

**EJEMPLO 1.**

Los siguientes datos muestran las medidas de hemoglobina (gramos por 100 ml) en la sangre de 40 ejemplares de una especie de truchas marrones. Las truchas se habían dividido al azar en cuatro grupos de 10 y cada grupo se había asignado, también al azar, a una de cuatro diferentes dependencias de una piscifactoría. En cada criadero se añadía a la dieta de los peces una cantidad distinta de sulfamerazina por cada cien libras de comida. En concreto: 0, 5, 10 y 15 gramos (codificados del 1 al 4). Las mediciones de hemoglobina se tomaron dependencia después de 35 días.

<i>Dependencia</i>	<i>Hemoglobina en sangre (gramos por 100 ml)</i>									
<i>1</i>	6,7	7,8	5,5	8,4	7,0	7,8	8,6	7,4	5,8	7,0
<i>2</i>	9,9	8,4	10,4	9,3	10,7	11,9	7,1	6,4	8,6	10,6
<i>3</i>	10,4	8,1	10,6	8,7	10,7	9,1	8,8	8,1	7,8	8,0
<i>4</i>	9,9	9,3	7,2	7,8	9,3	10,2	8,7	8,6	9,3	7,2

**1.1. Entrada de datos.**

Una columna contendrá siempre los valores de la variable dependiente o respuesta (*Y*), variable cuantitativa cuyos promedios en los diferentes grupos del diseño se desean comparar.

Cada factor tratamiento (y análogamente cada factor de bloqueo) tendrá su propia columna en la que se registrarán sus niveles o tratamientos, preferiblemente codificados.

De este modo cada fila de la hoja de datos representará los valores para una unidad experimental: en una columna figurará la respuesta y en cada una de las otras los niveles de los factores en los que se obtuvo esa respuesta.

En el ejemplo hemos denominado *respuest* a la columna con los valores de hemoglobina en sangre (variable dependiente) y *tratam* a la columna con los niveles del factor tratamiento (cantidad de sulfamerazina). Estos niveles se han codificado: 0 grs.= 1, 5 grs.= 2, 10 grs.= 3 y 15 grs.= 4.

En el caso de un diseño aleatorizado es conveniente crear una columna a mayores donde registrar el orden de cada caso.

**1.2. Análisis de la varianza para un único factor tratamiento.****1.2.1. ANOVA de un factor: Especificaciones por defecto.**

Cuando se trata de un único factor tratamiento, el Análisis de la Varianza (ANOVA) se puede realizar en (ver Figura 1.1):

❖ **Analizar > Comparar medias > ANOVA de un factor ...**

En el cuadro de diálogo **ANOVA de un factor** se introducirá la variable *respuest* en el campo **Dependientes:** y *tratam* en el campo **Factor:** (ver Figura 1.2).

En el supuesto de introducir más de una variable en el campo **Dependientes:** se obtendría un análisis de la varianza para cada una de las variables introducidas.

Figura 1.1

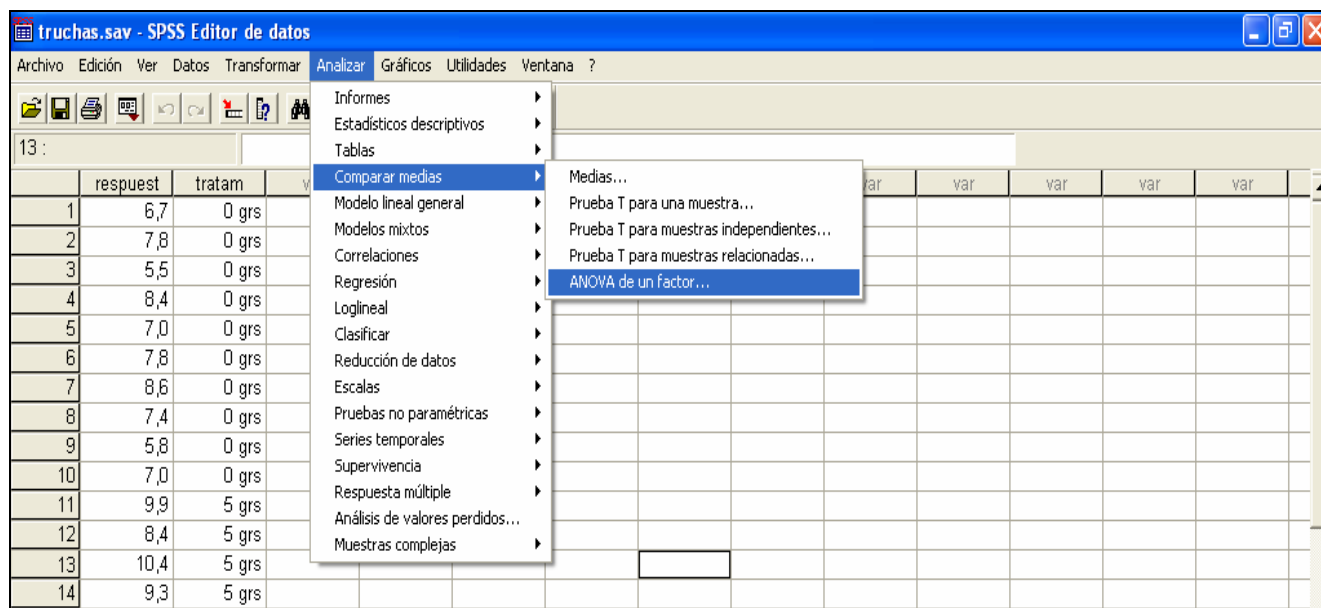
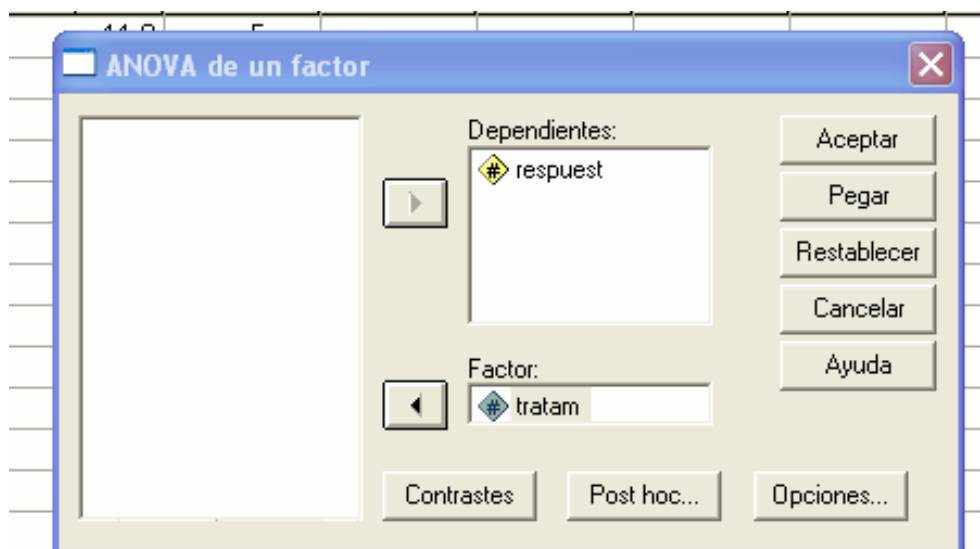


Figura 1.2



Por defecto, esto es ejecutando **Aceptar** sin modificar ninguna otra opción., el SPSS proporcionará el ANOVA tal y como se muestra en la Tabla 1.1.

Tabla 1.1

**ANOVA**

Hemoglobina (grs por 100 ml)

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	26,803	3	8,934	5,696	,003
Intra-grupos	56,471	36	1,569		
Total	83,274	39			

La primera columna se refiere a las fuentes de variación. Por **Inter-grupos** se entenderá variabilidad entre grupos o explicada por el modelo de una vía (en este caso diferencias en las cantidades promedio de hemoglobina achacables a las 4 diferentes cantidades de sulfamerazina empleadas). Por **Intra-grupos** se entenderá variabilidad residual o no explicada por el modelo. Por **Total** variabilidad respecto de la media total computada con todos los datos con independencia del nivel del factor tratamiento.

El cociente F ha resultado en este ejemplo 5,696 que, en una F con 3 y 36 grados de libertad, deja a su derecha una cola de probabilidad 0,003 (nivel crítico o p-valor del contraste ANOVA).

Resulta por tanto un contraste significativo a niveles de significación habituales (0,01, 0,05 o 0,10) y se rechaza la hipótesis de igualdad en los niveles medios de hemoglobina en sangre con las cuatro cantidades de sulfamerazina estudiadas.

**Cuestión 1:** ¿Cuánto vale el coeficiente de determinación del modelo? ¿Te parece alto o bajo? ¿Genera una interpretación contradictoria con la conclusión de rechazo del F-test?

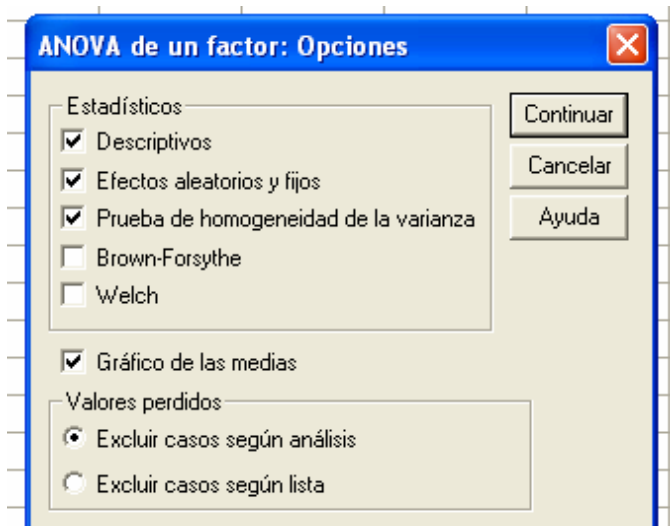
### 1.2.2. ANOVA de un factor: Más herramientas.

El cuadro de diálogo de **ANOVA de un factor** (Figura 1.2) permite comprobar la existencia de has tres botones con más herramientas de análisis: **Contrastes**, **Post hoc...** y **Opciones**.

#### ❖ ANOVA de un factor > Opciones

Conduce al subcuadro de diálogo que se muestra en la Figura 1.3, donde ya han sido marcados los campos que incluyen herramientas tratadas en la asignatura.

Figura 1.3



A continuación se describen brevemente los diferentes campos del subcuadro:

- **Descriptivos.** Proporciona estadísticos descriptivos básicos e intervalos de confianza para las medias de las respuestas obtenidas con cada nivel del factor tratamiento y en global.

- **Efectos aleatorios y fijos.** Al marcar este campo, el SPSS proporcionará estadísticos de interés para dos supuestos diferentes: que los niveles del factor sean de efectos fijos o de efectos aleatorios.

Si se trata de efectos fijos es de interés, una vez estimadas las medias de cada grupo, conocer el error estándar del modelo estimado. Obviamente este valor coincide con la raíz cuadrada de la suma de cuadrados residual promediada (intra-grupos). El SPSS proporciona este valor y además el intervalo de confianza para la media global construido con este error estándar.

Si se trata de efectos aleatorios entonces las medias estimadas para cada grupo son irrelevantes pero sigue siendo de interés conocer el error estándar del modelo estimado (de hecho esto es siempre de interés en cualquier procedimiento de modelización estadística). En este caso, la varianza del modelo es la suma de dos componentes: la varianza residual y la varianza de la población estadística formada por los niveles del factor. El SPSS proporciona, igual que para efectos fijos, el error estándar de la respuesta y un intervalo de confianza para la media del modelo construido con este error estándar y, además, una estimación de la varianza de la población de niveles del factor tratamiento.

La Tabla 1.2 muestra la salida del SPSS cuando se han marcado estos dos campos.

**Tabla 1.2**

**Descriptivos**

Hemoglobina (grs por 100 ml)

	N	Media	Desv. típica	Error típico	Intervalo de confianza para la media al 95%		Mín.	Máx.	Varianza entre componentes
					Límite inferior	Límite superior			
0 grs	10	7,200	1,0187	,3221	6,471	7,929	5,5	8,6	
5 grs	10	9,330	1,7166	,5428	8,102	10,558	6,4	11,9	
10 grs	10	9,030	1,1353	,3590	8,218	9,842	7,8	10,7	
15 grs	10	8,690	1,0005	,3164	7,974	9,406	7,2	10,2	
Total	40	8,563	1,4612	,2310	8,095	9,030	5,5	11,9	
Modelo									
Efectos fijos			1,2525	,1980	8,161	8,964			
Efectos aleatorios				,4726	7,058	10,067			,7366

**Cuestión 2:** Supuesto un modelos de efectos fijos, ¿qué diferentes caminos ha seguido el SPSS para arrojar dos estimaciones distintas de la desviación típica del modelo: 1,4612 y 1,2525? ¿Cuál es la estimación más fiable y bajo qué premisas?

**Cuestión 3:** ¿Por qué ha crecido el error típico de la media global en el modelo de efectos aleatorios con respecto al modelo de efectos fijos?

**Cuestión 4:** ¿Tiene sentido proporcionar en el modelo de efectos aleatorios un intervalo de confianza para la media global de las respuestas?

- **Prueba de homogeneidad de la varianza.** Se realiza la prueba de Levene al objeto de contrastar la hipótesis nula de varianzas iguales en todos los grupos (test de homoscedasticidad). Prueba importante especialmente en el supuesto de diseños no aleatorizados y no balanceados.

En el ejemplo la prueba de homoscedasticidad conduce a un resultado no significativo al 5% según se muestra en la Tabla 1.3:

Tabla 1.3

**Prueba de homogeneidad de varianzas**

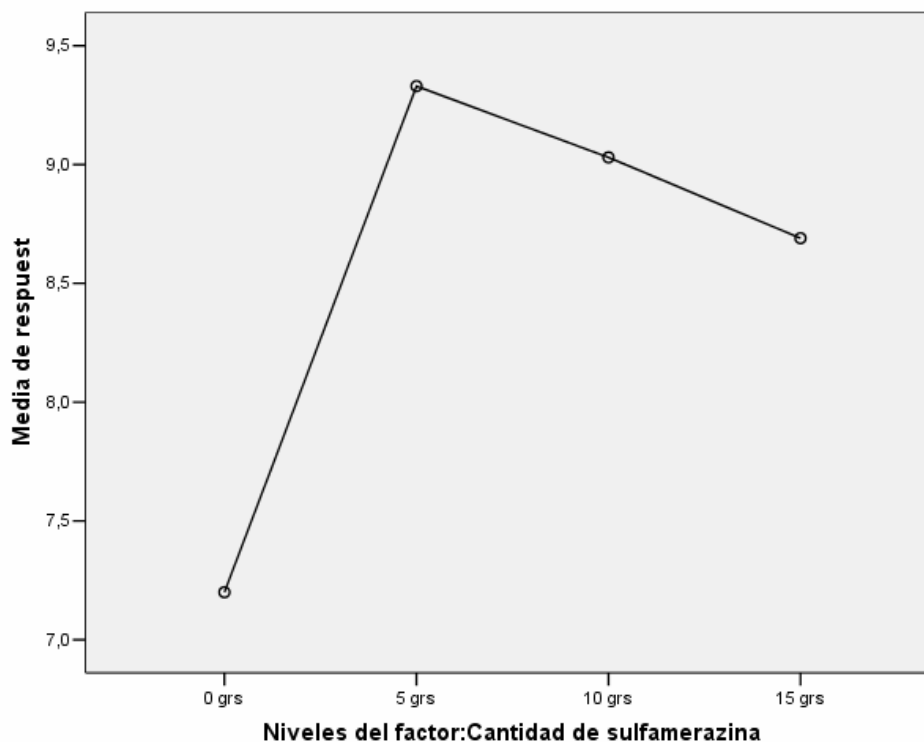
Hemoglobina (grs por 100 ml)

Estadístico de Levene	gl1	gl2	Sig.
1,635	3	36	,198

Los estadísticos de Brown-Forsythe y de Welch suponen alternativas robustas al F-test para el caso en que se rechaza la hipótesis de homoscedasticidad. En ambos casos la distribución (bajo la nula de igualdad de medias) es una F pero con grados de libertad adecuadamente corregidos.

- **Gráfico de las medias.** Gráfico de líneas que ubica en abscisas los códigos de los niveles del factor tratamiento y en ordenadas los valores de los promedios observados para cada nivel (ver Figura 1.4).

Figura 1.4.



El gráfico de medias sugiere un fuerte crecimiento del contenido medio de hemoglobina en sangre al pasar de 0 grs. a 5 grs. de sulfamerazina. Cantidades superiores de sulfamerazina conducen a un efecto contrario, mostrando el gráfico un perfil de suave descenso (¿significativo?).

Dos cuestiones parecen de interés: (i) ¿diferencias no significativas para niveles altos de sulfamerazina?, (ii) ¿relación cuadrática entre los niveles medios de hemoglobina respecto a la cantidad de sulfamerazina?

Para profundizar en ellas exploraremos el resto de herramientas.

❖ **ANOVA de un factor > Contrastes**

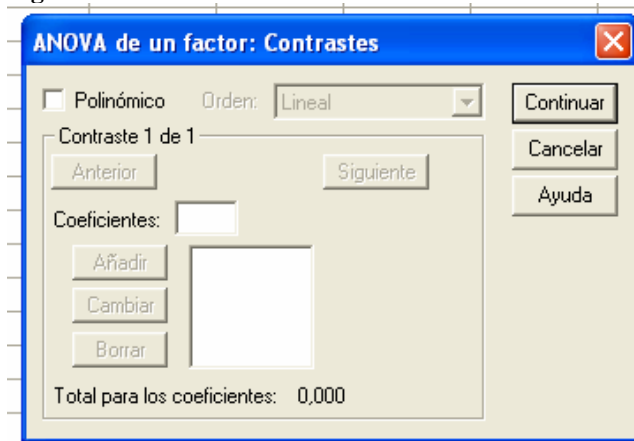
Permite realizar inferencia sobre “contrastes” personalizados, entendiendo por “contraste” el valor desconocido de una combinación lineal específica de los efectos de los niveles del factor tratamiento, donde los coeficientes de dicha combinación suman 0:

$$\theta = \sum_i \alpha_i \tau_i \quad \text{con} \quad \sum_i \alpha_i = 0$$

Como ya ha sido descrito en las sesiones de teoría, estos contrastes engloban los contrastes dos a dos (pairwise), los contrastes ortogonales de tendencia polinómica, los contrastes frente a un control, los contrastes de interacción,...

El cuadro de diálogo emergente al presionar el botón **Contrastes** es el que se muestra en la Figura 1.5.

**Figura 1.5**



Existen ahora hasta dos opciones:

- Seleccionar un contraste de tendencia polinómica (lineal, cuadrático, cúbico, ...) que, en cualquier caso, será de orden igual o inferior a  $I-1$  (grados de libertad de la suma de cuadrados intra-grupos), siendo  $I$  el número de niveles del factor tratamiento.

Esta opción sólo tiene sentido cuando el factor tratamiento es cuantitativo y sus niveles representan valores concretos del mismo (generalmente equiespaciados aunque el SPSS tiene en cuenta esto para construir los contrastes). Si los grupos no tienen el mismo tamaño el SPSS presenta una solución ponderada (para conseguir pruebas ortogonales) con correcciones apropiadas sobre los tamaños muestrales.

- Seleccionar contrastes personalizados mediante la introducción de los valores de los coeficientes  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_I)$  deseados.

El orden en que se introducen los coeficientes se corresponde con el orden ascendente de los códigos de los niveles del factor tratamiento (el primer coeficiente corresponde al nivel con el código menor). Es posible definir hasta 10 contrastes diferentes con un máximo de 50 coeficientes por contraste. El procedimiento es elemental. Para introducir el primer contraste:

1. Introducir el primer coeficiente en el cuadro de texto **Coeficientes** y a continuación pulsar **Añadir** (se trasladará a la lista de la parte inferior).
2. Repetir el paso anterior para todos los coeficientes (siempre un número igual al de tratamientos, añadiendo ceros si es preciso).
3. Utilizar **Cambiar** y **Borrar** para modificar y eliminar los coeficientes introducidos.

Para introducir un nuevo contraste pulsar **Siguiente** en **Contraste 1 de 1**.

A modo de ejemplo, la Figura 1.6 muestra como solicitar un contraste polinómico de grado 2 en el problema de las truchas y la correspondiente salida en el Visor de Resultados se muestra en la Tabla 1.4.

Figura 1.6

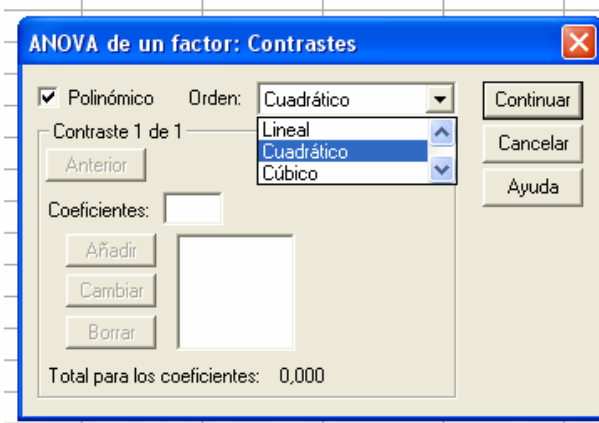


Tabla 1.4

ANOVA

Hemoglobina (grs por 100 ml)				Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	(Combinados)			26,803	3	8,934	5,696	,003
	Término lineal	Contraste		8,694	1	8,694	5,543	,024
		Desviación		18,108	2	9,054	5,772	,007
	Término cuadrático	Contraste		15,252	1	15,252	9,723	,004
		Desviación		2,856	1	2,856	1,821	,186
Intra-grupos				56,471	36	1,569		
Total				83,274	39			

Si se analiza la Tabla 1.4 obviando los bloques intermedios (**Término lineal** y **Término cuadrático**), se observa el cuadro ANOVA para el problema inicial (comparar con Tabla 1.1). Las diferencias entre medias explican una variabilidad igual a 26,803 (de un total de 83,274) con tres (I-1) grados de libertad. Esa variabilidad se puede descomponer en la suma de tres contrastes ortogonales (independientes), cada uno de ellos con un grado de libertad: el contraste de tendencia lineal, el de tendencia cuadrática y el de tendencia cúbica. La Tabla 1.4 nos muestra que parte es explicada por cada uno de ellos y simultáneamente nos informa de cuáles son significativos. En este caso no aparece el cúbico porque no se ha solicitado. Así, el bloque denominado **Término lineal** se refiere al resultado de contrastar la linealidad de las medias de hemoglobina en sangre respecto a la cantidad de sulfamerazina en la dieta. Se observa que explica un total de 8,694 (sobre 26,803 que explican los niveles en total). El resto, 18,108 (**Desviación**) es achacable a los contrastes cuadrático y cúbico (cada uno de ellos también con un grado de libertad). De hecho, el contraste cuadrático (**Término cuadrático**) explica un total de 15,252. Ambos son significativos a un 5% si bien el nivel crítico más pequeño corresponde al contraste cuadrático tal y como se intuía del gráfico de medias.

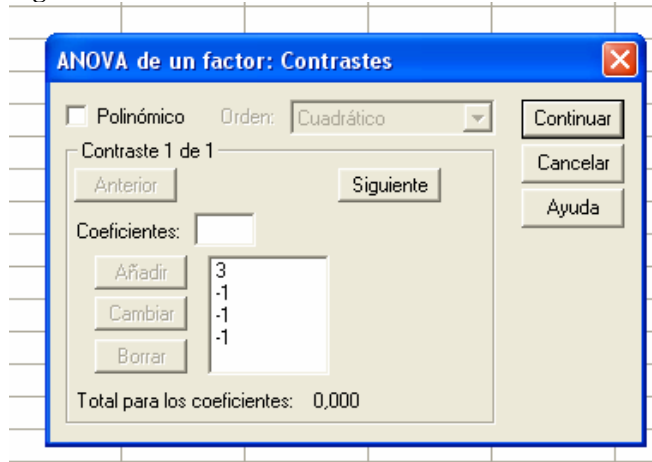
**Cuestión 5:** ¿Tiene sentido que ambos contrastes (lineal y cuadrático) resulten significativos?

Si interesase testar que la cantidad de hemoglobina en sangre difiere cuando se introduce sulfamerazina en la dieta, cabría plantear el contraste:

$$H_0 : \tau_1 - 1/3(\tau_2 + \tau_3 + \tau_4) = 0 \text{ frente a } H_1 : \tau_1 - 1/3(\tau_2 + \tau_3 + \tau_4) \neq 0$$

que indicaríamos al SPSS como se muestra en la Figura 1.7.

Figura 1.7



La correspondiente salida en el Visor de Resultados se reproduce en la Tabla 1.5.

Tabla 1.5

**ANOVA**

Hemoglobina (grs por 100 ml)

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	26,803	3	8,934	5,696	,003
Intra-grupos	56,471	36	1,569		
Total	83,274	39			

**Coefficientes de los contrastes**

Contraste	Niveles del factor: Cantidad de sulfamerazina			
	0 grs	5 grs	10 grs	15 grs
1	3	-1	-1	-1

**Pruebas para los contrastes**

		Contraste	Valor del contraste	Error típico	t	gl	Sig. (bilateral)
Hemoglobina (grs por 100 ml)	Asumiendo igualdad de varianzas	1	-5,450	1,3720	-3,972	36	,000
	No asumiendo	1	-5,450	1,2073	-4,514	19,398	,000

Nótese que el primer cuadro reproduce de nuevo el ANOVA, el segundo recuerda los coeficientes del contraste (con objeto de corroborar que no se han introducido erróneamente) y el tercero muestra los resultados del contraste de hipótesis de interés bajo los dos supuestos de varianzas iguales y varianzas diferentes.

En ambos casos existe significación de modo que introducir sulfamerazina genera promedios de hemoglobina en sangre significativamente superiores (obsérvese el valor negativo del contraste).

**Cuestión 6:** Obsérvese que los coeficientes introducidos al SPSS no han sido 1, -1/3, -1/3 y -1/3 sino 3, -1, -1 y -1. ¿Es importante? ¿Por qué o por qué no?

**Cuestión 7:** ¿Por qué ahora el contraste se ha resuelto con una t de Student y no con una F como los polinómicos?

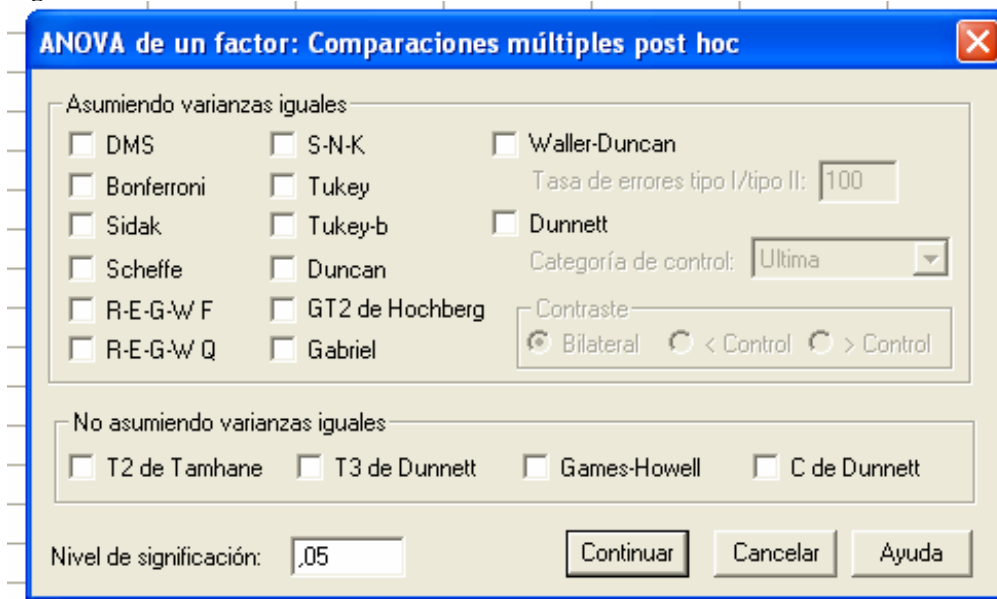


### ❖ ANOVA de un factor > Post hoc

Si la hipótesis nula de igualdad de medias resultó rechazada con el F-test, interesará realizar contrastes de rango múltiple que permitan identificar las medias que difieren significativamente controlando una tasa de error global para todas las comparaciones simultáneamente.

El cuadro de diálogo de este epígrafe proporciona un amplio abanico de diferentes procedimientos de rango múltiple (asumiendo varianzas iguales y distintas) como se muestra en la Figura 1.8. Nótese que en particular se incluyen todos los procedimientos introducidos en las sesiones teóricas.

Figura 1. 8



A modo de ejemplo se solicitan las pruebas de rango múltiple de **Scheffe** y de **Tukey** (marcar los consiguientes campos y pulsar **Continuar**). En el Visor de Resultados se muestran entonces las salidas reproducidas en las tablas 1.6 y 1.7.

La Tabla 1.6 muestra los resultados de cada contraste individual de medias dos a dos (diferencia de medias muestrales, su error típico, nivel crítico para el criterio seleccionado e intervalo de confianza construido para la diferencia de medias teóricas también con el criterio seleccionado). Cuando el test particular resulta significativo la correspondiente diferencia de medias muestrales se enfatiza con un asterisco.

En este ejemplo ambos criterios encuentran diferencias significativas al 5% en dos únicas comparaciones: las medias de hemoglobina en sangre con 0 grs. y 5 grs. y con 0 grs. y 10 grs.

En ocasiones el detalle pormenorizado (comparación a comparación) puede resultar complejo de interpretar y por ello resulta más cómoda de interpretar la salida de la Tabla 1.7, donde se obtiene un cuadro resumen de los subgrupos de medias homogéneos. Las medias que figuran en una misma columna del cuadro forman un subconjunto homogéneo, esto es, cualquier par de ellas no son significativamente diferentes. De hecho, la significación que aparece a pie de columna reproduce el menor nivel crítico encontrado entre todas las comparaciones a pares de medias del subgrupo.

En el ejemplo, las medias de hemoglobina para 0 y 15 grs. de sulfamerazina forman un subgrupo homogéneo (el nivel crítico del test de comparación entre ambas resultó 0,054 con Tukey) y las medias para 5, 10 y 15 grs. también forman un subgrupo homogéneo (en las 3 posibles comparaciones dos a dos, el menor nivel crítico fue 0,666 con Tukey).

Conviene advertir que este cuadro resumen de subconjuntos homogéneos no se proporciona para todos los procedimientos.

