[35] Von Neumann, J. (1928) Zur theorie der gesellschaftsspiele. Mathematische Annalen 100, 295-320.

[36] Von Neumann, J. y Morgenstern, O. (1944) Theory of games and economic behavior. Princeton University Press

[37] Winter, E. (1992). The consistency and potential for values with coalition structures. Games and Economic Behavior 4, 132-144.

[38] Winter, E. (2002). The Shapley value. The Handbook of Game Theory, eds. R. J. Aumann and S. Hart, North-Holland.

Índice alfabético