



Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

Departamento de Matemáticas
Universidade da Coruña

Máster en Técnicas Estadísticas **Curso 2008-09**



Bibliografía básica



MAKRIDAKIS, S., WHEELWRIGHT, S.C. Y HYNDMAN, R.J. (1998).

Forecasting. Methods and Applications. 3ª edición. Wiley.



PEÑA, D. (2005).

Análisis de Series Temporales. Alianza Editorial.



Bibliografía complementaria



BERAN, J. (1994).

Statistics for Long-Memory Processes. Chapman&Hall.



BROCKWELL, P.J. Y DAVIS, R.A. (2002).

Introduction to Time Series and Forecasting. 2ª edición.
Springer.



FAN, J. Y YAO, Q. (2003).

*Nonlinear Time Series: Nonparametric and Parametric
Methods.* Springer.



SHUMWAY, R.H. Y STOFFER, D.S. (2006)

*Time Series Analysis and Its Applications. With R
Examples.* 2ª edición. Springer.



Series de Tiempo

Germán
Aneiros Pérez

Introducción

El concepto
de serie de
tiempo:
Ejemplos

Descomposición
clásica de una
serie de
tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

Part I

Análisis descriptivo de una serie de tiempo



Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

Introducción

El concepto de serie de tiempo:
Ejemplos

Descomposición clásica de una serie de tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

Introducción

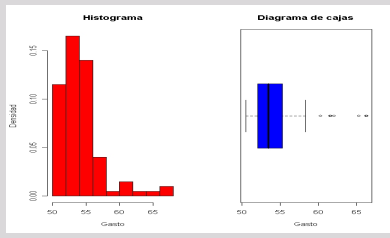
En general, el objetivo de la estadística descriptiva es el dotarnos de métodos (tanto gráficos como cuantitativos) que nos permitan resumir y extraer información de un conjunto de observaciones tomadas de una variable.

Ejemplo

X : Gasto en Nochevieja 2008

$x_1 = 56.8, \dots, x_{100} = 53.7$

- $\bar{x} = 54.2$
- $Me = 53.4$
- $s = 3.2$





Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

Introducción

El concepto de serie de tiempo:
Ejemplos

Descomposición clásica de una serie de tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

Introducción

En el contexto particular de las series de tiempo, las observaciones son tomadas a lo largo del tiempo.

La estadística descriptiva tratará entonces de dotarnos de métodos básicos que nos permitan comprender la **evolución** de las observaciones a lo largo del tiempo.

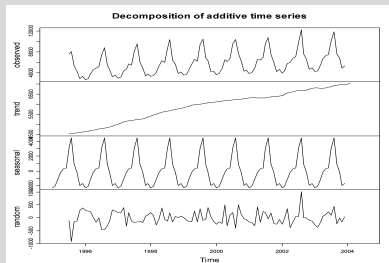
Ejemplo

X_t : N° de turistas el mes t

$$x_1 = 2698170$$

\vdots

$$x_{116} = 1179677$$





Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de
Tiempo

Germán
Aneiros Pérez

Introducción

El concepto
de serie de
tiempo:
Ejemplos

Descomposición
clásica de una
serie de
tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

El concepto de serie de tiempo: Ejemplos

Una **serie de tiempo** es el resultado de observar los valores de una variable X a lo largo del tiempo. Por ejemplo:

- X : "Temperatura media en A Coruña"
Frecuencia de observación: mensual
Serie de tiempo: 11.5, 11.1, 11.7, 13.2, 14.7, ...
- X : ("Euríbor" , "Cotización del barril de crudo")
Frecuencia de observación: diaria
Serie de tiempo: (4.32 , 87.95), (4.33 , 88.40), ...

Nos restringiremos a variables unidimensionales, y por tanto trataremos con series de tiempo univariantes.



Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de
Tiempo

Germán
Aneiros Pérez

Introducción

El concepto
de serie de
tiempo:
Ejemplos

Descomposición
clásica de una
serie de
tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

El concepto de serie de tiempo: Ejemplos

Las observaciones las tomaremos en intervalos regulares de tiempo (cada hora, cada día, cada mes, ...).

Sin pérdida de generalidad, supondremos que la variable X ha sido observada en los instantes $1, 2, \dots, T$.

La serie de tiempo observada de la variable X será representada por x_1, x_2, \dots, x_T .

Así, en el ejemplo referente a la variable X : "Temperatura media en A Coruña", tendríamos que:

$$x_1 = 11.5, x_2 = 11.1, x_3 = 11.7, x_4 = 13.2, x_5 = 14.7, \dots$$



Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

Introducción

El concepto de serie de tiempo: Ejemplos

Descomposición clásica de una serie de tiempo: Ejemplos

Recapitulación

El concepto de serie de tiempo: Ejemplos

Ante una serie de tiempo, lo primero que se debe hacer es representar su **gráfico de secuencia**; esto es, representar gráficamente cada observación x_t frente al instante t en que se observa, y luego unir con segmentos cada uno de los T puntos.

El gráfico de secuencia nos permitirá observar cómo evoluciona la serie a lo largo del tiempo; específicamente, podremos ver las principales características de la serie de tiempo:

- Posible presencia de **tendencia**: comportamiento a largo plazo de la serie.
- Posible presencia de **estacionalidad**: comportamiento periódico de la serie.
- Posible presencia de **heterocedasticidad**: la variabilidad de la serie depende de su nivel.



Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

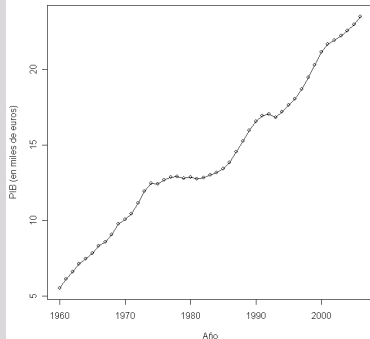
Introducción

El concepto de serie de tiempo:
Ejemplos

Descomposición clásica de una serie de tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

Producto interior bruto per capita (PIB)



Información sobre la serie

Lugar: España

Frecuencia de observ.: Anual

Cantidad de observaciones: 47
(1960-2006)

La serie presenta tendencia



Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de
Tiempo

Germán
Aneiros Pérez

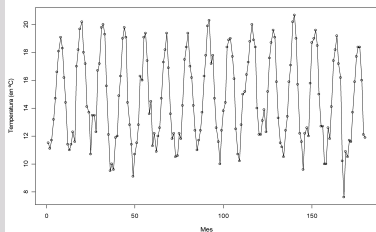
Introducción

El concepto
de serie de
tiempo:
Ejemplos

Descomposición
clásica de una
serie de
tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

Temperatura media



Información sobre la serie

Lugar: A Coruña

Frecuencia de observ.: Mensual

Cantidad de observaciones: 180
(enero 1988-diciembre 2002)

La serie presenta componente
estacional



Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

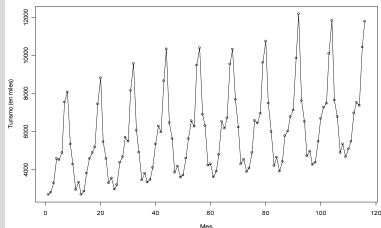
Introducción

El concepto de serie de tiempo: Ejemplos

Descomposición clásica de una serie de tiempo: Ejemplos

Recapitulación

Turismo



Información sobre la serie

Lugar: España

Frecuencia de observ.: Mensual

Cantidad de observaciones: 116
(enero 1995-agosto 2004)

La serie presenta tendencia y componente estacional



Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

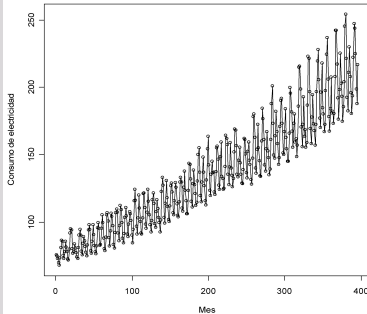
Introducción

El concepto de serie de tiempo: Ejemplos

Descomposición clásica de una serie de tiempo: Ejemplos

Recapitulación

Consumo de electricidad



Información sobre la serie

Lugar: EE.UU.