**Tabla 1.6**

**Comparaciones múltiples**

Variable dependiente: Hemoglobina (grs por 100 ml)

	(I) Niveles del factor:Cantidad de sulfamerazina	(J) Niveles del factor:Cantidad de sulfamerazina	Diferencia de medias (I-J)	Error típico	Sig.	Intervalo de confianza al 95%	
						Límite inferior	Límite superior
HSD de Tukey	0 grs	5 grs	-2,1300*	,5601	,003	-3,639	-,621
		10 grs	-1,8300*	,5601	,012	-3,339	-,321
		15 grs	-1,4900	,5601	,054	-2,999	,019
	5 grs	0 grs	2,1300*	,5601	,003	,621	3,639
		10 grs	,3000	,5601	,950	-1,209	1,809
		15 grs	,6400	,5601	,666	-,869	2,149
	10 grs	0 grs	1,8300*	,5601	,012	,321	3,339
		5 grs	-,3000	,5601	,950	-1,809	1,209
		15 grs	,3400	,5601	,929	-1,169	1,849
	15 grs	0 grs	1,4900	,5601	,054	-,019	2,999
		5 grs	-,6400	,5601	,666	-2,149	,869
		10 grs	-,3400	,5601	,929	-1,849	1,169
Scheffé	0 grs	5 grs	-2,1300*	,5601	,006	-3,772	-,488
		10 grs	-1,8300*	,5601	,024	-3,472	-,188
		15 grs	-1,4900	,5601	,088	-3,132	,152
	5 grs	0 grs	2,1300*	,5601	,006	,488	3,772
		10 grs	,3000	,5601	,962	-1,342	1,942
		15 grs	,6400	,5601	,729	-1,002	2,282
	10 grs	0 grs	1,8300*	,5601	,024	,188	3,472
		5 grs	-,3000	,5601	,962	-1,942	1,342
		15 grs	,3400	,5601	,946	-1,302	1,982
	15 grs	0 grs	1,4900	,5601	,088	-,152	3,132
		5 grs	-,6400	,5601	,729	-2,282	1,002
		10 grs	-,3400	,5601	,946	-1,982	1,302

\*. La diferencia entre las medias es significativa al nivel .05.

**Tabla 1.7**

**Hemoglobina (grs por 100 ml)**

	Niveles del factor:Cantidad de sulfamerazina	N	Subconjunto para alfa = .05	
			1	2
HSD de Tukey <sup>a</sup>	0 grs	10	7,200	
	15 grs	10	8,690	8,690
	10 grs	10		9,030
	5 grs	10		9,330
	Sig.			,054
Scheffé <sup>a</sup>	0 grs	10	7,200	
	15 grs	10	8,690	8,690
	10 grs	10		9,030
	5 grs	10		9,330
	Sig.			,088

Se muestran las medias para los grupos en los subconjuntos homogéneos.

a. Usa el tamaño muestral de la media armónica = 10,000.

**Cuestión 8:** ¿Cómo es posible que la media de hemoglobina en sangre con 15 grs. pertenezca a dos subgrupos homogéneos de medias diferentes?

**EJEMPLO 2.**

Se planifica un experimento para estudiar el efecto del nivel del agua sobre la longitud global del tallo de dos tipos de plantas de guisantes. Se utilizaron tres niveles de agua y los datos se recogen en la siguiente tabla (en rojo figura el orden temporal de la toma de datos).

		<i>Nivel de agua</i>		
		<i>Nivel 1</i>	<i>Nivel 2</i>	<i>Nivel 3</i>
<i>Tipo de planta</i>	<i>Tipo 1</i>	71,3 (01)	107,5 (02)	123,1 (11)
		75,1 (04)	96,1 (08)	125,2 (16)
		69,0 (05)	103,6 (18)	125,7 (19)
		73,2 (07)	100,7 (21)	121,0 (20)
		74,4 (22)	102,3 (26)	122,9 (30)
	<i>Tipo 2</i>	70,4 (13)	88,1 (06)	109,0 (03)
		73,2 (15)	85,8 (10)	101,1 (09)
		71,1 (23)	86,0 (17)	103,2 (12)
		71,2 (24)	87,5 (25)	109,7 (14)
		69,2 (27)	81,0 (29)	106,1 (28)

**2.1. Descripción del plan experimental, modelo y estimación puntual.**

Existen 2 factores tratamiento: “Nivel de agua” (con tres niveles de efectos fijos) y “Tipo de planta” (con dos niveles de efectos fijos).

Los niveles se cruzan formando un total de 6 tratamientos o condiciones experimentales distintas.

Para cada tratamiento se obtienen 5 respuestas de la variable “Crecimiento de la longitud del tallo” de otras tantas unidades experimentales. Se crea así un diseño balanceado (equirreplicado de 5 réplicas), aleatorizado y de tamaño 30.

Al disponer de réplicas es posible contrastar la existencia de interacción entre los niveles de los dos factores tratamiento, de modo que el modelo matemático es el propio de un diseño completo de dos vías:

$$y_{ijt} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ijt},$$

donde:

- $y_{ijt}$  denota el crecimiento observado para la t-ésima planta ( $t=1,\dots,5$ ) del i-ésimo tipo ( $i=1,2$ ) y tratada con el j-ésimo nivel de agua ( $j=1,2,3$ ),
- $\mu_{ij}$  denota el crecimiento promedio para las plantas del tipo i ( $i=1,2$ ) que son tratadas con el nivel de agua j ( $j=1,2,3$ ),
- $\varepsilon_{ijt}$  denota la parte de la respuesta  $y_{ijt}$  no explicada por el modelo. Se asume que los  $\varepsilon_{ijt}$  son todos ellos independientes e idénticamente distribuidos según una  $N(0, \sigma)$ .

Equivalentemente, haciendo  $\mu_{ij} = \mu + \tau_{ij}$ , se tiene:

$$y_{ijt} = \mu + \tau_{ij} + \varepsilon_{ijt}$$

donde:

- $\mu$  denota el crecimiento promedio con independencia de las condiciones experimentales,
- $\tau_{ij} = \mu_{ij} - \mu$  denota el efecto en el crecimiento respecto del promedio para las plantas del tipo i ( $i=1,2$ ) que son tratadas con el nivel de agua j ( $j=1,2,3$ ).

En el modelo completo de dos vías, el efecto “celda” se descompone  $\tau_{ij} = \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}$ , de modo que el modelo toma la forma:

$$y_{ijt} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijt}$$

donde:

- $\alpha_i$  denota el efecto en el crecimiento respecto a la media propio de las plantas del i-ésimo tipo (i=1,2) y con independencia del nivel de agua empleado,
- $\beta_j$  denota el efecto en el crecimiento respecto a la media propio de las plantas tratadas con el j-ésimo nivel de agua (j=1,2,3), con independencia del tipo de planta,
- $(\alpha\beta)_{ij}$  denota el efecto de la interacción entre el i-ésimo tipo de planta y el j-ésimo nivel de agua.

Todas las representaciones anteriores del modelo son equivalentes. La estimación mínimo-cuadrática de  $\mu_{ij}$  es única: la media de las respuestas en la celda (ij), esto es:  $\hat{\mu}_{ij} = \bar{y}_{ij}$ .

**La estimación de la constante  $\mu$**  (llamada en el SPSS **Intersección**) **y de los efectos no es única**, siendo necesario imponer restricciones. En los modelos anteriores, de acuerdo a la interpretación dada (los efectos se computan respecto al promedio global  $\mu$ ), las restricciones han sido  $\sum_i \hat{\alpha}_i = \sum_j \hat{\beta}_j = \sum_i \sum_j (\hat{\alpha}\hat{\beta})_{ij} = 0$ ,

resultando los estimadores:

- $\hat{\mu} = \bar{y}_{...}$
- $\hat{\tau}_{ij} = \hat{\mu}_{ij} - \hat{\mu} = \bar{y}_{ij} - \bar{y}_{...}$ , para todo  $i, j$ ,
- $\hat{\alpha}_i = \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}$ , para todo  $i$ ,
- $\hat{\beta}_j = \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}$ , para todo  $j$ ,
- $(\hat{\alpha}\hat{\beta})_{ij} = \hat{\tau}_{ij} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_j = \bar{y}_{ij} - \bar{y}_{...} - (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}) - (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}) = \bar{y}_{ij} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}$ , para todo  $i, j$

En el SPSS se plantea el mismo modelo pero los efectos se computan con las restricciones  $\hat{\alpha}_I = \hat{\beta}_J = (\hat{\alpha}\hat{\beta})_{IJ} = (\hat{\alpha}\hat{\beta})_{iJ} = 0$ , para todo  $i, j$ , siendo  $I$  y  $J$  los últimos códigos de los niveles de cada factor tratamiento. En el ejemplo, la última condición experimental es: tipo 2 de planta ( $I = 2$ ) y nivel de agua 3 ( $J = 3$ ), por lo tanto, las restricciones son:

$$\hat{\alpha}_2 = \hat{\beta}_3 = (\hat{\alpha}\hat{\beta})_{21} = (\hat{\alpha}\hat{\beta})_{22} = (\hat{\alpha}\hat{\beta})_{23} = (\hat{\alpha}\hat{\beta})_{13} = (\hat{\alpha}\hat{\beta})_{23} = 0.$$

Nótese que con este criterio tanto los estimadores de los efectos como su interpretación como difieren de los obtenidos con el primer criterio. Los efectos en el SPSS se estiman como sigue:

- $\hat{\mu} = \bar{y}_{IJ}$ .
- $\hat{\tau}_{ij} = \hat{\mu}_{ij} - \hat{\mu}_{IJ} = \bar{y}_{ij} - \bar{y}_{IJ}$ ,
- $\hat{\alpha}_i = \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{I..}$
- $\hat{\beta}_j = \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{.J.}$ ,
- $(\hat{\alpha}\hat{\beta})_{ij} = \hat{\tau}_{ij} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_j = \bar{y}_{ij} - \bar{y}_{IJ} - (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{I..}) - (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{.J.}) = \bar{y}_{ij} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}$

de modo que los parámetros deben interpretarse como sigue:

- $\tau_{ij}$  es el efecto en el crecimiento de las plantas del tipo i (i=1,2) tratadas con el nivel de agua j (j=1,2,3) respecto al crecimiento promedio de las plantas de tipo 2 tratadas con nivel de agua 3.
- $\alpha_i$  denota el efecto en el crecimiento de las plantas del i-ésimo tipo (i=1,2) respecto de las plantas del tipo 2, con independencia del nivel de agua empleado,



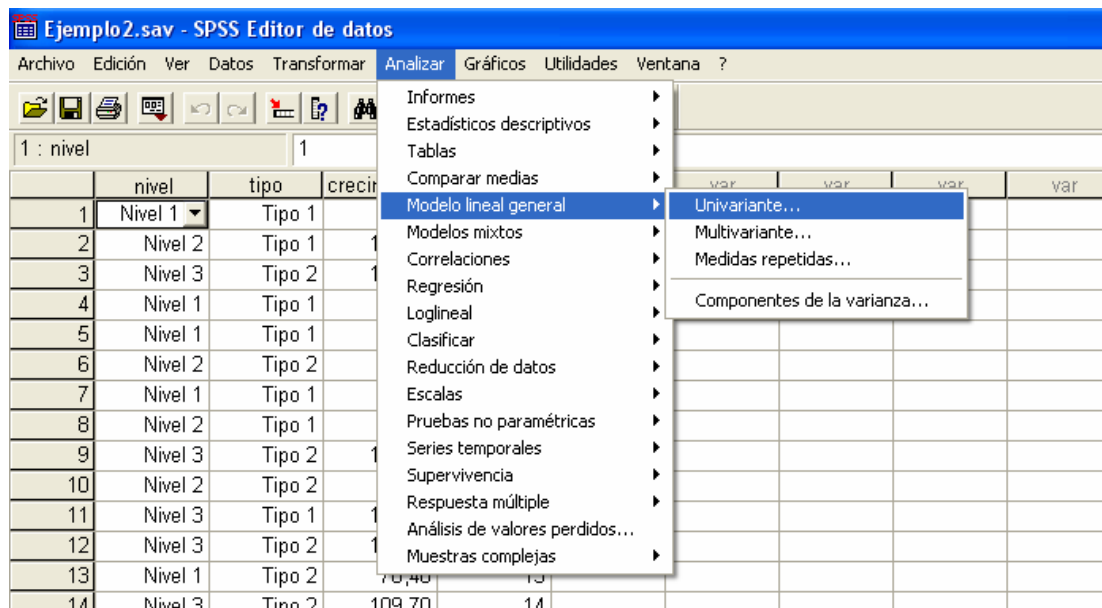
## 2.3 Análisis de la varianza para varios factores tratamiento.

### 2.3.1 Cuadro de diálogo principal: Solución por defecto.

Como se muestra en la Figura 2.2, seleccionar la opción

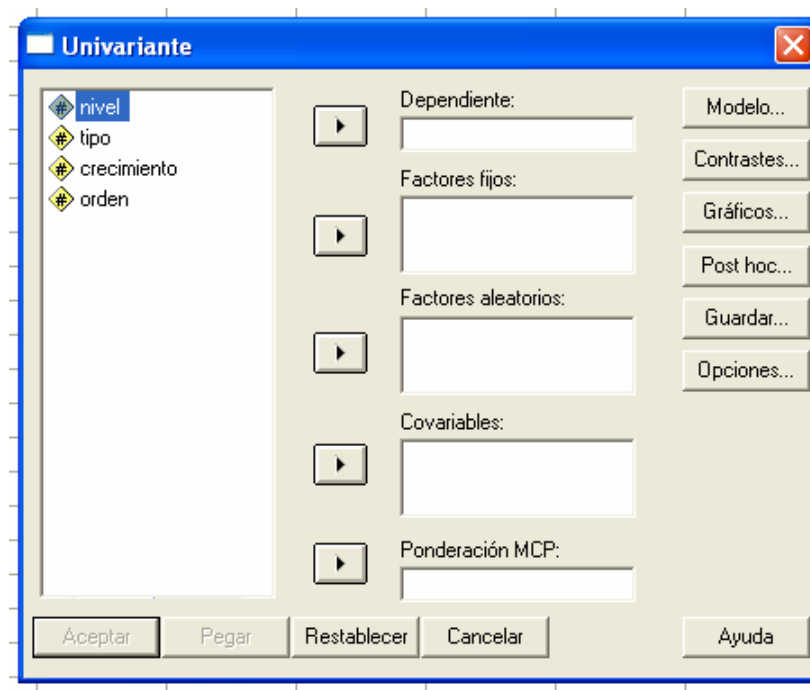
❖ **Analizar > Modelo lineal general > Univariante**

Figura 2.2



Aparecerá el cuadro de diálogo que se muestra en la Figura 2.3.

Figura 2.3



Se solicita cubrir los siguientes campos:

- **Dependiente**  
Introducir la variable respuesta (necesariamente cuantitativa y unidimensional). En el ejemplo se introducirá la variable *crecimiento*.
- **Factores fijos:**  
Introducir las variables conteniendo los niveles de los factores tratamiento con efectos fijos (niveles específicamente seleccionados ya que sus efectos sobre la respuesta desean ser comparados y son el objeto de la investigación). Introducir tantas variables como factores tratamiento. En el ejemplo dos variables: *tipo* y *nivel*.
- **Factores aleatorios:**  
Introducir las variables conteniendo los niveles de los factores tratamiento con efectos aleatorios (los niveles son una muestra aleatoria de una población mayor y por ello no son el objetivo de la investigación ya que la inferencia se realiza sobre la población y no sobre la muestra). Introducir tantas variables como factores tratamiento. En el ejemplo ninguna variable es de efectos aleatorios por lo que este campo quedará vacío.
- **Covariables:**  
Introducir las covariables (factor de control en el modelo no categórico sino continuo). En el ejemplo no hay covariables por lo que este campo quedará vacío.
- **Ponderación MCP:**  
Variable de pesos para computar los estimadores mínimo cuadráticos de manera ponderada. De utilidad cuando no se tiene homoscedasticidad.

Entrando las variables como se ha especificado y pulsando **Aceptar** se obtiene la salida por defecto que se muestra en la Tabla 2.1.

Tabla 2.1

**Factores inter-sujetos**

		Etiqueta del valor	N
Tipo de planta	1	Tipo 1	15
	2	Tipo 2	15
Nivel de agua	1	Nivel 1	10
	2	Nivel 2	10
	3	Nivel 3	10

**Pruebas de los efectos inter-sujetos**

Variable dependiente: Crecimiento longitud del tallo

Fuente	Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Significación
Modelo corregido	10664,110 <sup>a</sup>	5	2132,822	252,874	,000
Intersección	262024,456	1	262024,456	31066,410	,000
tipo	1062,075	1	1062,075	125,923	,000
nivel	9200,201	2	4600,100	545,402	,000
tipo * nivel	401,834	2	200,917	23,821	,000
Error	202,424	24	8,434		
Total	272890,990	30			
Total corregida	10866,534	29			

a. R cuadrado = ,981 (R cuadrado corregida = ,977)

El cuadro **Factores inter-sujetos** proporciona un resumen de las etiquetas de valor de cada nivel y el número de observaciones de cada nivel.

El cuadro **Prueba de los efectos inter-sujetos** proporciona el cuadro ANOVA. Lo proporciona para dos posibles descomposiciones de la suma de cuadrados global según que en el modelo la respuesta aparezca en bruto (Suma de Cuadrados Total) o con la constante sustraída (Suma de Cuadrados Corregida). En efecto, el modelo en bruto es:

$$y_{ijt} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijt}$$

y corregido sustrayendo la constante:

$$y_{ijt} - \mu = \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijt}$$

En el primer caso la descomposición de la suma de cuadrados es:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T y_{ijt}^2 &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T \bar{y}_{...}^2 + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2 + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2 + \\ &+ \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})^2 + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{ij.})^2 \end{aligned}$$

que de acuerdo a la notación del problema en el SPSS equivale a:

$$\text{SC Total} = \text{SC Intersección} + \text{SC tipo} + \text{SC nivel} + \text{SC tipo*nivel} + \text{SC Error}$$

En el modelo corregido:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T (y_{ijt} - \bar{y}_{...})^2 &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2 + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2 + \\ &+ \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})^2 + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{ij.})^2 \end{aligned}$$

que, en términos de la notación del SPSS es:

$$\text{SC Total corregida} = \text{SC tipo} + \text{SC nivel} + \text{SC tipo*nivel} + \text{SC Error}$$

Aclarada la procedencia de las sumas de cuadrados, se describe a continuación la utilidad del cuadro ANOVA:

- ❖ En primer lugar nos centramos en la fila del Error:

$$\text{SC Error} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 \sum_{t=1}^5 (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{...})^2 = 202,424$$

Los grados de libertad son 24 y por tanto la **SCM Error** es  $\hat{\sigma}^2 = 202,424/24 = 8,434$ . Este valor es la estimación insesgada de la varianza del error ( $Var(\varepsilon_{ijt}) = \sigma^2$ ).

Será el denominador para todas las pruebas  $F$  del cuadro ANOVA.

- ❖ La fila de la fuente de variación denominada **Intersección** proporciona el resultado del contraste  $H_0 : \mu = 0$  frente a  $H_1 : \mu \neq 0$ <sup>1</sup>. Para ello se evalúa primero el valor de:

$$\text{SC Intersección} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 \sum_{t=1}^5 \bar{y}_{...}^2 = 262024,456 \Rightarrow \text{SCM Intersección} = 262024,456$$

<sup>1</sup> En el cuadro ANOVA, por **Intersección** el SPSS entiende el valor de la media teórica global. Sin embargo, en el apartado de Estimación de los parámetros, por **Intersección** el SPSS entiende el valor de la media de la combinación de niveles con los últimos códigos.



A continuación, el cociente:

$$\text{SCM Intersección} / \text{SCM Error} = 262024,456 / 8,434 = 31066,41$$

que, en una  $F_{1,24}$ , conduce a un  $p$  valor igual a 0.

Por tanto se rechaza la nula y se concluye que el crecimiento promedio de las plantas, con independencia de tipo de planta y de nivel de agua, es significativamente mayor que cero. El resultado es desde luego el esperado en nuestro ejemplo pero, de hecho, será lo habitual. En general suele carecer de interés testar si la constante del modelo es significativamente distinta de cero o no y por ello es frecuente ver el cuadro ANOVA asociado al modelo lineal corregido.

- ❖ Las filas de las fuentes de variación denominadas **tipo**, **nivel**, **tipo\*error** y **Error** son las ya estudiadas relativas a efectos marginales y efectos interacción. Primero se contrasta la hipótesis nula de no existencia de efecto interacción  $H_0 : (\alpha\beta)_{ij} = cte, \forall i, j$ , calculando:

$$\text{SC tipo*nivel} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 \sum_{t=1}^5 (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})^2 = 401,834 \Rightarrow$$

$$\text{SCM tipo*nivel} = 401,834 / 2 = 200,917$$

El cociente:

$$\text{SCM tipo*nivel} / \text{SCM Error} = 200,917 / 8,434 = 23,821$$

que, en una  $F_{2,24}$ , conduce a un  $p$  valor igual a 0.

Se rechaza la nula concluyendo que existe interacción significativa. El crecimiento promedio depende de la combinación concreta tipo de planta y nivel de agua empleado, de tal modo que no es posible comparar niveles de agua sin considerar el tipo de planta ni comparar tipos de planta sin considerar los niveles de agua.

Al no poder testar los efectos marginales las filas **tipo** y **nivel** del cuadro carecen de interés.

- ❖ La fila de la fuente de variación denominada **Modelo corregido** se refiere a la suma de cuadrados explicada por la totalidad del modelo una vez sustraída la media global, esto es:

$$\text{SC Modelo corregido} = \text{SC tipo} + \text{SC nivel} + \text{SC tipo*nivel}$$

Coincide claramente con la **SC Inter-grupos** de un modelo de una vía cuyos niveles son: tipo\*nivel de agua. Por tanto, su significación estadística debe interpretarse en la línea de afirmar que existen diferencias en el crecimiento según que combinación de tipo de planta y nivel de agua se considere.

En resumen, el modelo apropiado es:  $y_{ijt} = \mu + \tau_{ij} + \varepsilon_{ijt}$ , no debiendo considerar la descomposición  $\tau_{ij} = \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}$ .

La estimación de  $\text{Var}(\varepsilon_{ijt}) = \sigma^2$  es 8,434 y la estimación de los efectos debe ser encontrada en un ANOVA de una vía.

- ❖ A pie de cuadro se proporciona el **Coefficiente de determinación** o **R cuadrado** que se obtiene dividiendo **SC Modelo corregido** entre **SC Total corregida**. En este caso arroja un valor igual a 0,981, muy alto que incide en la alta capacidad predictiva del modelo  $y_{ijt} = \mu + \tau_{ij} + \varepsilon_{ijt}$ .

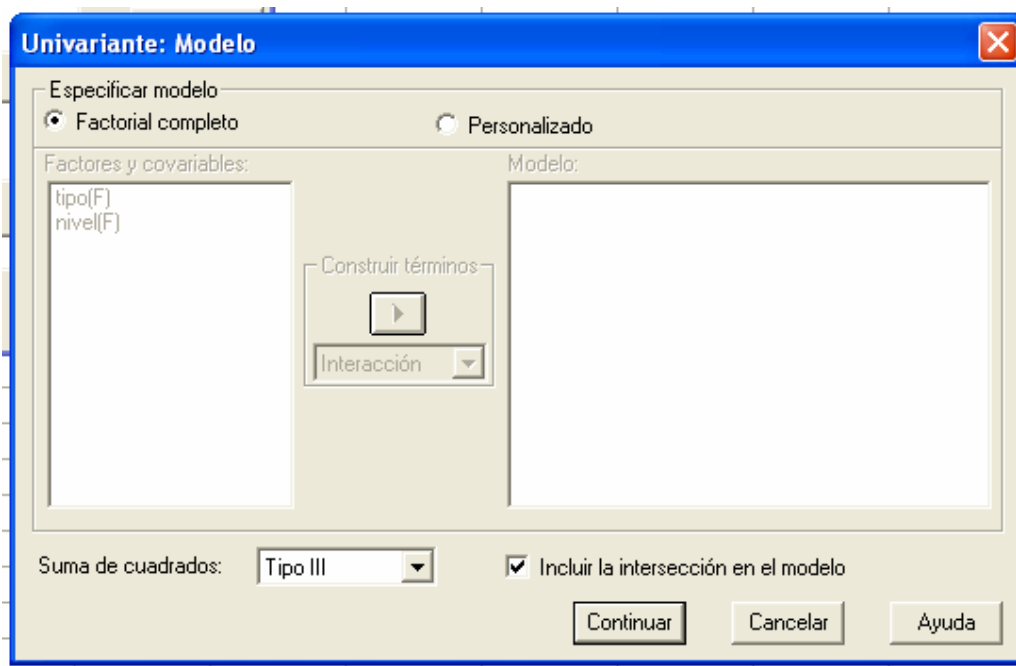
**Cuestión 9:** ¿Cómo serían las fórmulas de las sumas de cuadrados en un modelo factorial completo balanceado de tres factores?

**Cuestión 10:** Repetir el ejercicio como si hubiese un único factor tratamiento con seis niveles: 1 (tipo 1 nivel de agua 1), 2 (tipo 1 nivel de agua 2), 3 (tipo 1 nivel de agua 3), 4 (tipo 2 nivel de agua 1), 5 (tipo 2 nivel de agua 2) y 6 (tipo 2 nivel de agua 3). Comprobar que no se modifica la varianza residual ni el coeficiente de determinación. ¿Prueba esto que se trata del mismo modelo? ¿En qué estriban entonces las diferencias?

### 2.3.2 Herramientas: Selección del modelo

❖ **Analizar > Modelo lineal general > Univariante > Modelo...**

Figura 2.4



En este cuadro es posible construir el modelo de interés introduciendo los factores tratamiento y sus interacciones a nuestro antojo. Por defecto está el modelo **Factorial completo** (que incluye a todos los factores tratamiento introducidos previamente y a todas sus interacciones). Si se desea un modelo alternativo, por ejemplo un modelo de dos vías principales (esto es, sin interacción) entonces:

1. Marcar **Personalizado**. Se activan los campos que le siguen.
2. En **Construir términos** seleccionar **Efectos principales**, marcar **tipo (F)** en el campo **Factores y covariables** y pulsar la flecha en **Construir términos**. El factor **tipo (F)** ya formará parte del modelo al aparecer en el campo **Modelo**.
3. Hacer lo propio con el factor **nivel (F)**.

Dejar por defecto **Suma de cuadrados Tipo III**. Es el procedimiento más utilizado. Proporciona la descomposición de las sumas de cuadrados tal y como se ha visto en las sesiones de teoría. La suma de cuadrados Tipo III explicada por un factor A es igual a la diferencia entre la suma de cuadrados residual del modelo completo (con todos los factores) sin el factor A y la suma de cuadrados residual del modelo completo. Es independiente del orden de introducción de los factores tratamiento y produce una descomposición ortogonal de modo que las sumas de cuadrados suman la suma de cuadrados total.

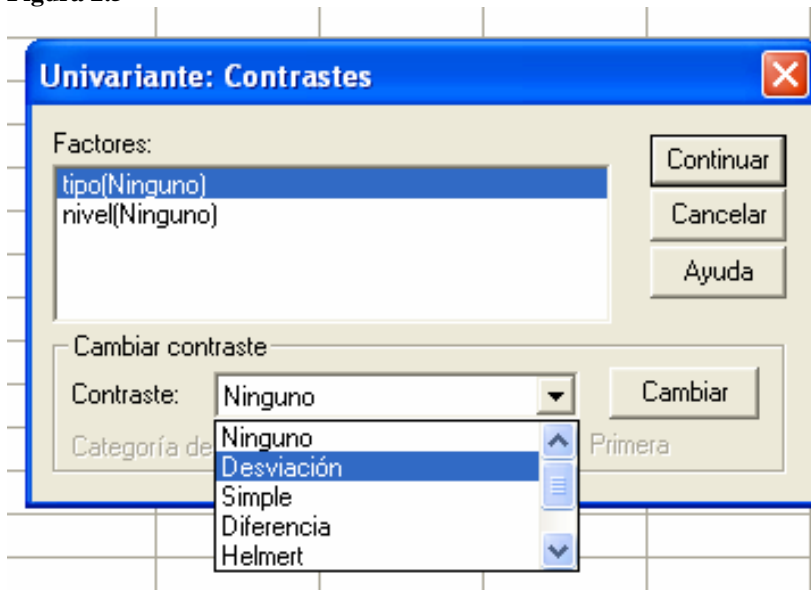
En ocasiones también es de utilidad la **Suma de cuadrados Tipo I**. Se conoce como el método de descomposición jerárquica de la suma de cuadrados. La suma de cuadrados Tipo I explicada por un factor A es igual a la diferencia entre la suma de cuadrados residual del modelo construido con los factores incluidos hasta ese momento menos el factor A y la suma de cuadrados residual del modelo con A incluido.

Cuando el diseño es balanceado la descomposición en suma de cuadrados Tipo III coincide con la descomposición en suma de cuadrados Tipo I.

### 2.3.3 Herramientas: Contrastes personalizados

❖ **Analizar > Modelo lineal general > Univariante > Contrastes...**

Figura 2.5



En este epígrafe es posible realizar inferencia sobre “contrastes” ( $\theta = \sum_i \alpha_i \tau_i$  con  $\sum_i \alpha_i = 0$ ) personalizados. De entrada se proporcionan en este cuadro de diálogo una serie de contrastes que pueden resultar de interés sobre los efectos marginales.

El procedimiento es:

1. Elegir en el cuadro **Factores:** el factor tratamiento sobre cuyos niveles se ejecutarán los contrastes. Por ejemplo, marcar **nivel(Ninguno)**.
2. Ir a **Contraste:**, abrir la persiana del subcuadro y seleccionar la familia de contrastes de interés. Pulsar entonces el botón **Cambiar**. Por ejemplo, si se selecciona **Desviación**, al pulsar **Cambiar** aparecerá el contenido del subcuadro **Factores:** ese modificará y aparecerá **nivel(Desviación)**.
3. Para algunos contrastes es posible modificar la categoría o nivel de referencia.

Las familias de contrastes posibles son:

- **Contrastes Desviación**

Familia de  $I - 1$  contrastes comparando el efecto de cada nivel del factor (menos el de referencia) con el efecto promedio global. Esto es:

$$H_0^{(i)} : \tau_i - \bar{\tau} = 0 \text{ frente a } H_1^{(i)} : \tau_i - \bar{\tau} \neq 0,$$

para  $1 \leq i \leq I - 1$  si la categoría de referencia es la última o para  $2 \leq i \leq I$  si la categoría de referencia es la primera.

