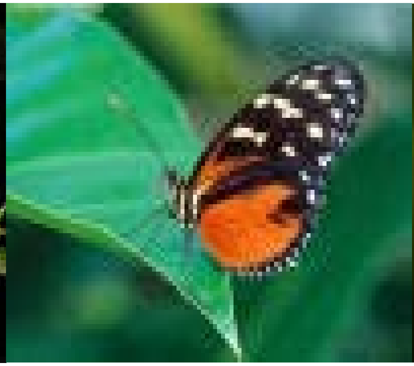
CONTRASTES DE HIPÓTESIS

CONTRASTES DE HIPÓTESIS

A partir de una o varias muestras nos proponemos ver si podemos aceptar, o no, una hipótesis acerca de la población o poblaciones de las que proceden las muestras.

Ejemplo: Un modelo genético afirma que la proporción de descendientes negros en un cierto cruce de conejos es 3/13. De una muestra de 100 conejos 15 son negros, ¿puede admitirse dicha afirmación?

Ejemplo:

Un medicamento conocido cura el 80% de los casos de una enfermedad. Un nuevo medicamento resulta eficaz en 85 pacientes de 100 que se han tratado con dicho medicamento. ¿Basta este resultado muestral para asegurar la superioridad del nuevo medicamento?

Vamos a responder a estas preguntas realizando un contraste de hipótesis. Observemos que tenemos una hipótesis a priori que pretendemos contrastar a partir de la muestra/as obtenida/as.

PLANTEAMIENTO GENERAL DE UN CONTRASTE DE HIPÓTESIS

Se formula una hipótesis acerca de la población **(H_0)** y se trata de ver si**, como consecuencia de un conjunto de valores muestrales,** debemos aceptar o rechazar la hipótesis H_0 con unos márgenes de error **previamente fijados.**

Decisión: **Cuando los datos muestrales discrepen mucho de los que esperaríamos observar de ser cierta la hipótesis H_0** (en nuestro ejemplo, cuando la proporción 3/13 de vástagos negros sea muy distinta de la proporción observada) **rechazaremos dicha hipótesis.**

El cuadro siguiente muestra todas las situaciones posibles.

DECISIÓN\REALIDAD	**H_0 cierta**	**H_0 falsa**
Aceptar H_0	Correcta	Error tipo II
Rechazar H_0	Error tipo I	Correcta

Si rechazamos H_0 aceptamos la alternativa.

Si no rechazamos H_0 , esto no implica necesariamente que sea cierta, simplemente no tenemos evidencias para rechazarla.

DEFINICIONES

***Hipótesis nula* (H_0):** Es la que se da por cierta antes de obtener la muestra.
H_0: $p=3/13$

***Hipótesis alternativa*(H_a):** Es la hipótesis contraria a la hipótesis nula. H_a: $p \neq 3/13$

***Hipótesis simple*:** Aquella que está constituida por un único punto. H_0: $p=3/13$

***Contraste bilateral*:** Cuando la hipótesis nula es simple.

***Hipótesis compuesta*:** Constituida por más de un punto. H_0: $p \leq 3/13$

Contraste unilateral: Cuando la hipótesis nula es compuesta.

Estadístico del contraste: Es una variable aleatoria función de la muestra. Tiene su distribución asociada al proceso de muestreo y según el valor que tome se decide aceptar o rechazar la hipótesis nula.

Región crítica o de rechazo: Es el conjunto de valores del estadístico del contraste que nos lleva a la decisión de rechazar la hipótesis nula.

Región de aceptación: Es el conjunto de valores del estadístico del contraste que nos lleva a la decisión de aceptar la hipótesis nula.

Error de tipo I: Es el error que cometemos cuando rechazamos la hipótesis nula siendo cierta.

Error de tipo II: el que cometemos cuando aceptamos la hipótesis nula siendo falsa.