Frecuencia de observ.: Mensual

Cantidad de observaciones: 396
(enero 1972-diciembre 2004)

La serie presenta tendencia, componente estacional y heterocedasticidad



Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

Introducción

El concepto de serie de tiempo:
Ejemplos

Descomposición clásica de una serie de tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

Descomposición clásica de una serie de tiempo: Ejemplos

Objetivo: construir un modelo que describa de una manera sencilla la **evolución de la serie a través del tiempo**.

Para ello, se asume que los datos x_t pueden expresarse como una función de una componente de **tendencia T_t** , de una componente **estacional S_t** y de un **error a_t** :

- T_t modeliza el comportamiento a largo plazo de la serie.
- S_t modeliza el comportamiento periódico de la serie.
- a_t está formado por el efecto de diversos factores de poca importancia y que a menudo desconocemos. Representa a la parte impredecible de la serie.



Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de
Tiempo

Germán
Aneiros Pérez

Introducción

El concepto
de serie de
tiempo:
Ejemplos

Descomposición
clásica de una
serie de
tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

Descomposición clásica de una serie de tiempo: Ejemplos

Los modelos que se utilizan con más frecuencia son:

- **Modelo aditivo:** $x_t = T_t + S_t + a_t$
- **Modelos multiplicativos:**
 - **Puro:** $x_t = T_t \times S_t \times a_t$
 - **Mixto:** $x_t = T_t \times S_t + a_t$

La elección de uno de estos modelos se hará de manera que el modelo seleccionado sea capaz de aglutinar la principales características (observadas en el gráfico de secuencia) de la serie en estudio.



Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

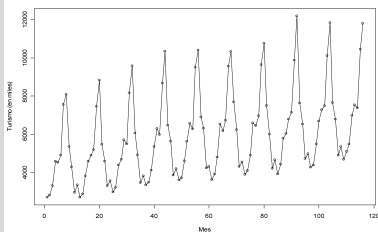
Introducción

El concepto de serie de tiempo:
Ejemplos

Descomposición clásica de una serie de tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

Turismo



Algunas descomposiciones

Modelo aditivo:

$$x_t = T_t + S_t + a_t$$

Este modelo es apropiado cuando la magnitud de las fluctuaciones estacionales de la serie no varía al hacerle la tendencia.



Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de
Tiempo

Germán
Aneiros Pérez

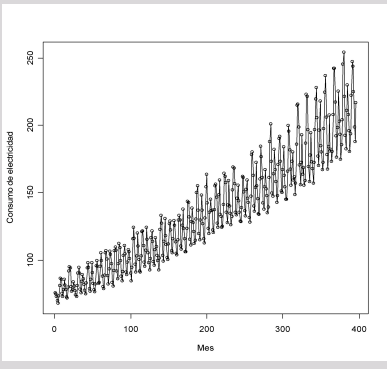
Introducción

El concepto
de serie de
tiempo:
Ejemplos

Descomposición
clásica de una
serie de
tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

Consumo de electricidad



Algunas descomposiciones

Modelos multiplicativos:

- **Puro:** $x_t = T_t \times S_t \times a_t$
- **Mixto:** $x_t = T_t \times S_t + a_t$

Estos modelos son apropiados cuando la magnitud de las fluctuaciones estacionales de la serie crece y decrece proporcionalmente con los crecimientos y decrecimientos de la tendencia, respect.



Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de
Tiempo

Germán
Aneiros Pérez

Introducción

El concepto
de serie de
tiempo:
Ejemplos

Descomposición
clásica de una
serie de
tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

Descomposición clásica de una serie de tiempo: Ejemplos

Una vez seleccionado un modelo para describir a nuestra serie de tiempo, el siguiente paso será **calcular/aproximar/aislar** la tendencia T_t y su componente estacional S_t a partir de x_t (el error a_t se obtiene directamente de éstos).

En cuanto a la componente estacional, si denotamos al **periodo** de la serie por s , entonces $S_t = S_{t-s}$. Por tanto, para conocer la componente estacional S_t ($t = 1, \dots, T$) es suficiente conocer s de sus valores consecutivos (en el tiempo). Por ejemplo, basta con conocer los valores S_1, \dots, S_s , los cuales se denominan **índices estacionales**.

Se tiene que $S_{t+1} + \dots + S_{t+s} = S_1 + \dots + S_s = cte$.



Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de
Tiempo

Germán
Aneiros Pérez

Introducción

El concepto
de serie de
tiempo:
Ejemplos

Descomposición
clásica de una
serie de
tiempo:
Ejemplos

Resumen

Descomposición clásica de una serie de tiempo: Ejemplos

En esencia, existen dos métodos para **aislar** la tendencia y la componente estacional de una serie de tiempo:

- **Método paramétrico:** Se basa en
 - Proponer modelos paramétricos para expresar la relación que guardan la tendencia y la componente estacional con el tiempo.
 - Ajustar dichos modelos a la serie de tiempo (por ejemplo, a través del método de mínimos cuadrados).
 - Aislar la tendencia y la componente estacional por medio de los modelos ajustados.



Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de
Tiempo

Germán
Aneiros Pérez

Introducción

El concepto
de serie de
tiempo:
Ejemplos

Descomposición
clásica de una
serie de
tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

Descomposición clásica de una serie de tiempo: Ejemplos

- **Método no paramétrico:** Se basa en
 - Asumir "suavidad" en la relación que guardan la tendencia y la componente estacional con el tiempo.
 - Aislar la tendencia y la componente estacional a través de la suavización del gráfico de secuencia (aplicando, por ejemplo, **filtros de medias móviles**).

Nota: Aplicar a la serie $\{x_t\}$ el filtro de medias móviles con coeficientes $[b_{-k}, \dots, b_{-1}, b_0, b_1, \dots, b_k]$ consiste en obtener los valores

$$\hat{x}_t = b_{-k}x_{t-k} + \dots + b_{-1}x_{t-1} + b_0x_t + b_1x_{t+1} + \dots + b_kx_{t+k}$$

Nosotros nos centraremos en el método no paramétrico que suaviza a través a filtros de medias móviles.



Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de
Tiempo

Germán
Aneiros Pérez

Introducción

El concepto
de serie de
tiempo:
Ejemplos

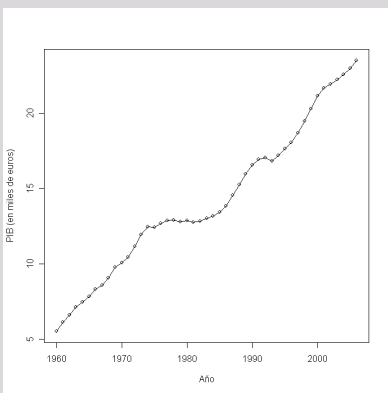
Descomposición
clásica de una
serie de
tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

SUAVIZACIÓN A TRAVÉS DE MEDIAS MÓVILES

Serie con tendencia y sin componente estacional

PIB



Modelo: $x_t = T_t + a_t$

Suavizador en t :

$$\hat{T}_t = \frac{\sum_{j=-k}^k x_{t+j}}{2k+1}$$

Ejemplo: Si $k=2$, la tendencia en $t=6$ sería aproximada por

$$\hat{T}_6 = \frac{x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8}{5}$$



Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de
Tiempo

Germán
Aneiros Pérez

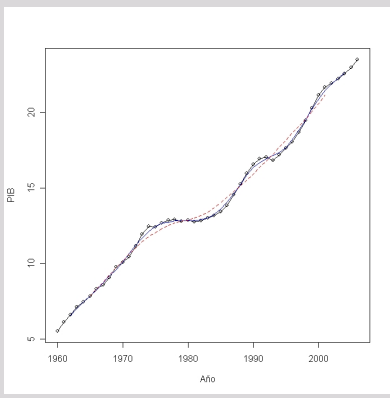
Introducción

El concepto
de serie de
tiempo:
Ejemplos

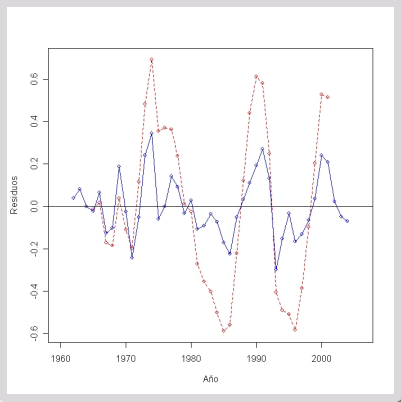
Descomposición
clásica de una
serie de
tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

PIB y dos suavizaciones ($k = 2$
y $k = 5$)



Residuos





Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de
Tiempo

Germán
Aneiros Pérez

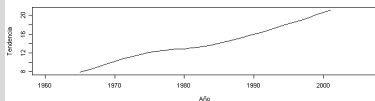
Introducción

El concepto
de serie de
tiempo:
Ejemplos

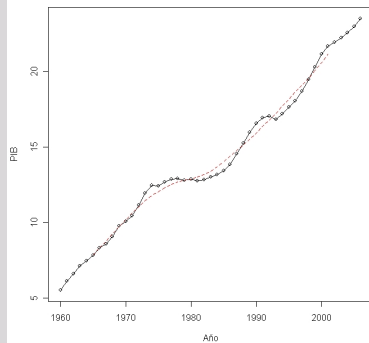
Descomposición
clásica de una
serie de
tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

Descomposición ($k = 5$)



PIB y suavización





Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de
Tiempo

Germán
Aneiros Pérez

Introducción

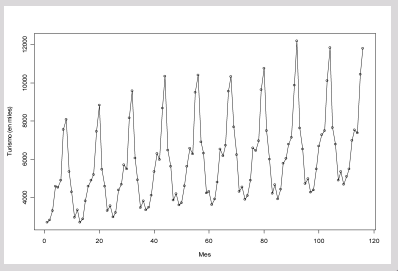
El concepto
de serie de
tiempo:
Ejemplos

Descomposición
clásica de una
serie de
tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

Serie con tendencia y componente estacional

Turismo



Modelo: $x_t = T_t + S_t + a_t$

- 1 Asumimos que $S_1 + \dots + S_s = 0$
- 2 Obtenemos la tendencia \hat{T}_t (filtro de medias móviles).
- 3 Construimos la nueva serie $x_t - \hat{T}_t$.
- 4 Obtenemos, a partir de la nueva serie, los índices estacionales \hat{S}_k (filtro de medias móviles).



Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de
Tiempo

Germán
Aneiros Pérez

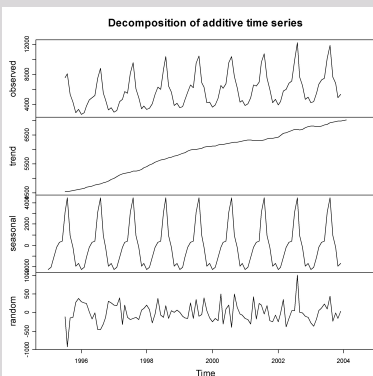
Introducción

El concepto
de serie de
tiempo:
Ejemplos

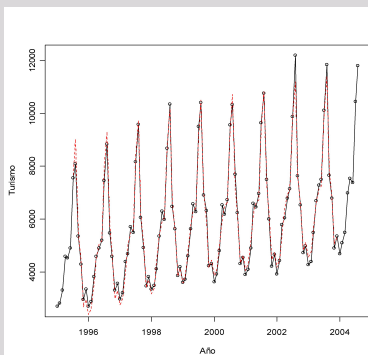
Descomposición
clásica de una
serie de
tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

Descomposición



Turismo y suavización





Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de
Tiempo

Germán
Aneiros Pérez

Introducción

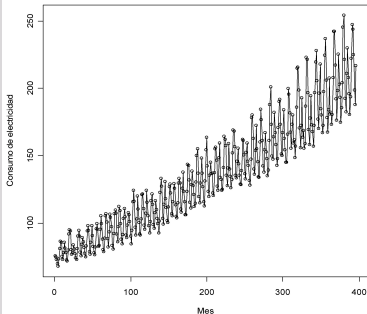
El concepto
de serie de
tiempo:
Ejemplos

Descomposición
clásica de una
serie de
tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

Serie con tendencia, componente estacional y heterocedasticidad

Consumo de electricidad



Modelo: $x_t = T_t \times S_t + a_t$

- 1 Asumimos que $S_1 + \dots + S_s = s$
- 2 Obtenemos la tendencia \hat{T}_t (filtro de medias móviles).
- 3 Construimos la nueva serie x_t / \hat{T}_t .
- 4 Obtenemos, a partir de la nueva serie, los índices estacionales \hat{S}_k (filtro de medias móviles).



Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de
Tiempo

Germán
Aneiros Pérez

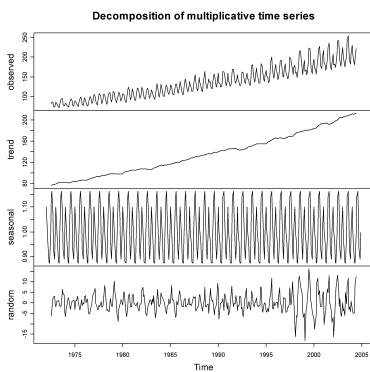
Introducción

El concepto
de serie de
tiempo:
Ejemplos

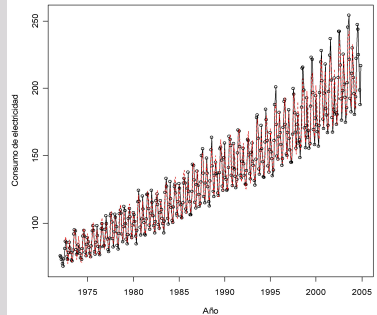
Descomposición
clásica de una
serie de
tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

Descomposición



Consumo de electricidad y suavización





Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de
Tiempo

Germán
Aneiros Pérez

Introducción

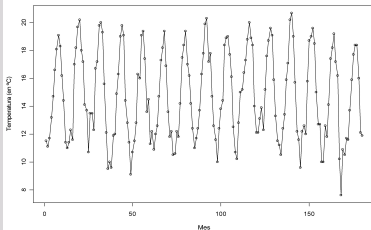
El concepto
de serie de
tiempo:
Ejemplos

Descomposición
clásica de una
serie de
tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

¿Cómo tratar una serie que contenga componente estacional pero que, aparentemente, no tenga tendencia?

Temperatura



Modelo: $x_t = \hat{T}_t + S_t + a_t$

Trataremos la serie como si tuviese tendencia.

- Si realmente no la tiene, el suavizador de medias móviles dará lugar a un tendencia prácticamente constante.
- Si realmente la tiene, estaríamos en una situación que ya hemos tratado.



Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de
Tiempo

Germán
Aneiros Pérez

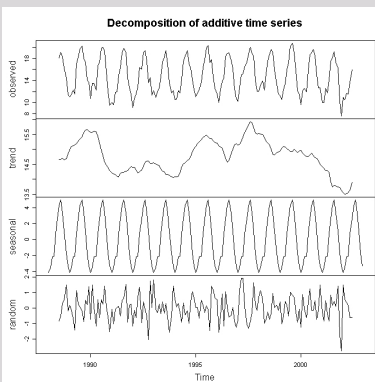
Introducción

El concepto
de serie de
tiempo:
Ejemplos

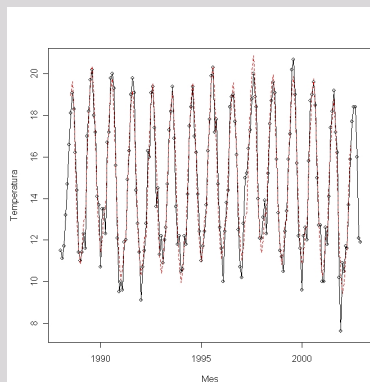
Descomposición
clásica de una
serie de
tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

Descomposición



Temperatura y suavización





Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de
Tiempo

Germán
Aneiros Pérez

Introducción

El concepto
de serie de
tiempo:
Ejemplos

Descomposición
clásica de una
serie de
tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

A continuación, formalizamos lo que se ha hecho en la suavización de series con componente estacional.

Tendencia: Suavizador de medias móviles

Suavizador en t : \hat{T}_t

- Si s es **impar**, se calcula la tendencia en t a través del suavizador de medias móviles:

$$\frac{x_{t-(s-1)/2} + \cdots + x_{t-1} + x_t + x_{t+1} + \cdots + x_{t+(s-1)/2}}{s}$$

- Si s es **par**, se calcula la tendencia en t a través del suavizador de medias móviles ponderado:

$$\frac{0.5x_{t-s/2} + x_{t-s/2+1} + \cdots + x_t + \cdots + x_{t+s/2-1} + 0.5x_{t+s/2}}{s}$$



Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de
Tiempo

Germán
Aneiros Pérez

Introducción

El concepto
de serie de
tiempo:
Ejemplos

Descomposición
clásica de una
serie de
tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

Componente estacional: Suavizador de medias móviles

- **Descomposición aditiva:** La tendencia es sustraída de la serie, dando lugar a la serie sin tendencia y con componente estacional $x_t - \hat{T}_t = S_t + a_t$.
- **Descomposición multiplicativa:** La serie es dividida por la tendencia, dando lugar a la serie sin tendencia y con componente estacional $\frac{x_t}{\hat{T}_t} = S_t \times a_t$ ó $\frac{x_t}{\hat{T}_t} = S_t + \frac{a_t}{\hat{T}_t}$, dependiendo de si la descomposición multiplicativa es pura o mixta, respectivamente.
- Al aplicar un suavizador de medias móviles (estacional) a la serie sin tendencia, se obtienen sus índices estacionales. El resultado de sustraerles su media (dividirlos entre su media, en el caso de los modelos multiplicativos) da lugar a los índices estacionales de la serie original.



Análisis descriptivo de una serie de tiempo

Series de Tiempo

Germán Aneiros Pérez

Introducción

El concepto de serie de tiempo:
Ejemplos

Descomposición clásica de una serie de tiempo:
Ejemplos

Recapitulación

Recapitulación

A lo largo de este tema:

- Se ha definido el concepto de **serie tiempo**.
- Se ha establecido la base de la **descomposición clásica** de una serie de tiempo:
"La serie de tiempo puede expresarse como una función de una **tendencia**, una **componente estacional** y un **error**"
- Se han propuesto dos métodos para **aislar** cada componente de la descomposición clásica de una serie de tiempo:
 - 1 Método paramétrico.
 - 2 Método no paramétrico.