- **Contrastes Simples**

Familia de  $I - 1$  contrastes comparando el efecto de cada nivel del factor con el efecto del nivel elegido como referencia. Esto es:

$$H_0^{(i)} : \tau_i - \tau_1 = 0 \text{ frente } H_1^{(i)} : \tau_i - \tau_1 \neq 0,$$

para  $2 \leq i \leq I$  si la categoría de referencia es la primera o bien

$$H_0^{(i)} : \tau_i - \tau_I = 0 \text{ frente } H_1^{(i)} : \tau_i - \tau_I \neq 0,$$

para  $1 \leq i \leq I - 1$  si la categoría de referencia es la última.

- **Contrastes Diferencia**

Familia de  $I - 1$  contrastes comparando el efecto de cada nivel del factor (menos el primero) con el efecto promedio de los niveles anteriores. Esto es:

$$H_0^{(1)} : \tau_2 - \tau_1 = 0 \text{ frente } H_1^{(1)} : \tau_2 - \tau_1 \neq 0,$$

$$H_0^{(2)} : \tau_3 - \frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2) = 0 \text{ frente } H_1^{(2)} : \tau_3 - \frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2) \neq 0, \dots,$$

$$H_0^{(I-1)} : \tau_I - \frac{1}{I-1}(\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_{I-1}) = 0 \text{ frente } H_1^{(I-1)} : \tau_I - \frac{1}{I-1}(\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_{I-1}) \neq 0$$

- **Contrastes Helmert**

Familia de  $I - 1$  contrastes comparando el efecto de cada nivel del factor (menos el último) con el efecto promedio de los niveles subsiguientes. Esto es:

$$H_0^{(1)} : \tau_1 - \frac{1}{I-1}(\tau_2 + \tau_3 + \dots + \tau_I) = 0 \text{ frente } H_1^{(1)} : \tau_1 - \frac{1}{I-1}(\tau_2 + \tau_3 + \dots + \tau_I) \neq 0$$

$$H_0^{(2)} : \tau_2 - \frac{1}{I-2}(\tau_3 + \tau_4 + \dots + \tau_I) = 0 \text{ frente } H_1^{(2)} : \tau_2 - \frac{1}{I-2}(\tau_3 + \tau_4 + \dots + \tau_I) \neq 0, \dots,$$

$$H_0^{(I-1)} : \tau_{I-1} - \tau_I = 0 \text{ frente } H_1^{(I-1)} : \tau_{I-1} - \tau_I \neq 0$$

- **Contrastes Repetidos**

Familia de  $I - 1$  contrastes comparando efectos de pares de niveles adyacentes: cada uno (excepto el primero) con el que le precede. Esto es:

$$H_0^{(1)} : \tau_2 - \tau_1 = 0 \text{ frente } H_1^{(1)} : \tau_2 - \tau_1 \neq 0,$$

$$H_0^{(2)} : \tau_3 - \tau_2 = 0 \text{ frente } H_1^{(2)} : \tau_3 - \tau_2 \neq 0, \dots,$$

$$H_0^{(I-1)} : \tau_I - \tau_{I-1} = 0 \text{ frente } H_1^{(I-1)} : \tau_I - \tau_{I-1} \neq 0$$

- **Contrastes Polinómicos**

Familia de  $I - 1$  contrastes ortogonales de tendencia polinómica (lineal, cuadrático, cúbico, ..., hasta grado  $I - 1$ ).

**Cuestión 11:** De todas las familias de contrastes incluidas en este apartado del SPSS y asumiendo que se trata de un diseño balanceado, ¿cuáles están formadas por contrastes ortogonales?

En presencia de interacción los contrastes deben realizarse sobre los niveles combinados y no sobre los efectos marginales. En otros términos, no es informativo ejecutar este procedimiento con interacción significativa. Este es el caso del problema que se está a resolver, sin embargo, sólo a los efectos de ejemplificar y mostrar la salida que genera esta herramienta, supongamos que se desea realizar los contrastes de Helmert para los efectos del factor tratamiento nivel de agua. La salida en el Visor de resultados sería la que se muestra en la Tabla 2.2.

Tabla 2.2

Resultados del contraste (matriz K)

		Variable dependiente	
		Crecimiento longitud del tallo	
Nivel de agua contraste de Helmert			
Nivel 1 - Anterior	Estimación del contraste	-32,470	
	Valor hipotetizado	0	
	Diferencia (Estimado - Hipotetizado)	-32,470	
	Error típ.	1,125	
	Significación	,000	
	Intervalo de confianza al 95 % para diferencia	Límite inferior Límite superior	-34,791 -30,149
	Nivel 2 - Nivel 3	Estimación del contraste	-20,840
Valor hipotetizado		0	
Diferencia (Estimado - Hipotetizado)		-20,840	
Error típ.		1,299	
Significación		,000	
Intervalo de confianza al 95 % para diferencia		Límite inferior Límite superior	-23,521 -18,159

Resultados de la prueba

Variable dependiente: Crecimiento longitud del tallo

Fuente	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Significación
Contraste	9200,201	2	4600,100	545,402	,000
Error	202,424	24	8,434		

Los contrastes de Helmert son 2 en este caso:

$$H_0^{(1)} : \beta_1 - \frac{1}{2}(\beta_2 + \beta_3) = 0 \text{ frente } H_1^{(1)} : \beta_1 - \frac{1}{2}(\beta_2 + \beta_3) \neq 0$$

$$H_0^{(2)} : \beta_2 - \beta_3 = 0 \text{ frente } H_1^{(2)} : \beta_2 - \beta_3 \neq 0$$

siendo  $\beta_i$  el efecto marginal del nivel de agua  $i$ -ésimo. La resolución particular de cada uno de ellos se realiza, bajo el supuesto de independencia y normalidad, mediante la  $t$  de Student con un número de grados de libertad igual al empleado para estimar el error. En general:

Rechazar  $H_0 : \sum_i \alpha_i \tau_i = 0$  (con  $\sum_i \alpha_i = 0$ ) al nivel de significación  $\alpha$  si:

$$\left| \frac{\sum_i \alpha_i \hat{\tau}_i}{\sqrt{SCMR \sum_i \frac{\alpha_i^2}{n_i}}} \right| > t_{g.l.(SCMR), \alpha/2}$$

siendo  $\hat{\tau}_i$  la media muestral de las  $n_i$  observaciones en el  $i$ -ésimo nivel y  $SCMR$  la suma de cuadrados media residual.

Como el cuadrado de una  $t$  de Student con  $g.l.$  grados de libertad es igual en distribución a una  $F$  de Fisher-Snedecor con 1 y  $g.l.$  grados de libertad ( $t_{g.l.}^2 = F_{1,g.l.}$ ), el criterio de rechazo anterior puede escribirse (elevando al cuadrado) como:

Rechazar  $H_0 : \sum_i \alpha_i \tau_i = 0$  (con  $\sum_i \alpha_i = 0$ ) al nivel de significación  $\alpha$  si:

$$\left( \frac{\sum_i \alpha_i \hat{\tau}_i / \sum_i \frac{\alpha_i^2}{n_i}}{SCMR} \right)^2 > F_{1,g.l.(SCMR),\alpha/2}$$

El valor de  $\left( \sum_i \alpha_i \hat{\tau}_i / \sum_i \frac{\alpha_i^2}{n_i} \right)^2$  se denomina SUMA DE CUADRADOS EXPLICADA POR EL CONTRASTE  $\sum_i \alpha_i \tau_i$ .

La Tabla 2.2 proporciona la resolución de los dos contrastes de Helmert en base a la  $t$  (cuadro titulado **Resultados del contraste (matriz K)**) y además facilita la suma de cuadrados de los dos contrastes para el test  $F$  (cuadro titulado **Resultados de la prueba**).

La interpretación de cada uno de los subcuadros del cuadro **Resultados del contraste (matriz K)** en la Tabla 2.2 es la que sigue:

- El valor estimado para  $\beta_1 - \frac{1}{2}(\beta_2 + \beta_3)$  es -32,470 (el efecto estimado del primer nivel de agua sobre el crecimiento fue inferior al efecto promedio de los otros dos niveles), con un error típico igual a 1,125. Esta diferencia estimada (-32,470) dividida de su error típico estimado (1,125) conducen a un valor extremo en la cola izquierda de una  $t$  de Student con 24 grados de libertad (los mismos con los que se estimó el error del modelo), arrojando un nivel crítico (*Significación* en terminología del SPSS) igual a cero y por tanto se rechaza  $H_0^{(1)} : \beta_1 - \frac{1}{2}(\beta_2 + \beta_3) = 0$ . El intervalo de confianza al 95% para  $\beta_1 - \frac{1}{2}(\beta_2 + \beta_3)$  es (-23,521, -18,159).
- El valor estimado para  $\beta_2 - \beta_3$  es -20,840 (el efecto estimado del segundo nivel de agua sobre el crecimiento fue inferior al efecto del tercer nivel), con un error típico igual a 1,299. Estas estimaciones conducen de nuevo a un nivel crítico igual a cero y por tanto se rechaza  $H_0^{(2)} : \beta_2 - \beta_3 = 0$ . El intervalo de confianza al 95% para  $\beta_2 - \beta_3$  es (-34,791, -30,149).

El segundo cuadro (**Resultados de la prueba**) proporciona la suma de cuadrados explicada por los dos contrastes Helmert y el correspondiente  $F$ -test con dos (un grado de libertad por contraste) y 24 grados de libertad que muestra la significación estadística conjunta de ambos contrastes.

**Cuestión 12:** ¿Cómo se obtiene el error típico de la estimación de  $\beta_1 - \frac{1}{2}(\beta_2 + \beta_3)$ ?

**Cuestión 13:** ¿Por qué la suma de cuadrados de los dos contrastes Helmert (9200,201) coincide con la suma de cuadrados explicada por diferencias entre niveles de agua del cuadro ANOVA (ver Tabla 2.1)?

**Cuestión 14:** ¿Qué parte de 9200,201 es achacable al primer contraste Helmert y qué parte al segundo?

Además de los contrastes descritos, es posible realizar también inferencia sobre contrastes concretos que puedan ser de interés. Para ello sin embargo es preciso acudir al editor de sintaxis y utilizar las instrucciones: **CONTRAST** primero y **SPECIAL** después.

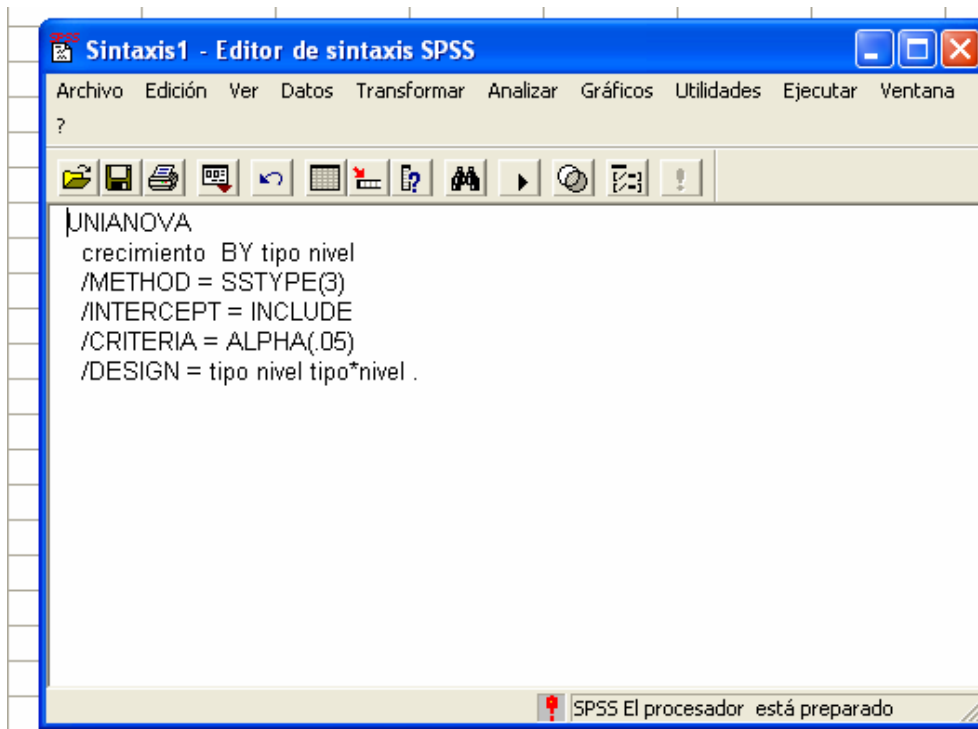
Supóngase por ejemplo que se desea resolver uno de los contrastes anteriores:

$$H_0^{(1)} : \beta_1 - \frac{1}{2}(\beta_2 + \beta_3) = 0 \text{ frente } H_1^{(1)} : \beta_1 - \frac{1}{2}(\beta_2 + \beta_3) \neq 0$$

empleando el editor de sintaxis.

La manera más sencilla de emplear ocasionalmente en editor de sintaxis es a través del botón **Pegar** de los cuadros de diálogo. Una vez seleccionadas las opciones del cuadro de diálogo, al pulsar **Pegar** se abre una ventana conteniendo la sintaxis de las instrucciones indicadas. Si, por ejemplo, en el cuadro de diálogo **Analizar > Modelo lineal general > Univariante** (ver Figura 2.3) se introducen únicamente las variables *tipo* y *nivel* en el campo **Factores fijos:** y *crecimiento* en el campo **Dependiente:** y, a continuación, se pulsa en **Pegar**, entonces se abrirá la ventana de sintaxis que se muestra en la Figura 2.6.

Figura 2.6



Sintaxis que viene a indicar que se ejecutará un procedimiento ANOVA de una vía (comando **UNIANOVA**), con variable respuesta *crecimiento* y factores *tipo* y *nivel* (comando **BY**), con suma de cuadrados de tipo III (línea de comandos **/SSTYPE(3)=SSTYPE(3)**),...

Si sobre esa sintaxis quitamos el último punto (que indica el final del conjunto de instrucciones) y añadimos la línea:

***/CONTRAST(nivel) = SPECIAL(1 -0.5 -0.5) .***

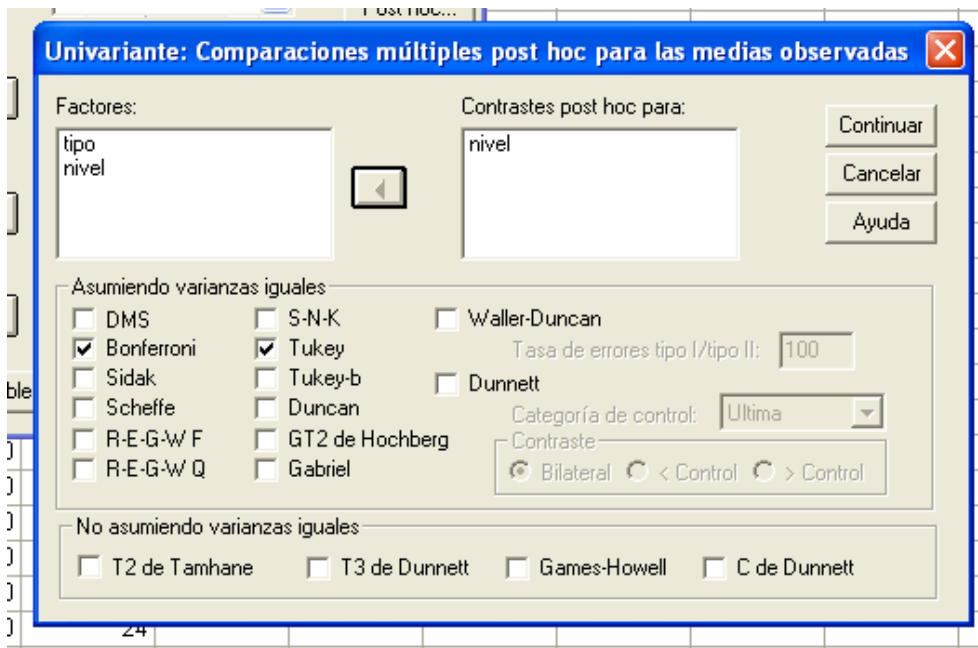
daremos al SPSS la instrucción precisa para resolver el contraste planteado. Bastará entonces, desde esa misma ventana de sintaxis, pulsar el botón **Ejecutar** y luego **Todo**.

**2.3.4 Herramientas: Contrastes post hoc**

❖ **Analizar > Modelo lineal general > Univariante > Post hoc...**

Ofrece la posibilidad de realizar contrastes de rango múltiple con los niveles de aquellos factores tratamiento que se desee. Como en el epígrafe de contraste personalizados, las comparaciones post hoc para los efectos marginales sólo deben realizarse en el supuesto de no interacción. Es preciso introducir los factores de interés y luego marcar los criterios de rango múltiple deseados. En la Figura 2.7 se describe el cuadro de diálogo para solicitar los procedimientos de Tukey y Bonferroni para los niveles del factor tratamiento Nivel de Agua y ninguno para el otro factor.

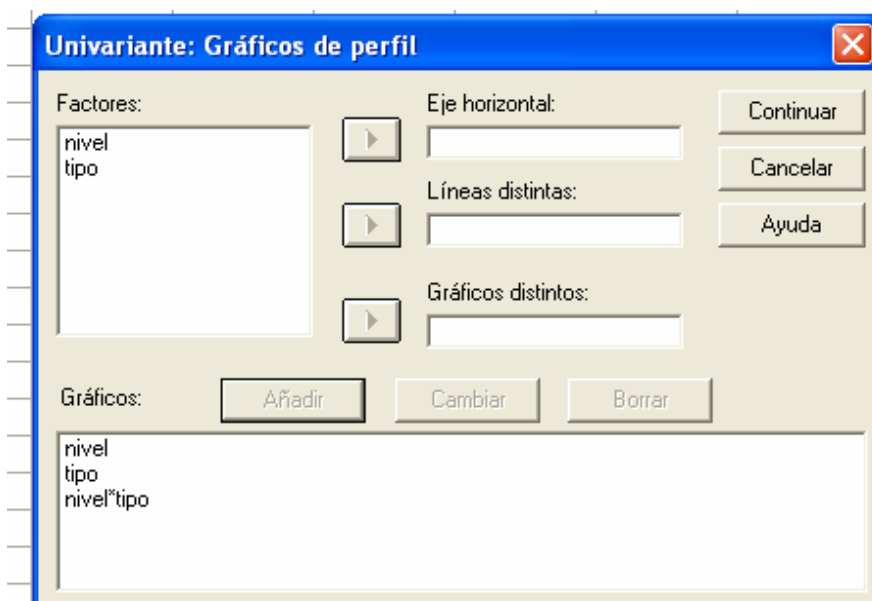
Figura 2.7



**2.3.5 Herramientas: Gráficos de perfil**

❖ **Analizar > Modelo lineal general > Univariante > Gráficos...**

Figura 2.8



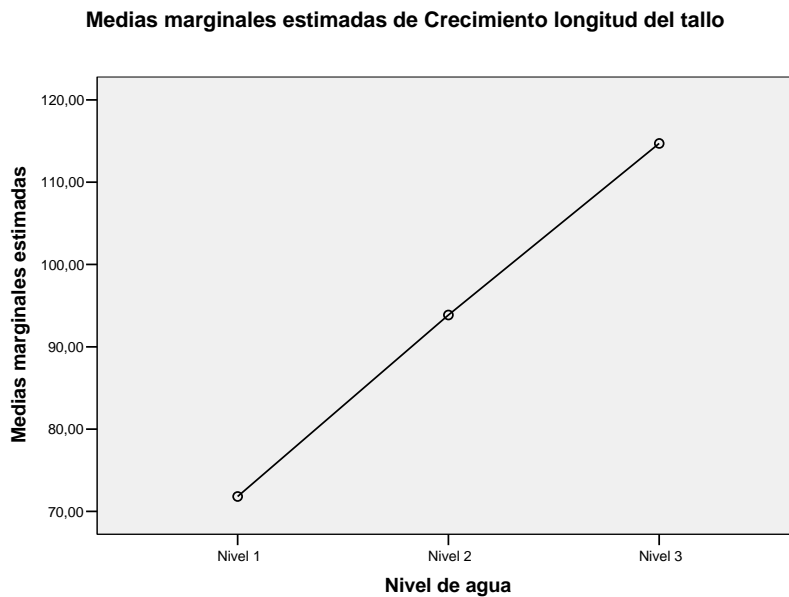


Genera gráficos de las medias muestrales unidas por segmentos. Procedimiento:

Para obtener un gráfico de las tres medias estimadas para los niveles del factor Nivel de Agua (Figura 2.9)

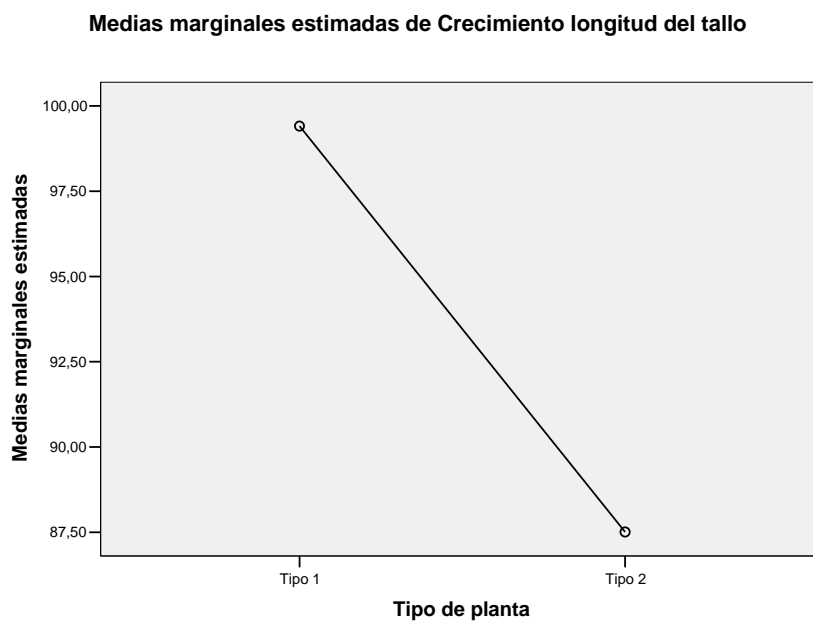
1. Marcar **nivel** en el campo **Factores:**.
2. Pulsar el botón de la flecha de entrada al campo **Eje horizontal**.
3. Pulsar el botón **Añadir**, en el campo **Gráficos:**. El factor **nivel** se incorporará al campo **Gráficos:**.

Figura 2.9



Repetir el procedimiento marcando inicialmente el factor **tipo** para obtener un gráfico de las medias estimadas para los dos niveles del factor tratamiento tipo de planta. (Figura 2.10)

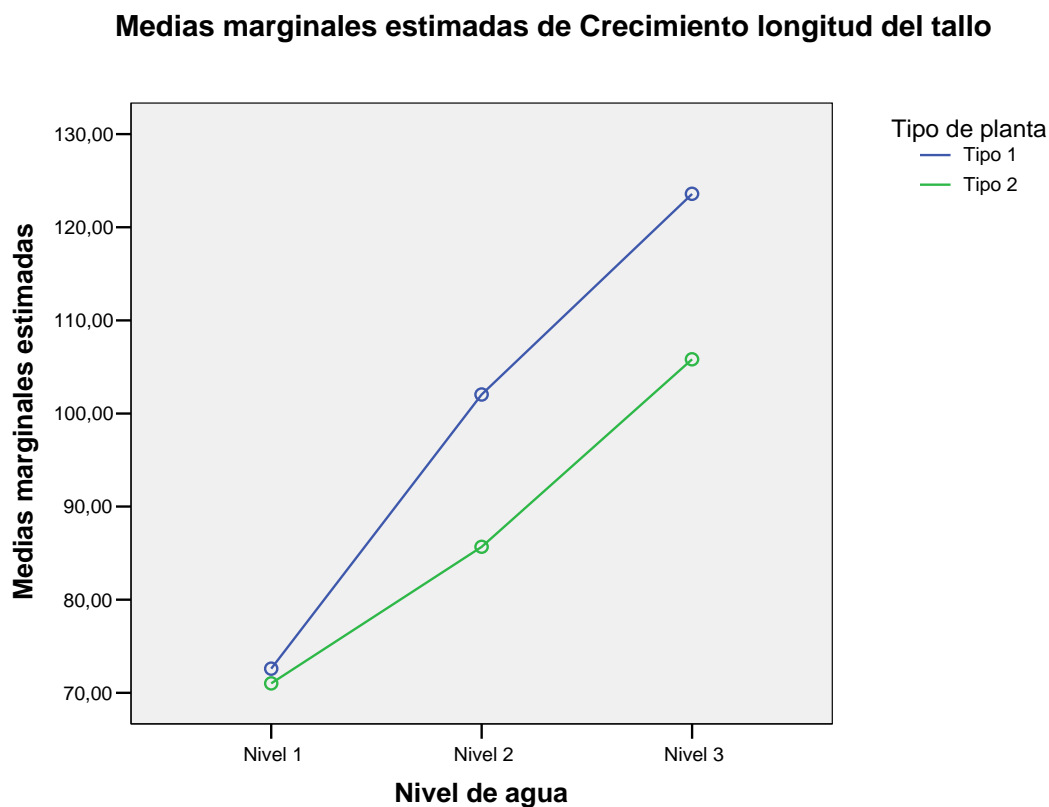
Figura 2.10



Para visualizar el denominado **gráfico de interacción** entre los dos factores tratamiento (Figura 2.11), proceder como sigue:

1. Marcar **nivel** en el campo **Factores:**.
2. Pulsar el botón de la flecha de entrada al campo **Eje horizontal**.
3. Marcar **tipo** en el campo **Factores:**.
4. Pulsar el botón de la flecha de entrada al campo **Líneas distintas**.
5. Pulsar el botón **Añadir**, en el campo **Gráficos:**. En el campo **Gráficos:** aparecerá **nivel\*tipo**, que se refiere al gráfico de interacción.

Figura 2.11



Se observa en la Figura 2.11 que aparentemente no existe interacción entre tipos de planta y los dos últimos niveles de agua: el crecimiento del tipo 1 ha sido superior en igual longitud promedio tanto con el nivel 2 como con el 3 de agua y, análogamente, el nivel 3 de agua fue igual de mejor para el crecimiento con independencia del tipo de planta. Este comportamiento no se ha mantenido sin embargo con el nivel 1 de agua y aquí está la posible interacción. Probablemente el nivel 1 de agua sea el menos exitoso pero es especialmente malo su comportamiento para el tipo 1 de plantas.

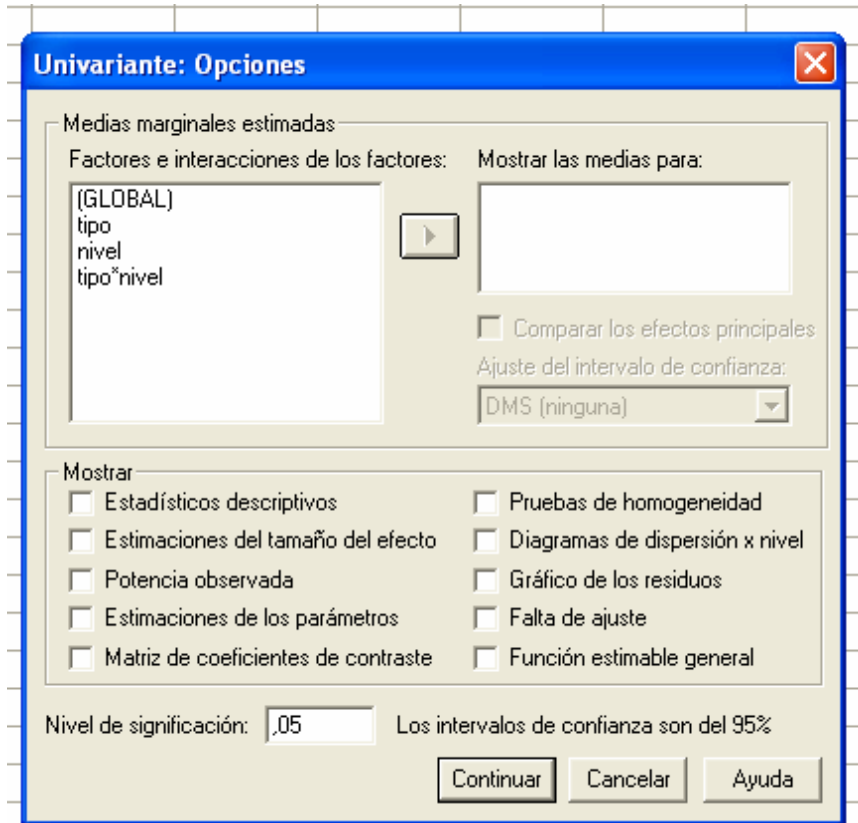
**Cuestión 15:** Se propone el siguiente ejercicio. Resolver el mismo ejemplo tratado en la presente sección pero seleccionando un modelo de dos vías de efectos principales (esto es, sin interacción entre los dos factores tratamiento). Pedir en cualquier caso la realización del gráfico de interacción. Observarás que no es el mismo que en el caso del modelo completo (ver Figura 2.11). De hecho ahora las líneas son exactamente paralelas. ¿Cómo es ello posible si se trabaja con los mismos datos? ¿Qué conclusión obtienes de este ejercicio?

### 2.3.6 Herramientas: Opciones

#### ❖ Analizar > Modelo lineal general > Univariante > Opciones...

La sentencia anterior nos sitúa en el cuadro de diálogo que se muestra en la Figura 2.12.

Figura 2.12



En el campo **Medias marginales estimadas** se podrá indicar al SPSS que nos proporcione estimaciones de las medias de todos los niveles de una fuente de variación de interés (o sea de factores incluidos en el diseño o interacción de factores, sean estas interacciones incluidas o no en el diseño). Para ello, se trasladarán las fuentes de interés desde la lista **Factores e interacciones de los factores** a la lista **Mostrar las medias para:**. ¡OJO! No se obtendrán necesariamente las medias muestrales de los correspondientes niveles sino las construidas a partir de los parámetros estimados para el modelo propuesto. Por ejemplo, el cuadro de medias estimadas para los niveles de la interacción **tipo\*nivel** no es el mismo para un modelo completo que para un modelo de efectos principales (corroborando así lo apuntado para los gráficos de interacción en la Cuestión 15).