Nivel de significación (α): Es la probabilidad de cometer el error de tipo I

$$\alpha = p(\text{rechazar } H_0 / H_0 \text{ cierta})$$

Debe ser un valor muy pequeño (α=0'10, α=0'05, α=0'01)

Potencia(β): Es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es falsa.

$$\beta = p(\text{rechazar } H_0 / H_0 \text{ falsa}) = 1 - p(\text{Error de tipo II})$$

Nivel crítico o p-valor: Es la probabilidad asociada a una región crítica limitada por el valor observado del estadístico, de suponer que H_0 es cierta.

p-valor = P(rechazar H_0 con nuestra muestra particular / H_0 es cierta)

Un nivel crítico muy pequeño se interpreta como una prueba muy significativa a favor de la alternativa (rechazo de la hipótesis nula). Se considerará pequeño si es menor que los niveles de significación habituales (α=0'05, α=0'01).

FASES PARA REALIZAR UN CONTRASTE DE HIPÓTESIS

1. **Formulación de las hipótesis** nula y alternativa (H_0 y H_a)

2. **Elección del estadístico** adecuado para nuestro problema y cuya distribución debe ser conocida si la hipótesis nula es verdadera.

3. **Determinación de la región crítica**.

4. **Cálculo del valor del estadístico** para la muestra obtenida.

5. **Conclusiones de tipo estadístico**.

6. **Conclusiones de naturaleza no estadística** (biológicas, médicas, etc.)

Cuando **rechazamos la hipótesis nula** a partir de una muestra es porque ésta nos ha aportado pruebas significativas, a un nivel α, de que esa hipótesis no es cierta y decimos que **el test es significativo**.

Cuando **aceptamos una hipótesis nula** es porque que no hubo pruebas en su contra y decimos que **el test es no significativo**.

TIPOS DE CONTRASTES

- **Contrastes de hipótesis de tipo paramétrico (es necesario que las poblaciones cumpla ciertas condiciones: normalidad, igualdad de varianzas...)**
- **Contrastes de hipótesis de tipo no paramétrico (no imponen ninguna condición)**

CONTRASTES DE HIPÓTESIS DE TIPO PARAMÉTRICO

I. Contraste de hipótesis acerca de una población

Si θ es el parámetro desconocido de la población y θ_0 es un valor conocido de referencia, se pueden plantear los siguientes tipos de contraste:

Bilateral

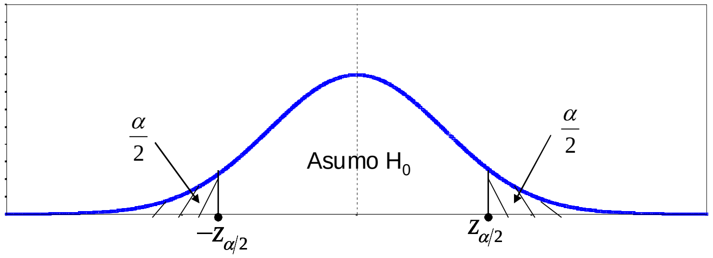
$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$

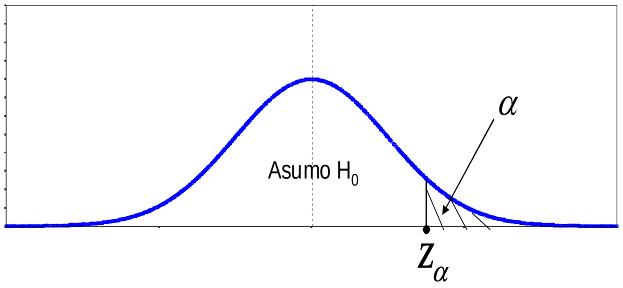
Unilateral por la derecha

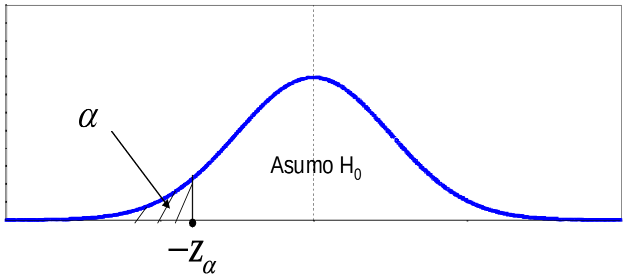
$$\begin{cases} H_0 : \theta \leq \theta_0 \\ H_1 : \theta > \theta_0 \end{cases}$$

Unilateral por la izquierda

$$\begin{cases} H_0 : \theta \geq \theta_0 \\ H_1 : \theta < \theta_0 \end{cases}$$







Ejemplo:
Un modelo genético afirma que la proporción de descendientes negros en un cierto cruce de conejos es 3/13. En una muestra de 100 de tales descendientes 15 eran negros y el resto no. ¿Podemos afirmar que los datos observados son consistentes con el modelo genético con un nivel de significación del 5%?

Ejemplo:
En una población de interés el nivel de colesterol (en mgrs/dl) es $N(\mu, \sigma=50)$. Una muestra de 20 personas de esa población presentó una media 200. ¿Puede asumirse que el promedio de esta población es diferente al valor "clínicamente normal" que es 175 mgrs/dl?

II. Contraste de hipótesis acerca de dos poblaciones

Si θ_1 y θ_2 son parámetros desconocidos correspondientes a dos poblaciones independientes, podemos plantear los siguientes contrastes:

Bilateral

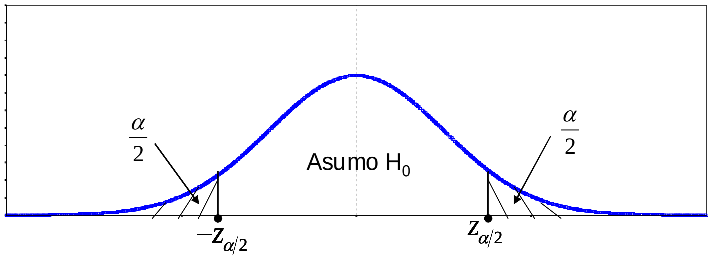
$$\begin{cases} H_0 & : \quad \theta_1 = \theta_2 \\ H_1 & : \quad \theta_1 \neq \theta_2 \end{cases}$$

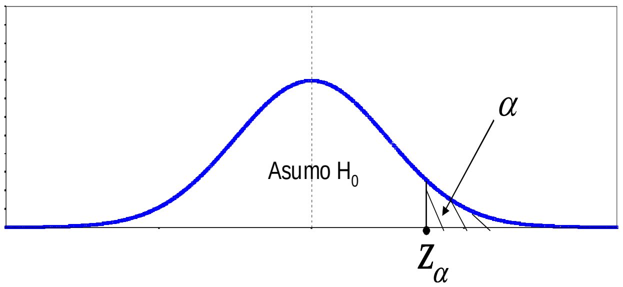
Unilateral por la derecha

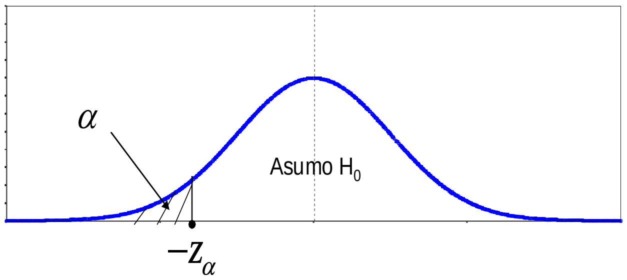
$$\begin{cases} H_0 & : \quad \theta_1 \leq \theta_2 \\ H_1 & : \quad \theta_1 > \theta_2 \end{cases}$$

Unilateral por la izquierda

$$\begin{cases} H_0 & : \quad \theta_1 \geq \theta_2 \\ H_1 & : \quad \theta_1 < \theta_2 \end{cases}$$







Ejemplo:

Un medicamento conocido cura el 80% de los casos de una enfermedad. Un nuevo medicamento resulta eficaz en 85 pacientes de 100 que se han tratado con dicho medicamento. ¿Basta este resultado muestral para asegurar la superioridad del nuevo medicamento?