#### ▪ Comparar los efectos principales

Al marcar esta opción el SPSS realizará las comparaciones de medias dos a dos (*pairwise comparisons*) de todos los niveles de los efectos principales con tres posibles criterios que se seleccionarán en la lista desplegable de **Ajuste del intervalo de confianza**. El criterio **MDS** (Mínima Diferencia Significativa) consiste simplemente en utilizar el criterio de la *t* de Student para comparar dos muestras independientes y por tanto no se controla la tasa de error de tipo I global. Las otras dos opciones **Bonferroni** y **Sidak** suponen diferentes correcciones para controlar esa tasa de error global y son recomendables cuando haya que realizar un número muy grande de comparaciones dos a dos.

Volviendo al ejemplo, en un modelo factorial completo, un cuadro de diálogo como el de la Figura 2.13 dará lugar en el Visor de Resultados a una salida como la que se muestra en las Tabla 2.3, 2.4 y 2.5.

Figura 2.13

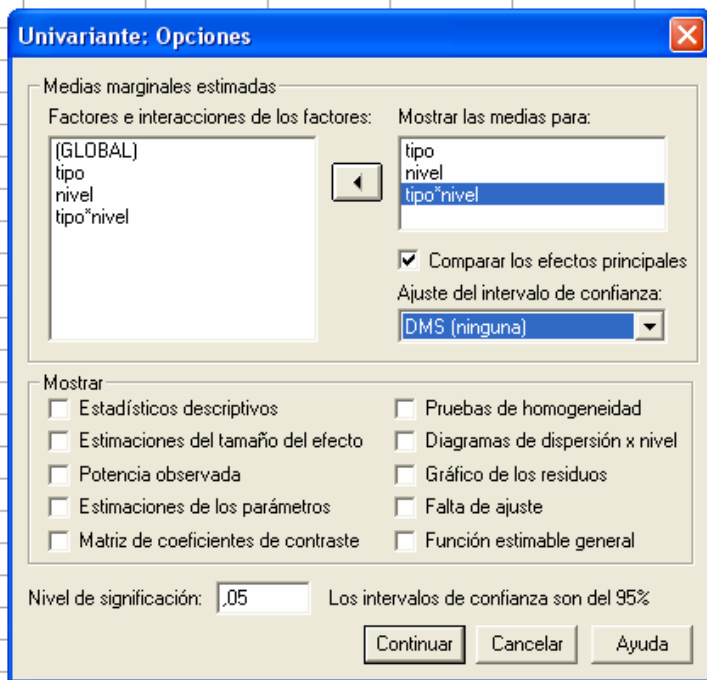


Tabla 2.3

### 1. Tipo de planta

#### Estimaciones

Variable dependiente: Crecimiento longitud del tallo

Tipo de planta	Media	Error típ.	Intervalo de confianza al 95%.	
			Límite inferior	Límite superior
Tipo 1	99,407	,750	97,859	100,954
Tipo 2	87,507	,750	85,959	89,054

#### Comparaciones por pares

Variable dependiente: Crecimiento longitud del tallo

(I) Tipo de planta	(J) Tipo de planta	Diferencia entre medias (I-J)	Error típ.	Significación <sup>a</sup>	Intervalo de confianza al 95 % para diferencia <sup>a</sup>	
					Límite inferior	Límite superior
Tipo 1	Tipo 2	11,900*	1,060	,000	9,711	14,089
Tipo 2	Tipo 1	-11,900*	1,060	,000	-14,089	-9,711

Basadas en las medias marginales estimadas.

\*. La diferencia de las medias es significativa al nivel ,05.

a. Ajuste para comparaciones múltiples: Diferencia menos significativa (equivalente a la ausencia de ajuste).

#### Contrastes univariados

Variable dependiente: Crecimiento longitud del tallo

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Significación
Contraste	1062,075	1	1062,075	125,923	,000
Error	202,424	24	8,434		

Cada prueba F contrasta el efecto simple de Tipo de planta en cada combinación de niveles del resto de los efectos mostrados. Estos contrastes se basan en las comparaciones por pares, linealmente independientes, entre las medias marginales estimadas.

Tabla 2.4

2. Nivel de agua

Estimaciones

Variable dependiente: Crecimiento longitud del tallo

Nivel de agua	Media	Error típ.	Intervalo de confianza al 95%.	
			Límite inferior	Límite superior
Nivel 1	71,810	,918	69,915	73,705
Nivel 2	93,860	,918	91,965	95,755
Nivel 3	114,700	,918	112,805	116,595

Comparaciones por pares

Variable dependiente: Crecimiento longitud del tallo

(I) Nivel de agua	(J) Nivel de agua	Diferencia entre medias (I-J)	Error típ.	Significación <sup>a</sup>	Intervalo de confianza al 95 % para diferencia <sup>a</sup>	
					Límite inferior	Límite superior
Nivel 1	Nivel 2	-22,050*	1,299	,000	-24,731	-19,369
	Nivel 3	-42,890*	1,299	,000	-45,571	-40,209
Nivel 2	Nivel 1	22,050*	1,299	,000	19,369	24,731
	Nivel 3	-20,840*	1,299	,000	-23,521	-18,159
Nivel 3	Nivel 1	42,890*	1,299	,000	40,209	45,571
	Nivel 2	20,840*	1,299	,000	18,159	23,521

Basadas en las medias marginales estimadas.

\*. La diferencia de las medias es significativa al nivel ,05.

a. Ajuste para comparaciones múltiples: Diferencia menos significativa (equivalente a la ausencia de ajuste).

Contrastes univariados

Variable dependiente: Crecimiento longitud del tallo

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Significación
Contraste	9200,201	2	4600,100	545,402	,000
Error	202,424	24	8,434		

Cada prueba F contrasta el efecto simple de Nivel de agua en cada combinación de niveles del resto de los efectos mostrados. Estos contrastes se basan en las comparaciones por pares, linealmente independientes, entre las medias marginales estimadas.

Tabla 2.5

3. Tipo de planta \* Nivel de agua

Variable dependiente: Crecimiento longitud del tallo

Tipo de planta	Nivel de agua	Media	Error típ.	Intervalo de confianza al 95%.	
				Límite inferior	Límite superior
Tipo 1	Nivel 1	72,600	1,299	69,919	75,281
	Nivel 2	102,040	1,299	99,359	104,721
	Nivel 3	123,580	1,299	120,899	126,261
Tipo 2	Nivel 1	71,020	1,299	68,339	73,701
	Nivel 2	85,680	1,299	82,999	88,361
	Nivel 3	105,820	1,299	103,139	108,501

Observar que, por ejemplo y de acuerdo con la Tabla 2.5, el crecimiento medio estimado del tallo de las plantas de tipo 1 tratadas con el nivel de agua 1 es 72,60. En el modelo factorial completo este crecimiento medio se obtiene mediante:

$$\mu + \tau_{11} = \mu + \alpha_1 + \beta_1 + (\alpha\beta)_{11}$$

luego su estimador se calcula a través de las estimaciones mínimo-cuadráticas de sus parámetros que son (ver Sección 2.1):

$$\hat{\mu} + \hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1 + (\alpha\beta)_{11} = \bar{y}_{...} + (\bar{y}_{1..} - \bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{.1.} - \bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{11.} - \bar{y}_{1..} - \bar{y}_{.1.} + \bar{y}_{...}) = \bar{y}_{11.} = 72,60$$

concluyendo que, para este modelo, la estimación coincide con la media muestral de los crecimientos alcanzados con las plantas de tipo 1 tratadas con nivel de agua 1.

Sin embargo, en un modelo de efectos principales (sin interacción), el crecimiento medio del tallo de las plantas de tipo 1 tratadas con el nivel de agua 1 responde a la expresión paramétrica:

$$\mu + \tau_{11} = \mu + \alpha_1 + \beta_1$$

que se estima como:

$$\hat{\mu} + \hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1 = \bar{y}_{...} + (\bar{y}_{1..} - \bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{.1.} - \bar{y}_{...}) = \bar{y}_{1..} + \bar{y}_{.1.} - \bar{y}_{...} = 99,407 + 71,81 - 93,457 = 77,76$$

es decir, crecimiento medio con las plantas de tipo 1 más crecimiento medio de las plantas tratadas con nivel de agua 1 menos crecimiento medio global. El resultado ahora no coincide por tanto con la media muestral de las observaciones del nivel estudiado.

Para un modelo de efectos principales, el cuadro análogo al mostrado por la Tabla 2.5 para un modelo factorial completo puede verse en la Tabla 2.6 y se puede comprobar que aparece la estimación 77,76.

**Tabla 2.6**

**3. Tipo de planta \* Nivel de agua**

Variable dependiente: Crecimiento longitud del tallo

Tipo de planta	Nivel de agua	Media	Error típ.	Intervalo de confianza al 95%.	
				Límite inferior	Límite superior
Tipo 1	Nivel 1	77,760	1,760	74,142	81,378
	Nivel 2	99,810	1,760	96,192	103,428
	Nivel 3	120,650	1,760	117,032	124,268
Tipo 2	Nivel 1	65,860	1,760	62,242	69,478
	Nivel 2	87,910	1,760	84,292	91,528
	Nivel 3	108,750	1,760	105,132	112,368

En el campo **Mostrar** se puede marcar diferentes opciones:

- **Estadísticos descriptivos**

Proporciona la media muestral, la desviación típica muestral y el tamaño para cada nivel y combinación de niveles (ver Tabla 2.7).

- **Estimaciones del tamaño del efecto**

Marcando esta opción se añade al cuadro ANOVA el coeficiente  $\eta^2$  para cada fuente de variación incluida en el modelo. Este coeficiente se define para una fuente de variación FV como:

$$\eta^2(FV) = \frac{SC(FV)}{SC(FV) + SC(Error)}$$

Tabla 2.7

## Estadísticos descriptivos

Variable dependiente: Crecimiento longitud del tallo

Tipo de planta	Nivel de agua	Media	Desv. típ.	N
Tipo 1	Nivel 1	72,6000	2,47487	5
	Nivel 2	102,0400	4,16509	5
	Nivel 3	123,5800	1,90184	5
	Total	99,4067	21,80722	15
Tipo 2	Nivel 1	71,0200	1,45671	5
	Nivel 2	85,6800	2,79231	5
	Nivel 3	105,8200	3,68741	5
	Total	87,5067	14,99212	15
Total	Nivel 1	71,8100	2,08777	10
	Nivel 2	93,8600	9,24785	10
	Nivel 3	114,7000	9,76046	10
	Total	93,4567	19,35738	30

es por tanto una estimación de la proporción de varianza explicada por diferencias entre los niveles de la fuente de variación FV una vez eliminado el efecto de las otras fuentes de variación incluidas en el modelo.

**Cuestión 16:** Reflexionar sobre la similitud y las diferencias entre los coeficientes  $\eta^2(FV)$  y  $R^2(FV)$  (coeficiente de determinación parcial para la fuente de variación FV ).

- **Potencia observada**

Marcando esta opción se añade al cuadro ANOVA una nueva columna con el valor de la potencia del  $F$ -test para cada fuente de variación incluida en el modelo. El valor de la potencia se entenderá como la capacidad de la prueba de hipótesis para, con un nivel de significación igual al prefijado, detectar una diferencia real (poblacional) entre los niveles de la fuente de variación igual a la diferencia observada en las muestras.

Si en nuestro ejemplo se marcan las casillas **Estimaciones del tamaño del efecto** y **Potencia observada**, entonces el cuadro ANOVA en el Visor de Resultados será el que se muestra en la Tabla 2.8.

Tabla 2.8

## Pruebas de los efectos inter-sujetos

Variable dependiente: Crecimiento longitud del tallo

Fuente	Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Significación	Eta al cuadrado parcial	Parámetro de no centralidad	Potencia observada <sup>a</sup>
Modelo corregido	10664,110 <sup>b</sup>	5	2132,822	252,874	,000	,981	1264,369	1,000
Intersección tipo	262024,456	1	262024,456	31066,410	,000	,999	31066,410	1,000
nivel	1062,075	1	1062,075	125,923	,000	,840	125,923	1,000
tipo * nivel	9200,201	2	4600,100	545,402	,000	,978	1090,804	1,000
Error	401,834	2	200,917	23,821	,000	,665	47,643	1,000
Total	202,424	24	8,434					
Total corregida	272890,990	30						
	10866,534	29						

a. Calculado con alfa = ,05

b. R cuadrado = ,981 (R cuadrado corregida = ,977)

Se observan coeficientes  $\eta^2$  altos para todas las fuentes de variación, siendo el menor el correspondiente a la interacción (0,665). En todos los casos la potencia es igual a 1, lo que sugiere una alta capacidad del test para rechazar la nula con diferencias reales iguales a las observadas.

### ▪ Estimaciones de los parámetros

Marcando esta opción se obtendrá un cuadro con las estimaciones de los parámetros del modelo.

La salida en el Visor para los datos del ejemplo se muestra en la Tabla 2.9.

**Tabla 2.9**

#### Estimaciones de los parámetros

Variable dependiente: Crecimiento longitud del tallo

Parámetro	B	Error típ.	t	Signif.	Intervalo de confianza al 95%.		Eta al cuadrado parcial	Parámetro de no centralidad	Potencia observada <sup>a</sup>
					Límite inferior	Límite superior			
Intersección	105,820	1,299	81,476	,000	103,139	108,501	,996	81,476	1,000
[tipo=1]	17,760	1,837	9,669	,000	13,969	21,551	,796	9,669	1,000
[tipo=2]	0 <sup>b</sup>	.	.	.	.	.	.	.	.
[nivel=1]	-34,800	1,837	-18,946	,000	-38,591	-31,009	,937	18,946	1,000
[nivel=2]	-20,140	1,837	-10,965	,000	-23,931	-16,349	,834	10,965	1,000
[nivel=3]	0 <sup>b</sup>	.	.	.	.	.	.	.	.
[tipo=1] * [nivel=1]	-16,180	2,598	-6,229	,000	-21,541	-10,819	,618	6,229	1,000
[tipo=1] * [nivel=2]	-1,400	2,598	-,539	,595	-6,761	3,961	,012	,539	,081
[tipo=1] * [nivel=3]	0 <sup>b</sup>	.	.	.	.	.	.	.	.
[tipo=2] * [nivel=1]	0 <sup>b</sup>	.	.	.	.	.	.	.	.
[tipo=2] * [nivel=2]	0 <sup>b</sup>	.	.	.	.	.	.	.	.
[tipo=2] * [nivel=3]	0 <sup>b</sup>	.	.	.	.	.	.	.	.

a. Calculado con alfa = ,05

b. Al parámetro se le ha asignado el valor cero porque es redundante.

Atendiendo a la interpretación de los parámetros estimados por el SPSS expuesta en la última parte de Sección 2.1, la información de la Tabla 2.9 puede esquematizarse como sigue:

1. Los parámetros que se igualan a 0 por redundantes son:

$$\alpha_2 = \beta_3 = (\alpha\beta)_{21} = (\alpha\beta)_{22} = (\alpha\beta)_{23} = (\alpha\beta)_{13} = (\alpha\beta)_{23} = 0$$

2. Los demás se estiman y resulta:

- a.  $\hat{\mu} = \bar{y}_{23} = 105,820$

- b.  $\hat{\alpha}_1 = \bar{y}_{1..} - \bar{y}_{2..} = 17,760$

- c.  $\hat{\beta}_1 = \bar{y}_{.1} - \bar{y}_{.3} = -34,800$ ,  $\hat{\beta}_2 = \bar{y}_{.2} - \bar{y}_{.3} = -20,140$

- d.  $(\alpha\beta)_{11} = \bar{y}_{11} - \bar{y}_{1.} - \bar{y}_{.1} + \bar{y}_{..} = -16,180$ ,  $(\alpha\beta)_{12} = \bar{y}_{21} - \bar{y}_{1.} - \bar{y}_{.2} + \bar{y}_{..} = -1,400$

3. El modelo estimado se resume (empleando variables dummy) como:

$$y = 105,82 + 17,760 \cdot X_1 - 34,800 \cdot Z_1 - 20,140 \cdot Z_2 - 16,180 \cdot X_1 Z_1 - 1,400 \cdot X_1 Z_2 + \varepsilon,$$

siendo:

$X_1 = 1$  si la respuesta se toma a una planta de tipo 1 y  $X_1 = 0$  en otro caso,

$Z_1 = 1$  si la respuesta se toma a una planta tratada con el nivel 1 de agua y  $Z_1 = 0$  en otro caso,

$Z_2 = 1$  si la respuesta se toma a una planta tratada con el nivel 2 de agua y  $Z_2 = 0$  en otro caso.

4. Excepto para  $(\alpha\beta)_{12}$ , en todos los demás casos los parámetros son significativamente distintos de cero y por tanto tienen peso significativo en el modelo estimado.



5. Es habitual describir el modelo estimado poniendo debajo de los coeficientes su error típico o el nivel crítico del correspondiente contraste:

$$y = 105,82 + 17,760 \cdot X_1 - 34,800 \cdot Z_1 - 20,140 \cdot Z_2 - 16,180 \cdot X_1 Z_1 - 1,400 \cdot X_1 Z_2 + \varepsilon,$$

$$\begin{matrix} (\pm 1,299) & (\pm 1,837) & (\pm 1,837) & (\pm 1,837) & (\pm 2,598) & (\pm 2,598) & (\pm 2,904) \\ (p = 0) & (p = 0) & (p = 0) & (p = 0) & (p = 0) & (p = 0,595) & \end{matrix}$$

6. La Tabla 2.9 proporciona además los intervalos de confianza para cada parámetro y los coeficientes  $\eta^2$  y potencia observada para cada contraste de los parámetros.

**Pruebas de homogeneidad**

Ofrece los resultados de la prueba de Levene para testar la hipótesis nula de igualdad de varianzas de la variable respuesta en todas las poblaciones definidas por combinaciones de los niveles de los factores (ver Tabla 2.10).

Tabla 2.10

**Contraste de Levene sobre la igualdad de las varianzas error <sup>a</sup>**

Variable dependiente: Crecimiento longitud del tallo

F	gl1	gl2	Significación
1,130	5	24	,372

Contrasta la hipótesis nula de que la varianza error de la variable dependiente es igual a lo largo de todos los grupos.

a. Diseño: Intercept+tipo+nivel+tipo \* nivel

La Prueba de Levene en la Tabla 2.10 conduce a un estadístico igual a 1,130 que en una  $F_{5,24}$  deja a su derecha una cola de probabilidad 0,372. Se concluye no rechazar la hipótesis nula de homogeneidad de varianzas de la variable crecimiento del tallo en las 6 poblaciones definidas por cada combinación de tipo de planta y nivel de agua considerados, validando así una de las hipótesis estructurales del modelo propuesto.

**Diagramas de dispersión x nivel**

Complementa el epígrafe anterior aportando información gráfica sobre la homogeneidad de varianza. El diagrama consiste en un gráfico de puntos: cada punto representa una población (combinación de niveles) de modo que su abscisa es la media y su ordenada la desviación típica (Figura 2.14) o la varianza (Figura 2.15). El objetivo es detectar si la varianza depende de la media (es frecuente comprobar que la respuesta crezca cuando lo hace la media:  $Var(y) = k \cdot \bar{y}^s$ ) lo cuál se pondría de manifiesto en este gráfico.

Figura 2.14

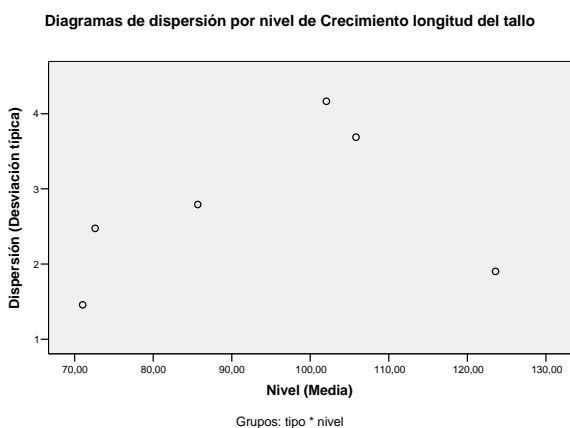
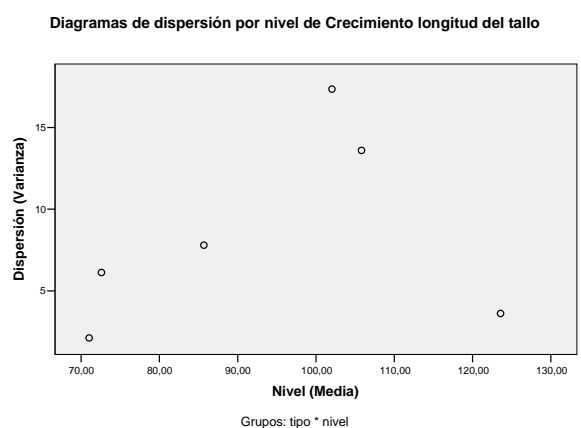


Figura 2.15



Las figuras 2.14 y 2.15 no muestran tendencias claras. Se observa que los niveles con mayor y menor crecimiento medio conducen a desviaciones típicas muy semejantes y, aparentemente, no parece claro que la dispersión de ambos gráficos pueda achacarse a una relación determinista, lo que concuerda con el hecho de que la prueba de Levene no encontrara significación estadística.

▪ **Gráfico de los residuos**

Gráfico matricial de puntos enfrentando:

- Valores **Observados** de la variable respuesta.
- Valores **Pronosticados** por el modelo estimado para la variable respuesta.
- **Residuos** (valores observados menos valores pronosticados por el modelo estimado).

Para ser precisos, los residuos se muestran tipificados (esto es divididos por la raíz cuadrada del error cuadrático medio estimado).

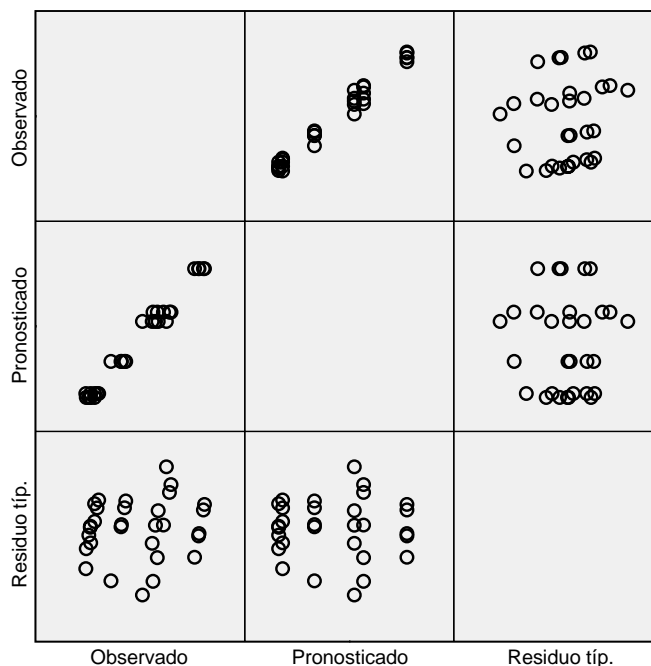
Este gráfico matricial da una idea de si se verifican los supuestos de independencia, homogeneidad de varianzas y falta de ajuste. En efecto:

- Si existe *independencia*, el gráfico de dispersión **Residuos-Observados** no debería mostrar pauta de variación sistemática (línea, curva, ...).
- Si existe *homoscedasticidad*, el gráfico de dispersión **Residuos-Pronosticados** es también de interés ya que la dispersión de los residuos debe ser similar para todos los valores pronosticados.
- Si el modelo utilizado ofrece un *buen ajuste a los datos*, entonces la nube de puntos **Pronosticados-Observados** debería mostrar un perfil cercano a la linealidad (cuanto más lineal mejor ajuste).

Para el ejemplo del crecimiento de las plantas, el gráfico de residuos asociado al modelo factorial completo es el que se muestra en la Figura 2.16.

Figura 2.16

**Variable dependiente: Crecimiento longitud del tallo**



Modelo\): Intersección + tipo + nivel + tipo \* nivel

Se observa que la nube **Residuos-Observados** (gráfico de coordenadas (1,3) o (3,1) en la matriz) se dispersa formando un círculo, lo que redundaría en su aleatoriedad y por tanto en corroborar la hipótesis de independencia.

La nube **Residuos-Pronosticados** (gráfico de coordenadas (2,3) o (3,2) en la matriz) muestra una dispersión semejante para cada valor pronosticado. Algo mayor para las medias pronosticadas en lugar 4 y 5 en orden creciente (tal y como se apreciaba en los diagramas de dispersión de las figuras 2.14 y 2.15) pero sin relevancia aparente.

Por último, la nube **Pronosticados-Observados** (gráfico de coordenadas (1,2) o (2,1) en la matriz) se ajusta a una relación lineal, probando así el buen nivel de ajuste del modelo estimado.

**Cuestión 17:** Construir el gráfico de residuos para este mismo ejemplo pero ajustando un modelo de efectos principales (sin interacción). Compararlo con el de la Figura 2.16. ¿Qué modelo presenta un mejor grado de ajuste? ¿Existe homoscedasticidad en este caso? ¿E independencia?

**Cuestión 18:** Supóngase que para un determinado experimento con dos factores tratamiento el modelo de efectos principales M1 es “más adecuado” que un modelo factorial completo M2. Entonces, ¿presenta necesariamente M1 un mejor nivel de ajuste a las observaciones que M2?

---

**EJEMPLO 3.**

Se realiza una investigación para comparar la concentración de mercurio en el encéfalo, la musculatura y los tejidos oculares de truchas expuestas a dosis subletales (0,30 unidades tóxicas) de metilo de mercurio. Diez truchas seleccionadas aleatoriamente arrojaron las siguientes concentraciones (en microgramos de mercurio por gramo de tejido):

<i>Número de trucha</i>	<i>Tejido</i>		
	<i>Encéfalo</i>	<i>Musculatura</i>	<i>Ojo</i>
1	1,65	0,98	0,49
2	1,37	1,17	0,40
3	1,48	1,05	0,44
4	1,40	1,45	0,55
5	1,61	0,96	0,43
6	1,59	1,00	0,39
7	1,22	1,24	0,43
8	1,66	1,01	0,57
9	1,49	0,86	0,87
10	1,67	1,13	0,52

**3.1. Descripción del plan experimental, modelo y estimación puntual.**

Las fuentes de variación controladas en este experimento son:

- Un factor tratamiento: “Tejido”, con tres niveles de efectos fijos: “Encéfalo”, “Musculatura” y “Ojo”.
- Un factor de bloqueo: “Trucha”, del que se han tomado de modo aleatorio 10 bloques o niveles de bloqueo (10 ejemplares).

Se trata de bloques completos (de tamaño 3, igual al número de niveles del factor tratamiento) pero no aleatorizados.

La variable respuesta o dependiente es “Concentración de mercurio (en microgramos por gramo de tejido)”.

Al tratarse de bloques completos de tamaño igual al número de niveles del factor tratamiento no es posible testar la existencia de interacción entre el factor tratamiento y el factor de bloqueo, de modo que el modelo matemático es análogo al de un diseño de dos vías de efectos principales con una sola réplica:

$$y_{ih} = \mu + \alpha_i + \theta_h + \varepsilon_{ih},$$

donde:

- $y_{ih}$  denota la concentración de mercurio evaluada en el tejido  $i$ -ésimo ( $i = 1,2,3$ ) de la  $h$ -ésima trucha ( $h = 1,2,\dots,9,10$ ).
- $\mu$  denota la concentración media de mercurio,
- $\alpha_i$  denota el efecto diferencial (respecto a la media  $\mu$ ) en la concentración de mercurio del tejido  $i$ -ésimo,
- $\theta_h$  denota el efecto diferencial (respecto a la media  $\mu$ ) en la concentración de mercurio de la  $h$ -ésima trucha,
- $\varepsilon_{ih}$  denota la parte de la respuesta  $y_{ih}$  no explicada por el modelo. Se asume que los  $\varepsilon_{ih}$  son todos ellos independientes e idénticamente distribuidos según una  $N(0, \sigma)$ .

Como en la sección anterior, los estimadores por mínimos cuadrados de  $\mu_{ih} = \mu + \alpha_i + \theta_h$  son únicos, resultando en este caso:  $\hat{\mu}_{ih} = \bar{y}_{i.} + \bar{y}_{.h} - \bar{y}_{..}$ . Sin embargo existen infinitas soluciones para estimar los parámetros  $\mu, \alpha_i$  y  $\theta_h$ , siendo necesario imponer restricciones. De acuerdo a la interpretación anterior, es habitual imponer las restricciones:  $\sum_i \hat{\alpha}_i = \sum_h \hat{\theta}_h = 0$ , resultando los estimadores:

- $\hat{\mu} = \bar{y}_{..}$
- $\hat{\alpha}_i = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}$ , para todo  $i$ ,
- $\hat{\theta}_h = \bar{y}_{.h} - \bar{y}_{..}$ , para todo  $h$ ,

En el SPSS se plantea el mismo modelo pero los efectos se computan con las restricciones  $\hat{\alpha}_I = \hat{\theta}_H = 0$ , siendo  $I$  y  $H$  los últimos códigos de los niveles del factor tratamiento y del factor bloque respectivamente. En el ejemplo, la última condición experimental es: tejido 3 ( $I = 3$ ) y trucha 10 ( $H = 10$ ), por lo tanto, las restricciones son:

$$\hat{\alpha}_3 = \hat{\theta}_{10} = 0.$$

Con este criterio los efectos en el SPSS se estiman como sigue:

- $\hat{\mu} = \bar{y}_{I.} + \bar{y}_{.H} - \bar{y}_{IH}$ ,
- $\hat{\alpha}_i = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{I.}$ , para todo  $i$ ,
- $\hat{\theta}_h = \bar{y}_{.h} - \bar{y}_{.H}$ , para todo  $h$ .

Y su interpretación es:

- $\mu$  denota la concentración de mercurio en el tejido codificado con el 3 de la décima trucha,
- $\alpha_i$  denota la diferencia entre la concentración media de mercurio del tejido  $i$ -ésimo y la concentración media de mercurio del tejido 3,
- $\theta_h$  denota la diferencia entre la concentración media de mercurio para la  $h$ -ésima trucha y la concentración media de mercurio de la trucha 10.

El modelo matemático utilizando variables “dummy” es:

$$y_{ih} = \mu_{IH} + \sum_{i=1}^{I-1} \alpha_i X_i + \sum_{h=1}^{H-1} \theta_h Z_h + \varepsilon_{ih},$$

siendo  $X_i$  la variable que toma el valor 1 cuando la concentración de mercurio se tomó en el tejido  $i$  y 0 en otro caso, y  $Z_h$  la variable que toma el valor 1 si la concentración de mercurio se tomó a la  $h$ -ésima trucha y 0 en otro caso.