Ejemplo:

En un estudio sobre angina de pecho, se quiere probar un nuevo fármaco (F) llamado FLII3. A un grupo de 9 ratas afectadas se les administra placebo (P) y a otro grupo de 9 ratas afectadas el nuevo fármaco. Después de un ejercicio controlado se mide *X=Tiempo (segs.) de recuperación* de cada rata. Los resultados fueron los siguientes:

$$n_P=9 \ , \quad \overline{x}_P = 329 \quad , \quad s_P=45$$
$$n_F=9 \ , \quad \overline{x}_F = 238 \quad , \quad s_F=43$$

¿Qué podemos concluir?

III Comparación de medias de dos o más poblaciones. ANOVA I (1 solo factor)

Ejemplo: Se tienen tres razas de ratas A, B y C. Se desea saber si los tres tipos tienen la misma resistencia a un determinado veneno.

Hipótesis básicas:

1.- Partimos de *k* poblaciones independientes y normales, $N(\mu_1,\sigma)$, $N(\mu_2,\sigma)$,..., $N(\mu_k,\sigma)$ respectivamente. (Observemos que las poblaciones deben tener la misma varianza)

2.- Tomaremos *k* muestras al azar, una de cada población, de tamaños n_1, n_2,...,n_k respectivamente.

Objetivo principal: El objetivo de esta técnica estadística es realizar el siguiente contraste:

H_0: $\mu_1=\mu_2=\ldots=\mu_k$

H_a: *las medias NO SON TODAS iguales*

Para resolver el contraste planteado se utiliza un estadístico (**estadístico F**) el cual sigue una distribución F de Fisher-Snedecor, de suponer que la hipótesis nula es cierta.

El *estadístico F* está basado en la siguiente tabla que se conoce usualmente como tabla del análisis de la varianza (**tabla ANOVA**).

TABLA ANOVA

Fuente de variación	***Suma de Cuadrados***	**Grados de libertad**	**Cuadrados medios**
Entre poblaciones (o tratamientos)	$SST = \sum_{i=1}^{k} n_i (\bar{X}_i - \bar{X})^2$	k-1	MT=SST/(k-1)
Error (dentro de los grupos o residual)	$SSE = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2$	n-k	ME=SSE/(n-k)= $=S_e^2$
Total	$SS = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X})^2$	n-1	

Se tiene que **SS=SST+SSE**.

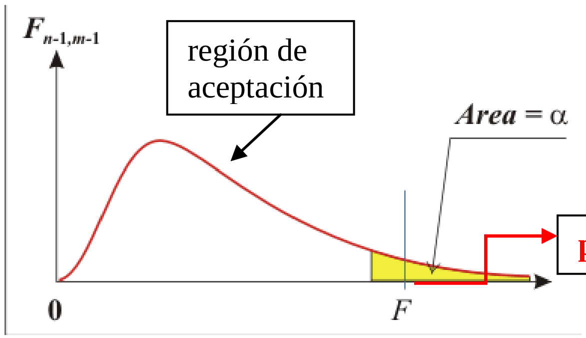
Estadístico para el contraste: F=MT/ME

Si la hipótesis nula es cierta, el estadístico F sigue una distribución F de Fisher-Snedecor con *(k-1,n-k)* grados de libertad.

Regla de decisión:

Se acepta H_0 si $F \leq F_{\alpha;k-1,n-k}$

Se rechaza H_0 si $F > F_{\alpha;k-1,n-k}$



Ejemplo:

Se tienen tres razas de ratas A, B y C. Se desea saber si los tres tipos tienen la misma resistencia a un determinado veneno y para ello se eligieron al azar 5 muestras de 100 ratas para cada una de las razas. Se consideró como variable respuesta *el nº de ratas que mueren de cada 100 a las que se le administró el veneno* y se supone que esta variable sigue una distribución normal con la misma varianza en todas las razas. Los datos muestrales aparecen en la siguiente tabla.