### 3.2 Entrada de datos.

Se crean 3 columnas:

- *tejido* (con valores 1, 2 y 3 y etiquetas de valor Encéfalo, Musculatura y Ojo, respectivamente),
- *trucha* (con valores numéricos de 1 a 10 y etiquetas de valor Trucha 1,..., Trucha 10, respectivamente), y
- *mercurio* (recogiendo las respuestas adecuadamente en consonancia con orden, tipo y nivel adecuados).

El editor de datos quedaría como se muestra en la Figura 3.1 (etiquetas de valor activadas).

**Figura 3.1**

	tejido	trucha	mercurio	var	var	var	var	var	var	var	var	var	var
1	Encéfalo	Trucha 1	1,65										
2	Encéfalo	Trucha 2	1,37										
3	Encéfalo	Trucha 3	1,48										
4	Encéfalo	Trucha 4	1,40										
5	Encéfalo	Trucha 5	1,61										
6	Encéfalo	Trucha 6	1,59										
7	Encéfalo	Trucha 7	1,22										
8	Encéfalo	Trucha 8	1,66										
9	Encéfalo	Trucha 9	1,49										
10	Encéfalo	Truchas 10	1,67										
11	Musculatura	Trucha 1	,98										
12	Musculatura	Trucha 2	1,17										
13	Musculatura	Trucha 3	1,05										
14	Musculatura	Trucha 4	1,45										
15	Musculatura	Trucha 5	,96										
16	Musculatura	Trucha 6	1,00										
17	Musculatura	Trucha 7	1,24										
18	Musculatura	Trucha 8	1,01										
19	Musculatura	Trucha 9	,86										
20	Musculatura	Truchas 10	1,13										
21	Ojo	Trucha 1	,49										
22	Ojo	Trucha 2	,40										
23	Ojo	Trucha 3	,44										
24	Ojo	Trucha 4	,55										
25	Ojo	Trucha 5	,43										
26	Ojo	Trucha 6	,39										
27	Ojo	Trucha 7	,43										
28	Ojo	Trucha 8	,57										
29	Ojo	Trucha 9	,87										
30	Ojo	Truchas 10	,52										
31													

### 3.3 Análisis de un diseño bloqueado.

En el SPSS el análisis de la varianza de un diseño en bloques se realiza como si los factores de bloqueo fuesen factores tratamiento. Es procedente sin embargo obviar en el cuadro ANOVA resultante la información relativa a la prueba  $F$  de igualdad de efectos bloque ya que, en general, carece de sentido esta prueba. Para tener una idea de la conveniencia o no del bloqueo es habitual inspeccionar el coeficiente de determinación parcial asociado al factor de bloqueo. Las instrucciones para el SPSS son por tanto las que se resumen a continuación.

#### 3.3.1 Instrucciones para desarrollar el análisis.

1. En **Analizar > Modelo lineal general > Univariante** cubrir los campos como se indica en la Figura 3.2. Es irrelevante introducir el factor de bloqueo (*trucha*) como de efectos fijos o de efectos aleatorios ya que no interesa realizar contraste alguno sobre sus niveles.
2. Pulsar el botón **Modelo...** y cubrir el cuadro de diálogo emergente como se muestra en la Figura 3.3. Pulsar **Continuar**.
3. Dejaremos el botón **Contrastes...** sin activar ya que no se pide un contraste personalizado de interés sobre los efectos del factor *tejido*. Obviamente no se realizarán contrastes sobre los efectos de los bloques. Pulsar **Continuar**.
4. Pulsar el botón **Gráficos...** y solicitar los gráficos de perfil para el factor tratamiento (*tejido*) y el factor de bloqueo (*trucha*) siguiendo los pasos explicitados en la sección 2.3.5. Pulsar **Continuar**.

Figura 3.2

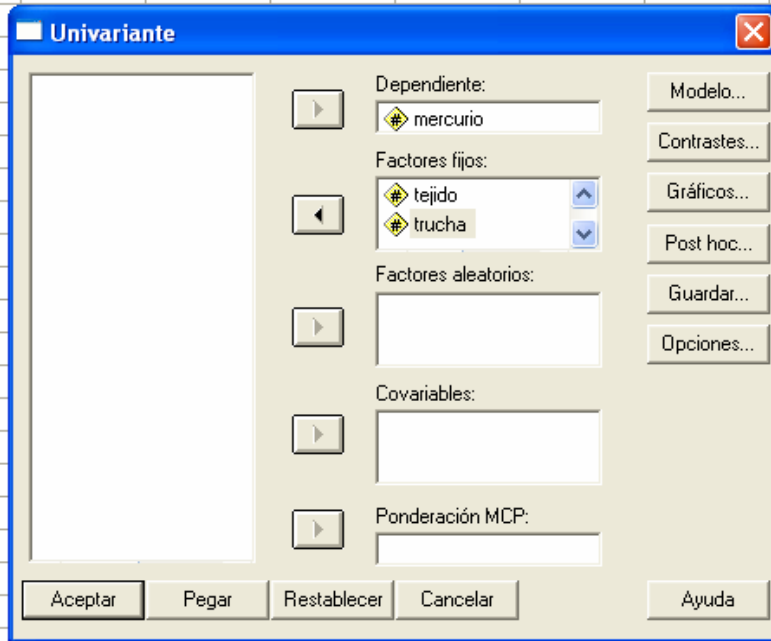
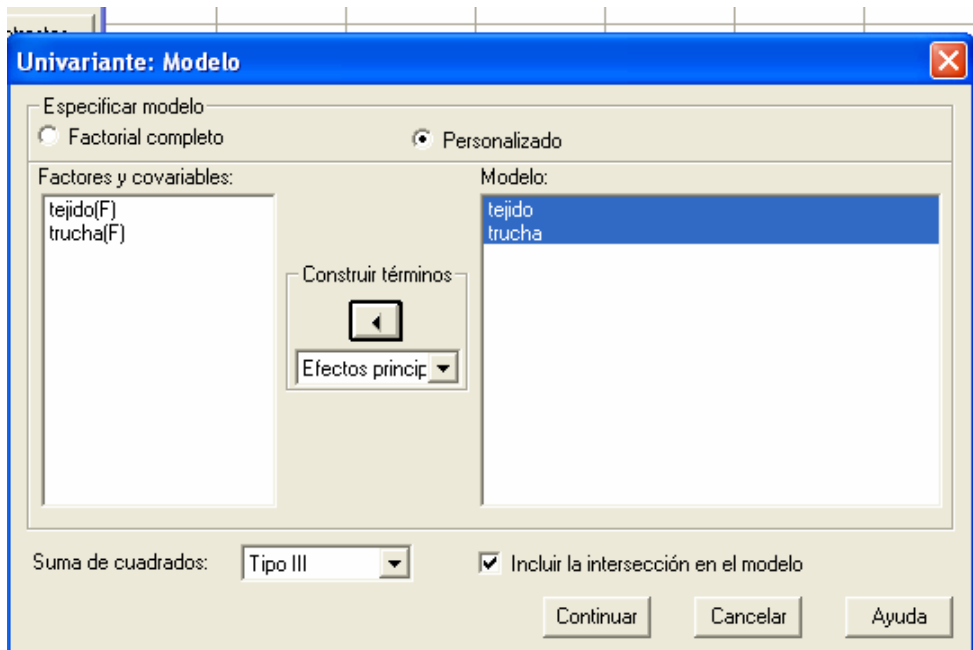


Figura 3.3



5. Pulsar el botón **Post hoc...** para realizar las comparaciones dos a dos de las medias de concentración de mercurio en los tres tipos de tejido analizados atendiendo a controlar la tasa de error de tipo I global. De nuevo incidir en que no se solicitarán comparaciones post hoc para los bloques. En este caso, al tratarse de sólo 3 niveles de tejido podría tener sentido el criterio de Bonferroni. Seleccionaremos Bonferroni, Scheffé, Duncan y Tukey (ver Figura 3.4). Pulsar **Continuar**.
6. Pulsar el botón **Opciones...** y marcar las herramientas detalladas en la sección 2.3.6 (ver Figura 3.5). Pulsar **Continuar**.
7. Por último pulsar el botón **Aceptar** y en el cuadro de diálogo principal **Univariante**.

Figura 3.4

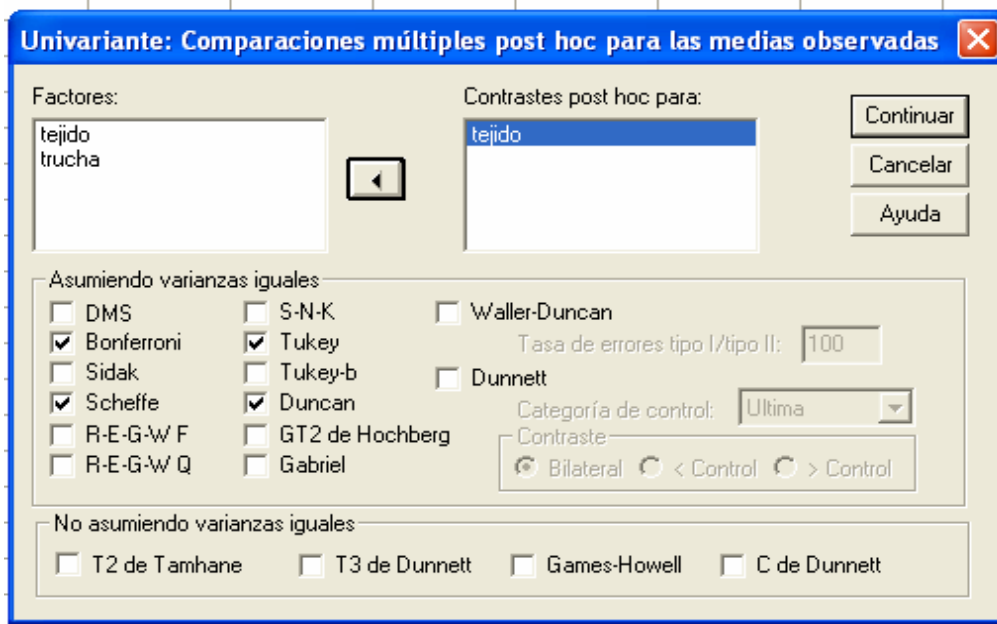
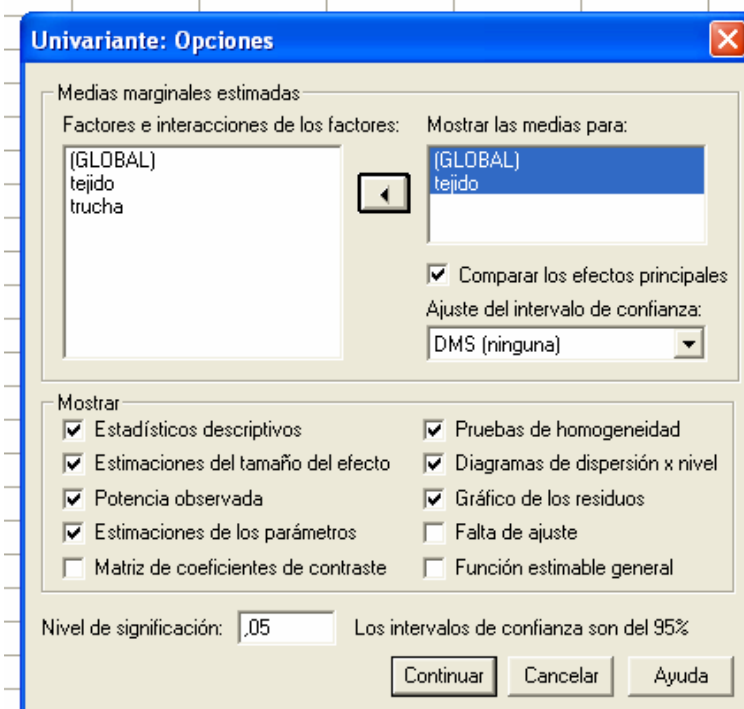


Figura 3.5



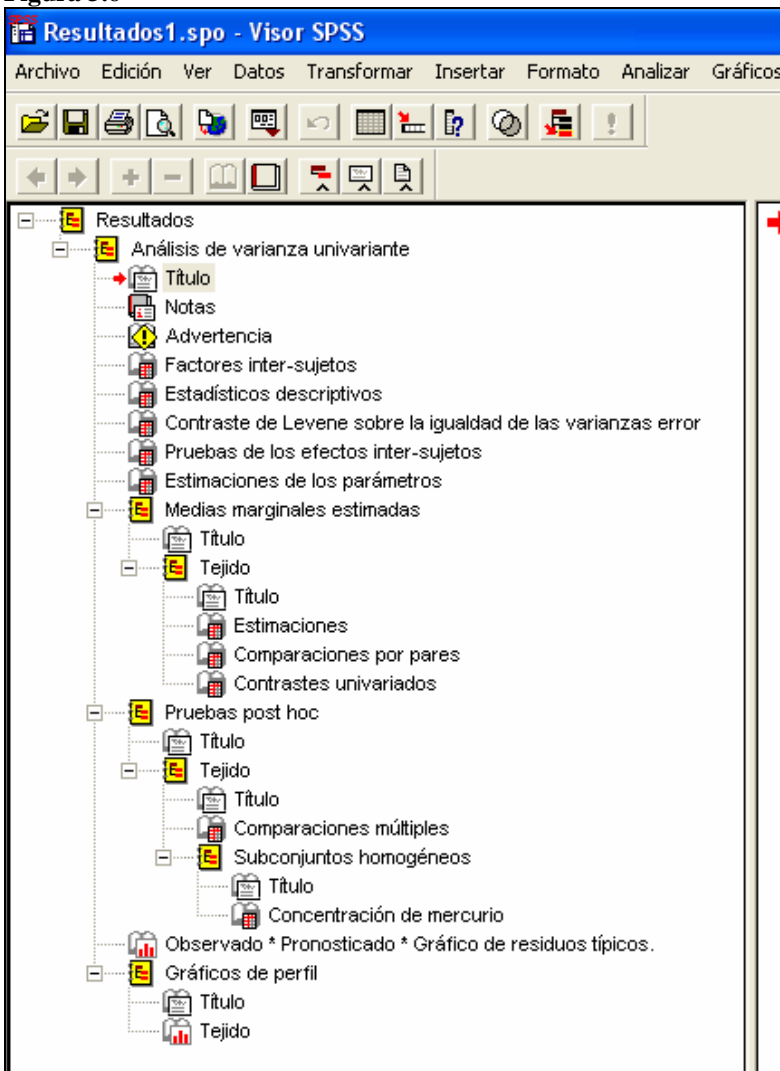
### 3.3.2 Resultados del análisis.

Las órdenes introducidas dan lugar a la salida de resultados que figura en forma de árbol en el panel de la izquierda del Visor de Resultados (ver Figura 3.6) y que se detallan en el panel de la derecha.

En lo que sigue se interpretan los resultados siguiendo el esquema de árbol de la Figura 3.6.



Figura 3.6



- ❖ **Advertencia.** Se informa que los diagramas de dispersión de algunas combinaciones de niveles de factores no se pueden construir por tener menos de dos observaciones. Obviamente se refiere en este caso a cualquier combinación [nivel de tejido – bloque (trucha)] ya que se tiene un único dato y en consecuencia dispersión 0.
- ❖ **Estadísticos descriptivos.** Por defecto se muestran las medias y desviación típica para cada combinación [nivel de tejido – trucha] que, al estar formadas por una única observación, son la propia observación y 0 respectivamente. Es por ello preferible manipular la tabla pivote para una presentación de los estadísticos de mayor interés.

Por ejemplo:

1. Situar el cursor sobre la tabla, pulsar el botón derecho y pulsar la opción **Paneles de pivotado**.
2. En el nuevo cuadro emergente situar el cursor sobre la segunda roseta del campo **Filas**, presionar y mantener presionado entonces el botón izquierdo del ratón para comprobar que se trata de la roseta relativa a **Número de trucha** y, si es así, arrastrar esta roseta al campo denominado **Capa**.
3. Si en el nuevo formato de tabla se selecciona la opción **Total** en el menú desplegable **Número de trucha**, la apariencia de la tabla será entonces la mostrada en la Tabla 3.1, que proporciona información sobre medias, desviaciones típicas y tamaños muestrales para cada nivel del factor tratamiento (*tejido*).
4. Si esta misma operación se realiza arrastrando la primera roseta (relativa a **Tejido**) y no la segunda como antes, entonces resulta la Tabla 3.2, que proporciona información sobre medias, desviaciones típicas y tamaños muestrales para cada bloque (*trucha*).

**Tabla 3.1**

**Estadísticos descriptivos**

Variable dependiente: Concentración de mercurio  
Número de trucha: Total

Tejido	Media	Desv. típ.	N
Encéfalo	1,5140	,14946	10
Musculatura	1,0850	,16926	10
Ojo	,5090	,14122	10
Total	1,0360	,44429	30

**Tabla 3.2**

**Estadísticos descriptivos**

Variable dependiente: Concentración de mercurio  
Tejido: Total

Número de trucha	Media	Desv. típ.	N
Trucha 1	1,0400	,58232	3
Trucha 2	,9800	,51215	3
Trucha 3	,9900	,52259	3
Trucha 4	1,1333	,50580	3
Trucha 5	1,0000	,59102	3
Trucha 6	,9933	,60003	3
Trucha 7	,9633	,46199	3
Trucha 8	1,0800	,54836	3
Trucha 9	1,0733	,36088	3
Truchas 10	1,1067	,57535	3
Total	1,0360	,44429	30

- ❖ **Contraste de Levene sobre la igualdad de las varianzas error.** Este contraste no puede realizarse en este caso porque tiene en cuenta siempre tantos grupos como combinaciones de factores existan. Al ser así y disponer tan sólo de una observación por grupo no quedan grados de libertad suficientes para estimar el error y no puede realizarse la prueba  $F$  del cuadro ANOVA. De ahí el resultado que se muestra en la Tabla 3.3, donde las celdas para el estadístico  $F$  y para el nivel crítico (Significación) aparecen vacías y los grados de libertad del denominador (gl2) son iguales a 0.

**Tabla 3.3**

**Contraste de Levene sobre la igualdad de las varianzas error(a)**

Variable dependiente: Concentración de mercurio

F	gl1	gl2	Significación
.	29	0	.

Contrasta la hipótesis nula de que la varianza error de la variable dependiente es igual a lo largo de todos los grupos.

a Diseño: Intercept+tejido+trucha

- ❖ **Pruebas de los efectos inter-sujetos.** Proporciona el cuadro ANOVA que se muestra en la Tabla 3.4.

Al objeto no tener en consideración la prueba  $F$  para los efectos bloque (*trucha*) es recomendable vaciar de contenido las celdas relativas a la misma y visualizar el ANOVA como se muestra en la Tabla 3.5.

Tabla 3.4

Pruebas de los efectos inter-sujetos

Variable dependiente: Concentración de mercurio

Fuente	Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Sig.	Eta al cuadrado parcial	Parámetro de no centralidad	Potencia observada <sup>a</sup>
Modelo corregido	5,181 <sup>b</sup>	11	,471	15,583	,000	,905	171,417	1,000
Intersección tejido	32,199	1	32,199	1065,417	,000	,983	1065,417	1,000
trucha	5,086	2	2,543	84,147	,000	,903	168,293	1,000
Error	,094	9	,010	,347	,946	,148	3,123	,130
Total	,544	18	,030					
Total	37,923	30						
Total corregida	5,725	29						

a. Calculado con alfa = ,05

b. R cuadrado = ,905 (R cuadrado corregida = ,847)

Tabla 3.5

Pruebas de los efectos inter-sujetos

Variable dependiente: Concentración de mercurio

Fuente	Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Sig.	Eta al cuadrado parcial	Parámetro de no centralidad	Potencia observada <sup>a</sup>
Modelo corregido	5,181 <sup>b</sup>	11	,471	15,583	,000	,905	171,417	1,000
Intersección tejido	32,199	1	32,199	1065,417	,000	,983	1065,417	1,000
trucha	5,086	2	2,543	84,147	,000	,903	168,293	1,000
Error	,094	9	,010	,347	,946	,148	3,123	,130
Total	,544	18	,030					
Total	37,923	30						
Total corregida	5,725	29						

a. Calculado con alfa = ,05

b. R cuadrado = ,905 (R cuadrado corregida = ,847)

En este caso, la descomposición de la suma de cuadrados para el modelo en bruto ( $y_{ih} = \mu + \alpha_i + \theta_h + \varepsilon_{ih}$ ) es:

$$\sum_{i=1}^I \sum_{h=1}^H y_{ih}^2 = \sum_{i=1}^I \sum_{h=1}^H \bar{y}_{..}^2 + \sum_{i=1}^I \sum_{h=1}^H (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^I \sum_{h=1}^H (\bar{y}_{.h} - \bar{y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^I \sum_{h=1}^H (y_{ih} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.h} + \bar{y}_{..})^2$$

que, de acuerdo a la notación del SPSS, equivale a:

$$\text{SC Total} = \text{SC Intersección} + \text{SC Tejido} + \text{SC Trucha} + \text{SC Error}$$

$$37,923 = 32,199 + 5,086 + 0,094 + 0,544$$

Para el modelo corregido ( $y_{ih} - \mu = \alpha_i + \theta_h + \varepsilon_{ih}$ ):

$$\sum_{i=1}^I \sum_{h=1}^H (y_{ih} - \bar{y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^I \sum_{h=1}^H (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^I \sum_{h=1}^H (\bar{y}_{.h} - \bar{y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^I \sum_{h=1}^H (y_{ih} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.h} + \bar{y}_{..})^2$$

que, en términos de la notación del SPSS, equivale a:

$$\text{SC Total corregida} = \text{SC Tejido} + \text{SC Trucha} + \text{SC Error}$$

$$5,725 = 5,086 + 0,094 + 0,544$$

Las conclusiones serían:

1. La estimación insesgada de la varianza del error ( $Var(\varepsilon_{ih}) = \sigma^2$ ) es la **SC Error** dividida por sus grados de libertad. Por tanto:

$$\text{SCM Error} = \hat{\sigma}^2 = 0,544/18 = \mathbf{0,030}$$

2. La hipótesis nula de que no hay diferencias entre las concentraciones medias de mercurio de los tres tejidos considerados  $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = cte$ , se contrasta a través del cociente:

$$\text{SCM tejido} / \text{SCM Error} = 2,543 / 0,030 = \mathbf{84,147}$$

que, en una  $F_{2,18}$ , conduce a un  $p$  valor igual a 0. Se rechaza la nula concluyendo que existen diferencias en las concentraciones medias de mercurio observadas en al menos dos de los tejidos considerados.

3. Dividiendo la expresión **SC Total corregida = SC Tejido + SC Trucha + SC Error** por **SC Total corregida** obtendremos los coeficientes de determinación parciales o, equivalentemente, el porcentaje de variabilidad atribuible a cada fuente de variación contemplada en el modelo propuesto. Se tiene:

$$\text{SC Total corregida} = \text{SC Tejido} + \text{SC Trucha} + \text{SC Error}$$

$$\mathbf{5,725} = \mathbf{5,086} + \mathbf{0,094} + \mathbf{0,544}$$

$$1 = \frac{5,086}{5,725} + \frac{0,094}{5,725} + \frac{0,544}{5,725} = 0,8889 + 0,0164 + 0,0950 = R^2(\text{tejido}) + R^2(\text{trucha}) + R^2(\text{error})$$

Por tanto:

- a. Variabilidad de la concentración de mercurio explicada por diferencias entre tejidos: **88,89 %**
- b. Variabilidad de la concentración de mercurio explicada por diferencias entre truchas: **1,64 %**
- c. Variabilidad de la concentración de mercurio explicada por el modelo formulado: **90,53 %**
- d. Variabilidad de la concentración de mercurio no explicada por el modelo formulado: **9,50 %**

Se concluye que no ha sido eficiente bloquear dado que las diferencias entre los bloques (*truchas*) explican tan sólo el 1,64% de la variabilidad de la respuesta, porcentaje a todas luces irrelevante. Sin embargo ha tenido un coste para el procedimiento dado que se han invertido (sin necesidad) 9 grados de libertad en estimar los efectos bloque.

**Cuestión 19:** ¿Por qué crees que se ha calificado a las truchas como bloques? ¿Podrían haber sido consideradas como una muestra de niveles de un factor tratamiento con efectos aleatorios (nótese que han sido seleccionadas al azar)?

**Cuestión 20:** ¿Se ha aplicado el principio de aleatorización en la ejecución de este experimento?

**Cuestión 21:** Supóngase que los datos fuesen fruto de un experimento piloto. A la luz del cuadro ANOVA resultante, ¿cómo propondrías planificar el experimento definitivo?

**Cuestión 22:** Supóngase que en realidad el experimento no se hubiese bloqueado y en realidad los datos procediesen de 30 truchas diferentes. ¿Cambiaría la estimación de la varianza del error? ¿Aumentaría el coeficiente de determinación del modelo?

- ❖ **Estimaciones de los parámetros.** La tabla generada en este epígrafe (que se reproduce en la Tabla 3.6) proporciona las estimaciones para los parámetros del modelo, sus errores típicos, intervalos de confianza y cantidades de interés para contrastar la hipótesis nula de que estos parámetros sean iguales a 0 (estadístico  $t$ , nivel crítico, potencia observada, coeficiente  $\eta^2$ ).

Tabla 3.6

Estimaciones de los parámetros

Variable dependiente: Concentración de mercurio

Parámetro	B	Error típ.	t	Sig.	Intervalo de confianza al 95%.		Eta al cuadrado parcial	Parámetro de no centralidad	Potencia observada <sup>a</sup>
					Límite inferior	Límite superior			
Intersección	,580	,110	5,272	,000	,349	,811	,607	5,272	,999
[tejido=1]	1,005	,078	12,927	,000	,842	1,168	,903	12,927	1,000
[tejido=2]	,576	,078	7,409	,000	,413	,739	,753	7,409	1,000
[tejido=3]	0 <sup>b</sup>	.	.	.	.	.	.	.	.
[trucha=1]	-,067	,142	-,470	,644	-,365	,232	,012	,470	,073
[trucha=2]	-,127	,142	-,892	,384	-,425	,172	,042	,892	,135
[trucha=3]	-,117	,142	-,822	,422	-,415	,182	,036	,822	,122
[trucha=4]	,027	,142	,188	,853	-,272	,325	,002	,188	,054
[trucha=5]	-,107	,142	-,751	,462	-,405	,192	,030	,751	,110
[trucha=6]	-,113	,142	-,798	,435	-,412	,185	,034	,798	,118
[trucha=7]	-,143	,142	-1,010	,326	-,442	,155	,054	1,010	,160
[trucha=8]	-,027	,142	-,188	,853	-,325	,272	,002	,188	,054
[trucha=9]	-,033	,142	-,235	,817	-,332	,265	,003	,235	,056
[trucha=10]	0 <sup>b</sup>	.	.	.	.	.	.	.	.

a. Calculado con alfa = ,05

b. Al parámetro se le ha asignado el valor cero porque es redundante.

Según la Tabla 3.6, el modelo puede escribirse como:

$$y = 0,580 + 1,005 \cdot X_1 + 0,576 \cdot X_2 - 0,067 \cdot Z_1 - 0,127 \cdot Z_2 - 0,117 \cdot Z_3 + 0,027 \cdot Z_4 - 0,107 \cdot Z_5 - 0,113 \cdot Z_6 - 0,143 \cdot Z_7 - 0,027 \cdot Z_8 - 0,033 \cdot Z_9 + \varepsilon$$

Siendo:

$X_1 = 1$  si la concentración de mercurio se tomó en el tejido 1 y  $X_1 = 0$  en otro caso,

$X_2 = 1$  si la concentración de mercurio se tomó en el tejido 2 y  $X_2 = 0$  en otro caso y

$Z_h = 1, h = 1, \dots, 9$ , si la concentración de mercurio se tomó en la  $h$ -ésima trucha y  $Z_h = 0, h = 1, \dots, 9$ , en otro caso.

Nótese que todos los niveles críticos asociados a los contrastes sobre efectos bloque (*trucha*) son superiores a 0,32 y pro tanto no se puede rechazar que los mismos sean iguales a 0 y por ello sobren del modelo (corroborando así la ineficiencia del bloque).

**Cuestión 23:** Si siempre se usa el valor de la SCM Error como estimación de la varianza del error, ¿por qué no son siempre iguales los errores típicos de los estimadores de los efectos en la Tabla 3.6? ¿por qué en cambio son iguales para los efectos del factor tratamiento y para los efectos bloque?.

**Cuestión 24:** ¿Qué valor de concentración de mercurio pronosticaría el modelo estimado para el tejido 3 de la trucha 7? ¿Coincide con el valor observado? ¿Sabrías plantear un modelo tal que los valores pronosticados coincidiesen con los realmente observados? ¿Cuál sería su estimación?

- ❖ Los epígrafes **Medias marginales estimadas** y **Pruebas post hoc** merecen pocos comentarios en este caso. En ambos se pone de manifiesto que todas las pruebas comparando las concentraciones medias de mercurio de dos tejidos cualesquiera resultan significativas. A modo de ejemplo se reproduce en la Tabla 3.7 el cuadro de **Subconjuntos homogéneos** generado a partir de las pruebas de Tukey, Duncan y Scheffe.

Tabla 3.7

## Concentración de mercurio

Tejido	N	Subconjunto			
		1	2	3	
DHS de Tukey <sup>a,b</sup>	Ojo	10	,5090		
	Musculatura	10		1,0850	
	Encéfalo	10			1,5140
	Significación		1,000	1,000	1,000
Duncan <sup>a,b</sup>	Ojo	10	,5090		
	Musculatura	10		1,0850	
	Encéfalo	10			1,5140
	Significación		1,000	1,000	1,000
Scheffe <sup>a,b</sup>	Ojo	10	,5090		
	Musculatura	10		1,0850	
	Encéfalo	10			1,5140
	Significación		1,000	1,000	1,000

Se muestran las medias para los grupos en subconjuntos homogéneos.

Basado en la suma de cuadrados tipo III

El término error es la Media cuadrática (Error) = ,030.

a. Usa el tamaño muestral de la media armónica = 10,000

b. Alfa = ,05.

**Cuestión 25:** En el cuadro de comparaciones múltiples del Visor de Resultados se proporcionan intervalos de confianza para la diferencia de medias de concentración de mercurio en dos tejidos. Para un mismo par de medias los intervalos son diferentes ya que su construcción depende del método de comparación empleado. ¿Cómo se construyen?

**Cuestión 26:** Los intervalos para la diferencia de medias de concentración de mercurio en Encéfalo y Musculatura son:

Método	Extremo Inferior	Extremo Superior
Tukey	0,2306	0,6274
Scheffe	0,2217	0,6363
Bonferroni	0,2238	0,6342

A la luz de estos intervalos, ¿qué método es preferible? ¿por qué?

- ❖ **Gráficos de perfil.** El gráfico de perfil para los tejidos (ver Figura 3.7) incide en las diferencias apuntadas previamente. Para tomar idea de la importancia de la distancia que separa los puntos en la Figura 3.7 adviértase que el error típico estimado para estas medias es 0,055 (ver cuadro **Medias marginales estimadas > Tejidos > Estimaciones** en el Visor de Resultados).

El gráfico de perfil para los bloques ha sido reescalado para tener la misma escala que el de los tejidos. Con esta escala se puede ver en la Figura 3.8. Claramente aquí las diferencias son irrelevantes.

- ❖ **Observado\*Pronosticado\*Residuos típicos.** Este gráfico de dispersión matricial (ver Figura 3.9) permite intuir que las hipótesis de homogeneidad de varianzas, independencia y bondad de ajuste están presentes y válida en cierto modo el análisis desarrollado.

Figura 3.7

Medias marginales estimadas de Concentración de mercurio

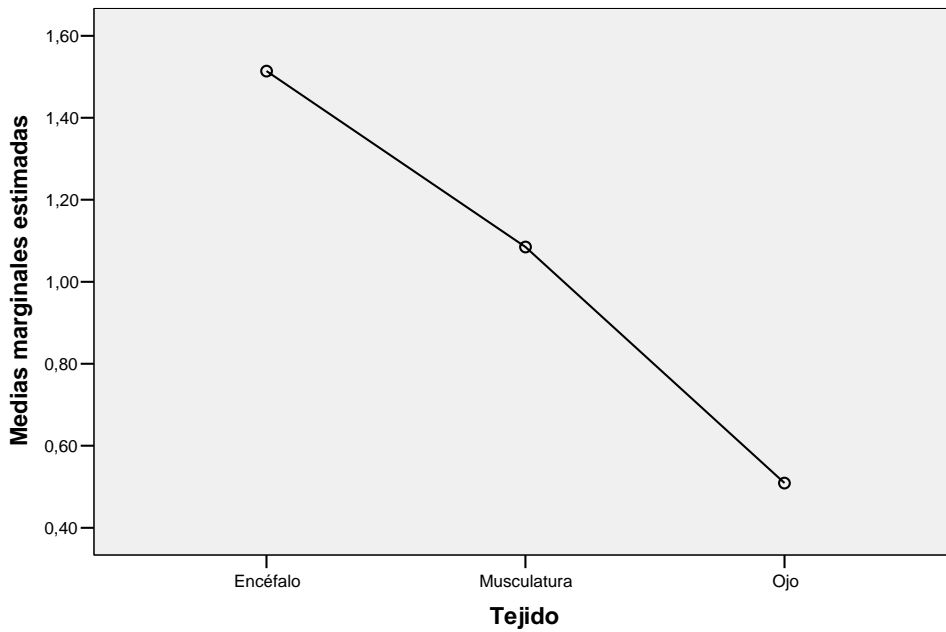


Figura 3.8

Medias marginales estimadas de Concentración de mercurio

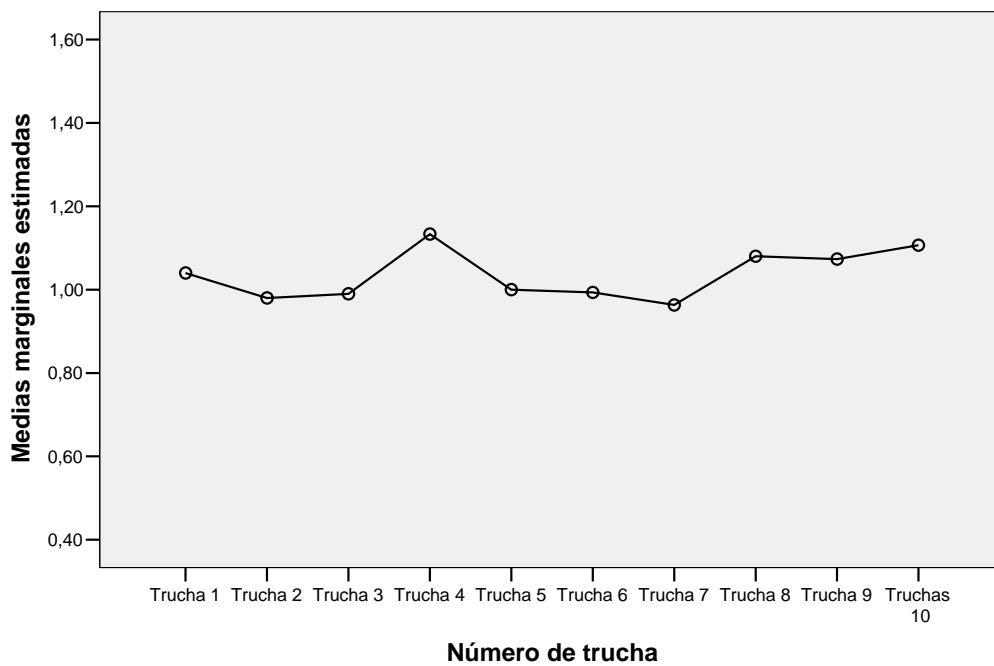
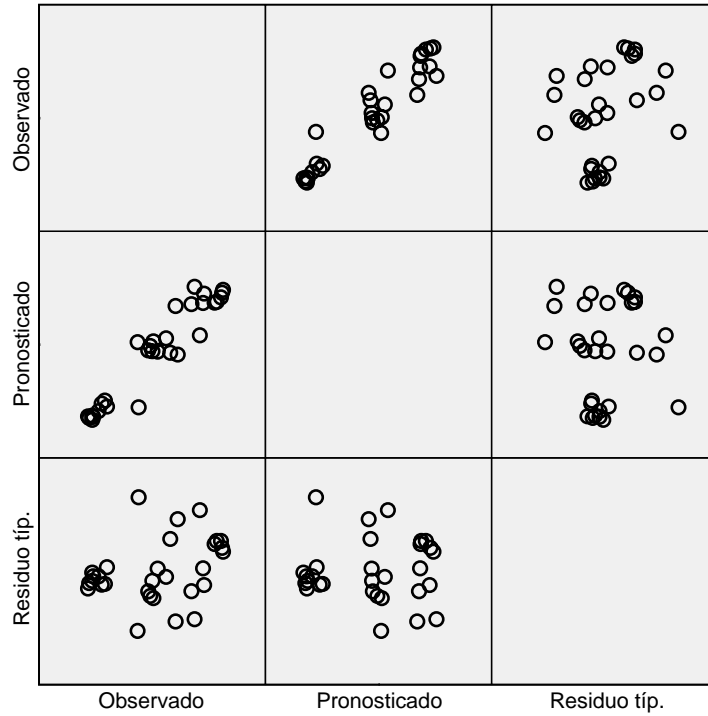


Figura 3.9

**Variable dependiente: Concentración de mercurio**



Modelo\ : Intersección + tejido + trucha



**EJEMPLO 4.**

Se realizó un estudio sobre cartuchos para filtrado de partículas de alta energía. Interesaba comparar los filtros de dos fabricantes. Cada fabricante comercializa tres filtros que son muy empleados en respiradores comerciales para protección contra partículas de materia. Se realizaron tres réplicas de prueba independientes con cada filtro. La medida evaluada fue el porcentaje de penetración, que fue obtenida a través de una prueba estándar de aerosol.

<i>Filtro</i>	<i>Fabricante 1</i>			<i>Fabricante 2</i>		
	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>
<i>Porcentaje de penetración</i>	1,12	0,16	0,15	0,91	0,66	2,17
<i>Porcentaje de penetración</i>	1,10	0,11	0,12	0,83	0,83	1,52
<i>Porcentaje de penetración</i>	1,12	0,26	0,12	0,95	0,61	1,58

**4.1. Descripción del plan experimental, modelo y estimación puntual.**

Las fuentes de variación controladas en este experimento son dos factores tratamiento:

- El “Fabricante”, con dos niveles de efectos fijos: “Fabricante 1” y “Fabricante 2”.
- El “Tipo de filtro” con seis niveles “Filtro 1”, ..., “Filtro 6”.

Los niveles del factor “Tipo de filtro” están anidados en los niveles del factor “Fabricante”. En “Fabricante 1” se ubican los niveles “Filtro 1”, “Filtro 2” y “Filtro 3” y en “Fabricante 2” se ubican los niveles “Filtro 4”, “Filtro 5” y “Filtro 6”. Se trata por tanto de un diseño jerarquizado o anidado en dos etapas.

La variable respuesta o dependiente es “Porcentaje de penetración”.

El modelo matemático asociado es:

$$y_{ijt} = \mu + \alpha_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{(ij)t},$$

donde:

- $y_{ijt}$  denota el porcentaje de penetración en la  $t$ -ésima observación ( $t = 1,2,3$ ) del  $j$ -ésimo filtro ( $j = 1,2,3$ ) del  $i$ -ésimo fabricante ( $i = 1,2$ ),
- $\mu$  denota el porcentaje medio de penetración,
- $\alpha_i$  denota el efecto diferencial respecto a la media  $\mu$  de los filtros del  $i$ -ésimo fabricante ( $i = 1,2$ ),
- $\beta_{j(i)}$  denota el efecto diferencial respecto a la media del  $i$ -ésimo fabricante ( $i = 1,2$ ) del  $j$ -ésimo filtro ( $j = 1,2,3$ ) del  $i$ -ésimo fabricante ( $i = 1,2$ ),
- $\varepsilon_{(ij)t}$  denota la parte de la respuesta  $y_{ijt}$  no explicada por el modelo. Se asume que los  $\varepsilon_{(ij)t}$  son todos ellos independientes e idénticamente distribuidos según una  $N(0, \sigma)$ .

Los estimadores por mínimos cuadrados de  $\mu_{j(i)} = \mu + \alpha_i + \beta_{j(i)}$  son únicos y son  $\hat{\mu}_{j(i)} = \bar{y}_{ij}$ . Sin embargo existen infinitas soluciones para estimar los parámetros  $\mu$ ,  $\alpha_i$  y  $\beta_{j(i)}$ , siendo necesario imponer restricciones.

De acuerdo a la interpretación anterior, es habitual imponer las restricciones:  $\sum_i \hat{\alpha}_i = 0$  y  $\sum_j \hat{\beta}_{j(i)} = 0$ , para todo  $i$ , resultando los estimadores:

- $\hat{\mu} = \bar{y}_{..}$  (en el ejemplo:  $\hat{\mu} = 0,7956$ )
- $\hat{\alpha}_i = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}$ , para todo  $i$ , (en el ejemplo:  $\hat{\alpha}_1 = -0,3223$ ,  $\hat{\alpha}_2 = 0,3223$ )
- $\hat{\beta}_{j(i)} = \bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i.}$ , para todo  $i, j$ ,  
(en el ejemplo:  $\hat{\beta}_{1(1)} = 0,6400$ ,  $\hat{\beta}_{2(1)} = -0,2966$ ,  $\hat{\beta}_{3(1)} = -0,3433$ ,  
 $\hat{\beta}_{1(2)} = -0,2211$ ,  $\hat{\beta}_{2(2)} = -0,4178$ ,  $\hat{\beta}_{3(2)} = 0,6389$ ).

En el SPSS se plantea el mismo modelo pero los efectos se computan con las restricciones  $\hat{\alpha}_I = 0$  y  $\hat{\beta}_{J(i)} = 0$ , para todo  $i$ , siendo  $I$  y  $J$  los últimos códigos de los niveles del factor tratamiento y del factor tratamiento anidado respectivamente. En el ejemplo,  $I = 2$  y  $J = 3$  de modo que las restricciones son:

$$\hat{\alpha}_2 = \hat{\beta}_{3(1)} = \hat{\beta}_{3(2)} = 0.$$

Con este criterio los efectos en el SPSS se estiman como sigue:

- $\hat{\mu} = \bar{y}_{IJ.}$  (en el ejemplo:  $\hat{\mu} = \bar{y}_{23.} = 1,757$ )
- $\hat{\alpha}_i = \bar{y}_{iJ.} - \bar{y}_{IJ.}$ , para todo  $i$ , (en el ejemplo:  $\hat{\alpha}_1 = \bar{y}_{13.} - \bar{y}_{23.} = -1,627$ ,  $\hat{\alpha}_2 = 0$ )
- para cada  $i$ ,  $\hat{\beta}_{j(i)} = \bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{iJ.}$ , para todo  $j$ ,  
(en el ejemplo:  $\hat{\beta}_{1(1)} = \bar{y}_{11.} - \bar{y}_{13.} = 0,983$ ,  $\hat{\beta}_{2(1)} = \bar{y}_{12.} - \bar{y}_{13.} = 0,047$ ,  $\hat{\beta}_{3(1)} = 0$ ,  
 $\hat{\beta}_{1(2)} = \bar{y}_{21.} - \bar{y}_{23.} = -0,860$ ,  $\hat{\beta}_{2(2)} = \bar{y}_{22.} - \bar{y}_{23.} = -1,057$ ,  $\hat{\beta}_{3(2)} = 0$ ).

que se deben interpretar de la siguiente forma:

- $\mu$  denota el porcentaje de penetración medio con el último (tercer) filtro del último (segundo) fabricante,
- $\alpha_i$  denota la diferencia entre los porcentajes de penetración medios con los últimos (terceros) filtros del segundo y primer fabricante,
- para el  $i$ -ésimo fabricante,  $\beta_{j(i)}$  denota la diferencia entre los porcentajes de penetración medios con sus filtros  $j$ -ésimo y último (tercero).

El modelo matemático utilizando variables “dummy” es:

$$y = \mu + \sum_{j=1}^{J-1} \beta_{j(I)} Z_j + \sum_{i=1}^{I-1} \left( \alpha_i + \sum_{j=1}^{J-1} \beta_{j(i)} Z_j \right) X_i + \varepsilon,$$

siendo  $X_i$  la variable que toma el valor 1 cuando el porcentaje de penetración se mide en un filtro del  $i$ -ésimo fabricante y 0 en otro caso, y  $Z_j$  la variable que toma el valor 1 si se trata del  $j$ -ésimo filtro y 0 en otro caso.

#### 4.2 Entrada de datos.

Se crean 3 columnas:

- *fabricante* (con valores 1 y 2 y etiquetas de valor “Fabricante 1” y “Fabricante 2”, respectivamente),
- *filtro* (con valores de 1 a 6 y etiquetas de valor “Filtro 1 de fabricante 1”, “Filtro 2 de fabricante 1”, “Filtro 3 de fabricante 1”, “Filtro 1 de fabricante 2”, “Filtro 2 de fabricante 2”, v “Filtro 3 de fabricante 2”, respectivamente), y
- *penetración* (recogiendo las observaciones de porcentaje de penetración observado en consonancia con filtro y fabricante adecuados).

El editor de datos quedaría como se muestra en la Figura 4.1 (etiquetas de valor activadas).

Figura 4.1

4 :

	fabricante	filtro	penetracion	var	var	var	var	var	var	var
1	Fabricante 1	Filtro 1 del fabricante 1	1,12							
2	Fabricante 1	Filtro 1 del fabricante 1	1,10							
3	Fabricante 1	Filtro 1 del fabricante 1	1,12							
4	Fabricante 1	Filtro 2 del fabricante 1	,16							
5	Fabricante 1	Filtro 2 del fabricante 1	,11							
6	Fabricante 1	Filtro 2 del fabricante 1	,26							
7	Fabricante 1	Filtro 3 del fabricante 1	,15							
8	Fabricante 1	Filtro 3 del fabricante 1	,12							
9	Fabricante 1	Filtro 3 del fabricante 1	,12							
10	Fabricante 2	Filtro 1 del fabricante 2	,91							
11	Fabricante 2	Filtro 1 del fabricante 2	,83							
12	Fabricante 2	Filtro 1 del fabricante 2	,95							
13	Fabricante 2	Filtro 2 del fabricante 2	,66							
14	Fabricante 2	Filtro 2 del fabricante 2	,83							
15	Fabricante 2	Filtro 2 del fabricante 2	,61							
16	Fabricante 2	Filtro 3 del fabricante 2	2,17							
17	Fabricante 2	Filtro 3 del fabricante 2	1,52							
18	Fabricante 2	Filtro 3 del fabricante 2	1,58							
19										
20										
21										
22										
23										
24										
25										
26										
27										
28										
29										
30										
31										

Vista de datos / Vista de variables / SPSS El procesador está preparado

### 4.3 Análisis de un diseño jerarquizado.

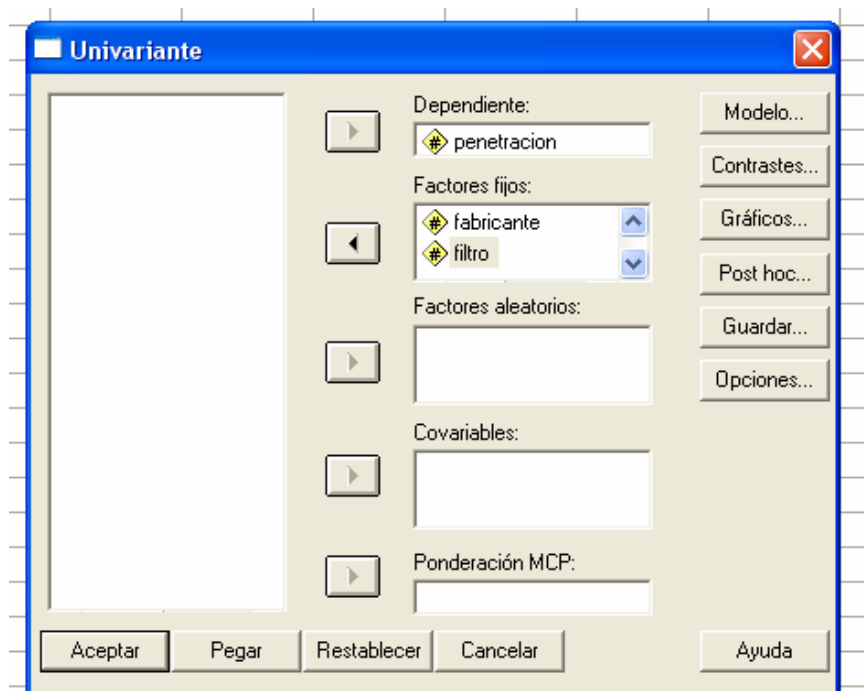
Es necesario utilizar el editor de sintaxis para informar al SPSS que se trata de un diseño jerarquizado. Las instrucciones para desarrollar el análisis se ejecutan en mismo cuadro de diálogo que en diseños cruzados (**Analizar > Modelo lineal general > Univariante**) pero será necesario incluir una orden precisa en la sintaxis del procedimiento dado que en el epígrafe dedicado a la selección del modelo no aparece esa posibilidad.

Cuando uno de los factores (B) tiene sus niveles anidados en los de otro (A), no es obviamente posible contrastar la existencia de interacción. La modelización empleada para un diseño jerarquizado permite sin embargo contrastar la existencia de efectos principales. Sin embargo, de manera análoga al caso de la interacción en diseños cruzados, se tendrá presente que si el contraste sobre igualdad de efectos de los niveles del factor anidado B ( $H_0^{B(A)} : \beta_{1(i)} = \dots = \beta_{J(i)}, \forall i = 1, \dots, I$ ) es significativo, entonces no debiera tenerse en cuenta el resultado del contraste sobre igualdad de efectos del factor no anidado A ( $H_0^A : \alpha_1 = \dots = \alpha_I$ ). En términos del ejemplo tratado, si el porcentaje de penetración varía para los filtros de un mismo fabricante, difícilmente son comparables los fabricantes sin considerar los filtros.

#### 4.3.1 Instrucciones para desarrollar el análisis.

1. En **Analizar > Modelo lineal general > Univariante** se cubrirán los campos exactamente igual a como se haría si se tratase de un diseño cruzado (ver Figura 4.2).

Figura 4.2



2. Pulsar el botón **Modelo...** y marcar la opción **Personalizado**.
3. Seleccionar la variable que define el factor no anidado (*fabricante*) dentro de la lista **Factores y covariables**.
4. Seleccionar **Efectos principales** dentro del menú desplegable **Construir términos** y pulsar el botón flecha para trasladar la variable *fabricante* a la lista **Modelo**.
5. Completar la selección de los procedimientos a ejecutar en el resto de botones del cuadro de diálogo **Univariante**.
6. Antes de pulsar el botón **Aceptar** del cuadro de diálogo **Univariante**, pulsar el botón **Pegar**. Se abrirá el editor de sintaxis y mostrará la sintaxis con las órdenes especificadas. Por ejemplo, una ventana como la que se muestra en la Figura 4.3 (a). La última fila necesariamente incluirá la sentencia **/DESIGN = fabricante**. Para informar del anidamiento del factor *filtro* en *fabricante* se completará la sentencia como:

**/DESIGN = fabricante filtro(fabricante)**

tal y como se muestra en la Figura 4.3 (b).

7. Pulsar el botón **Ejecutar** en el menú principal del editor de sintaxis tal y como se muestra en la Figura 4.4.

#### 4.3.2 Resultados del análisis.

Se analizan ahora los aspectos más relevantes de la salida en el Visor de Resultados.

El cuadro de **Estadísticos descriptivos** (Tabla 4.1) muestra una razonable homogeneidad en la dispersión de cada uno de los seis grupos (*fabricante\*filtro(fabricante)*) con excepción del filtro 3 del fabricante 2, para el que se ha obtenido una desviación típica considerablemente más importante. La construcción de un gráfico de dispersión de las respuestas (ver órdenes precisas en la Figura 4.5(a) y resultado en la Figura 4.5(b)) ilustra este hecho. Más aún, la Figura 4.5 muestra como el filtro 1 del fabricante 1 proporciona resultados sustancialmente más elevados que los otros filtros de este fabricante y al nivel de los resultados promedio de los filtros del fabricante 2. Resulta obvio advertir que el tamaño muestral (tres datos por grupo) es excesivamente pequeño.

Figura 4.3

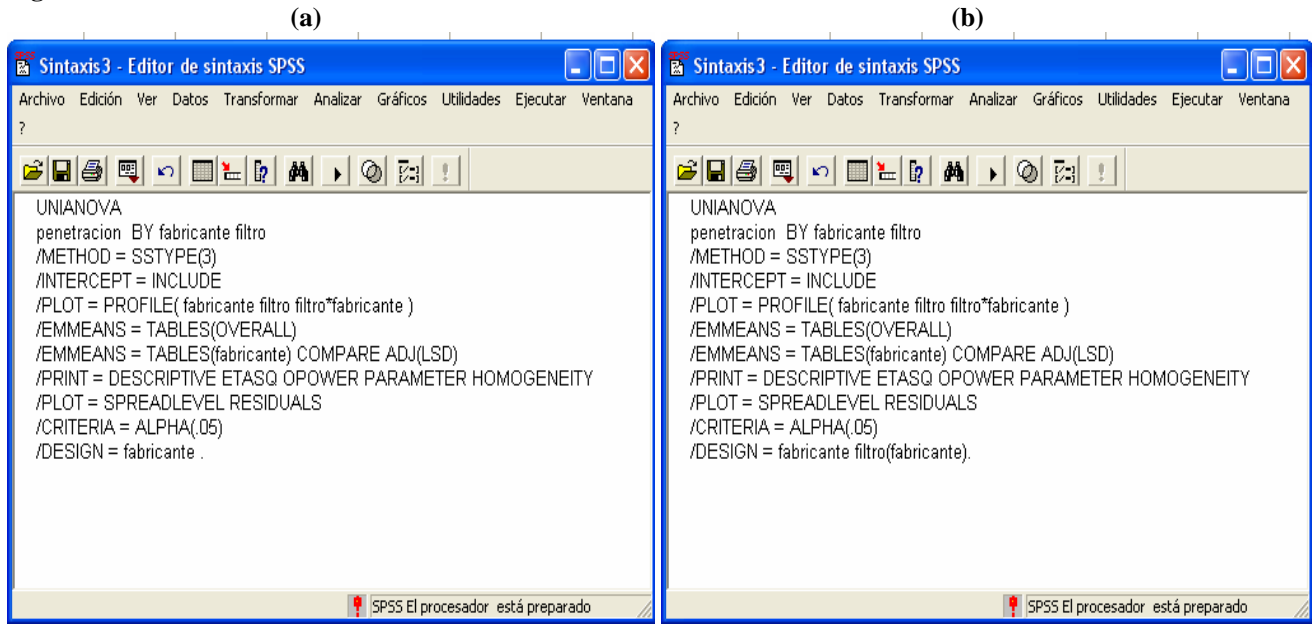


Figura 4.4

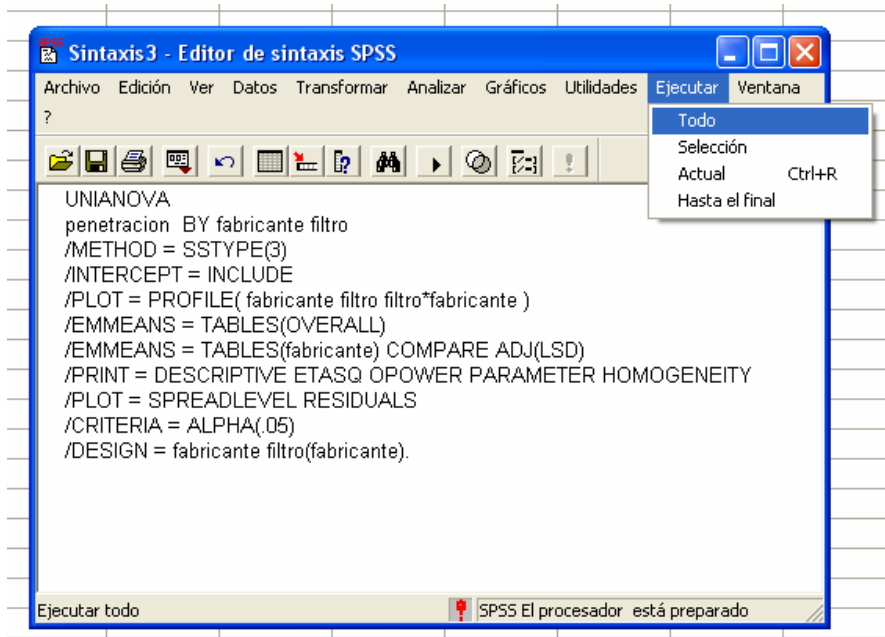


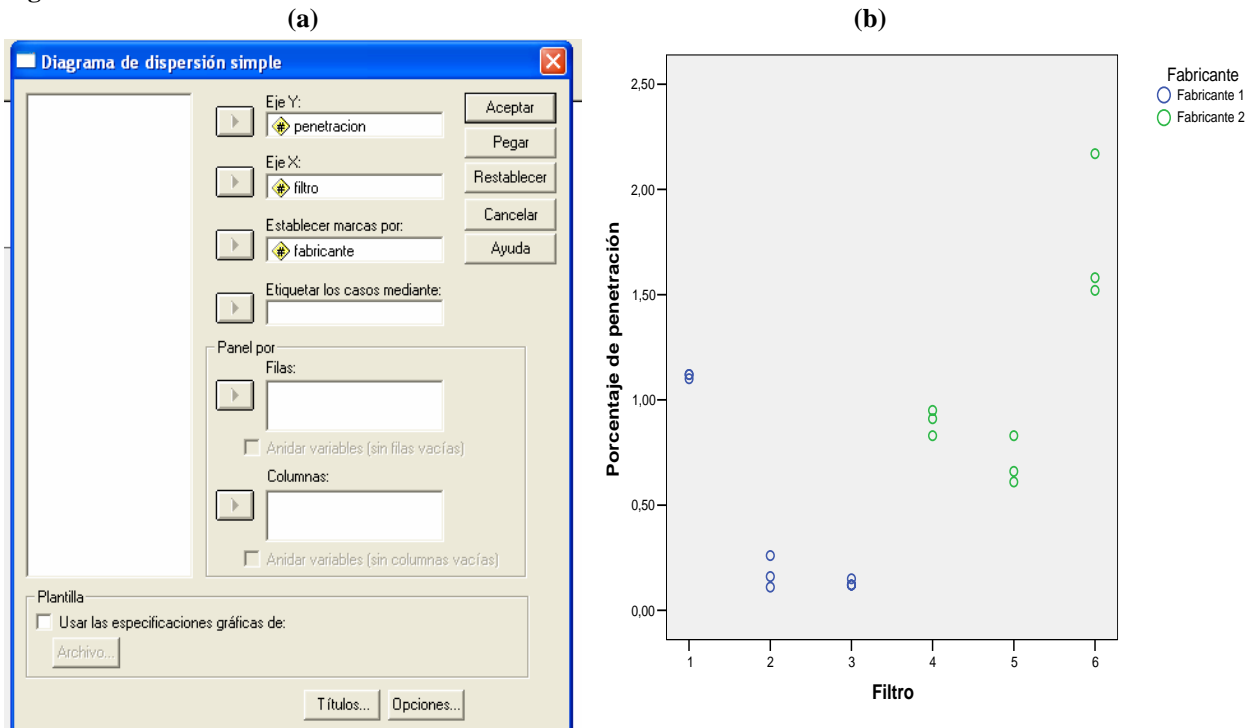
Tabla 4.1

**Estadísticos descriptivos**

Variable dependiente: Porcentaje de penetración

	Filtro	Media	Desv. típ.	N
Fabricante 1	Filtro 1 del fabricante 1	1,1133	,01155	3
	Filtro 2 del fabricante 1	,1767	,07638	3
	Filtro 3 del fabricante 1	,1300	,01732	3
	Total	,4733	,48205	9
Fabricante 2	Filtro 1 del fabricante 2	,8967	,06110	3
	Filtro 2 del fabricante 2	,7000	,11533	3
	Filtro 3 del fabricante 2	1,7567	,35921	3
	Total	1,1178	,52285	9

Figura 4.5



En consonancia con los comentarios anteriores no es sorprendente que la prueba de Levene rechace la hipótesis nula de homoscedasticidad (Tabla 4.2).