Razas	*Nº de muertas en 100*				
A	30	20	35	42	60
B	85	73	92	86	75
C	40	28	39	41	50

H_0: $\mu_1=\mu_2=\mu_3$

H_a: *las medias no son todas iguales*

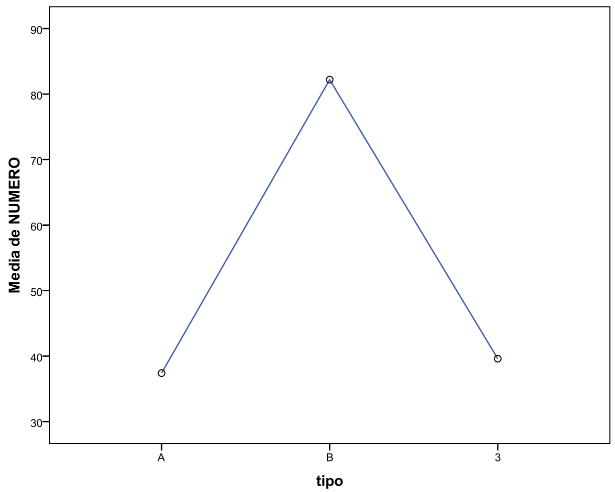
p-valor=0,000 > 0,05 SE RECHAZA H_0 y se concluye que

no tienen todas la misma resistencia

TABLA ANOVAI

NUMERO

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	6377,733	2	3188,867	27,427	,000
Intra-grupos	1395,200	12	116,267		
Total	7772,933	14			



Prueba de homogeneidad de varianzas

NUMERO

Estadístico de Levene	gl1	gl2	Sig.
1,225	2	12	,328

p-valor > 0,05

Se acepta la hipótesis requerida de varianzas iguales.

IV Test t para muestras relacionadas

CONTRASTES DE HIPÓTESIS DE TIPO NO PARAMÉTRICO

Estos test son válidos cuando no se puedan admitir las suposiciones requeridas para los test paramétricos.

Comentarios sobre los supuestos:

- Los test basados en la distribución t suponen que los datos de cada muestra provienen de una distribución normal.
- Alejamientos moderados de la normalidad no modifican fuertemente las conclusiones del test t.
- Si falla la normalidad pero las muestras son grandes, por el teorema central del límite, se puede admitir que las medias muestrales son aproximadamente normales.
- El test t para dos muestras independientes es extremadamente sensible a la heterogeneidad de las varianzas cuando los tamaños de muestra son muy diferentes.
- El test F para el ANOVA de muestras independientes es extremadamente sensible a la heterogeneidad de las varianzas cuando los tamaños de muestra son muy diferentes. (Si falla esta hipótesis usar la aproximación de Welch, análogo a la t).

➢ Principales test no paramétricos:

1. **Test U de Mann-Witney** o **Test de Wilcoxon** para muestras independientes, es la versión no paramétrica del test t para muestras independientes. Aplicable en dos situaciones:

Modelo 1: Se supone que las muestras provienen de poblaciones con la misma distribución F. En este caso compara las medianas: $H_0 : \theta_X = \theta_Y$

Modelo 2: Se supone que las muestras provienen de poblaciones con distribuciones F y G.

En este caso:
$$\begin{array}{ll} H_0 : F(x) = G(x) & \forall x \\ H_a : F(x) \neq G(x) & \text{para algún } x \end{array}$$

2. **Test de Kruskal-Wallis** es la versión no paramétrica del ANOVA (los datos son reemplazados por categorías). Es la extensión del test de Mann-Witney al caso de más de dos poblaciones.

3. **Test de rangos de Wilcoxon** (válido para una muestra o para dos muestras apareadas)

- para una muestra compara el valor de la mediana con un valor teórico fijado.
- Para dos muestras contrasta la mediana de las diferencias $D_i = X_i - Y_i$

Para su correcta utilización las distribuciones deben ser simétricas.
Es la alternativa al test t para muestras relacionadas.

4. **Test de Friedman** es la versión no paramétrica del ANOVA para medidas relacionadas.

5. **Test de Kolmogorov_Smirnov (K-S)** se utiliza para determinar la bondad de ajuste de 2 distribuciones de probabilidad entre sí.

6. **Test de Lilliefors** y **test de Shapiro-Wilk** se utiliza para ver si una distribución se ajusta a la distribución normal.

7. **Contraste Ji-cuadrado** se utiliza para estudiar la dependencia de datos categóricos y comparar proporciones en varios grupos.

CONTRASTE JI-CUADRADO PARA DATOS CATEGÓRICOS

- ¿El color de ojos es independiente del color del cabello?

- ¿Existe asociación entre la localización del tumor cerebral y la naturaleza del mismo?

Contraste de independencia

Hipótesis:

$$H_o : A\ y\ B\ son\ independientes$$
$$H_1 : A\ \mathrm{y}\ B\ \ están\ asociadas$$

Estadístico para el contraste (estadístico ji-cuadrado):

$$X^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{\left(O_{ij} - e_{ij}\right)^2}{e_{ij}}$$

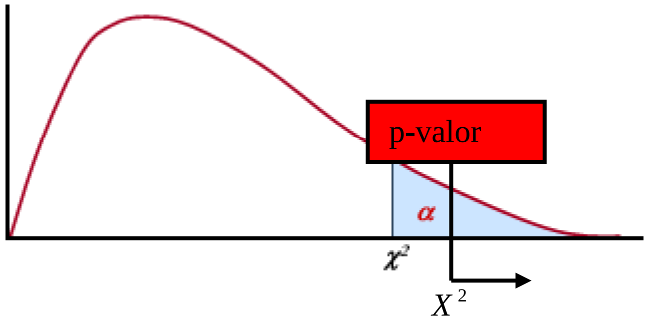
$O_{ij} = \mathit{frecuencias\ observadas}$

$e_{ij} = \mathit{frecuencias\ esperadas\ bajo\ la\ hipòtesis\ de\ independencia}$

$(i = 1,...r \quad j = 1,...,s)$

Si H_0 es cierta (y n es grande): $X^2 \approx \chi^2_{(r-1)(s-1)}$

Región crítica: es el intervalo $(\chi^2_\alpha$, $+\infty)$.



Regla de decisión: *rechazamos H_0 si:*

$$X^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{\left(O_{ij} - e_{ij}\right)^2}{e_{ij}} > \chi^2_{\alpha\ ;(r-1)(s-1)}$$

Observaciones:

a) Para que podamos admitir que la distribución es una ji-cuadrado, el nº de casillas con frecuencia esperada menor que 5 no debe superar el 20% de ellas.

b) Cuando sólo hay dos clases o modalidades se debe aplicar la corrección por continuidad para una mejor aproximación a la distribución χ^2. El estadístico modificado es: $X^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{\left(| O_{ij} - e_{ij} | - 1/2\right)^2}{e_{ij}}$

Ejemplo:

La tabla siguiente muestra el resultado de clasificar una muestra de 141 individuos con arreglo a las características *localización y naturaleza del tumor cerebral*.