Tabla 4.2

**Contraste de Levene sobre la igualdad de las varianzas error<sup>a</sup>**

Variable dependiente: Porcentaje de penetración

F	gl1	gl2	Significación
9,312	5	12	,001

Contrasta la hipótesis nula de que la varianza error de la variable dependiente es igual a lo largo de todos los grupos.

a. Diseño: Intercept+fabricante+filtro(fabricante)

En **Pruebas de los efectos inter-sujetos** está el cuadro ANOVA que se muestra en la Tabla 4.3.

Tabla 4.3

**Pruebas de los efectos inter-sujetos**

Variable dependiente: Porcentaje de penetración

Fuente	Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Sig.	Eta al cuadrado parcial	Parámetro de no centralidad	Potencia observada <sup>a</sup>
Modelo corregido	5,610 <sup>b</sup>	5	1,122	44,194	,000	,948	220,970	1,000
Intersección fabricante	11,392	1	11,392	448,714	,000	,974	448,714	1,000
filtro(fabricante)	1,869	1	1,869	73,611	,000	,860	73,611	1,000
Error	3,741	4	,935	36,840	,000	,925	147,359	1,000
Total	,305	12	,025					
Total corregida	17,307	18						
Total	5,915	17						

a. Calculado con alfa = ,05

b. R cuadrado = ,948 (R cuadrado corregida = ,927)

La descomposición de la suma de cuadrados para el modelo en bruto ( $y_{ijt} = \mu + \alpha_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{ijt}$ ) es:

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T y_{ijt}^2 = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T \bar{y}_{...}^2 + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2 + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..})^2 + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T (y_{ijt} - \bar{y}_{ij.})^2$$

que, de acuerdo a la notación del SPSS, equivale a:

$$\begin{aligned} \text{SC Total} &= \text{SC Intersección} + \text{SC Fabricante} + \text{SC Filtro(Fabricante)} + \text{SC Error} \\ 17,307 &= 11,392 + 1,869 + 3,741 + 0,305 \end{aligned}$$

Para el modelo corregido ( $y_{ijt} - \mu = \alpha_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{ijt}$ ):

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T (y_{ijt} - \bar{y}_{...})^2 = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2 + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..})^2 + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T (y_{ijt} - \bar{y}_{ij.})^2$$

que, en términos de la notación del SPSS, equivale a:

$$\begin{aligned} \text{SC Total corregida} &= \text{SC Fabricante} + \text{SC Filtro(Fabricante)} + \text{SC Error} \\ 5,915 &= 1,869 + 3,741 + 0,305 \end{aligned}$$

Las conclusiones serían:

1. La estimación insesgada de la varianza del error ( $Var(\varepsilon_{ijt}) = \sigma^2$ ) es la **SC Error** dividida por sus grados de libertad (12). Por tanto:

$$\text{SCM Error} = \hat{\sigma}^2 = 0,305 / 12 = \mathbf{0,025}$$

2. La hipótesis nula de que no hay diferencias en la respuesta debido a los efectos filtro para cada fabricante:

$$H_0^{\text{filtro(fabricante)}} : \beta_{1(1)} = \beta_{2(1)} = \beta_{3(1)} = cte_1 \text{ y } \beta_{1(2)} = \beta_{2(2)} = \beta_{3(2)} = cte_2$$

se contrasta a través del cociente:

$$\text{SCM Filtro(Fabricante)} / \text{SCM Error} = 0,935 / 0,025 = \mathbf{36,840}$$

que, en una  $F_{4,12}$ , conduce a un  $p$  valor igual a 0. Se rechaza la nula concluyendo que, para al menos un fabricante, existen diferencias significativas en los porcentajes de penetración debido al filtro empleado.

3. Como consecuencia de la conclusión previa, carece de sentido valorar los resultados del ANOVA para la fuente de variación *fabricante*, (orientados a testar que se refieren a testar  $H_0^{\text{fabricante}} : \alpha_1 = \alpha_2 = cte$ ).
4. Las dos fuentes de variación consideradas tienen un alto poder explicativo de la dispersión de la respuesta ya que el coeficiente de determinación del modelo es alto: **0,948**. En consecuencia el modelo planteado tiene una alta capacidad para predecir la respuesta.

Precisamente el epígrafe **Estimaciones de los parámetros** (ver Tabla 4.4) nos proporciona el modelo estimado:

$$y = 1,757 - 0,860 \cdot Z_1 - 1,057 \cdot Z_2 + (-1,627 + 0,983 \cdot Z_1 + 0,047 \cdot Z_2) \cdot X_1 + \varepsilon,$$

siendo  $X_1$  la variable que toma el valor 1 cuando el porcentaje de penetración se mide en un filtro del primer fabricante y 0 en otro caso, y  $Z_j$  la variable que toma el valor 1 si se trata del  $j$ -ésimo filtro y 0 en otro caso.

**Tabla 4.4**

**Estimaciones de los parámetros**

Variable dependiente: Porcentaje de penetración

Parámetro	B	Error típ.	t	Sig.	Intervalo de confianza al 95%.		Eta al cuadrado parcial	Parámetro de no centralidad	Potencia observada <sup>a</sup>
					Límite inferior	Límite superior			
Intersección	1,757	,092	19,095	,000	1,556	1,957	,968	19,095	1,000
[fabricante=1]	-1,627	,130	-12,503	,000	-1,910	-1,343	,929	12,503	1,000
[fabricante=2]	0 <sup>b</sup>	.	.	.	.	.	.	.	.
[filtro=1]([fabricante=1])	,983	,130	7,558	,000	,700	1,267	,826	7,558	1,000
[filtro=2]([fabricante=1])	,047	,130	,359	,726	-.237	,330	,011	,359	,063
[filtro=3]([fabricante=1])	0 <sup>b</sup>	.	.	.	.	.	.	.	.
[filtro=4]([fabricante=2])	-.860	,130	-6,610	,000	-1,143	-.577	,785	6,610	1,000
[filtro=5]([fabricante=2])	-1,057	,130	-8,122	,000	-1,340	-.773	,846	8,122	1,000
[filtro=6]([fabricante=2])	0 <sup>b</sup>	.	.	.	.	.	.	.	.

a. Calculado con alfa = ,05

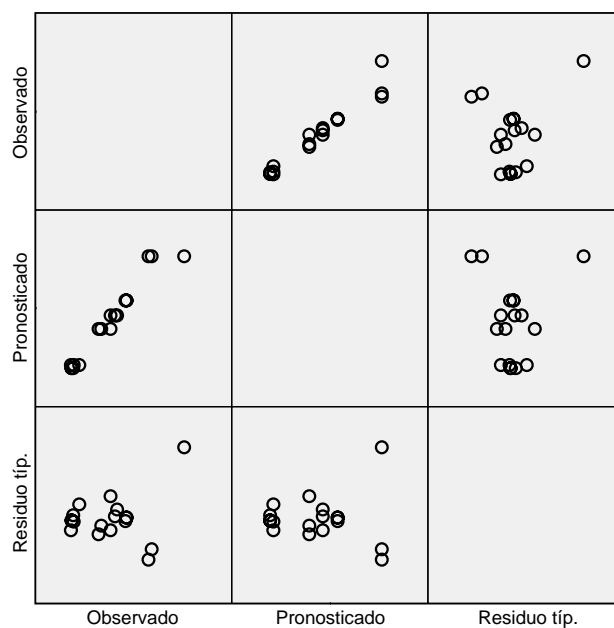
b. Al parámetro se le ha asignado el valor cero porque es redundante.

El único coeficiente que podría ser eliminado del modelo por no ser significativamente distinto de 0 es  $\beta_{2(1)}$  ( $p$ -valor igual a 0,726). En otros términos, los porcentajes de penetración medios con los filtros 2 y 3 del primer fabricante no difieren significativamente.

El gráfico para el análisis de residuos (Figura 4.6) confirma la presencia de una observación atípica con el tercer filtro del segundo fabricante. Esta observación “estropea” la homoscedasticidad pero el resto de diagramas de puntos muestran un buen ajuste del modelo y la aleatoriedad de los residuos.

**Figura 4.6**

**Variable dependiente: Porcentaje de penetración**

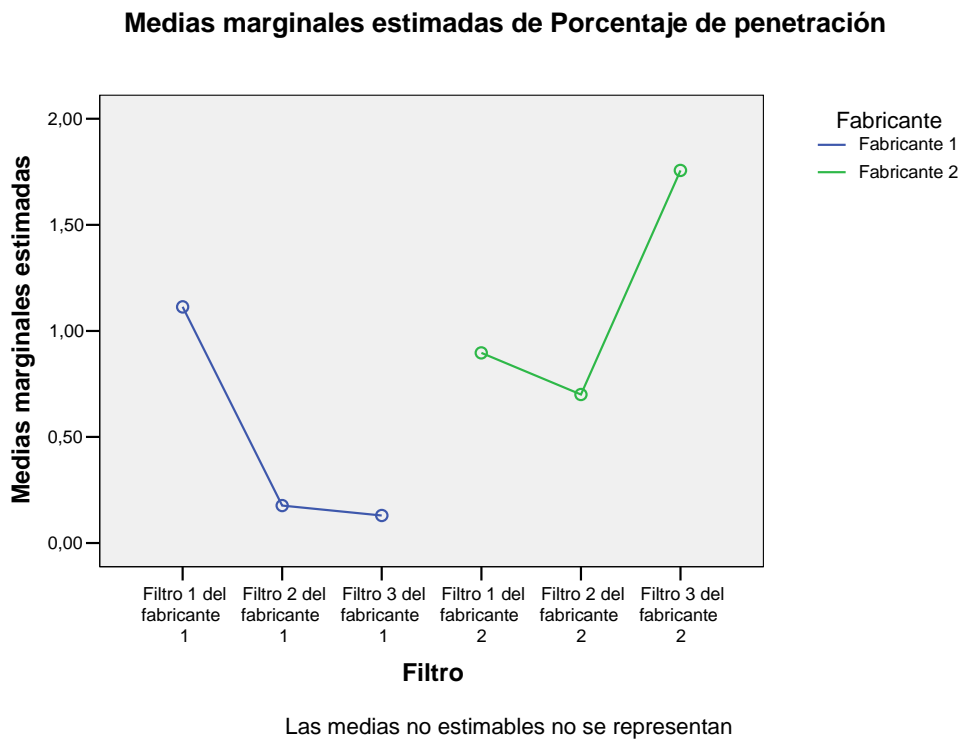


Modelo\): Intersección + fabricante + filtro ( penetracion)



El gráfico de perfil para la combinación de niveles (Figura 4.7) es también interesante.

Figura 4.7



**Cuestión 27:** ¿Sabrías explicar el origen de los grados de libertad para las distintas fuentes de variación del cuadro ANOVA de la Tabla 4.3?

**EJEMPLO 5.**

Se realiza un experimento para evaluar los efectos de cuatro complementos vitamínicos en el aumento de peso de animales de laboratorio. Se planificó un diseño completamente aleatorizado, con cinco animales, en jaulas separadas, para cada tratamiento. Además de medir el aumento de peso (variable  $y$  en gramos), se midió el consumo de calorías (variable  $x$  en calorías/10) ya que esta variable difiere entre los animales e influye en el aumento de peso.

<i>Dieta</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>2</i>	<i>2</i>	<i>2</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>3</i>	<i>3</i>	<i>3</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>4</i>	<i>4</i>	<i>4</i>	<i>4</i>
$y$	48	67	78	69	53	65	49	37	73	63	79	52	63	65	67	59	50	59	42	34
$x$	35	44	44	51	47	40	45	37	53	42	51	41	47	47	48	53	52	52	51	43

**5.1. Descripción del plan experimental, modelo y estimación puntual.**

Fuentes de variación evaluadas:

- Un factor tratamiento, la “Dieta”, con cuatro niveles de efectos fijos: “Dieta 1”, “Dieta 2”, “Dieta 3” y “Dieta 4”.
- Una covariable,  $x$  = “Consumo de calorías (cal/10)”.

Se trata por tanto de un diseño de una vía completamente aleatorizado y con una covariable.

La variable respuesta o dependiente es  $y$  = “Aumento de peso (gramos)”.

El modelo matemático asociado es:

$$y_{it} = \mu + \tau_i + \beta x_{it} + \varepsilon_{it},$$

donde:

- $y_{it}$  denota el aumento de peso del  $t$ -ésimo animal ( $t = 1,2,3,4,5$ ) alimentado con la  $i$ -ésima dieta ( $i = 1,2,3,4$ ),
- $\mu$  denota el aumento medio de peso para un consumo de calorías  $x = 0$ , con independencia de la dieta,
- $\tau_i$  denota el efecto diferencial respecto a  $\mu$  del aumento medio de peso de los animales tratados con la  $i$ -ésima dieta ( $i = 1,2,3,4$ ) cuando  $x = 0$  (por tanto  $\mu + \tau_i$  es el aumento medio de peso para un consumo de calorías  $x = 0$  de los animales tratados con la  $i$ -ésima dieta),
- $\beta$  denota la tasa de aumento de peso por unidad de incremento en el consumo de calorías (que se supone es la misma para todas las dietas),
- $x_{it}$  denota el consumo de calorías del  $t$ -ésimo animal ( $t = 1,2,3,4,5$ ) alimentado con la  $i$ -ésima dieta ( $i = 1,2,3,4$ ),
- $\varepsilon_{it}$  denota la parte de la respuesta  $y_{it}$  no explicada por el modelo. Se asume que los  $\varepsilon_{it}$  son todos ellos independientes e idénticamente distribuidos según una  $N(0, \sigma)$ .

Una forma alternativa de escribir el modelo (que no es más que una sencilla reparametrización de la relación lineal) es:

$$y_{it} = \mu^* + \tau_i + \beta(x_{it} - \bar{x}_{..}) + \varepsilon_{it}, \text{ con } \mu^* = \mu + \beta \bar{x}_{..}$$

donde ahora:

- $\mu^*$  denota el aumento medio de peso para un consumo de calorías  $x = \bar{x}_{..}$ , con independencia de la dieta, y  $\mu^* + \tau_i$  es el aumento medio de peso, para un consumo de calorías  $x = \bar{x}_{..}$ , de los animales tratados con la  $i$ -ésima dieta.

Los estimadores por mínimos cuadrados son:

- El estimador de  $\beta$  es:

$$\hat{\beta} = \frac{sp_{xy}^*}{sc_{xx}^*}, \text{ con } sp_{xy}^* = \sum_i \sum_t (x_{it} - \bar{x}_{i.})(y_{it} - \bar{y}_{i.}) \text{ y } sc_{xx}^* = \sum_i \sum_t (x_{it} - \bar{x}_{i.})^2$$

En el ejemplo  $\hat{\beta} = 1,635$ .

- El estimador de  $\mu^* + \tau_i$  es:

$$\hat{\mu}^* + \hat{\tau}_i = \bar{y}_{i.} - \hat{\beta}(\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..})$$

Obsérvese que el estimador de  $\mu^* + \tau_i$  es la media de las respuestas con la  $i$ -ésima dieta,  $\bar{y}_{i.}$ , ajustada restándole la cantidad  $\hat{\beta}(\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..})$ . De ahí que a los estimadores  $\hat{\mu}^* + \hat{\tau}_i$  se les denomine “*medias ajustadas*”. En el ejemplo, las medias ajustadas resultan:

$$\hat{\mu}^* + \hat{\tau}_1 = \bar{y}_{1.} - \hat{\beta}(\bar{x}_{1.} - \bar{x}_{..}) = 63,0 - 1,635(44,20 - 46,15) = 66,189$$

$$\hat{\mu}^* + \hat{\tau}_2 = \bar{y}_{2.} - \hat{\beta}(\bar{x}_{2.} - \bar{x}_{..}) = 57,4 - 1,635(43,4 - 46,15) = 61,897$$

$$\hat{\mu}^* + \hat{\tau}_3 = \bar{y}_{3.} - \hat{\beta}(\bar{x}_{3.} - \bar{x}_{..}) = 65,2 - 1,635(46,8 - 46,15) = 64,137$$

$$\hat{\mu}^* + \hat{\tau}_4 = \bar{y}_{4.} - \hat{\beta}(\bar{x}_{4.} - \bar{x}_{..}) = 48,8 - 1,635(58,2 - 46,15) = 42,177$$

**Cuestión 28:** ¿Qué aproxima entonces el valor de  $\bar{y}_{i.}$ ? En términos más precisos, ¿cuál es el valor esperado de  $\bar{y}_{i.}$ ?

**Cuestión 29:** ¿Qué implica “ajustar” la media  $\bar{y}_{i.}$  restándole  $\hat{\beta}(\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..})$ ?

Si, como en modelos precedentes, se desea estimar por separado los parámetros  $\mu^*$  y  $\tau_i$ , es necesario imponer restricciones. Para mantener la interpretación anterior, es preciso imponer:  $\sum_i \hat{\tau}_i = 0$  resultando:

- $\hat{\mu}^* = \bar{y}_{..}$

En el ejemplo:  $\hat{\mu}^* = 58,60$ .

- $\hat{\tau}_i = (\bar{y}_{i.} - \hat{\beta}(\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..})) - \bar{y}_{..}$ , para todo  $i$  (diferencia entre la  $i$ -ésima media ajustada y la media global).

En el ejemplo:

$$\hat{\tau}_1 = (\bar{y}_{1.} - \hat{\beta}(\bar{x}_{1.} - \bar{x}_{..})) - \bar{y}_{..} = 66,189 - 58,60 = 7,589$$

$$\hat{\tau}_2 = (\bar{y}_{2.} - \hat{\beta}(\bar{x}_{2.} - \bar{x}_{..})) - \bar{y}_{..} = 61,897 - 58,60 = 3,297$$

$$\hat{\tau}_3 = (\bar{y}_{3.} - \hat{\beta}(\bar{x}_{3.} - \bar{x}_{..})) - \bar{y}_{..} = 64,137 - 58,60 = 5,537$$

$$\hat{\tau}_4 = (\bar{y}_{4.} - \hat{\beta}(\bar{x}_{4.} - \bar{x}_{..})) - \bar{y}_{..} = 42,177 - 58,60 = -16,423$$

Y el modelo matemático estimado para predecir el aumento de peso de un animal tratado con la  $i$ -ésima dieta que ha presentado un consumo de calorías igual a  $x$  sería:

$$y_{ij} = 58,60 + \hat{\tau}_i + 1,635(x_{ij} - 46,15),$$

siendo  $\hat{\tau}_i$ ,  $i = 1,2,3,4$ , los computados anteriormente.

En el SPSS los efectos se computan con la restricción  $\hat{\tau}_I = 0$  siendo  $I$  el último código de los niveles del factor tratamiento. En el ejemplo  $I = 4$  y por tanto la restricción es  $\hat{\tau}_4 = 0$ , resultando:

- $\hat{\mu}^* = \bar{y}_4 - \hat{\beta}(\bar{x}_4 - \bar{x}_{..})$ , o sea, la media ajustada del último nivel del factor tratamiento.

En el ejemplo:  $\hat{\mu}^* = 42,177$ .

- $\hat{\tau}_i = (\bar{y}_i - \hat{\beta}(\bar{x}_i - \bar{x}_{..})) - (\bar{y}_4 - \hat{\beta}(\bar{x}_4 - \bar{x}_{..}))$ , para todo  $i$ , o sea, el efecto del tratamiento  $i$  se entiende ahora como la diferencia entre la  $i$ -ésima media ajustada y la media ajustada del último nivel del factor tratamiento.

En el ejemplo:  $\hat{\tau}_1 = 24,013$ ,  $\hat{\tau}_2 = 19,721$ ,  $\hat{\tau}_3 = 21,960$  y  $\hat{\tau}_4 = 0$ .

En el SPSS sin embargo se presenta el modelo en su formato  $y_{it} = \mu + \tau_i + \beta x_{it} + \varepsilon_{it}$  en lugar de  $y_{it} = \mu^* + \tau_i + \beta(x_{it} - \bar{x}_{..}) + \varepsilon_{it}$ . Por tanto se tendrá en cuenta que  $\hat{\mu} = \hat{\mu}^* - \hat{\beta} \bar{x}_{..}$ . En el ejemplo  $\hat{\mu} = -33,278$  y el modelo estimado por el SPSS (empleando variables “dummy”) para predecir el aumento de peso de un animal tratado con alguna de las 4 dietas consideradas y que ha presentado un consumo de calorías igual a  $x$  sería:

$$y = -33,278 + 24,013X_1 + 19,721X_2 + 21,960X_3 + 1,635x$$

siendo  $X_i$  la variable que toma el valor 1 cuando el animal fue tratado con la  $i$ -ésima dieta y 0 en otro caso.

En este modelo:

- $\hat{\mu} = -33,278$  denota el aumento medio de peso para la dieta 4 con un consumo de calorías igual a 0.
- $\hat{\tau}_1 = 24,013$ ,  $\hat{\tau}_2 = 19,721$ ,  $\hat{\tau}_3 = 21,960$  y  $\hat{\tau}_4 = 0$ , denotan las diferencias de los aumentos medios de peso de cada dieta con respecto al de la dieta 4, para un consumo de calorías igual a 0.

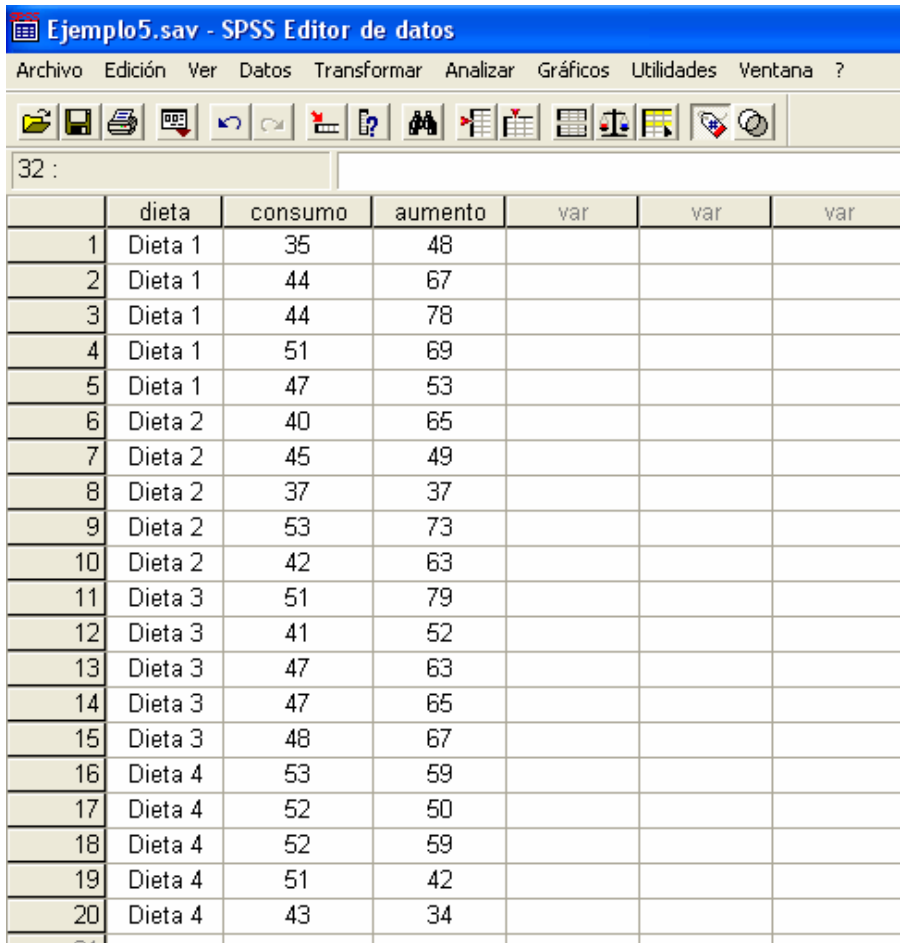
## 5.2 Entrada de datos.

Se crean 3 columnas:

- *dieta* (con valores 1, 2, 3 y 4 y etiquetas de valor “Dieta 1”, “Dieta 2”, “Dieta 3” y “Dieta 4”, respectivamente),
- *consumo* (recogiendo los valores de la covariable,  $x =$  “Consumo de calorías (cal/10)” en consonancia con el número de animal y la dieta adecuados), y
- *aumento* (recogiendo los valores de la variable respuesta  $y =$  “Aumento de peso (gramos)” en consonancia con el número de animal y la dieta adecuados).

El editor de datos quedaría como se muestra en la Figura 5.1 (etiquetas de valor activadas).

Figura 5.1

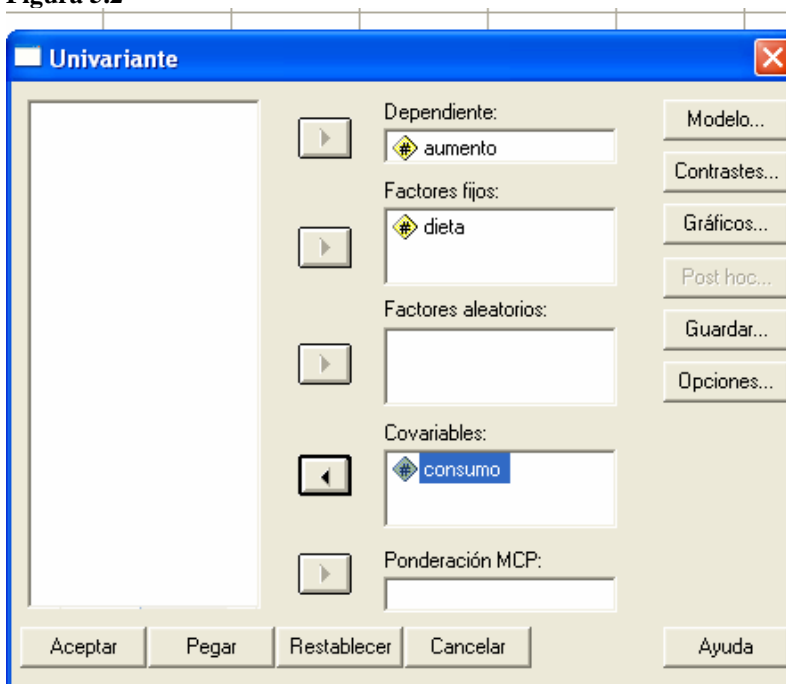


	dieta	consumo	aumento	var	var	var
1	Dieta 1	35	48			
2	Dieta 1	44	67			
3	Dieta 1	44	78			
4	Dieta 1	51	69			
5	Dieta 1	47	53			
6	Dieta 2	40	65			
7	Dieta 2	45	49			
8	Dieta 2	37	37			
9	Dieta 2	53	73			
10	Dieta 2	42	63			
11	Dieta 3	51	79			
12	Dieta 3	41	52			
13	Dieta 3	47	63			
14	Dieta 3	47	65			
15	Dieta 3	48	67			
16	Dieta 4	53	59			
17	Dieta 4	52	50			
18	Dieta 4	52	59			
19	Dieta 4	51	42			
20	Dieta 4	43	34			

### 5.3 Análisis de un diseño con una covariable.

En **Analizar > Modelo lineal general > Univariante** se entrará la covariable en el campo con el mismo nombre. Ver Figura 5.2 donde se reproduce como solicitar el análisis del ejemplo 5.

Figura 5.2



Las herramientas de **Analizar > Modelo lineal general > Univariante** pueden ser utilizadas como hasta ahora. Tan sólo aparece no operativo el botón **Post hoc**. Nótese que los contrastes  $\theta = \sum_i \alpha_i \tau_i$ , con  $\sum_i \alpha_i = 0$ , se estiman mediante  $\hat{\theta} = \sum_i \alpha_i (\bar{y}_i - \hat{\beta}(\bar{x}_i - \bar{x}_{..}))$  y, salvo que  $\bar{x}_i = \bar{x}_{..}$  para todo  $i$ , las medias justadas no son independientes. Por tal motivo la mayoría de las pruebas post hoc no pueden ser aplicadas. Entre las presentadas en las sesiones de teoría son aplicables las de Scheffe y Bonferroni, aunque el SPSS no nos da esa opción.

La razón radica en los siguientes argumentos:

1. Considérese un contraste cualquiera de interés  $\theta = \sum_i \alpha_i \tau_i$  con  $\sum_i \alpha_i = 0$ .
2. Se estima por medio de  $\hat{\theta} = \sum_i \alpha_i \hat{\tau}_i = \sum_i \alpha_i (\hat{\mu} + \hat{\tau}_i) = \sum_i \alpha_i (\bar{y}_i - \hat{\beta}(\bar{x}_i - \bar{x}_{..})) = \sum_i \alpha_i (\bar{y}_i - \hat{\beta} \bar{x}_i)$ .
3. Se prueba que  $Var(\hat{\theta}) = Var\left(\sum_i \alpha_i \hat{\tau}_i\right) = \sigma^2 \left( \sum_i \frac{\alpha_i^2}{n_i} \right) + \left( \frac{\sigma^2}{sc_{xx}^*} \right) \left( \sum_i \alpha_i \bar{x}_i \right)^2$ , que se estima mediante:

$$SCM \text{ Error} \left( \sum_i \frac{\alpha_i^2}{n_i} + \frac{\left( \sum_i \alpha_i \bar{x}_i \right)^2}{sc_{xx}^*} \right)$$

4. Para una prueba de hipótesis se tendrá en cuenta que:

$$\frac{\sum_i \alpha_i \hat{\tau}_i - \sum_i \alpha_i \tau_i}{\sqrt{SCM \text{ Error} \left( \sum_i \frac{\alpha_i^2}{n_i} + \frac{\left( \sum_i \alpha_i \bar{x}_i \right)^2}{sc_{xx}^*} \right)}} \in t_{g.l.(SCM \text{ Error})}$$

5. Un intervalo de confianza al  $100(1 - \alpha) \%$  para  $\theta = \sum_i \alpha_i \tau_i$  es:

$$\sum_i \alpha_i \tau_i \in \left( \sum_i \alpha_i \hat{\tau}_i \pm t_{g.l.(SCM \text{ Error}), \alpha/2} \sqrt{SCM \text{ Error} \left( \sum_i \frac{\alpha_i^2}{n_i} + \frac{\left( \sum_i \alpha_i \bar{x}_i \right)^2}{sc_{xx}^*} \right)} \right)$$

Las salidas del programa serían:

**Estadísticos descriptivos**

Variable dependiente: Aumento de peso

Dieta	Media	Desv. típ.	N
Dieta 1	63,00	12,268	5
Dieta 2	57,40	14,311	5
Dieta 3	65,20	9,654	5
Dieta 4	48,80	10,895	5
Total	58,60	12,713	20

**Contraste de Levene sobre la igualdad de las varianzas error<sup>a</sup>**

Variable dependiente: Aumento de peso

F	gl1	gl2	Significación
1,597	3	16	,229

Contrasta la hipótesis nula de que la varianza error de la variable dependiente es igual a lo largo de todos los grupos.

a. Diseño: Intercept+consumo+dieta

**Pruebas de los efectos inter-sujetos**

Variable dependiente: Aumento de peso

Fuente	Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Sig.	Eta al cuadrado parcial	Parámetro de no centralidad	Potencia observada <sup>a</sup>
Modelo corregido	1892,176 <sup>b</sup>	4	473,044	6,020	,004	,616	24,081	,936
Intersección	53,981	1	53,981	,687	,420	,044	,687	,121
consumo	1090,176	1	1090,176	13,874	,002	,481	13,874	,935
dieta	1501,046	3	500,349	6,368	,005	,560	19,103	,910
Error	1178,624	15	78,575					
Total	71750,000	20						
Total corregida	3070,800	19						

a. Calculado con alfa = ,05

b. R cuadrado = ,616 (R cuadrado corregida = ,514)

**Estimaciones de los parámetros**

Variable dependiente: Aumento de peso

Parámetro	B	Error típ.	t	Sig.	Intervalo de confianza al 95%.		Eta al cuadrado parcial	Parámetro de no centralidad	Potencia observada <sup>a</sup>
					Límite inferior	Límite superior			
Intersección	-33,298	22,395	-1,487	,158	-81,031	14,434	,128	1,487	,286
consumo	1,635	,439	3,725	,002	,700	2,571	,481	3,725	,935
[dieta=1]	24,013	6,194	3,877	,001	10,810	37,215	,500	3,877	,951
[dieta=2]	19,721	6,352	3,105	,007	6,183	33,259	,391	3,105	,827
[dieta=3]	21,960	5,802	3,785	,002	9,595	34,326	,489	3,785	,942
[dieta=4]	0 <sup>b</sup>	.	.	.	.	.	.	.	.

a. Calculado con alfa = ,05

b. Al parámetro se le ha asignado el valor cero porque es redundante.