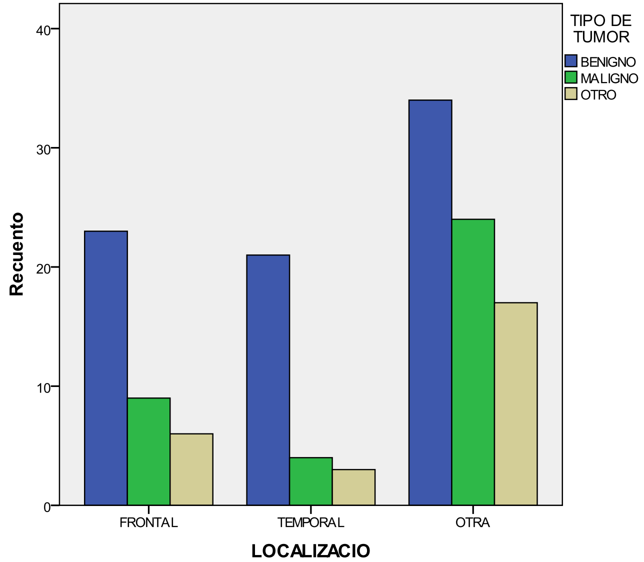
¿El lugar que ocupa el tumor influye en la gravedad del mismo?

Tabla de frecuencias observadas:

Naturaleza / Localización	*Benigno*	*Maligno*	*Otros*
Lóbulo frontal	23	9	6
Lóbulo temporal	21	4	3
Otras áreas	34	24	17

Tabla de frecuencias esperadas:

Naturaleza / Localización	*Benigno*	*Maligno*	*Otros*
Lóbulo frontal	21,02	9,97	7,01
Lóbulo temporal	15,49	7,35	5,16
Otras áreas	41,49	19,68	13,83

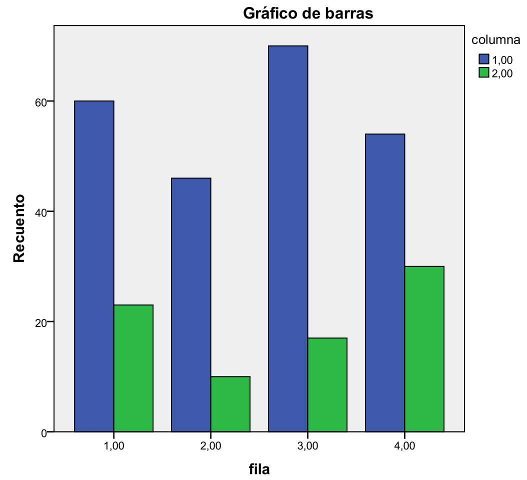


$X^2 = 7,84$ g.l. = 4 p-valor = 0,0975 > 0,05

Aceptamos independencia

Ejemplo: **Para curar una cierta enfermedad se sabe que existen cuatro tratamientos diferentes. Aplicados por separado a un grupo distinto de enfermos se han observado los datos que muestra la tabla que aparece a continuación. ¿Se puede considerar que la eficacia de los cuatro tratamientos es la misma ?**

	Curados	*No curados*	Totales
Tratamiento A	**60**	**23**	83
Tratamiento B	**46**	**10**	56
Tratamiento C	**70**	**17**	87
Tratamiento D	**54**	**30**	84
Totales	230	80	310



$$H_0: \text{ Curación y tratamiento son independientes} \Leftrightarrow\ p_A = p_B = p_C = p_D$$

$$H_a: \text{ Curación y tratamiento no son independientes} \Leftrightarrow \textit{las probab no son todas iguales}$$

Tabla de frecuencias esperadas:

			columna		Total
			1,00	2,00	
fila	1,00	Recuento	60	23	83
		Frecuencia esperada	61,6	21,4	83,0
	2,00	Recuento	46	10	56
		Frecuencia esperada	41,5	14,5	56,0
	3,00	Recuento	70	17	87
		Frecuencia esperada	64,5	22,5	87,0
	4,00	Recuento	54	30	84
		Frecuencia esperada	62,3	21,7	84,0
Total		Recuento	230	80	310
		Frecuencia esperada	230,0	80,0	310,0

Valor de estadístico: X^2 =8,096 g.l. = 3

p-valor = 0,044 < 0,05

Rechazamos la independencia. Concluimos que la eficacia no es la misma.