**1. Media global**

Variable dependiente: Aumento de peso

Media	Error típ.	Intervalo de confianza al 95%.	
		Límite inferior	Límite superior
58,600 <sup>a</sup>	1,982	54,375	62,825

a. Las covariables que aparecen en el modelo se evalúan en los siguiente valores:  
Consumo de calorías = 46,15.

**Estimaciones**

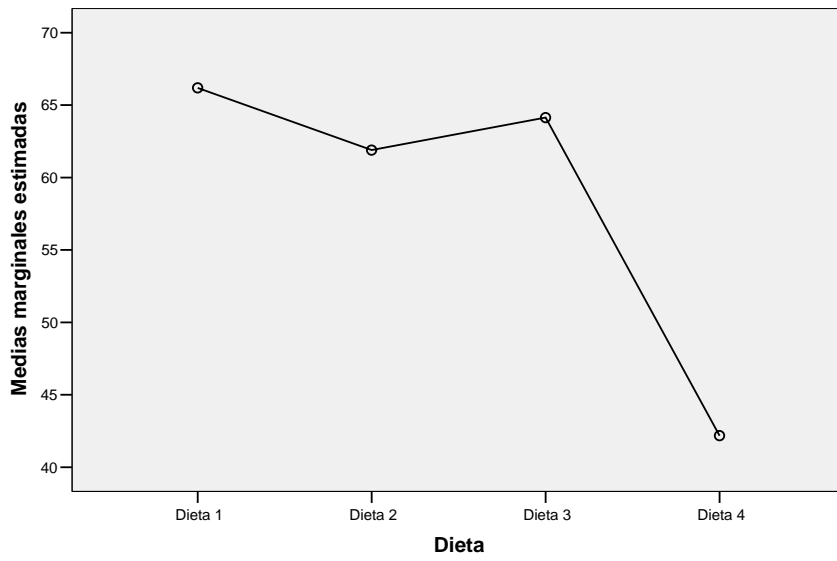
Variable dependiente: Aumento de peso

Dieta	Media	Error típ.	Intervalo de confianza al 95%.	
			Límite inferior	Límite superior
Dieta 1	66,189 <sup>a</sup>	4,056	57,545	74,833
Dieta 2	61,897 <sup>a</sup>	4,144	53,065	70,730
Dieta 3	64,137 <sup>a</sup>	3,974	55,666	72,608
Dieta 4	42,177 <sup>a</sup>	4,345	32,916	51,437

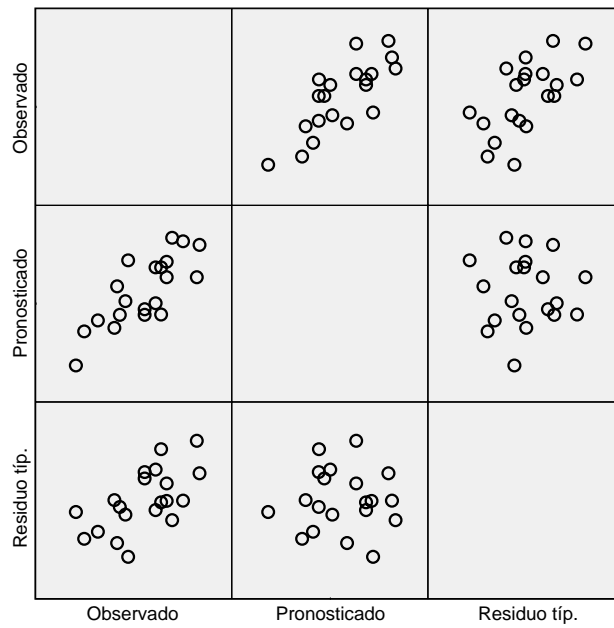
a. Las covariables que aparecen en el modelo se evalúan en los siguiente valores: Consumo de calorías = 46,15.



Medias marginales estimadas de Aumento de peso



Variable dependiente: Aumento de peso



Modelo\ : Intersección + consumo + dieta

**EJEMPLO 6.**

Considérese de nuevo el experimento del Ejemplo 2 y supóngase que en realidad tanto la variedad de planta como los niveles de agua son en realidad seleccionados aleatoriamente. ¿Cómo cambia el análisis?

**6.1. Descripción del plan experimental, modelo y estimación puntual.**

Existen 2 factores tratamiento: “Nivel de agua” (con tres niveles de efectos aleatorios) y “Tipo de planta” (con dos niveles de efectos aleatorios).

El modelo matemático es el propio de un diseño completo de dos vías de efectos aleatorios:

$$y_{ijt} = \mu + A_i + B_j + (AB)_{ij} + \varepsilon_{ijt}$$

donde:

- $y_{ijt}$  denota el crecimiento observado para la  $t$ -ésima planta ( $t=1, \dots, 5$ ) del  $i$ -ésimo tipo ( $i=1, 2$ ) y tratada con el  $j$ -ésimo nivel de agua ( $j=1, 2, 3$ ),
- $\mu$  denota el crecimiento promedio con independencia de las condiciones experimentales,
- $A_i$  es la variable aleatoria: “efecto sobre el crecimiento del tallo respecto a la media achacable al  $i$ -ésimo tipo ( $i=1, 2$ ) de planta muestreado” y con independencia del nivel de agua empleado,
- $B_j$  es la variable aleatoria: “efecto sobre el crecimiento del tallo respecto a la media achacable al  $j$ -ésimo nivel de agua ( $j=1, 2, 3$ ) muestreado”, con independencia del tipo de planta,
- $(AB)_{ij}$  es la variable aleatoria: “efecto sobre el crecimiento del tallo respecto a la media achacable a interacción entre el  $i$ -ésimo tipo de planta muestreado y el  $j$ -ésimo nivel de agua muestreado”.
- $\varepsilon_{ijt}$  denota la parte de la respuesta  $y_{ijt}$  no explicada por el modelo.
- Se asume que:
  - $\{\varepsilon_{ijt}; i=1, 2; j=1, 2, 3; t=1, 2, 3, 4, 5\}$  es una muestra aleatoria simple de una población  $\varepsilon \in N(0, \sigma)$ .
  - $\{A_1, A_2\}$  es una muestra aleatoria simple de una población  $A \in N(0, \sigma_A)$ .
  - $\{B_1, B_2, B_3\}$  es una muestra aleatoria simple de una población  $B \in N(0, \sigma_B)$ .
  - $\{(AB)_{11}, (AB)_{12}, (AB)_{13}, (AB)_{21}, (AB)_{22}, (AB)_{23}\}$  es una muestra aleatoria simple de una población  $(AB) \in N(0, \sigma_{AB})$ .
  - Las muestras  $\{A_1, A_2\}$ ,  $\{B_1, B_2, B_3\}$ ,  $\{(AB)_{11}, (AB)_{12}, (AB)_{13}, (AB)_{21}, (AB)_{22}, (AB)_{23}\}$  y  $\{\varepsilon_{ijt}; i=1, 2; j=1, 2, 3; t=1, 2, 3, 4, 5\}$  son estadísticamente independientes.

Es importante enfatizar que:

- Con efectos fijos,  $\alpha_i = \mu_i - \mu$  es un parámetro (un número) cuyo valor es desconocido y se estima mediante  $\hat{\alpha}_i = \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}$ . Ello es así porque  $\mu_i$  es la media del crecimiento de una variedad de planta concreta y de interés para el experimentador.

Con efectos aleatorios,  $A_i$  NO es un número desconocido. Es una variable aleatoria que, en nuestro muestreo tomará un valor  $a_i = \mu_i - \mu$  correspondiente a la variedad de planta seleccionada al azar en  $i$ -ésimo lugar pero que, en una hipotética réplica del experimento, tomará otro valor. Los valores que  $A_i$  puede tomar siguen una ley  $N(0, \sigma_A)$  y, por ello, lo realmente importante es estimar  $\sigma_A$  para conocer el rango de variación de esos valores.

Valoraciones análogas son válidas para el resto de variables aleatorias en el modelo.

- Bajo las hipótesis asumidas para las variables aleatorias del modelo se tiene que:

$$\text{Var}(y_{ijt}) = \text{Var}(A_i) + \text{Var}(B_j) + \text{Var}((AB)_{ij}) + \text{Var}(\varepsilon_{ijt}) = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_{AB}^2 + \sigma^2$$

de modo que  $\sigma_A^2, \sigma_B^2, \sigma_{AB}^2$  y  $\sigma^2$  reciben el nombre de **componentes de la varianza** y junto  $\mu$  son los parámetros de interés en un modelo de efectos aleatorios.

- Construyendo las sumas de cuadrados igual que en un modelo de efectos fijos, esto es:

➤ **SC Total corregida** =  $\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T (y_{ijt} - \bar{y}_{...})^2$ .

➤ **SC tipo** =  $\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2$ .

➤ **SC nivel** =  $\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2$ .

➤ **SC tipo\*nivel** =  $\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})^2$ .

➤ **SC Error** =  $\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T (\bar{y}_{ijt} - \bar{y}_{ij.})^2$ .

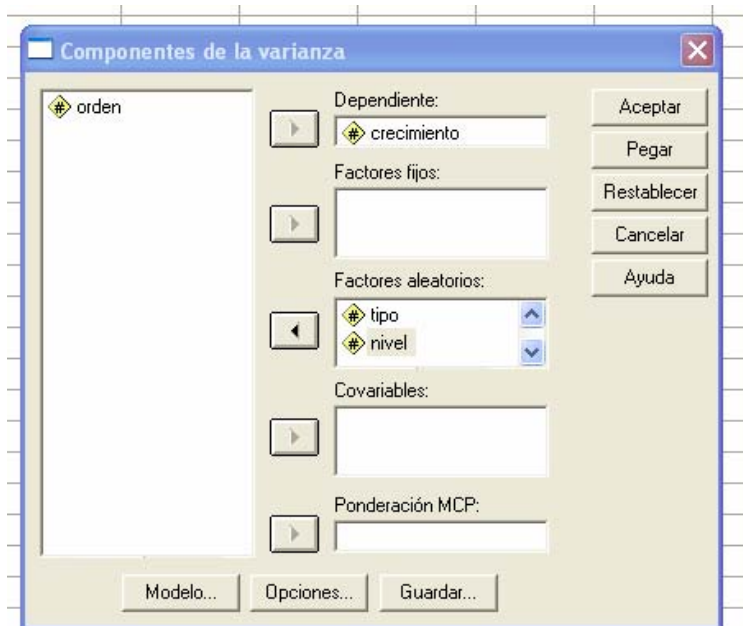
se verifica que:

- E( **SCM Error** ) =  $\sigma^2$ .
- E( **SCM tipo\*nivel** ) =  $\sigma^2 + 5 \cdot \sigma_{AB}^2$ .
- E( **SCM nivel** ) =  $\sigma^2 + 5 \cdot \sigma_{AB}^2 + 10 \cdot \sigma_B^2$ .
- E( **SCM tipo** ) =  $\sigma^2 + 5 \cdot \sigma_{AB}^2 + 15 \cdot \sigma_A^2$ .

## 6.2 Análisis en el SPSS.

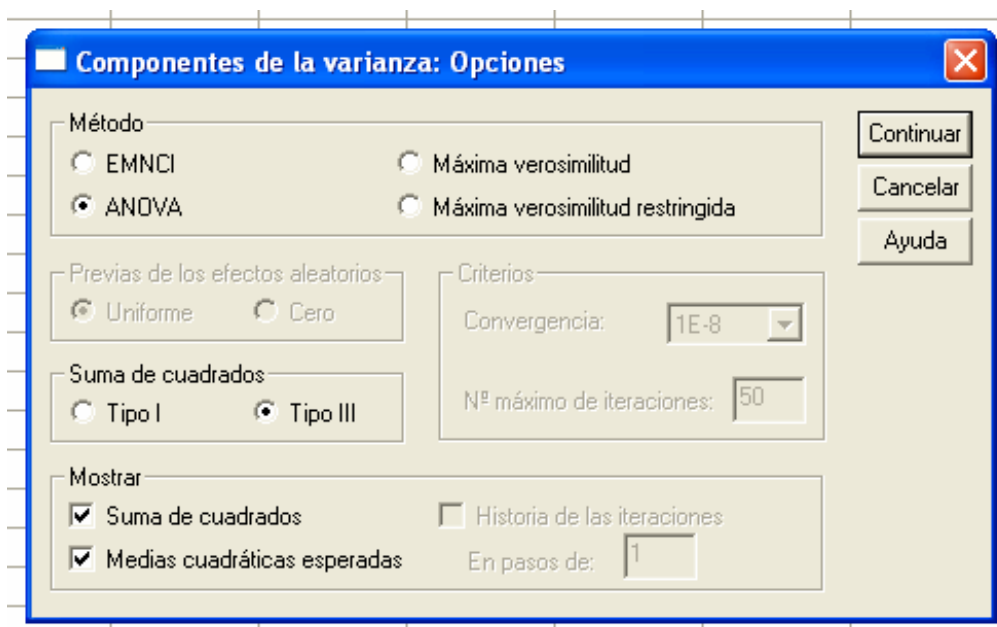
1. El fichero de datos se crea como si se tratase de efectos fijos.
2. Existen dos opciones para tratar con un diseño de efectos aleatorios:
  - a. **Analizar > Modelo lineal general > Univariante**. Donde se tendrán las mismas herramientas de análisis que para un diseño de efectos fijos.
  - b. **Analizar > Modelo lineal general > Componentes de la varianza**. Apartado que proporciona la estimación de las componentes de la varianza (según distintos criterios).
3. En **Analizar > Modelo lineal general > Componentes de la varianza** aparecerá un cuadro de diálogo semejante al de **Univariante** (ver por ejemplo Figura 2.3). Se cubrirán los campos con los factores indicando si se trata de factores con efectos aleatorios o con efectos fijos (podría haberse planteado un modelo mixto). Para nuestro ejemplo los campos quedarían como se muestra en la Figura 6.1.
4. Las herramientas de análisis se recogen en los botones de la parte inferior del cuadro:
  - a. **Modelo...** Permite seleccionar el modelo matemático. Es exactamente igual que el cuadro con el mismo nombre de **Univariante** y ya ha sido descrito pormenorizadamente en los ejemplos previos.

Figura 6.1



- b. **Opciones....** Permite seleccionar el método de estimación de las componentes. Se empleará el criterio ANOVA (**ANOVA** en el cuadro de diálogo) basado en las esperanzas de las sumas de cuadrados (**Suma de cuadrados > Tipo III** en el cuadro de diálogo), lo cual se indicará al SPSS tal y como se muestra en la Figura 6.2. Nótese que se ha pide también que se muestren las **Suma de cuadrados** y las **Medias cuadráticas esperadas**.

Figura 6.2



El criterio **ANOVA** consiste en estimar las componentes basándose en las esperanzas de las sumas de cuadrados medias. Entonces, de modo recursivo se procede como sigue:

- $E(\text{SCM Error}) = \sigma^2$ , entonces tomar:

$$\hat{\sigma}^2 = \text{SCM Error}$$

➤  $E(\text{SCM tipo} * \text{nivel}) = \sigma^2 + 5 \cdot \sigma_{AB}^2$  y  $E(\text{SCM Error}) = \sigma^2$ , entonces tomar:

$$\hat{\sigma}_{AB}^2 = \frac{\text{SCM tipo} * \text{nivel} - \text{SCM Error}}{5}$$

➤  $E(\text{SCM tipo}) = \sigma^2 + 5 \cdot \sigma_{AB}^2 + 15 \cdot \sigma_A^2$  y  $E(\text{SCM tipo} * \text{nivel}) = \sigma^2 + 5 \cdot \sigma_{AB}^2$ , entonces tomar:

$$\hat{\sigma}_A^2 = \frac{\text{SCM tipo} - \text{SCM tipo} * \text{nivel}}{15}$$

➤  $E(\text{SCM nivel}) = \sigma^2 + 5 \cdot \sigma_{AB}^2 + 10 \cdot \sigma_B^2$  y  $E(\text{SCM tipo} * \text{nivel}) = \sigma^2 + 5 \cdot \sigma_{AB}^2$ , entonces tomar:

$$\hat{\sigma}_B^2 = \frac{\text{SCM nivel} - \text{SCM tipo} * \text{nivel}}{10}$$

Las salidas del SPSS se muestran en las Tablas 6.1, 6.2 y 6.3.

**Tabla 6.1**

**ANOVA**

Fuente	Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática
Modelo corregido	10664,110	5	2132,822
Intersección	262024,456	1	262024,456
tipo	1062,075	1	1062,075
nivel	9200,201	2	4600,100
tipo * nivel	401,834	2	200,917
Error	202,424	24	8,434
Total	272890,990	30	
Total corregido	10866,534	29	

Variable dependiente: crecimiento

**Tabla 6.2**

**Medias cuadráticas esperadas**

Fuente	Componente de la varianza				Término cuadrático
	Var(tipo)	Var(nivel)	Var(tipo * nivel)	Var(Error)	
Intersección	15,000	10,000	5,000	1,000	Intersección
tipo	15,000	,000	5,000	1,000	
nivel	,000	10,000	5,000	1,000	
tipo * nivel	,000	,000	5,000	1,000	
Error	,000	,000	,000	1,000	

Variable dependiente: crecimiento

Las medias cuadráticas esperadas se basan en en la suma de cuadrados de tipo III. Para cada fuente, la media cuadrática esperada es igual a la suma de los coeficientes de las casillas por los componentes de la varianza, más un término cuadrático relacionado con los efectos de la casilla Término cuadrático.

Tabla 6.3

**Estimaciones de la varianza**

Componente	Estimación
Var(tipo)	57,411
Var(nivel)	439,918
Var(tipo * nivel)	38,497
Var(Error)	8,434

Variable dependiente: crecimiento  
Método: ANOVA (Tipo III Suma de cuadrados)

Se puede comprobar que las sumas de cuadrados y los grados de libertad mostrados en la Tabla 6.1 son los mismos que en el caso de efectos fijos (comparar con Tabla 2.8).

La Tabla 6.2 es simplemente una forma alternativa de explicar mediante una tabla cuanto valen las esperanzas de las sumas de cuadrados medias de las fuentes de variación implicadas en el modelo. Por ejemplo la fila correspondiente a “tipo” en la Tabla 6.3:

**Medias cuadráticas esperadas**

Fuente	Componente de la varianza				Término cuadrático
	Var(tipo)	Var(nivel)	Var(tipo * nivel)	Var(Error)	
tipo	15,000	,000	5,000	1,000	

se leerá:  $E(\text{SCM tipo}) = 15 \cdot \sigma_A^2 + 0 \cdot \sigma_B^2 + 5 \cdot \sigma_{AB}^2 + 1 \cdot \sigma^2$ .

Finalmente, la Tabla 6.2 6.3 proporciona los resultados de las estimaciones. Por ejemplo, de la Fila es simplemente una forma alternativa de explicar mediante una tabla cuanto valen las esperanzas de las sumas de cuadrados medias de las fuentes de variación implicadas en el modelo. Por ejemplo, la estimación de la componente  $Var(tipo) = \sigma_A^2$  se calcula mediante (ver página anterior):

$$\hat{\sigma}_A^2 = \frac{\text{SCM tipo} - \text{SCM tipo * nivel}}{15} = \frac{1062,075 - 200,917}{15} = 57,411$$

Se observa que la fuente de variación mayor corresponde a la variabilidad entre niveles de agua y, también, que cualquiera de las fuentes de variación controladas conduce a una variabilidad mayor que la que resta por explicar (error). A la espera de constatar su significación estadística, se intuye que tanto el nivel de agua como la variedad de planta son relevantes a la hora de constatar un crecimiento del tallo dado. Nótese que en este epígrafe no se generan los resultados de los contrastes de hipótesis de interés asociados al cuadro ANOVA.

c. **Guardar....** Es factible guardar las estimaciones resultantes de las componentes.

- Para realizar los contrastes de interés sobre la importancia de las fuentes de variación es necesario acudir al procedimiento **Univariante**, ya explicado para efectos fijos. Obviamente ahora se incorporarán las variables “*tipo*” y “*nivel*” al campo **Factores Aleatorios**. Las demás opciones (**Modelo**, **Contrastes**, **Gráficos**, **Post hoc**, **Guardar** y **Opciones**) se cubrirán como siempre, si bien se tendrá en cuenta que algunas de las salidas carecen ahora de sentido. Por ejemplo, es absurdo plantearse testar hipótesis sobre contrastes del tipo  $H_0 : \sum_i \alpha_i \tau_i = 0$ , con  $\sum_i \alpha_i = 0$ , ya que ahora los efectos son realizaciones de variables aleatorias y no parámetros. Tal es así que, por ejemplo, si se pulsa el botón **Post hoc**, no aparece variable alguna en la lista de **Factores**, a pesar de existir dos, “*tipo*” y “*nivel*”.

El motivo es que se trata de efectos aleatorios. Análogamente y por el mismo motivo carece de relevancia el modelo matemático estimado (salida de **Estimaciones de los parámetros**). Los parámetros aquí son las componentes de la varianza.

Nos centramos por tanto en la salida del cuadro ANOVA que corresponde como siempre al epígrafe:

**Opciones > Estimaciones de los efectos inter-sujetos**

y que se reproduce en la Tabla 6.4.

**Tabla 6.4**

**Pruebas de los efectos inter-sujetos**

Variable dependiente: Crecimiento longitud del tallo

Fuente		Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Sig.	Eta al cuadrado parcial	Parámetro de no centralidad	Potencia observada <sup>a</sup>
Intersección	Hipótesis	262024,456	1	262024,46	47,979	,010	,950	47,979	,974
	Error	13887,695	2,543	5461,258 <sup>b</sup>					
tipo	Hipótesis	1062,075	1	1062,075	5,286	,148	,726	5,286	,266
	Error	401,834	2	200,917 <sup>c</sup>					
nivel	Hipótesis	9200,201	2	4600,100	22,896	,042	,958	45,791	,698
	Error	401,834	2	200,917 <sup>c</sup>					
tipo * nivel	Hipótesis	401,834	2	200,917	23,821	,000	,665	47,643	1,000
	Error	202,424	24	8,434 <sup>d</sup>					

- a. Calculado con alfa = ,05
- b. MS(tipo) + MS(nivel) - MS(tipo \* nivel)
- c. MS(tipo \* nivel)
- d. MS(Error)

Téngase en cuenta lo que sigue:

- El formato no es el mismo que con efectos fijos ya que para testar el peso de cada fuente de variación el denominador del cociente  $F$  no siempre es el mismo, tal y como ocurría con efectos fijos (el denominador era siempre la SCM Error).
- En este sentido recordar que ahora el  $F$ -test de cada fila del ANOVA contrasta la hipótesis nula de si la varianza de la fuente de variación de esa fila, digamos  $\sigma_*^2$  es 0. Por ejemplo, la fila relativa a “nivel” contrasta:  $H_0^{nivel} : \sigma_B^2 = 0$  frente a  $H_1^{nivel} : \sigma_B^2 > 0$ . En efectos fijos el contraste era  $H_0^{nivel} : \beta_j^2 = cte, \forall j$ , frente a  $H_1^{nivel} : \exists i, j$  tales que  $\beta_i \neq \beta_j$ .
- A pesar de que los grados de libertad de cada suma de cuadrados son los mismos que en efectos fijos, los grados de libertad del denominador del cociente  $F$  para testar  $H_0^* : \sigma_*^2 = 0$  frente a  $H_1^* : \sigma_*^2 > 0$  podrían variar ahora. La explicación es sencilla:

- ❖ con efectos fijos el cociente  $F$  era siempre del tipo  $\frac{SCM Fuente_*}{SCM Error}$ , por tanto, la distribución bajo la nula era siempre una  $F_{gl(SCM Fuente_*), gl(SCM Error)}$ ,

❖ con efectos aleatorios el cociente  $F$  es de la forma  $\frac{SCM Fuente_*}{\sum_i cte_i \cdot SCM Fuente_i}$ , donde

$U = \sum_i cte_i \cdot SCM Fuente_i$  es una combinación lineal adecuada de sumas de cuadrados medios

tal que  $E(SCM Fuente_* - U) = cte_* \cdot \sigma_*^2$ . Por consiguiente, la distribución bajo la nula es ahora del tipo  $F_{gl(SCM Fuente_*), gl(U)}$ . En general, los grados de libertad de  $U$  no son sencillos de calcular y existen fórmulas relativamente sencillas para aproximarlos cuando se trata de diseños balanceados.

- Como en efectos fijos, carece de sentido resolver los contrastes sobre la varianza de los efectos principales cuando ha resultado significativo el contraste sobre la varianza de los efectos interacción.

Analizando la Tabla 6.4 se concluye entonces:

1. Se realiza en primer lugar el contraste:  $H_0^{tipo*nivel} : \sigma_{AB}^2 = 0$  frente a  $H_1^{tipo*nivel} : \sigma_{AB}^2 > 0$ . La información de interés sobre este contraste se encuentra en la fila siguiente de la Tabla 6.4:

Fuente		Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Sig.	Eta al cuadrado parcial	Potencia observada (a)
tipo * nivel	Hipótesis	401,834	2	200,917	23,821	,000	,665	1,000
	Error	202,424	24	8,434(d)				

En este caso:

$$5 \cdot \sigma_{AB}^2 = E(SCM tipo * nivel - SCM Error) \Rightarrow F = \frac{SCM tipo * nivel}{SCM Error} = \frac{200,917}{8,434} = 23,821$$

El nivel crítico es  $p = P(F_{2,24} > 23,821) = 0$  y por tanto se rechaza  $H_0^{tipo*nivel}$  y se concluye que se dan diferentes crecimientos medios del tallo en las plantas de guisantes según la combinación variedad de planta y nivel de agua con que se trata. No se afirma que existen diferencias entre las combinaciones empleadas en el experimento sino en general.

2. Al haber rechazado la hipótesis nula de no interacción entre las dos fuentes de variación consideradas, no tiene sentido testar los efectos principales.
3. A los efectos tan sólo de ilustrar como se procedería en el caso de que no se hubiese rechazado  $H_0^{tipo*nivel}$ , indicar que el siguiente paso sería resolver los contrastes:

$$H_0^{tipo} : \sigma_A^2 = 0 \text{ frente a } H_1^{tipo} : \sigma_A^2 > 0$$

y

$$H_0^{nivel} : \sigma_B^2 = 0 \text{ frente a } H_1^{nivel} : \sigma_B^2 > 0$$

El primero,  $H_0^{tipo} : \sigma_A^2 = 0$  frente a  $H_1^{tipo} : \sigma_A^2 > 0$ , se basaría en la fila del cuadro para “tipo”:

Fuente		Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Sig.	Eta al cuadrado parcial	Potencia observada(a)
Tipo	Hipótesis	1062,075	1	1062,075	5,286	,148	,726	,266
	Error	401,834	2	200,917(c)				

que tiene su justificación en que:



$$15 \cdot \sigma_A^2 = E(SCM \text{ tipo} - SCM \text{ tipo} * \text{nivel}) \Rightarrow F = \frac{SCM \text{ tipo}}{SCM \text{ tipo} * \text{nivel}} = \frac{1062,075}{200,917} = 5,286$$

obsérvese que ahora, al contrario que con efectos fijos, el denominador no es la SCM Error sino la suma de cuadrados medios de la interacción (aunque el SPSS le llama **Error**). Aquí, el nivel crítico es  $p = P(F_{1,2} > 5,286) = 0,148$ , del que no se concluiría significación estadística. Con el otro contraste se razonaría análogamente.

**Cuestión 30:** Desde un punto de vista de la planificación experimental, ¿qué diferencias habría entre un diseño de efectos fijos y un diseño de efectos aleatorios?

**Cuestión 31:** Supóngase que una fuente de variación es un factor de bloqueo, que los bloques han sido seleccionados al azar y que no se contempla en el modelo la interacción entre el factor de bloqueo y los factores tratamiento, ¿sería el factor de bloqueo un factor de efectos fijos o de efectos aleatorios? ¿Existiría algún matiz a tu respuesta si el diseño incluyese la interacción?

**Cuestión 32:** Podría ocurrir que alguna estimación de una componente de la varianza fuese negativa. ¿Por qué? ¿Cómo lo interpretarías?

**Cuestión 33:** Considérese un modelo de efectos aleatorios balanceado dado por:

$$y_{ijkl} = \mu + A_i + B_j + C_k + (AB)_{ij} + (BC)_{jk} + \varepsilon_{ijkl}$$

con  $i = 1, \dots, a$ ;  $j = 1, \dots, b$ ;  $k = 1, \dots, c$ ;  $t = 1, \dots, n$ . ¿Sabrías dar la expresión que estima  $\sigma_B^2$ ? ¿Y la del cociente  $F$  para resolver el contraste  $H_0^B : \sigma_B^2 = 0$  frente a  $H_1^B : \sigma_B^2 > 0$ ?